Группы частных полугрупп обратимых неотрицательных матриц над телами

Е. И. БУНИНА, А. В. МИХАЛЁВ, В. В. НЕМИРО
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: helenbunina@gmail.com

УДК 512.534.7+512.555

Ключевые слова: группа частных, полугруппа неотрицательных обратимых матриц, упорядоченное тело.

Аннотация

В работе доказывается, что для линейно упорядоченного тела группа частных полугруппы $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$ совпадает с группой $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ при $n \geqslant 3$.

Abstract

E. I. Bunina, A. V. Mikhalev, and V. V. Nemiro, Groups of quotients of semigroups of invertible nonnegative matrices over skewfields, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 57—64.

In this paper we prove that for a linearly ordered skewfield the groups of quotients of the semigroup $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$ coincides with the group $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ for $n \geqslant 3$.

Введение

Эта статья является продолжением работы [4]. Здесь приводится доказательство для полугрупп над линейно упорядоченными телами, а не полями, как ранее. Кроме того, доказательство приведено для всех размеров матриц начиная с 3×3, а не только для конкретно этого размера.

Пусть $\mathbb{D}$ — линейно упорядоченное тело. Рассмотрим $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$ — подполугруппу в группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$, состоящую из всех матриц с неотрицательными коэффициентами. В [7] А. И. Мальцев ввёл понятие группы частных для полугруппы. Грубо говоря, группа частных полугруппы G — это группа с теми же порождающими, что и полугруппа G, соотношения в которой — только следствия соотношений полугруппы G. Так как над линейно упорядоченным телом порождающие полугруппы $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$ гарантированно совпадают с порождающими группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$, то естественно задаться вопросом, не совпадет ли группа частных полугруппы $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$ с группой $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$.

В. Г. Фаянс [11] рассматривает этот вопрос для $n = 2$ и получает отрицательный ответ. В [4] Е. И. Буниной и В. В. Немиро доказано, что в случае,

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 1, с. 57—64.

когда $n = 3$ и $\mathbb{D}$ — линейно упорядоченное поле, ответ на поставленный вопрос положительный. В данной работе мы доказываем, что для линейно упорядоченного тела группа частных полугруппы $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$ совпадает с группой $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ при $n \geqslant 3$.

В этой работе будут частично использоваться результаты [4], поэтому для удобства мы кратко изложим их.

Полугруппа $\mathrm{G}_n(R)$ для различных типов упорядоченных колец R с точки зрения её автоморфизмов, эндоморфизмов и элементарной эквивалентности изучалась А. В. Михалёвым, М. А. Шаталовой, Е. И. Буниной, П. П. Семёновым в [1—3, 5, 6, 8—10].

1. Основные определения

Напомним определение группы частных, как оно было дано А. И. Мальцевым в [7].

Пусть имеется некоторая непустая полугруппа A. Каждому элементу x из A поставим в соответствие новый элемент x^-, не входящий в A. Обозначим через S совокупность всех конечных слов, состоящих из новых элементов и элементов полугруппы A. Определим теперь следующие элементарные преобразования:

— между любыми двумя соседними элементами слова вставляется пара x^-x или пара xx^-;
— из слова выбрасывается либо пара x^-x, либо пара xx^-;
— два соседние элемента слова, принадлежащие A, заменяются элементом, равным их произведению;
— элемент $x \in A$ заменяется парой элементов из A, произведение которых равно x.

Все слова относительно этих элементарных преобразований распадаются на классы эквивалентных между собой. Пусть (a) означает класс, которому принадлежит слово a. По определению полагаем $(a)(b) = (ab)$. Классы относительно такого умножения образуют группу G.

Определение 1. Построенная группа G называется *группой частных* полугруппы A.

Обозначим положительные и отрицательные элементы тела $\mathbb{D}$ через $\mathbb{D}_+$ и $\mathbb{D}_-$ соответственно.

Определение 2. Введём для матриц элементарных преобразований следующие обозначения:

$$t_{ij}(a) = E + a \cdot E_{ij}, \quad \text{где} \quad i \neq j.$$

Через σ обозначим матрицу перестановки, соответствующую $\sigma \in \mathrm{S}_n$.

Обозначим $\mathrm{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_k \in \mathbb{D}^*$.

Будем называть перечисленные матрицы *элементарными*.

