О проблеме А. В. Михалёва для слабо артиновых алгебр Ли

А. Н. БЛАГОВИСНАЯ
Оренбургский государственный университет
e-mail: matmet@bk.ru

О. А. ПИХТИЛЬКОВА
Оренбургский государственный университет
e-mail: OPikhtilkova@mail.ru

С. А. ПИХТИЛЬКОВ
Оренбургский государственный университет
e-mail: pikhtilkov@mail.ru

УДК 512.554.36

Ключевые слова: слабоартинова алгебра Ли, разрешимая алгебра Ли, первичный радикал алгебры Ли, Ω-группа.

Аннотация

Решена проблема А. В. Михалёва для слабо артиновых алгебр Ли. Доказана разрешимость первичного радикала слабо артиновой алгебры Ли. Полученный результат обобщён для градуированных Ω-групп.

Abstract

A. N. Blagovisnaya, O. A. Pikhtilkova, S. A. Pikhtilkov, On A. V. Mikhalev problem for weakly Artinian Lie algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 49—55.

The A. V. Mikhalev problem for weakly Artinian Lie algebras is solved. The theorem about solvability of prime radical of weakly Artinian Lie algebras is proved. An analogous result was generalized for Ω-groups.

Семидесятипятилетию
Александра Васильевича Михалёва
посвящается

Определение 1. Алгебра Ли L называется первичной, если для любых двух её идеалов U и V из того, что $[U, V] = 0$, следует, что $U = 0$ или $V = 0$.

Определение 2. Скажем, что идеал P алгебры Ли L является первичным, если фактор-алгебра L/P первична.

Определение 3. Первичным радикалом $P(L)$ алгебры Ли L называется пересечение всех её первичных идеалов.

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 1, с. 49—55.

Более подробную информацию о теории первичного радикала для алгебр Ли можно найти, например, в [1].

Определение 4. Назовём алгебру Ли слабо артиновой, если она удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей идеалов.

В 2001 году А. В. Михалёв на семинаре «Кольца и модули» механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова сформулировал проблему: существует ли слабо артинова алгебра Ли, первичный радикал которой не является разрешимым?

С. А. Пихтильков показал, что первичный радикал специальной слабо артиновой алгебры разрешим [4]. Разрешимость первичного радикала доказана также для слабо артиновых локально нильпотентных алгебр Ли [5].

Ослабленная проблема А. В. Михалёва решена в [3]. Доказано, что первичный радикал алгебры Ли, удовлетворяющей условию обрыва убывающих цепочек внутренних идеалов или подалгебр, разрешим.

Известно, что первичный радикал алгебры Ли слабо разрешим, но может не быть локально разрешимым [1].

Основная цель данной работы — доказать теорему, решающую проблему А. В. Михалёва.

Теорема 1. *Пусть L — слабо артинова алгебра Ли. Тогда её первичный радикал $P = P(L)$ разрешим.*

Доказательство. 1. Рассмотрим производный ряд первичного радикала P

$$P' = [P, P], \ldots, \ P^{(n+1)} = [P^{(n)}, P^{(n)}], \ldots . \tag{1}$$

Имеют место включения

$$P \supset P' \supset P'' \supset \ldots \supset P^{(n)} \supset \ldots .$$

Так как алгебра Ли L является слабо артиновой, убывающая последовательность идеалов стабилизируется, т. е. $R_1 = P^{(n+1)} = P^{(n)}$. Получаем, что $[R_1, R_1] = R_1$.

Если $R_1 = 0$, первичный радикал P разрешим, и утверждение теоремы имеет место.

Предположим, что $R_1 \neq 0$. Пусть идеал R_1 содержит собственный неразрешимый идеал P_1. Строим для P_1 производный ряд (1) и таким же образом показываем существование идеала R_2, такого что $[R_2, R_2] = R_2$.

Равенство $R_2 = 0$ противоречит неразрешимости P_1. Получили убывающую последовательность различных ненулевых идеалов

$$R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_n \supset \ldots,$$

удовлетворяющих условию $[R_k, R_k] = R_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Из слабой артиновости алгебры Ли L следует, что убывающая последовательность идеалов не может быть бесконечной. Пусть $K = R_m$ — последний ненулевой идеал убывающей цепи идеалов. Из построения идеалов $R_1, R_2, \ldots$ следует, что $[K, K] = K$ и каждый собственный идеал K разрешим.

