О линейных группах со свойством конечности порядка всех примитивных слов от образующих*

А. Н. АДМИРАЛОВА
Белорусский государственный университет
e-mail: al.admiralova@gmail.com

В. В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ
Белорусский государственный университет
e-mail: benyash@bsu.by

УДК 512.543.14+512.543.22

Ключевые слова: конечно порождённая группа, примитивный элемент, представление группы кос.

Аннотация

Хорошо известно, что конечно порождённая линейная группа конечной экспоненты является конечной. В работе доказывается существование бесконечных конечно порождённых линейных групп, в которых все примитивные слова от образующих имеют конечный порядок.

Abstract

A. N. Admiralova, V. V. Beniash-Kryvets, On linear groups with the property of order finiteness of all primitive words in generators, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 23—35.

It is well known that a finitely generated linear group of finite exponent is finite. It is proved in this paper that there exist infinite finitely generated linear groups such that all primitive words from generators have finite order.

1. Введение

В работе [7] В. П. Платоновым поставлен следующий вопрос. Пусть $G = \langle g_1, g_2, \ldots, g_r \rangle$ — конечно порождённая подгруппа в $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Хорошо известно, что если все элементы из G унипотентны, то и вся группа унипотентна, т. е. является сопряжённой подгруппе группы $m \times m$ верхнетреугольных матриц. Предположим теперь, что все примитивные слова от $g_1, g_2, \ldots, g_r$ являются унипотентными. Будет ли в этом случае группа G унипотентной? (Напомним, что слово $w = w(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в свободной группе F с базисом $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется примитивным, если оно может быть включено в некоторый базис F.)

*Первый автор поддержан грантом БРФФИ—РФФИ № Ф15РМ-025.

Этот вопрос к настоящему времени открыт, имеются лишь некоторые частные результаты. Например, в [7] доказано, что если $x, y \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ и все примитивные слова от x, y унипотентны и имеют блоки Жордана размерности не более 3, то группа, порождённая x и y, унипотентна. В [1—4] даётся положительный ответ на вопрос В. П. Платонова в случае матриц размером $n \leqslant 7$.

Естественной является также следующая модификация этого вопроса. И. Шуром в 1911 году было доказано, что всякая конечно порождённая периодическая подгруппа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ конечна. Предположим теперь, что в подгруппе $G = \langle g_1, g_2, \ldots, g_m \rangle$ из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ для любого примитивного слова $w(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ мы имеем $w(g_1, g_2, \ldots, g_m)^k = 1$ для некоторого фиксированного натурального k. Будет ли в этом случае группа G конечной?

В предлагаемой работе мы строим примеры групп G с двумя образующими g_1, g_2 в $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ и $\mathrm{GL}_6(\mathbb{C})$, таких что для любого $k \geqslant 4$ все примитивные слова $w(g_1, g_2)$ имеют порядок k (и даже являются сопряжёнными), тем не менее группа G бесконечна.

Как сообщил авторам В. П. Платонов, в 1998 году Е. И. Зельманов построил пример бесконечной конечно порождённой группы с образующими $g_1, g_2, \ldots, g_m$, в которой для всех примитивных слов $w(g_1, g_2, \ldots, g_m)$ справедливо равенство $w(g_1, g_2, \ldots, g_m)^k = 1$. Конструкция Е. И. Зельманова связана с рассмотрением полупрямого произведения некоторой конечной подгруппы $G \subset \mathrm{GL}(V)$, действующей на V без неподвижных точек, и группы T_V, состоящей из всех параллельных переносов $T_a \colon V \to V$, $b \mapsto a + b$, где $a \in V$. Искомая группа является подгруппой в этом полупрямом произведении.

Наша конструкция иная и связана с рассмотрением представлений группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_2)$ свободной группы ранга 2.

2. Случай малых порядков

Анализируя рассуждения У. Бёрнсайда, приведённые в [5], можно заметить, что для доказательства конечности свободных бернсайдовых групп $B(r, 2)$ и $B(r, 3)$ достаточно использовать условие конечности порядков всех примитивных слов от образующих. Несложная модификация этих рассуждений позволяет доказать следующую теорему.

Теорема. *Пусть G — конечно порождённая группа, в которой*

а) *всякое примитивное слово от образующих имеет порядок* 2;

б) *всякое примитивное слово от образующих имеет порядок* 3. *Тогда G конечна.*

Доказательство. Рассмотрим вариант а). Пусть x, y — два произвольных элемента из системы образующих G. Тогда из-за примитивности слов x и y выполняется условие $x^2 = y^2 = 1$. Примитивным является также слово xy, поэтому справедливо выражение $(xy)^2 = xyxy = 1$. Из этого следует, что $xy = y^{-1}x^{-1}$, т. е. $xy = yx$. Значит, группа G является абелевой и, очевидно, конечной.