Определение 3. Пусть $\mathbf{P}$ — подполугруппа в $G_n(\mathbb{D})$, порождённая всеми матрицами σ ($\sigma \in \mathrm{S}_n$), $t_{i,j}(x)$ ($x \in \mathbb{D}_+$, $i \neq j$) и $\mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, $\alpha_k \in \mathbb{D}_+^*$.

Определение 4. Две матрицы $A, B \in G_n(\mathbb{D})$ называются *$\mathcal{P}$-эквивалентными* (см. [8]), если существуют матрицы $A_j \in G_n(R)$, $j = 0, \ldots, k$, $A = A_0$, $B = A_k$, и матрицы $P_i, \tilde{P}_i, Q_i, \tilde{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, \ldots, k-1$, такие что $P_i A_i \tilde{P}_i = Q_i A_{i+1} \tilde{Q}_i$.

Над линейно упорядоченным телом полугруппа, порождённая всеми матрицами, $\mathcal{P}$-эквивалентными матрицам из $\mathbf{P}$, совпадает со всей полугруппой $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$.

В случае $n = 2$ в [7] рассматривалась следующая система образующих полугруппы $\mathbf{P}$, совпадающей в этой размерности со всей $\mathrm{G}_2(\mathbb{D})$:

$$\mathrm{diag}[\alpha, \beta] = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad t_{12}(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_{21}(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\alpha, \beta > 0$, $a \geqslant 0$.

При $n > 2$ полугруппа $\mathbf{P}$ строго меньше полугруппы $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$ (см. далее).

В данной системе образующих при $n = 2$ соотношения принимают следующий вид:

1) $\mathrm{diag}[1,1] = t_{12}(0)$;
2) $\mathrm{diag}[\alpha, \beta]\,\mathrm{diag}[\gamma, \delta] = \mathrm{diag}[\alpha\gamma, \beta\delta]$;
3) $t_{12}(a)\, t_{12}(b) = t_{12}(a+b)$;
4) $\mathrm{diag}[\alpha, \beta] t_{12}(x) = t_{12}(\alpha x \beta^{-1})\,\mathrm{diag}[\alpha, \beta]$;
5) $t_{12}(x)\, t_{21}(y) = \mathrm{diag}[\alpha, \beta] t_{21}(u) t_{12}(v)$, где $\alpha = 1 + xy$, $\beta = (1+yx)^{-1}$, $u = y\alpha$, $v = x\beta$;
6) $\sigma\,\mathrm{diag}[\alpha, \beta] = \mathrm{diag}[\beta, \alpha]\sigma$;
7) $\sigma\, t_{12}(a)\, \sigma = t_{21}(a)$;
8) $\sigma^2 = \mathrm{diag}[1,1]$;
9) $\mathrm{diag}[1,1]\sigma = \sigma$.

При $n > 2$ появляются (по крайней мере) следующие дополнительные соотношения:

$$\begin{aligned} &t_{ij}(a)\, t_{kl}(b) = t_{kl}(b)\, t_{ij}(a), && \text{где } i \neq l \text{ и } j \neq k, \\ &t_{ij}(a)\, t_{jk}(b) = t_{ik}(ab)\, t_{jk}(b)\, t_{ij}(a), && \text{где } i \neq k. \end{aligned}$$

Обозначим через e элемент, соответствующий единичной матрице.

Во всей группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ определяющие соотношения примут следующий вид:

1) $e = t_{ij}(0)$;
2) $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n][\beta_1, \ldots, \beta_n] = [\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n]$;
3) $t_{ij}(x) t_{ij}(y) = t_{ij}(x+y)$;
4) $\alpha\, t_{ij}(x) = t_{ij}(\alpha_i x \alpha_j^{-1})\,\alpha$;
5) $t_{ij}(x) t_{ji}(y) = \alpha\, t_{ji}(u) t_{ij}(v)$, где α диагональная, $1 + xy = \alpha_i$, $(1+yx)^{-1} = \alpha_j$, $u = y\alpha_i$, $v = x\alpha_j$;
6) $\sigma\,[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = [\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)}]$;

7) $\sigma\, t_{ij}(a)\, \sigma^{-1} = t_{\sigma(i)\,\sigma(j)}(a)$;
8) $\sigma_1\, \sigma_2 = \sigma_3$, где σ_3 — перестановка $\sigma_1\, \sigma_2$ в S_n;
9) $e\, \sigma = \sigma$;
10) $t_{ij}(a)\, t_{kl}(b) = t_{kl}(b)\, t_{ij}(a)$, где $i \neq l$ и $j \neq k$;
11) $t_{ij}(a)\, t_{jk}(b) = t_{ik}(ab)\, t_{jk}(b)\, t_{ij}(a)$, где $i \neq k$.