2. Для доказательства теоремы нам потребуется представление первичного радикала алгебры Ли как нижнего слабо разрешимого радикала, которое было рассмотрено в [3].

Пусть $\sigma(L)$ — это любой ненулевой минимальный абелев идеал из L. Такой идеал существует, если первичный радикал $P(L)$ ненулевой, т. е. алгебра L не является полупервичной [1].

Абелев идеал содержится в любом ненулевом разрешимом идеале первичного радикала $P(L)$, который существует согласно конструкции нижнего слабо разрешимого радикала, если $P(L) \neq 0$ [1] (в случае равенства $P(L) = 0$ утверждение теоремы выполнено). Как известно [2], любой ненулевой разрешимый идеал содержит ненулевой абелев идеал.

С помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\tau(\alpha) \subset P(L)$ следующим образом:

1) $\tau(0) = 0$;
2) предположим, что $\tau(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\tau(\beta)$ следующим образом:
   а) если $\beta = \gamma+1$ не является предельным порядковым числом, то $\tau(\beta)$ — это такой идеал алгебры L, что $\tau(\beta)/\tau(\gamma) = \sigma\big(L/\tau(\gamma)\big)$;
   б) если β — предельное порядковое число, то
$$\tau(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} \tau(\gamma).$$

Из соображений мощности $\tau(\beta) = \tau(\beta+1)$ для некоторого β. Тогда $\tau(\beta) = P(L)$.

3. Покажем, что построенный в пункте 1 неразрешимый идеал $K = [K, K]$ равен $\tau(\omega)$ и занумерован первым бесконечным порядковым числом.

Идеал K не может равняться $K = \tau(n)$, где число n натуральное. В этом случае идеал K разрешим как конечное последовательное расширение абелевых идеалов.

Заметим, что идеал $K = \tau(\omega)$ не является разрешимым, это первый неразрешимый идеал в возрастающей последовательности идеалов $\tau(0) \subset \tau(1) \subset \ldots$.

Разрешимый идеал S_1 слабо артиновой алгебры Ли ступени k является последовательным расширением конечного числа идеалов. У него конечное число n_1 минимальных абелевых идеалов, иначе нарушается слабая артиновость. Обозначим через J_1 сумму минимальных абелевых идеалов S_1.

Рассмотрим фактор-алгебру $S_2 = S_1/J_1$. Обозначим через J_2 сумму n_2 минимальных абелевых идеалов S_2. Снова рассмотрим фактор-алгебру $S_3 = S_2/J_2$. Нам придется факторизовать по абелевым идеалам k раз, после чего получим нулевую алгебру.

Пересчитывая количество минимальных абелевых идеалов, получим
$$K = \tau(n), \tag{2}$$
где $n = n_1+n_2+\ldots+n_k$. Равенство (2) противоречит предположению $K = \tau(\omega)$.

Мы доказали, что идеал $K = \tau(\omega)$ не является разрешимым.

4. Построим ещё одно представление первичного радикала по нильпотентным идеалам.

Пусть $\varphi(L)$ — это сумма всех ненулевых минимальных абелевых идеалов из $P(L)$. Из слабой артиновости алгебры Ли L следует, что их конечное число. В [2] показано, что сумма нильпотентных идеалов алгебры Ли нильпотентна. Следовательно, идеал $\varphi(L)$ нильпотентен.

Так же, как и раньше, с помощью трансфинитной индукции определим для каждого порядкового числа α идеал $\rho(\alpha) \subset P(L)$ следующим образом:

1) $\rho(0) = 0$;
2) предположим, что $\rho(\alpha)$ определено для всех $\alpha < \beta$. Тогда определим $\rho(\beta)$ следующим образом:
   а) если $\beta = \gamma+1$ не является предельным порядковым числом, то $\rho(\beta)$ — это такой идеал алгебры L, что $\rho(\beta)/\rho(\gamma) = \varphi\big(L/\rho(\gamma)\big)$;
   б) если β — предельное порядковое число, то
$$\rho(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} \rho(\gamma).$$

Из соображений мощности $\rho(\beta) = \rho(\beta + 1)$ для некоторого β. Тогда $\rho(\beta) = P(L)$.