Рассмотрим вариант б). Рассуждение будем проводить индукцией по числу образующих. Группа, порождённая одним элементом порядка 3, — циклическая группа порядка 3, а значит, она конечна.

Пусть для произвольной группы с конечным числом образующих, не превышающим n, из конечности порядков всех примитивных элементов следует конечность порядка этой группы. Покажем, что это справедливо и в случае числа образующих, равного $n+1$.

Через B_k обозначим группу, удовлетворяющую условиям теоремы и имеющую k образующих. Группа B_{n+1} получается из B_n присоединением нового образующего элемента z с условием, что все примитивные слова в полученной группе имеют порядок 3. Следовательно, $z^3 = 1$ и всякий элемент группы B_{n+1} имеет вид $u_1 z^{\varepsilon_1} u_2 z^{\varepsilon_2} \ldots u_{s-1} z^{\varepsilon_{s-1}} u_s$, где $u_i \in B_n$, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$.

Заметим, что если x — произвольный элемент из B_n, то xz — примитивный элемент. Поэтому $(xz)^3 = 1$, откуда следует, что $zxz = x^{-1}z^{-1}x^{-1}$. Тогда произвольный элемент $g \in B_{n+1}$ можно записать в виде $u_1 z^{\varepsilon} u_2 z^{-\varepsilon} \ldots u_{s-1} z^{(-1)^s \varepsilon} u_s$, где $\varepsilon \in \{\pm 1\}$.

Если число вхождений элемента z в g больше 2, можно преобразовать g следующим образом:

$$\begin{aligned} g = u_1 z^{\varepsilon} u_2 z^{-\varepsilon} u_3 z^{\varepsilon} \ldots u_{s-1} z^{(-1)^s \varepsilon} u_s = (u_1 z^{\varepsilon} u_2 z^{\varepsilon})(z^{\varepsilon} u_3 z^{\varepsilon}) \ldots u_{s-1} z^{(-1)^s \varepsilon} u_s = \\ = u_1 u_2^{-1} z^{-\varepsilon} u_2^{-1} u_3^{-1} z^{-\varepsilon} u_3^{-1} u_4 z^{-\varepsilon} \ldots u_{s-1} z^{(-1)^s \varepsilon} u_s. \end{aligned}$$

Это сократит число вхождений z на единицу. При последовательном повторении процедуры можно записать элемент g, используя не более двух вхождений z.

Таким образом, любой элемент группы B_{n+1} представляется как одно из произведений u_1, $u_1 z^{\varepsilon} u_2$, $u_1 z^{\varepsilon} u_2 z^{-\varepsilon} u_3$, где $u_i \in B_n$, $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. По предположению индукции B_n конечна, а значит, конечно и число произведений указанного вида. Следовательно, B_{n+1} также конечна, что и завершает доказательство теоремы. □

3. Связь представлений группы кос B_4 и группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_2)$

Чтобы доказать существование конечно порождённых бесконечных линейных групп, в которых все примитивные элементы имеют конечный порядок, нам понадобятся линейные представления группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(F_2)$ свободной группы $F_2 = \langle x, y \rangle$ ранга 2.

Группа F_2 изоморфно вкладывается в $\mathrm{Aut}(F_2)$ как подгруппа внутренних автоморфизмов. При таком вложении каждому её элементу ставится в соответствие его действие на F_2 сопряжением. При этом все примитивные слова из F_2 сопряжены в группе $\mathrm{Aut}(F_2)$.

Если у нас есть представление $\rho\colon \mathrm{Aut}(F_2) \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ и $A = \rho(x)$, $B = \rho(y)$, то все примитивные слова от A, B сопряжены между собой. Поэтому если

A имеет конечный порядок k, то и все примитивные слова $w(A, B)$ имеют конечный порядок k. Если при этом группа, порождённая A и B, окажется бесконечной, то это и будет искомая группа. Поэтому для дальнейшего нам понадобится дополнительная информация о представлениях $\mathrm{Aut}(F_2)$.

В [6] была описана возможность строить линейные представления $\mathrm{Aut}(F_2)$, исходя из представлений B_4, группы кос на четырёх нитях. Для полноты изложения приведём здесь краткое описание данной конструкции.

Группа автоморфизмов свободной группы ранга 2 имеет образующие

$$P\colon \begin{cases} x \mapsto y, \\ y \mapsto x, \end{cases} \quad w\colon \begin{cases} x \mapsto x^{-1}, \\ y \mapsto y, \end{cases} \quad U\colon \begin{cases} x \mapsto xy, \\ y \mapsto y \end{cases} \tag{1}$$

и соотношения

$$P^2 = w^2 = (wP)^4 = (PwPU)^2 = (UPw)^3 = [U, wUw] = 1. \tag{2}$$

Для $a \in F_2$ обозначим через i_a внутренний автоморфизм F_2, определяемый a, т. е. $i_a(z) = aza^{-1}$ для всех $z \in F_2$. Так как F_2 имеет тривиальный центр, то гомоморфизм $a \mapsto i_a$ является инъективным, и мы можем отождествить F_2 с её образом в $\mathrm{Aut}(F_2)$. Отметим, что все примитивные элементы из F_2 сопряжены в $\mathrm{Aut}(F_2)$.