Замечание 1. Очевидно, что группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ не содержит собственной подгруппы, содержащей $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$. Таким образом, группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ является минимальной группой, содержащей полугруппу $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$.

2. Группа частных для произвольного $n \geqslant 3$

Приведём несколько важных определений и предложений из работы [4].

В случае $n > 2$ с помощью элементарных порождающих σ, $t_{ij}(a)$ и $\mathrm{diag}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ невозможно представить все элементы полугруппы $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$. Простейшим примером элемента, который таким образом не выражается, является матрица с нулевыми элементами на главной диагонали и положительными вне неё.

Введём матрицу

$$u(a,b) = \begin{pmatrix} 0 & b & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n-3} \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{D}_+.$$

Предложение 1 [4, предложение 1]. *Система σ, $\mathrm{diag}[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $u(a,b)$, $t_{ij}(a)$, где $a \geqslant 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$ и $\sigma \in \mathrm{S}_3$, является полной системой образующих для полугруппы $\mathrm{G}_3(\mathbb{F})$.*

Предложение 2 [4, предложение 2]. *В группе частных полугруппы $\mathrm{G}_3(\mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ — линейно упорядоченное поле, элемент $c = t_{12}(-1)t_{21}(1)$ является элементом порядка 6.*

Докажем дополнительное предложение, аналогичное предложению 2.

Предложение 3. *В группе частных полугруппы $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$, где $\mathbb{D}$ — линейно упорядоченное тело, элемент $c = t_{12}(-1)t_{21}(1)$ является элементом порядка 6.*

Доказательство. Рассмотрим минимальный элемент $u(a,b)$. Разложим его на элементарные матрицы (в том числе с отрицательными коэффициентами):

$$u(a,b) = t_{32}(-b^{-1})\, \mathrm{diag}[b, 1, b^{-1}(a+b)]\, \sigma_{321}\, t_{12}\big((a+b)^{-1}b\big)\, t_{31}(a)\, t_{23}(b^{-1}).$$

Таким образом, получаем новое соотношение вида

$$t_{32}(b^{-1})\, u(a,b) = \mathrm{diag}[b, 1, b^{-1}(a+b)]\, \sigma_{321}\, t_{12}\big((a+b)^{-1}b\big)\, t_{31}(a)\, t_{23}(b^{-1}).$$

Транспонировав и заменив a на b, получим равенство

$$u(a,b) = t_{32}(a^{-1})\, t_{13}(b)\, t_{21}(a(a+b)^{-1})\, \sigma_{123}\, \mathrm{diag}[a, 1, (a+b)a^{-1}]\, t_{23}(-a^{-1}).$$

Это значит, что у нас есть ещё одно дополнительное соотношение:

$$u(a,b)\, t_{23}(a^{-1}) = t_{32}(a^{-1})\, t_{13}(b)\, t_{21}(a(a+b)^{-1})\, \sigma_{123}\ \mathrm{diag}[a,1,(a+b)a^{-1}].$$

Таким образом, получаем дополнительное соотношение

$$\begin{aligned} &t_{32}(-b^{-1})\ \mathrm{diag}[b,1,b^{-1}(a+b)]\, \sigma_{321}\, t_{12}((a+b)^{-1}b)\, t_{31}(a)\, t_{23}(b^{-1}) = \\ &\qquad = t_{32}(a^{-1})\, t_{13}(b)\, t_{21}(a(a+b)^{-1})\, \sigma_{123}\ \mathrm{diag}[a,1,(a+b)a^{-1}]\, t_{23}(-a^{-1}). \end{aligned}$$

