Элементарная эквивалентность стабильных линейных групп над локальными коммутативными кольцами с $1/2$*

Е. И. БУНИНА, А. В. МИХАЛЁВ, И. О. СОЛОВЬЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: helenbunina@gmail.com

УДК 512.54.03

Ключевые слова: элементарная эквивалентность, стабильные линейные группы, локальные коммутативные кольца.

Аннотация

В данной работе мы докажем критерий элементарной эквивалентности стабильных линейных групп над коммутативными локальными кольцами с обратимой двойкой.

Abstract

E. I. Bunina, A. V. Mikhalev, I. O. Solovyev, Elementary equivalence of stable linear groups over local commutative rings with $1/2$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 65—78.

In this paper, we prove a criterion for elementary equivalence of stable linear groups over commutative local rings with invertible two.

1. Автоморфизмы и изоморфизмы различных типов линейных групп

Критерии элементарной эквивалентности производных структур (линейных групп разного типа, колец эндоморфизмов, групп автоморфизмов и других подобных) обычно бывает возможно получить только после доказательства критерия их изоморфности или после полного описания их автоморфизмов. Поэтому для начала напомним историю описания изоморфизмов и автоморфизмов линейных и стабильных линейных групп.

Описание автоморфизмов и изоморфизмов классических линейных групп началось с работы О. Шрайера и Б. Л. Ван дер Вардена [53], в которой были рассмотрены автоморфизмы группы PSL_n, $n \geqslant 3$, над произвольным полем. Затем Ж. Дьёдонне и Ч. Риккартом был введён метод инволюций, с помощью которого в [40,51] были описаны автоморфизмы группы GL_n, $n \geqslant 3$, над телом.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 14-01-00452А.

Л.-К. Хуа и И. Райнером [44] было получено описание автоморфизмов группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. В [48, 58] их результат был обобщён на некоммутативные области главных идеалов.

О. О'Мирой [24] при помощи разработанного им метода вычетных пространств были описаны автоморфизмы GL_n, $n \geqslant 3$, над областями целостности. Независимо с помощью метода инволюций Янь Ши-Цзянь [54] описал автоморфизмы элементарной группы $\mathrm{E}_n(R)$, $n \geqslant 3$, где R — область целостности характеристики, отличной от 2.

В [28] было получено описание автоморфизмов GL_n, $n \geqslant 3$, над коммутативным локальным кольцом с $1/2$. У. Ч. Уотерхаус [59] описал автоморфизмы группы GL_n, $n \geqslant 3$, над произвольными коммутативными кольцами с $1/2$, а вскоре после этого В. М. Петечук [26] описал автоморфизмы GL_n, $n \geqslant 4$, над произвольным коммутативным кольцом.

Описание изоморфизмов группы $\mathrm{GL}_n(R)$ в случае ассоциативного кольца R с $1/2$ (без предположения о коммутативности) при $n \geqslant 3$ было дано И. З. Голубчиком и А. В. Михалёвым [19] и несколько иным способом Е. И. Зельмановым [21]. В 1997 году описание изоморфизмов $\mathrm{GL}_n(R)$ было продолжено на случай произвольного ассоциативного кольца при $n \geqslant 4$ И. З. Голубчиком [18].

Параллельно описывались автоморфизмы и изоморфизмы унитарных линейных групп. Л.-К. Хуа [43] описал автоморфизмы симплектических групп над полем характеристики, не равной двум. Ж. Дьёдонне [40] и Ч. Риккарт [52] при помощи метода инволюций описали автоморфизмы симплектических и унитарных групп над телами характеристики, не равной двум. В 1968—1969 годах О'Мира [23] при помощи метода вычетных пространств описал автоморфизмы симплектических групп над полями, богатыми трансвекциями. Описание автоморфизмов унитарных групп размерности, большей или равной 6, над бесконечными полями было завершено в 1974 году А. А. Джонсоном [46].

Л. Маккуин и Б. Р. Макдональд [50] получили описание автоморфизмов групп Sp_n размерности, большей или равной 6, над коммутативными локальными кольцами, содержащими $1/2$. Продолжая работу в этом направлении, в 1980 году В. М. Петечук [25] описал автоморфизмы спинорных групп над произвольными коммутативными локальными кольцами. В 1983 году, применив метод локализации, В. М. Петечук [27] обобщил результаты работ [25, 50] на случай $\mathrm{Sp}_n(R)$, $n \geqslant 6$, над произвольными коммутативными кольцами. В том же году И. З. Голубчиком и А. В. Михалёвым [20] было получено описание изоморфизмов между унитарными группами над произвольными ассоциативными кольцами, содержащими $1/2$, с некоторыми специальными ограничениями на размерность группы.