Группа кос B_4 имеет копредставление

$$B_4 = \langle \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2,\ \sigma_2\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3,\ [\sigma_1, \sigma_3] = 1\rangle. \tag{3}$$

Отметим, что центр группы B_4 есть бесконечная циклическая группа, порождённая $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4$. Обозначим через H подгруппу B_4, порождённую элементами $a = \sigma_1\sigma_3^{-1}$ и $b = \sigma_2\sigma_1\sigma_3^{-1}\sigma_2^{-1}$. Подгруппа H свободна и нормальна в B_4. Действие B_4 на H сопряжением порождает гомоморфизм $h\colon B_4 \to \mathrm{Aut}(F_2)$, ставящий в соответствие образующим группы B_4 следующие автоморфизмы:

$$\begin{aligned} h(\sigma_1) &= \alpha_1\colon a \mapsto a,\ b \mapsto ba^{-1}, \\ h(\sigma_2) &= \alpha_2\colon a \mapsto b,\ b \mapsto ba^{-1}b, \\ h(\sigma_3) &= \alpha_3\colon a \mapsto a,\ b \mapsto a^{-1}b. \end{aligned} \tag{4}$$

Ядром h является центр $Z(B_4)$ группы B_4. Справедливы равенства

$$\alpha_1 = PU^{-1}P, \quad \alpha_2 = PUwU^{-1}, \quad \alpha_3 = PwUwP. \tag{5}$$

Образ $\mathrm{Im}\, h$ обозначается $\mathrm{Aut}^+(F_2)$. Группа $\mathrm{Aut}^+(F_2)$ является нормальной подгруппой $\mathrm{Aut}(F_2)$ индекса 2. Следовательно, линейное представление размерности m группы $\mathrm{Aut}^+(F_2)$ позволяет нам построить линейное представление группы $\mathrm{Aut}(F_2)$ размерности $2m$.

Таким образом, если $\rho\colon B_4 \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ — такое линейное представление, что $\rho(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^4 = E$, где E — единичная матрица, то ρ является представлением группы $Im\ h$ в $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$, а потому индуцирует представление степени $2m$ группы $\mathrm{Aut}(F_2)$.

Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{gathered} P\alpha_1 = \alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_3^{-1}\alpha_1\alpha_2 P, \quad P\alpha_2 = \alpha_2^{-1}P, \quad P\alpha_3 = \alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_3^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_3\alpha_1\alpha_2 P, \\ U = \alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_3\alpha_1\alpha_2, \quad w = P\alpha_3\alpha_1\alpha_2, \quad i_x = \alpha_3^{-1}\alpha_1, \quad i_y = P\alpha_3^{-1}\alpha_1 P. \end{gathered} \tag{6}$$

Пусть $\rho\colon B_4 \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ — линейное представление, и пусть $T_i = \rho(\sigma_i)$, $i = 1, 2, 3$. Предположим, что $(T_1, T_2, T_3)^4$ — единичная матрица. Тогда по (6) индуцированное линейное представление $\rho'\colon \mathrm{Aut}(F_2) \to \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ задаётся формулами

$$\begin{gathered} \rho'(P) = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho'(\alpha_1) = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2^{-1}T_1^{-1}T_3^{-1}T_1T_2 \end{pmatrix}, \\ \rho'(\alpha_2) = \begin{pmatrix} T_2 & 0 \\ 0 & T_2^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho'(\alpha_3) = \begin{pmatrix} T_3 & 0 \\ 0 & T_2^{-1}T_1^{-1}T_3^{-1}T_1^{-1}T_3T_1T_2 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{7}$$

По (6) получаем, что

$$\rho'(U) = \begin{pmatrix} T_2^{-1}T_3T_2 & 0 \\ 0 & T_1^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho'(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & T_2^{-1}T_1^{-1}T_3^{-1} \\ T_3T_1T_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Кроме того,

$$\begin{gathered} \rho'(i_x) = \begin{pmatrix} T_3^{-1}T_1 & 0 \\ 0 & T_2^{-1}T_3^{-1}T_1T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = X, \\ \rho'(i_y) = \begin{pmatrix} T_2^{-1}T_3^{-1}T_1T_2 & 0 \\ 0 & T_3^{-1}T_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = Y. \end{gathered}$$