В конечном итоге получим следующее соотношение, выраженное через элементы полугруппы $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$:

$$\begin{aligned} &\mathrm{diag}[b,1,b^{-1}(a+b)]\, \sigma_{321}\, t_{12}\big((a+b)^{-1}b\big)\, t_{31}(a)\, t_{23}(a^{-1}+b^{-1}) = \\ &\qquad = t_{32}(a^{-1}+b^{-1})\, t_{13}(b)\, t_{21}(a(a+b)^{-1})\ \mathrm{diag}[(a+b)a^{-1},a,1]\, \sigma_{123}. \end{aligned}$$

Запишем

$$\begin{aligned} &\mathrm{diag}[b,1,b^{-1}(a+b)]\, \sigma_{321}\, t_{12}\big((a+b)^{-1}b\big)\, t_{31}(a)\, t_{23}(a^{-1}+b^{-1}) = \\ &\qquad = \mathrm{diag}[(a+b)a^{-1},a,1]\, t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big)\, t_{13}(a(a+b)^{-1}b)\, t_{21}(a^{-1})\, \sigma_{123}. \end{aligned}$$

Преобразуем

$$\begin{aligned} &\mathrm{diag}[a(a+b)^{-1}b,a^{-1},b^{-1}(a+b)]\, \sigma_{123}\, t_{23}\big((a+b)^{-1}b\big)\, t_{12}(a)\, t_{31}(a^{-1}+b^{-1}) = \\ &\quad = t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big)\, t_{13}(a(a+b)^{-1}b)\, t_{21}(a^{-1}), \\ &\mathrm{diag}[a(a+b)^{-1}b,a^{-1},b^{-1}(a+b)]\, \sigma_{123}\, t_{23}\big((a+b)^{-1}b\big)\, t_{12}(a)\, t_{21}(-a^{-1}) = \\ &\quad = t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big)\, t_{13}(a(a+b)^{-1}b)\, t_{31}(-a^{-1}-b^{-1}). \end{aligned}$$

В конечном итоге преобразуем равенство к следующему виду:

$$\begin{aligned} &t_{12}(a)\, t_{21}(-a^{-1}) = t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, \sigma_{321}\ \mathrm{diag}[b^{-1}(a+b)a^{-1},a,(a+b)^{-1}b] \times \\ &\qquad \times t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big)\, t_{13}(a(a+b)^{-1}b)\, t_{31}(-a^{-1}-b^{-1}). \end{aligned}$$

Дальнейшие преобразования:

$$\begin{aligned} &t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})\, t_{12}(a)\, t_{21}(-a^{-1})\, t_{31}(a^{-1}+b^{-1}) = \\ &\quad = t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})\, t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, \sigma_{321} \times \\ &\quad \times \mathrm{diag}[b^{-1}(a+b)a^{-1},a,(a+b)^{-1}b]\, t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big)\, t_{13}(a(a+b)^{-1}b). \end{aligned}$$

Преобразуем правую часть:

$$\begin{aligned} &t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})\, t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, \sigma_{321}\ \mathrm{diag}[b^{-1}(a+b)a^{-1},a,(a+b)^{-1}b] \times \\ &\quad \times t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big)\, t_{13}(a(a+b)^{-1}b) = \\ &\quad = t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})\, t_{21}(-a^{-1})\, \sigma_{321} \times \\ &\quad \times \mathrm{diag}[b^{-1}(a+b)a^{-1},a,(a+b)^{-1}b]\, t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big)\, t_{13}(a(a+b)^{-1}b) = \\ &\quad = t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})\, \sigma_{321}\, t_{32}(-a^{-1}) \times \\ &\quad \times \mathrm{diag}[b^{-1}(a+b)a^{-1},a,(a+b)^{-1}b]\, t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big)\, t_{13}(a(a+b)^{-1}b) = \end{aligned}$$

$$= t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})\, \sigma_{321}\ \mathrm{diag}[b^{-1}(a+b)a^{-1}, a, (a+b)^{-1}b] \times$$
$$\times\, t_{32}\big(-b^{-1}(a+b)\big)\, t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big)\, t_{13}(a(a+b)^{-1}b) =$$
$$= t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})\, \sigma_{321} \times$$
$$\times\, \mathrm{diag}[b^{-1}(a+b)a^{-1}, a, (a+b)^{-1}b]\, t_{13}(a(a+b)^{-1}b) =$$
$$= t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})\, t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big)\, \sigma_{321} \times$$
$$\times\, \mathrm{diag}[b^{-1}(a+b)a^{-1}, a, (a+b)^{-1}b].$$