Структурные теоремы об автоморфизмах и изоморфизмах были получены также для групп Шевалле различных типов над различными видами колец. Для групп Шевалле над полями они были доказаны Р. Стейнбергом [55] для конечного случая и Дж. Хамфри [45] для бесконечного случая. Описанию автоморфизмов групп Шевалле над различными коммутативными кольцами были посвящены работы многих авторов, среди которых стоит отметить [29, 31, 34—39, 47].

Е. И. Бунина в серии работ [8—10, 32] описала автоморфизмы и изоморфизмы групп Шевалле над произвольными локальными кольцами, где для систем корней A_2, B_l, C_l и F_4 требовалась обратимая двойка в кольце, а для системы корней G_2 — обратимые двойка и тройка. В [33] все предыдущие результаты с помощью метода локализации (подобного методу В. М. Петечука из [26]) были обобщены для случая присоединённых групп Шевалле на произвольные коммутативные кольца (с соответствующими условиями обратимости двойки или тройки). В [12, 13] Е. И. Буниной и П. В. Верёвкиным была получена аналогичная теорема для групп Шевалле типа G_2 над локальными кольцами, в которых обратима только тройка.

Естественным продолжением всех этих результатов по различным типам линейных групп было их обобщение на стабильные линейные группы. В [49] описаны изоморфизмы между элементарными стабильными линейными группами над произвольными коммутативными кольцами. А. С. Аткарская [1] описала изоморфизмы между унитарными стабильными линейными группами над произвольными ассоциативными кольцами с $1/2$.

2. Элементарная эквивалентность различных типов линейных групп и других производных структур

Первый результат по элементарной классификации линейных групп был получен А. И. Мальцевым в [22]. Им была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Группа $\mathcal{G}_m(K_1)$ элементарно эквивалентна группе $\mathcal{G}_n(K_2)$* ($\mathcal{G} = \mathrm{GL}_n, \mathrm{PGL}_n, \mathrm{SL}_n, \mathrm{PSL}_n$, *$m, n \geqslant 3$, K_1, K_2 — бесконечные поля*) *тогда и только тогда, когда $m = n$ и $K_1 \equiv K_2$.*

В дальнейшем К. И. Бейдар и А. В. Михалёв нашли общий подход к проблемам элементарной эквивалентности некоторых алгебраических структур (см. [30]). Взяв на вооружение некоторые результаты теории линейных групп над кольцами (см. [19, 41, 56]), они нашли сравнительно лёгкие доказательства теорем, близких к теореме Мальцева, в довольно общих ситуациях (для линейных групп над первичными кольцами и телами, для мультипликативных полугрупп колец, решёток подмодулей и т. д.) В [30] были получены следующие две теоремы.

Теорема 2. *Пусть R и S — тела* (*характеристики, отличной от* 2) *и $m, n \geqslant 3$* ($m, n \geqslant 2$). *Тогда $\mathrm{GL}_m(R) \equiv \mathrm{GL}_n(S)$, если и только если $n = m$ и либо $R \equiv S$, либо $R \equiv S^{\mathrm{op}}$.*

Теорема 3. *Пусть R и S — ассоциативные первичные кольца с* 1 ($1/2$), *$m, n \geqslant 4$* ($m, n \geqslant 3$). *Тогда $\mathrm{GL}_m(R) \equiv \mathrm{GL}_n(S)$, если и только если $\mathrm{M}_m(R) \equiv \mathrm{M}_n(S)$ или $\mathrm{M}_m(R) \equiv \mathrm{M}_n(S)^{\mathrm{op}}$.*

Аналогичными методами в работе [2] было доказано следующее обобщение предыдущей теоремы.