Пусть $w \in F_2$ — примитивный элемент. Тогда

$$w(X, Y) = \begin{pmatrix} w(A, B) & 0 \\ 0 & w(B, A) \end{pmatrix}.$$

Покажем, что матрицы A и $w(A, B)$ подобны. Поскольку w — примитивный элемент, то внутренние автоморфизмы i_x и i_w являются сопряжёнными в группе $\mathrm{Aut}(F_2)$, т. е. $i_w = h i_x h^{-1}$, где $h \in \mathrm{Aut}(F_2)$. Запишем h в виде слова от образующих P, U, ω: $h = h_1 h_2 \ldots h_s$, где $h_i \in \{U, P, \omega\}$. Тогда $i_w = h_1 \ldots h_s i_x h_s^{-1} \ldots h_1^{-1}$, т. е.

$$\begin{aligned} w(X, Y) = \begin{pmatrix} W(A, B) & 0 \\ 0 & W(B, A) \end{pmatrix} &= \\ &= \rho'(h_1) \ldots \rho'(h_s) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \rho'(h_s)^{-1} \ldots \rho'(h_1)^{-1}. \end{aligned} \tag{9}$$

Остаётся заметить, что согласно (7), (8) для любого $h_i \in \{U, P, \omega\}$ мы имеем

$$\rho'(h_i) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \rho'(h_i)^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где либо $(A_1, B_1) = (CAC^{-1}, DBD^{-1})$, либо $(A_1, B_1) = (CBC^{-1}, DAD^{-1})$ для некоторых матриц C и D. Поскольку A и B сопряжены, то все матрицы A, B, A_1, B_1 сопряжены между собой. Следовательно, $w(A, B)$ подобна A.

Подведём итог следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть* $\rho\colon B_4 \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ — *линейное представление, и пусть* $T_i = \rho(\sigma_i)$, $i = 1, 2, 3$. *Предположим, что* $(T_1T_2T_3)^4$ — *скалярная матрица. Положим* $A = T_1T_3^{-1}$, $B = T_2^{-1}T_1T_3^{-1}T_2$. *Тогда все примитивные слова* $w(A, B)$ *подобны матрице* A.

Замечание. Выше мы требовали, чтобы $(T_1, T_2, T_3)^4$ была единичной матрицей. Однако если $(T_1, T_2, T_3)^4 = \alpha E$, то мы можем взять такое β, что $\beta^{12} = 1/\alpha$, и рассмотреть матрицы $T_i' = \beta T_i$. Матрицы T_i' определяют представление $\rho_1\colon B_4 \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$, такое что $(T_1'T_2'T_3')^4 = E$ и справедливы равенства $A = T_1T_3^{-1}$, $B = T_2^{-1}T_1T_3^{-1}T_2$.

4. Представление Бюрау

Представление Бюрау $\rho\colon B_4 \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ группы кос B_4 может быть задано следующими матрицами:

$$\rho(\sigma_1) = T_1 = \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(\sigma_2) = T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & -t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\rho(\sigma_3) = T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & -t \end{pmatrix}. \tag{11}$$

В этом случае $(T_1T_2T_3)^4 = t^4E$.

Вычислим матрицы $A = T_1T_3^{-1}$, $B = T_2^{-1}T_1T_3^{-1}T_2$:

$$A = \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -t^{-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -t & 1 \\ 0 & -t & 1 - t^{-2} \\ t & -t & 1 - t^{-1} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Собственные значения матриц (12) равны 1, $-t$, $-t^{-1}$. Если $t = -\varepsilon$, где ε — примитивный корень из единицы степени n, то по теореме 1 все примитивные слова $w(A, B)$ будут иметь порядок n. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть матрицы* $A, B \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ *определены равенством* (12) *и при этом*

$$t = -\cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n},$$

где $n \geqslant 4$. *Тогда все примитивные слова* $w(A, B)$ *сопряжены между собой и имеют порядок* n, *а группа* $G = \langle A, B\rangle$ *бесконечна.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$A^2B^2 = \begin{pmatrix} \frac{t^4-t^3+t^2+t-1}{t} & \frac{(t-1)(t^4-t^3+t^2-1)}{t} & -\frac{(t-1)(t^5-t^4+t^3-t+1)}{t^3} \\ \frac{t^2-1}{t} & \frac{t^3-t^2+1}{t} & -\frac{(t^2-1)(t^2-t+1)}{t^3} \\ t-1 & t^2-2t+1 & -\frac{t^4-2t^3+t^2-1}{t^3} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Рассмотрим сначала случай $n \geqslant 5$. Собственными значениями A^2B^2 являются

$$1, \quad \lambda_{1,2} = 1 + \frac{1}{2}(t^{-3}+t^3) - \frac{1}{2}(t^{-1}+t) \pm (t^{-1}-t)\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(t^{-4}+t^4) + (t^{-1}+t)}.$$

Положим

$$\alpha = \pi + \frac{2\pi}{n}.$$

Тогда $t = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Произведя вычисления, получим

$$\lambda_{1,2} = 1 - 2\sin\alpha\sin 2\alpha \pm 2i\sin\alpha\sqrt{2\cos\alpha(1-\sin\alpha\sin 2\alpha)}. \tag{14}$$

Так как

$$\cos\alpha = -\cos\frac{2\pi}{n} < 0,$$

то $h = 2\cos\alpha(1-\sin\alpha\sin 2\alpha) < 0$. Тогда из (14) следует, что $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$. Покажем, что, например, λ_1 отлично от ± 1.