Таким образом, получаем

$$t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})\, t_{12}(a)\, t_{21}(-a^{-1})\, t_{31}(a^{-1}+b^{-1}) =$$
$$= t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})\, t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big) \times$$
$$\times\, \sigma_{321}\, \mathrm{diag}[b^{-1}(a+b)a^{-1}, a, (a+b)^{-1}b].$$

Возведём равенство в квадрат, справа получим

$$\big(t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})\, t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big) \times$$
$$\times\, \sigma_{321}\ \mathrm{diag}[b^{-1}(a+b)a^{-1}, a, (a+b)^{-1}b]\big)^2 =$$
$$= t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})\, t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big) \times$$
$$\times\, t_{12}(-a)\, t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, t_{21}(a^{-1})\, (\sigma_{321}\ \mathrm{diag}[b^{-1}(a+b)a^{-1}, a, (a+b)^{-1}b])^2.$$

Домножим ещё раз на первое равенство и получим

$$t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})\, t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big) \times$$
$$\times\, \sigma_{321}\, \mathrm{diag}[b^{-1}(a+b)a^{-1}, a, (a+b)^{-1}b] \times$$
$$\times\, t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})\, t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big) \times$$
$$\times\, t_{12}(-a)\, t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, t_{21}(a^{-1}) \times$$
$$\times\, (\sigma_{321}\, \mathrm{diag}[b^{-1}(a+b)a^{-1}, a, (a+b)^{-1}b])^2 =$$
$$= t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})\, t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big) \times$$
$$\times\, t_{12}(-a)\, t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, t_{21}(a^{-1}) \times$$
$$\times\, t_{31}(-b^{-1}(a+b)a^{-1})\, t_{12}(-a)\, t_{13}(a(a+b)^{-1}b) \times$$
$$\times\, \big(\sigma_{321}\, \mathrm{diag}[b^{-1}(a+b)a^{-1}, a, (a+b)^{-1}b])^3 =$$
$$= t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})\, t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big) \times$$
$$\times\, t_{12}(-a)\, t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, t_{21}(a^{-1}) \times$$
$$\times\, t_{31}(-b^{-1}(a+b)a^{-1})\, t_{12}(-a)\, t_{13}(a(a+b)^{-1}b) =$$
$$= t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})\, t_{21}(a^{-1})\, t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big) \times$$
$$\times\, t_{12}(-a)\, t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\, t_{21}(a^{-1}) \times$$
$$\times\, t_{31}(-b^{-1}(a+b)a^{-1}) t_{12}(-a)\, t_{13}(a(a+b)^{-1}b).$$