Теорема 4. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с 1 (1/2), содержащие конечное число центральных идемпотентов, и $m, n \geqslant 4$ ($m, n \geqslant 3$). Тогда $\mathrm{GL}_m(R) \equiv \mathrm{GL}_n(S)$, если и только если существуют такие центральные идемпотенты $e \in R$ и $f \in S$, что $e\mathrm{M}_m(R) \equiv f\mathrm{M}_n(S)$ и $(1-e)\mathrm{M}_m(R) \equiv (1-f)\mathrm{M}_n(S)^{\mathrm{op}}$.*

В случае, если центральных идемпотентов бесконечно много, аналогичную теорему доказать пока не получается. Конечно, аналог этой теоремы верен для различных частных случаев колец. Например, в [2] получен критерий для линейных групп над булевыми кольцами.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ — булевы кольца, n, m — натуральные числа. Линейные группы $\mathrm{GL}_n(\mathcal{B}_1)$ и $\mathrm{GL}_m(\mathcal{B}_2)$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $n = m$ и элементарно эквивалентны сами булевы кольца $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$.*

Подобные результаты были получены не только для классических линейных групп GL, PGL, SL, PSL, но и для унитарных линейных групп над полями, телами и кольцами с инволюциями (см. [3, 4]), а также для групп Шевалле над полями (см. [5]) и локальными кольцами (см. [11]), а также для различных других производных структур.

Однако в некоторых случаях элементарная эквивалентность производных структур (даже чем-то похожих на линейные группы) равносильна не элементарной, а более сильной эквивалентности исходных структур. Именно, часто появляется эквивалентность в логике второго порядка или в каких-то её ограничениях.

Например, в 2000 году В. Толстых [57] установил связь между свойствами второго порядка тел и свойствами первого порядка групп автоморфизмов бесконечномерных линейных пространств над ними, а в 2003 году Е. И. Бунина и А. В. Михалёв [15] установили связь между свойствами второго порядка ассоциативных колец и элементарными свойствами категорий модулей, колец эндоморфизмов, групп автоморфизмов и проективных пространств бесконечного ранга над этими кольцами. В 2004 году теми же авторами (см. [14]) была установлена связь между элементарной эквивалентностью колец эндоморфизмов абелевых p-групп и эквивалентностью в логике второго порядка этих групп, а затем в 2013 году в [17] Е. И. Бунина, А. В. Михалёв и М. А. Ройзнер получили полный критерий элементарной эквивалентности как колец эндоморфизмов абелевых p-групп, так и групп автоморфизмов абелевых p-групп при $p > 2$. Приведём этот критерий.

Теорема 6. *Кольца эндоморфизмов абелевых p-групп (или группы автоморфизмов абелевых p-групп, $p > 2$) A_1 и A_2 элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда*

1) *одна из групп A_1, A_2 является редуцированной и*

$$\mathrm{Th}_2^{\varkappa_1}(A_1) = \mathrm{Th}_2^{\varkappa_2}(A_2),$$

где $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ — это мощности базисных подгрупп групп A_1 и A_2 соответственно;

2) *одна из групп* A_1, A_2 *не является редуцированной и*

$$\mathrm{Th}_2(A_1) = \mathrm{Th}_2(A_2).$$

Эти и некоторые другие подобные результаты приведены в [16].

В данной работе нас интересует критерий элементарной эквивалентности стабильных линейных групп над локальными кольцами с обратимой двойкой. Оказывается, что, несмотря на «бесконечную» размерность стабильной группы, из элементарной эквивалентности двух произвольных колец с единицей следует элементарная эквивалентность стабильных линейных групп над ними, т. е. не требуется выход в логику более высоких порядков (см. раздел 4). В разделе 5 доказано, что из элементарной эквивалентности стабильных линейных групп над коммутативными локальными кольцами с обратимой двойкой следует элементарная эквивалентность соответствующих колец, что и даёт нам искомый критерий.

3. Основные определения

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей. Следующие определения соответствуют [42].

Определение 1. Обозначим через $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ кольцо матриц со счётным числом строк и столбцов, у которых вне главной диагонали есть лишь конечное число ненулевых элементов, а также существует такой номер n, что для любого $i \geqslant n$ элементы матрицы r_{ii} равны a, $a \in R$.

Ясно, что $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ — кольцо.

Пусть $A \in \mathrm{GL}_n(R)$. Мы отождествим A с элементом из $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ по следующему правилу: матрицу A запишем в левый верхний угол, а начиная с позиции (n, n) на диагонали запишем 1, а на всех остальных местах запишем 0.