Допустим противное. Пусть $\lambda_1 = 1$. Тогда

$$1 - 2\sin\alpha\sin 2\alpha - 2\sin\alpha\sqrt{-2\cos\alpha(1-\sin\alpha\sin 2\alpha)} = 1,$$

откуда следует, что

$$\sin 2\alpha = -\sqrt{-2\cos\alpha(1-\sin\alpha\sin 2\alpha)}. \tag{15}$$

Из (15) после возведения в квадрат следует, что $0 = -1$ — противоречие.

Допустим теперь, что $\lambda_1 = -1$. Тогда

$$1 - 2\sin\alpha\sin 2\alpha - 2\sin\alpha\sqrt{-2\cos\alpha(1-\sin\alpha\sin 2\alpha)} = -1,$$

откуда следует, что $1 - \sin\alpha\sin 2\alpha = \sin\alpha\sqrt{-2\cos\alpha(1-\sin\alpha\sin 2\alpha)}$. Возведя обе части этого равенства в квадрат, получим

$$(1-\sin\alpha\sin 2\alpha)^2 = -2\sin^2\alpha\cos\alpha(1-\sin\alpha\sin 2\alpha). \tag{16}$$

Из (16) получаем, что $1-\sin\alpha\sin 2\alpha = -\sin\alpha\sin 2\alpha$, т. е. $1 = 0$ — противоречие.

Таким образом, при $n \geqslant 5$ собственное значение λ_1 матрицы A^2B^2 не является корнем из единицы, следовательно, A^2B^2 имеет бесконечный порядок и группа $G = \langle A, B\rangle$ бесконечна.

Рассмотрим теперь случай $n = 4$. Тогда $t = -i$, матрица A^2B^2 принимает вид

$$A^2B^2 = \begin{pmatrix} \frac{-1+i}{2} & 0 & \frac{1+i}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & 1 & \frac{1-i}{2} \\ \frac{-1+i}{2} & 0 & \frac{-(1+i)}{2} \end{pmatrix},$$

и все собственные значения матрицы A^2B^2 равны 1. Следовательно, A^2B^2 — унипотентная неединичная матрица, поэтому она имеет бесконечный порядок. Так что и в этом случае группа $G = \langle A, B\rangle$ имеет бесконечный порядок. Теорема доказана. $\square$

5. Представление Лоуренс—Крамера

Рассмотрим представление Лоуренс—Крамера $\rho\colon B_4 \to \mathrm{GL}_6(\mathbb{C})$ группы кос B_4. Оно может быть задано следующими матрицами:

$$\rho(\sigma_1) = T_1 = \begin{pmatrix} q^2t & (-1+q)qt & (-1+q)qt & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-q & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-q & 0 & 1 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho(\sigma_2) = T_2 = \begin{pmatrix} 1-q & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (-1+q)q & 0 & 0 & q^2t & (-1+q)qt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho(\sigma_3) = T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-q & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & (-1+q)q & 0 & (-1+q)q & 0 & q^2t \end{pmatrix}.$$

Тогда $(T_1T_2T_3)^4 = t^2q^8E$, а матрицы $A = T_1T_3^{-1}$, $B = T_2^{-1}T_1T_3^{-1}T_2$ имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} q^2t & (-1+q)qt & (-1+q)qt & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+\frac{1}{q} & 0 & \frac{1}{q} & 0 \\ 0 & 1-q & -\frac{(-1+q)^2}{q} & 1 & \frac{-1+q}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & -1+q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-q}{q^2t} & 0 & \frac{1-q}{q^2t} & \frac{1}{q^2t} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1-q}{q^2} & 0 & \frac{1-q}{q^2} & \frac{1}{q^2} \\ 0 & q^2t & \frac{(q-1)(tq^3-q+1)}{q^2} & 0 & -\frac{(q-1)^2}{q^2} & \frac{q-1}{q^2} \\ 0 & 0 & -\frac{(q-1)^2}{q} & q^2t & \frac{(q-1)(tq^2-q+1)}{q} & \frac{q-1}{q} \\ 0 & 0 & \frac{q^3-q+1}{q^4t} & 0 & \frac{1-q}{q^4t} & \frac{1-q}{q^4t} \\ 0 & 0 & \frac{1-q}{q^3t} & 0 & \frac{q^2-q+1}{q^3t} & \frac{1-q}{q^3t} \\ q^2 & 0 & \frac{(q-1)(tq^3-q+1)}{q^3t} & 0 & \frac{(q-1)(q^2-q+1)}{q^3t} & -\frac{(q-1)^2}{q^3t} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Матрица A диагонализируема, а её собственные значения равны 1, 1, $-q^{\pm 1}$, $(q^2t)^{\pm 1}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть матрицы* $A, B \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{C})$ *определены равенством* (17) *и*

$$q = -\cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n},$$

где $n \geqslant 4$, $t = 1$. *Тогда все примитивные слова* $w(A, B)$ *сопряжены между собой и имеют порядок* n, *а группа* $G = \langle A, B\rangle$ *бесконечна.*