Таким образом, имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&\big(t_{12}(a)\,t_{21}(-a^{-1})\big)^3 = t_{21}(a^{-1})\,t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\,t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big)\times\\
&\quad\times t_{12}(-a)\,t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\,t_{21}(a^{-1})\,t_{31}(-b^{-1}(a+b)a^{-1})\times\\
&\quad\times t_{12}(-a)\,t_{13}(a(a+b)^{-1}b)\,t_{31}(-a^{-1}-b^{-1}),\\
&\big(t_{12}(a)\,t_{21}(-a^{-1})\big)^3 = t_{21}(a^{-1})\,t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\,t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big)\times\\
&\quad\times t_{12}(-a)\,t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\,t_{31}(-b^{-1}(a+b)a^{-1})\,t_{21}(a^{-1})\times\\
&\quad\times t_{13}(a(a+b)^{-1}b)\,t_{12}(-a)\,t_{31}(-a^{-1}-b^{-1}),\\
&\big(t_{12}(a)\,t_{21}(-a^{-1})\big)^3 = t_{21}(a^{-1})\,t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\,t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big)\times\\
&\quad\times t_{12}(-a)\,t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\,t_{31}(-b^{-1}(a+b)a^{-1})\,t_{23}\big((a+b)^{-1}b\big)\times\\
&\quad\times t_{13}(a(a+b)^{-1}b)\,t_{21}(a^{-1})\,t_{32}\big(-b^{-1}(a+b)\big)\,t_{31}(-a^{-1}-b^{-1})\,t_{12}(-a),\\
&\big(t_{12}(a)\,t_{21}(-a^{-1})\big)^3 = t_{21}(a^{-1})\,t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\,t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big)\times\\
&\quad\times t_{12}(-a)\,t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\,t_{31}(-b^{-1}(a+b)a^{-1})\,t_{23}\big((a+b)^{-1}b\big)\times\\
&\quad\times t_{13}(a(a+b)^{-1}b)\,t_{32}\big(-b^{-1}(a+b)\big)\,t_{21}(a^{-1})\,t_{12}(-a),\\
&\big(t_{12}(a)\,t_{21}(-a^{-1})\big)^4 = t_{21}(a^{-1})\,t_{12}(-a)\,t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\times\\
&\quad\times t_{13}(-a(a+b)^{-1}b)\,t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big)\,t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\,t_{31}(-b^{-1}(a+b)a^{-1})\times\\
&\quad\times t_{23}\big((a+b)^{-1}b\big)\,t_{13}(a(a+b)^{-1}b)\,t_{32}\big(-b^{-1}(a+b)\big),\\
&\big(t_{12}(a)\,t_{21}(-a^{-1})\big)^5 = t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\,t_{13}(-a(a+b)^{-1}b)\,t_{32}\big(b^{-1}(a+b)\big)\\
&\quad\times t_{31}(-b^{-1}(a+b)a^{-1})\,t_{21}(a^{-1})\,t_{32}\big(-b^{-1}(a+b)\big)\,t_{13}(a(a+b)^{-1}b)\,t_{12}(-a),\\
&\big(t_{12}(a)\,t_{21}(-a^{-1})\big)^5 = t_{23}(-(a+b)^{-1}b)\,t_{13}(-a(a+b)^{-1}b)\,t_{21}(a^{-1})\times\\
&\quad\times t_{13}(a(a+b)^{-1}b)\,t_{12}(-a),\\
&\big(t_{12}(a)\,t_{21}(-a^{-1})\big)^6 = E.
\end{aligned}$$

Значит, в полугруппе частных выполняется соотношение

$$\big(t_{12}(a)\,t_{21}(-a^{-1})\big)^6 = E.$$

Предложение доказано. □

Теперь мы можем доказать основную теорему этой работы.

Теорема 1. *Для линейно упорядоченного тела $\mathbb{D}$ группа частных полугруппы $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$ изоморфна группе $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$.*

Доказательство. Обозначим через H группу частных полугруппы $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$. Поскольку $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ является минимальным расширением $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$, группа H является расширением группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ (или совпадает с ней).

Так как определяющее соотношение $\big(t_{12}(-1)\,t_{21}(1)\big)^6 = e$ группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ является следствием образующих соотношений полугруппы $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$ (по предложению 3), а остальные соотношения группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ очевидным образом выводятся из образующих соотношений полугруппы $\mathrm{G}_n(\mathbb{D})$, то группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$ является расширением группы H. Значит, $H = \mathrm{GL}_n(\mathbb{D})$. □

Литература

[1] Бунина Е. И. Автоморфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц порядка два над частично упорядоченными коммутативными кольцами // Мат. заметки. — 2011. — Т. 91, № 1. — С. 3—12.

[2] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фундамент. и прикл. матем. — 2005. — Т. 11, вып. 2. — С. 3—23.

[3] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фундамент. и прикл. матем. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 39—53.

[4] Бунина Е. И., Немиро В. В. Группа частных полугруппы обратимых неотрицательных матриц порядка три над полями // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 3. — С. 27—42.

[5] Бунина Е. И., Семёнов П. П. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 2. — С. 69—100.

[6] Бунина Е. И., Семёнов П. П. Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 4. — С. 75—85.

[7] Мальцев А. И. О включении ассоциативных систем в группы. II // Мат. сб. — 1940. — Т. 8, № 2. — С. 251—264.

[8] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Автоморфизмы и антиавтоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Мат. сб. — 1970. — Т. 81, № 4. — С. 600—609.

[9] Семёнов П. П. Эндоморфизмы полугрупп обратимых неотрицательных матриц над упорядоченными кольцами // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 5. — С. 165—178.

[10] Семёнов П. П. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными целыми элементами // Мат. сб. — 2012. — Т. 203, № 9. — С. 117—132.

[11] Фаянс В. Г. Группа частных полугруппы неособенных матриц с неотрицательными элементами // Успехи мат. наук. — 1973. — Т. 28, № 6. — С. 221—222.