Расширение нильпотентной алгебры Ли при помощи нильпотентной является нильпотентной алгеброй Ли [2]. Так как идеалы $\{\rho(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ представляют собой конечную последовательность расширений нильпотентных алгебр Ли, все они нильпотентны.

Мы получили представление идеала K как последовательности возрастающих нильпотентных идеалов
$$\rho(0) \subset \rho(1) \subset \ldots \subset \rho(n) \subset \ldots,$$
при этом
$$K = \bigcup_{i=0}^{\infty} \rho(i).$$

Обозначим через $N\big(\rho(n)\big)$ степень нильпотентности идеала $\rho(n)$.

Для каждого $x \in K$ обозначим через $\alpha(x)$ натуральное число α, такое что $x \in \rho(\alpha) \setminus \rho(\alpha - 1)$.

5. В этом пункте используется рассуждение из [5].

Напомним одну важную теорему из [2].

Теорема 2 [2, с. 21]. *Пусть I — идеал в алгебре Ли L. Предположим, что элемент $x \in L$ является произведением k элементов из L (при некоторой расстановке скобок), причём r из этих элементов содержатся в I. Тогда $x \in I^r$.*

Следствие. *Для любого нильпотентного идеала I алгебры Ли L степени нильпотентности r произведение k элементов алгебры Ли при любой расстановке скобок равно нулю, если оно содержит r элементов из I.*

Напомним, что для идеала K выполнено условие $[K,K]=K$. Пусть $b\in K$ — ненулевой элемент. Тогда

$$b=\sum_{i=1}^{n}[b_i,b_i'],$$

где все элементы b_i, b_i' принадлежат K. Тогда $[b_i,b_i']\neq 0$ для некоторого i. Обозначим этот коммутатор $[b_1,b_1']$.

Представляя b_1' в виде суммы коммутаторов элементов из K и рассуждая аналогично, получаем ненулевой коммутатор $\big[b_1,[b_2,b_2']\big]$, где $b_1,b_2,b_2'\in I$. Согласно равенству $\big[b_1,[b_2,b_2']\big]=\big[[b_1,b_2],b_2'\big]-\big[[b_1,b_2'],b_2\big]$ одно из слагаемых отлично от нуля. Обозначим его элементы $\big[[b_1,b_2],b_2'\big]$.

Действуя аналогично, получим бесконечную последовательность $b_1,b_2,\ldots\in$ $\in K$, такую что все конечные коммутаторы с левой расстановкой отличны от нуля: $[b_1,b_2,\ldots,b_n]\neq 0$, $n=1,2,\ldots$.

Рассмотрим цепочку идеалов J_k, порождённых элементами

$$J_k=([b_1,\ldots,b_k]),\quad k=1,2,\ldots,\quad J_1\supseteq J_2\supseteq\ldots\supseteq J_k\supseteq\ldots.$$

Из слабой артиновости алгебры Ли L следует существование натурального n, такого что $J_n=J_{n+1}$.

Введём обозначение $a=[b_1,\ldots,b_n]$. Пусть $\beta=\max\big(\alpha(a),\alpha(b_{n+1})\big)$. Обозначим через $m=N\big(\rho(\beta)\big)$ степень нильпотентности идеала $\rho(\beta)$. Отметим, что элемент a отличен от нуля.