Доказательство. По теореме 1 все примитивные слова $w(A, B)$ имеют порядок n. Вначале рассмотрим случай $n \geqslant 5$. Одним из собственных значений матрицы A^2B^2 является

$$\lambda = 1 + \frac{1}{2}(q^{-3} + q^3) - \frac{1}{2}(q^{-1} + q) + (q - q^{-1})\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(q^{-4} + q^4) + (q^{-1} + q)}.$$

При доказательстве теоремы 2 было установлено, что при

$$q = -\cos\frac{2\pi}{n} - i\sin\frac{2\pi}{n}$$

собственное значение λ не является корнем из единицы. Значит, A^2B^2 имеет бесконечный порядок и группа $G = \langle A, B\rangle$ бесконечна.

Пусть теперь $n = 4$. Тогда $q = -i$. В этом случае матрица A подобна матрице $\mathrm{diag}(1, 1, -1, -1, i, -i)$ и имеет порядок 4. Матрица A^2B^2 имеет вид

$$\begin{bmatrix} 5 & -1-i & 0 & 2+4i & 3-i & -2 \\ 1-3i & -1 & 0 & 2 & -2i & -1+i \\ -3-i & 1+i & 1 & -4i & -3+i & 3+i \\ -3+i & 1+i & 0 & -1-2i & -3+i & 1+i \\ 1+3i & -2i & 0 & -4+2i & 3+4i & 1-3i \\ 2 & -1-i & 0 & 2i & 3-i & -1-2i \end{bmatrix},$$

а её собственные значения равны 1. Значит, A^2B^2 унипотентна и имеет бесконечный порядок. Теорема 3 доказана. $\square$

6. Случай $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$

В предыдущих разделах было доказано, что при $n \geqslant 3$ в группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ существует 2-порождённая бесконечная подгруппа, в которой все примитивные слова от образующих имеют конечный порядок. В случае группы $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ нам неизвестно, существуют ли такие подгруппы. Нами получены лишь некоторые частные результаты. Следующая теорема показывает, что аналога теорем 2, 3 для матриц порядка 2 не существует.

Теорема 4. *Пусть* $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ — *неединичная подгруппа, порождённая матрицами* A *и* B. *Допустим, что все примитивные слова* $w(A, B)$ *имеют конечный порядок и сопряжены между собой. Тогда* G *конечна.*

Доказательство. Так как A, B, AB и A^2B — примитивные элементы, то они сопряжены. Поэтому $\det A = \det B = \det AB$, откуда следует, что $\det A = \det B = 1$ и $G \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Кроме того, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = \operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} A^2B$.

Запишем тождество Гамильтона—Кэли для матрицы A:

$$A^2 - A \operatorname{tr} A + E = 0. \tag{18}$$

Умножив обе части (18) на B и взяв след, получим

$$\operatorname{tr} A^2B - \operatorname{tr} AB \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B = 0. \tag{19}$$

Положим $\operatorname{tr} A = t$. Тогда из (19) получаем, что $t - t^2 + t = 2t - t^2 = 0$, откуда следует, что либо $t = 0$, либо $t = 2$.

Если $t = 2$, то A — унипотентная матрица, которая по условию имеет конечный порядок, поэтому $A = E$. Тогда $B = E$ и $G = E$, что противоречит условию.

Если $t = 0$, то собственные значения A — это i и $-i$. Тогда $A^2 = B^2 = (AB)^2 = -E$ и группа G конечна. Теорема доказана. $\square$

Следующий факт практически очевиден.

Предложение 1. *Пусть $G \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ — подгруппа, порождённая матрицами A, B конечного порядка. Если G приводима и вполне приводима, то G конечна.*

Доказательство следует из того, что G абелева.

Теорема 5. *Пусть $G = \langle A, B\rangle \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ — неединичная подгруппа, которая приводима, но не вполне приводима. Тогда найдётся примитивный элемент $w(A, B)$ бесконечного порядка.*

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 & 1 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Допустим, что все примитивные слова $w(A, B)$ имеют конечный порядок. Тогда A и B имеют конечный порядок, поэтому α_1, α_2, β_1, β_2 — корни из единицы.

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ — такие числа, что

$$\alpha^2 = \frac{1}{\alpha_1\alpha_2}, \quad \beta^2 = \frac{1}{\beta_1\beta_2}.$$

Тогда $A_1 = \alpha A$, $B_1 = \beta B$ — матрицы из $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ вида

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \delta & \gamma \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где ε, δ — корни из единицы, $\gamma \neq 0$.