Сохраним обозначение $\mathrm{GL}_n(R)$ для получившихся подгрупп в $\mathrm{Mat}_\infty(R)$. Ясно, что $\mathrm{GL}_n(R)$ — подгруппы группы обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_\infty(R)$, а также что для $m \geqslant n$ мы имеем $\mathrm{GL}_n(R) \subseteq \mathrm{GL}_m(R)$.

Определение 2. Положим

$$\mathrm{GL}(R) = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathrm{GL}_n(R) \quad (\mathrm{GL}_n(R) \subseteq \mathrm{Mat}_\infty(R)).$$

Это подгруппа группы обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_\infty(R)$. Назовём её *стабильной линейной группой.*

4. Если кольца эквивалентны, то и группы эквивалентны

Пусть произвольные ассоциативные кольца с единицей R_1 и R_2 элементарно эквивалентны. Покажем, что тогда $\mathrm{GL}(R_1) \equiv \mathrm{GL}(R_2)$. Для этого покажем, что истинность любого предложения в группе $\mathrm{GL}(R)$ равносильна истинности определённого набора предложений для соответствующего кольца, где эта равносильность не зависит от свойств кольца.

Пусть $\Phi = Q_1X_1\,Q_2X_2\ldots Q_nX_n\,\varphi(X_1,\ldots,X_n)$ — предложение, где Q_i — квантор $\forall$ или $\exists$, φ — бескванторная формула.

Назовём *размерностью* матрицы из стабильной линейной группы $\mathrm{GL}(R)$ такое минимальное число n, что эта матрица вкладывается в $\mathrm{GL}_n(R)$.

Нам надо строить отображения только из замкнутых предложений в замкнутые предложения, но для того чтобы корректно эти предложения определить, научимся строить отображения из любых формул в семейства формул.

1. Если имеется бескванторная атомарная формула вида φ: $A = BC$, где размерности матриц A, B, C равны a, b, c соответственно, то переведём её в формулу

$$\tilde{\varphi}_{a,b,c}\colon \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1a} & 0 & \ldots\\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \vdots\\ \alpha_{a1} & \ldots & \alpha_{aa} & 0 & \vdots\\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_{11} & \ldots & \beta_{1b} & 0 & \ldots\\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \vdots\\ \beta_{b1} & \ldots & \beta_{bb} & 0 & \vdots\\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \ldots & \gamma_{1c} & 0 & \ldots\\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \vdots\\ \gamma_{c1} & \ldots & \gamma_{cc} & 0 & \vdots\\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где размер матриц равен $n = \max(a,b,c)$. Ясно, что такие же формулы можно рассмотреть и для чисел m, больших размерности n.

Аналогично можно сделать перевод формул $A = B$, $A = B^{-1}$.

2. Если имеется две бескванторных формулы φ и ψ от одних и тех же переменных $X_1,\ldots,X_k$, которые мы объединяем связкой $\wedge$, а при этом соответствующими переводами являлись $\tilde{\varphi}_{a_1,\ldots,a_k}$ и $\tilde{\psi}_{a_1,\ldots,a_k}$, то положим

$$\widetilde{\varphi\wedge\psi}_{a_1,\ldots,a_k} = \tilde{\varphi}_{a_1,\ldots,a_k} \wedge \tilde{\psi}_{a_1,\ldots,a_k}.$$

Абсолютно то же самое можно сказать про отрицание бескванторной формулы φ.

Таким способом мы сможем сделать переводы всех бескванторных формул, им будут соответствовать бескванторные формулы на кольцом.

Теперь нас не будет интересовать содержание бескванторной части нашей формулы, посмотрим на её кванторную приставку $Q_1X_1Q_2X_2\ldots Q_tX_t$.

Разберём для наглядности случаи $t = 1$ и $t = 2$, а потом сделаем индуктивный переход.

Случай $t = 1$. Если мы имели дело с предложением $\forall X\ \varphi(X)$, то его истинность равносильна истинности множества формул

$$\left\{\forall A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \left(\exists\, A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}\ AA' = A'A = E\right) \Rightarrow \tilde{\varphi}_n(A) \middle| n \in \mathbb{N}\right\},$$

т. е. переводы формулы φ в этом случае должны быть истинны для всех $n \in \mathbb{N}$.