Существуют натуральное число r и элементы

$$c_{ij}\in L,\quad i=1,\ldots,r,\quad j=1,\ldots,k_i,$$

такие что

$$a=\sum_{i=1}^{r}[a,b_{n+1},c_{i1},\ldots,c_{ik_i}].$$

Подставляя выражение элемента a в правую часть, получаем

$$a=\sum_{i,j=1}^{r}[a,b_{n+1},c_{i1},\ldots,c_{ik_i},b_{n+1},c_{j1},\ldots,c_{jk_j}].$$

Продолжая этот процесс m раз, получаем в каждом коммутаторе под знаком суммы не менее m элементов вида a, b_{n+1}. Напомним, что элементы a, b_{n+1} лежат в нильпотентном идеале $\rho(\beta)$ степени нильпотентности m. Согласно следствию все коммутаторы под знаком суммы равны нулю. Следовательно, элемент a равен нулю. Это противоречит сделанному выше предположению, что элемент a ненулевой. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1. □

Изложение доказательства теоремы 1 для алгебр Ли велось для удобства чтения. На самом деле аналог теоремы 1 справедлив в более общей ситуации.

Под градуированной Ω-группой [1] мы будем понимать группу A (возможно, некоммутативную) с аддитивной записью и нейтральным элементом 0, градуированную группой G, в которой задана, помимо сложения, ещё система n-арных алгебраических операций Ω (при некоторых n, удовлетворяющих условию $n \geqslant 1$), причём для всех $\omega \in \Omega$ должно выполняться условие

$$(0, 0, \ldots, 0)\omega = 0.$$

Множество операций Ω непустое и содержит хотя бы одну n-арную операцию, у которой $n \geqslant 2$.

Группа A раскладывается в прямую сумму нормальных подгрупп A_g, $g \in G$, называемых однородными компонентами.

Для всех

$$a_1 \in A_{g_1},\ a_2 \in A_{g_2}, \ldots,\ a_n \in A_{g_n}$$

и любой n-арной операции $\omega \in \Omega$ выполнено условие

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)\omega \in A_{g_1 g_2 \cdots g_n}.$$

Если в дополнение к указанным свойствам выполнено условие, что для любого конечного множества $X \subseteq A$ и для всех $n \geqslant 2$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in X$, $\omega \in \Omega$ множество элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)\omega$ конечно, то скажем, что градуированная Ω-группа A удовлетворяет условию конечности.

Элементы множества

$$h(A) = \bigcup_{g \in G} A_g$$

называются однородными элементами градуированной Ω-группы A, а отличный от 0 элемент $a_g \in A_g$ называется однородным элементом степени g. Любой отличный от 0 элемент $a \in A$ имеет единственное представление в виде конечного произведения ненулевых однородных элементов, т. е. $a = a_{g_1} + a_{g_2} + \ldots + a_{g_n}$, где $a_g \in A_g$. Элементы a_{g_i} в таком разложении называются однородными компонентами элемента a.

Градуированная Ω-группа может удовлетворять условиям, превращающим её в группу, ассоциативную алгебру, неассоциативную алгебру, супералгебру, конформную алгебру или вёртексную алгебру. Ознакомиться с различными примерами градуированных Ω-групп можно в [1].

Для градуированных Ω-групп можно ввести понятие градуированного идеала, градуированного первичного радикала, разрешимой, нильпотентной, локально разрешимой и локально нильпотентной градуированных Ω-групп. Точные определения этих понятий можно найти в [1].

Для градуированных Ω-групп справедлив аналог теоремы 1, который мы приводим без доказательства.

Теорема 3. *Пусть A — градуированная Ω-группа с условием конечности, удовлетворяющая условию обрыва цепочек убывающих градуированных идеалов. Тогда градуированный первичный радикал $P(A)$ градуированной Ω-группы A разрешим.*

Литература

[1] Балаба И. Н, Михалёв А. В., Пихтильков С. А. Первичный радикал градуированных Ω-групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 159—174.

[2] Капланский И. Алгебры Ли и локально компактные группы. — М.: Мир, 1974.

[3] Мещерина Е. В., Пихтильков С. А., Пихтилькова О. А. О проблеме А. В. Михалёва для алгебр Ли // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. — Т. 13, № 4, ч. 2. — С. 84—89.

[4] Пихтильков С. А. Артиновые специальные алгебры Ли // Алгоритмические проблемы теории групп и полугрупп. — Тула: Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2001. — С. 189—194.

[5] Пихтильков С. А., Поляков В. М. О локально нильпотентных артиновых алгебрах Ли // Чебышёвский сб. — 2005. — Т. 6, № 1. — С. 163—169.