Заметим, что если примитивное слово $w(A_1, B_1)$ имеет конечный порядок, то из равенства

$$w(A_1, B_1) = w(\alpha A, \beta B) = \alpha^p \beta^q w(A, B)$$

следует, что $w(A, B)$ имеет конечный порядок. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать группу G_1, порождённую A_1 и B_1.

Пусть d — наименьшее общее кратное порядков элементов ε, δ. Обозначим через ξ примитивный корень из единицы степени d. Тогда $\varepsilon = \xi^i$, $\delta = \xi^j$ для некоторых i, j с $(i, j) = 1$.

Рассмотрим примитивные элементы группы G_1 вида $(A_1^m B_1)^n A_1 = C_{m,n}$ и покажем, что найдутся m, n, такие что $C_{m,n}$ — унипотентный элемент. Так как собственные значения $C_{m,n}$ равны $\xi^{i(mn+1)+nj}$, $\xi^{-i(mn+1)-nj}$, достаточно найти целые m, n, для которых справедливо сравнение

$$i(mn+1) + nj \equiv 0 \pmod{d}. \tag{22}$$

Перепишем (22) в виде

$$(mi + j)n \equiv -i \pmod{d}.$$

Так как i и j взаимно просты, то по теореме Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии среди чисел $mi + j$ бесконечно много простых. Выберем m_0 так, что $m_0 i + j$ — простое число, большее d. Так как $(m_0 i + j, d) = 1$, то сравнение

$$(m_0 i + j)n \equiv -i \pmod{d}$$

имеет некоторое решение n_0. Тогда

$$C_{m_0,n_0} = (A_1^{m_0} B_1)^{n_0} A_1 = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для некоторого $h \in \mathbb{C}$. Покажем, что $h \neq 0$. Допустим противное. Тогда $C_{m_0,n_0} = E$. Так как матрицы C_{m_0,n_0} и A_1 порождают группу G_1, то G_1 — циклическая (а следовательно, абелева) группа, а это не так. Значит, $h \neq 0$, и C_{m_0,n_0} — элемент бесконечного порядка. Теорема доказана. □

Теорема 6. *Пусть в подгруппе $\langle X, Y \rangle \subset SL_2(\mathbb{C})$ все примитивные элементы $w(X, Y)$ имеют один и тот же конечный порядок. Тогда группа $\langle X, Y \rangle$ конечна.*

Доказательство. Пусть порядок каждого примитивного элемента $w(X, Y)$ равен $n > 1$. Тогда собственные значения $w(X, Y)$ равны $e^{\pm 2\pi r i/n}$, где r взаимно просто с n. След матрицы $w(X, Y)$ равен $2\cos(2\pi r/n)$.

Рассмотрим набор из n примитивных элементов $Y, XY, X^2Y, \ldots, X^{n-1}Y$. Тогда

$$\operatorname{tr} X^s Y = 2\cos\frac{2\pi r_s}{n},$$

где $(r_s, n) = 1$. Число различных значений, которые может принимать след примитивного элемента, не превышает $(n-1)/2$ для нечётных n и $(n-1)/2$ для чётных n. Следовательно, найдутся три матрицы X^kY, X^lY, X^mY, имеющие один и тот же след.

Определим полиномы $P_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, рекуррентно. Положим $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$ и при $n > 0$

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x). \tag{23}$$

Если $n < 0$, то положим $P_n(x) = -P_{|n|-2}(x)$. Полиномы P_n могут быть заданы тригонометрически в виде:

$$P_{n-1}(2\cos\varphi) = \frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}. \tag{24}$$

Введём обозначения: $\operatorname{tr} X = a$, $\operatorname{tr} Y = b$, $\operatorname{tr} Z = c$. По индукции легко доказать равенство

$$\operatorname{tr} X^j Y = P_{j-1}(a)c - P_{j-2}(a)b. \tag{25}$$

Подставим теперь $j = k, l, m$ в (25) и получим систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tr} X^k Y = P_{k-1}(a)c - P_{k-2}(a)b, \\ \operatorname{tr} X^l Y = P_{l-1}(a)c - P_{l-2}(a)b, \\ \operatorname{tr} X^m Y = P_{m-1}(a)c - P_{m-2}(a)b. \end{cases} \tag{26}$$

Ввиду равенства следов $\operatorname{tr} X^k Y$, $\operatorname{tr} X^l Y$, $\operatorname{tr} X^m Y$ мы получим из (26), что

$$\begin{cases} \big(P_{l-1}(a) - P_{m-1}(a)\big)c + \big(P_{l-2}(a) - P_{m-2}(a)\big)b = 0, \\ \big(P_{l-1}(a) - P_{k-1}(a)\big)c + \big(P_{l-2}(a) - P_{k-2}(a)\big)b = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Обозначим

$$\varphi = \frac{2\pi r_0}{n}.$$

Тогда $\operatorname{tr} Y = 2\cos\varphi$. Отметим, что

$$\sin\varphi = \sin\frac{2\pi r_0}{n} \neq 0,$$

так как в противном случае $\operatorname{tr} Y = \pm 2$ и $Y = \pm E$. Так как Y имеет порядок $n > 1$, то $Y = -E$. Тогда $X = -E$ и $XY = E$, что противоречит тому, что порядок XY равен n.

Будем рассматривать систему (27) как систему линейных однородных уравнений относительно b и c. Определитель матрицы этой системы с учётом (24) равен

$$\frac{2\sin(\frac{k-m}{2}\varphi)\sin(\frac{l-m}{2}\varphi)\sin(\frac{l-k}{2}\varphi)}{\sin\varphi}.$$

Это выражение обращается в нуль только при n, делящем одно из трёх чисел: $r_0(m-k)$, $r_0(l-m)$ или $r_0(l-k)$. Однако числа r_0 и n взаимно просты, а модули всех попарных разностей между k, l, m строго меньше n. Следовательно, система (27) имеет единственное решение — нулевое, поэтому

$$\operatorname{tr} Y = b = 0, \quad \operatorname{tr} XY = c = 0. \tag{28}$$

Значит, по (25)

$$\operatorname{tr} X^2 Y = \ldots = \operatorname{tr} X^{n-1} Y = 0. \tag{29}$$

Следовательно, собственные значения матриц $X^i Y$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, равны $\pm i$, так что $(X^i Y)^2 = -E$. Тогда $X^2 = Y^2 = (XY)^2 = -E$, и группа $G = \langle X, Y\rangle$ конечна. Теорема 6 доказана. $\square$

Для подгрупп $\mathrm{GL}_2(C)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть $G = \langle A, B\rangle \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ и все примитивные слова $w(A, B)$ имеют одинаковый порядок p, где p простое. Тогда группа G конечна.*

Доказательство. Можно считать, что матрицы A, B не скалярные, иначе группа G конечна. Кроме того, можно считать, что $p > 2$, поскольку при $p = 2$ группа G абелева и конечна.

Пусть собственные значения A, B равны ε_1, ε_2 и ε_3, ε_4 соответственно. Существуют корни α, β из единицы степени p, такие что

$$\alpha^2 = \frac{1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \quad \beta^2 = \frac{1}{\varepsilon_3\varepsilon_4}.$$

Обозначим $A_1 = \alpha A$, $B_1 = \beta B$.

В группе $G_1 = \langle A_1, B_1\rangle \subset SL_2(\mathbb{C})$ для любого примитивного элемента $w(A_1, B_1)$

$$w(A_1, B_1)^p = w(\alpha A, \beta B)^p = (\alpha^i\beta^j)^p w(A, B)^p = w(A, B)^p = E,$$

где i, j — это суммы показателей, с которыми входят в w A и B соответственно. Поэтому порядок $w(A_1, B_1)$ равен p. По теореме 6 группа G_1 конечна. Но тогда все элементы из G имеют конечный порядок, откуда получаем, что G конечна. Теорема доказана. □

Литература

[1] Самсонов Ю. Б., Тавгень О. И. Унипотентность образа представления $F_2(x, y)$ матрицами из $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ при условии отображения образующих и примитивных элементов в унипотентные матрицы, $n = 2, 3, 4$ // Докл. НАН Беларуси. — 2001. — Т. 45, № 6. — С. 29—32.

[2] Тавгень О. И., Ян С. Унипотентность образа представления $F_2(x, y)$ в $\mathrm{GL}(5, \mathbb{C})$ при отображении примитивных элементов в унипотентные матрицы // Вестн. БГУ. Сер. 1. — 2009. — № 3. — С. 74—79.

[3] Тавгень О. И., Ян С. Унипотентность образа представления $F_2(x, y)$ в $\mathrm{GL}(6, \mathbb{C})$ при отображении примитивных элементов в унипотентные матрицы // Вестн. БГУ. Сер. 1. — 2010. — № 2. — С. 114—119.

[4] Тавгень О. И., Ян С. Унипотентность образа представления $F_2(x, y)$ в $\mathrm{GL}(7, \mathbb{C})$ при отображении примитивных элементов в унипотентные матрицы // Вестн. БГУ. Сер. 1. — 2011. — № 1. — С. 57—62.

[5] Холл М. Теория групп. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

[6] Dyer J., Formanek E., Grossman E. On the linearity of automorphism groups of free groups // Arch. Math. — 1982. — Vol. 38. — P. 404—409.

[7] Platonov V. P., Potapchik A. New combinatorial properties of linear groups // J. Algebra. — 2001. — Vol. 235. — P. 399—415.