Если же изначальное предложение было $\exists\, X\ \varphi(X)$, то оно равносильно тому, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$ в кольцевом языке верно предложение

$$\exists\, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \left(\left(\exists A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}\ AA' = A'A = E\right) \wedge \tilde{\varphi}_n(A)\right).$$

Случай $t = 2$. Заметим, что по каждому предложению

$$\Phi = Q_1 X_1 Q_2 X_2 \varphi(X_1, X_2)$$

можно построить счётное множество переводов $\tilde{\Phi}_{m,n}$ вида

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \left(\left(\exists A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{m1} & \dots & a'_{mm} \end{pmatrix}\ AA' = A'A = E\right) \#_1\right.$$
$$\#_1\, Q_2 B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \left.\left(\left(\exists B' = \begin{pmatrix} b'_{11} & \dots & b'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b'_{n1} & \dots & b'_{nn} \end{pmatrix}\ BB' = B'B = E\right) \#_2\, \tilde{\varphi}_{m,n}(A, B)\right)\right),$$

где для $Q_i = \forall$ имеем $\#_i =\Rightarrow$, а для $Q_i = \exists$ имеем $\#_i = \wedge$.

Если $Q_1 = Q_2 = \exists$, то истинность предложения Φ в стабильной линейной группе равносильна истинности хотя бы одного предложения $\tilde{\Phi}n, m$ в соответствующем кольце.

Если $Q_1 = Q_2 = \forall$, то истинность предложения Φ в стабильной линейной группе равносильна истинности всех предложений $\tilde{\Phi}n, m$, $n, m \in \mathbb{N}$, в соответствующем кольце.

Если $Q_1 = \exists$, $Q_2 = \forall$, то истинность предложения Φ в стабильной линейной группе равносильна существованию такого индекса n_0, что предложения $\tilde{\Phi}n_0, m$ истинны в соответствующем кольце для всех натуральных m.

Если, наконец, $Q_1 = \forall$, $Q_2 = \exists$, то истинность предложения Φ в стабильной линейной группе равносильна тому, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$, для которого предложение $\tilde{\Phi}n, m$ истинно в соответствующем кольце.

Таким образом, видя предложение Φ, мы можем определить вид подмножества $\Gamma \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, такого что истинности всех предложений $\{\tilde{\Phi}_{n,m} \mid (n,m) \in \Gamma\}$ в кольце R будет достаточно для истинности предложения Φ в группе $\mathrm{GL}(R)$.

Предположим теперь, что некоторое предложение Φ с двумя кванторами в предварённой нормальной форме истинно в группе $\mathrm{GL}(R)$, а кольца R и S элементарно эквивалентны. Рассмотрим все истинные в кольце R предложения $\tilde{\Phi}_{n,m}$ и сформируем соответствующее множество

$$\Gamma = \{(n,m) \mid \tilde{\Phi}_{n,m} \text{ истинно в } R\}.$$

Так как кольца R и S элементарно эквивалентны, то

$$\Gamma = \{(n,m) \mid \tilde{\Phi}_{n,m} \text{ истинно в } S\},$$

а это означает, что Φ истинно в группе $\mathrm{GL}(S)$, что нам и требовалось доказать.

3. Рассуждая совершенно аналогично, если имеется предложение

$$\Phi = Q_1 X_1 \ldots Q_t X_t \varphi(X_1, \ldots, X_t) = Q_1 X_1 \psi(X_1),$$

то для него можно построить счётное множество переводов $\tilde{\Phi}_{n_1,\ldots,n_t}$ вида

$$Q_1 A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n_1 1} & \ldots & a_{n_1 n_1} \end{pmatrix} \left(\left(\exists\, A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & \ldots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & \ldots & a'_{nn} \end{pmatrix} \; A_1 A'_1 = A'_1 A_1 = E \right) \# \, \tilde{\psi}(A_1)_{n_2,\ldots,n_t} \right).$$

Также аналогично предыдущему пункту по виду кванторной приставки предложения Φ мы можем определить вид подмножеств $\Gamma \subset \mathbb{N}^t$, для которых из того, что

$$\Gamma \supseteq \{(n_1, \ldots, n_t) \in \mathbb{N}^t \mid \tilde{\Phi}_{n_1,\ldots,n_t} \text{ истинно в } R\},$$

следует, что Φ истинно в $\mathrm{GL}(R)$.

Виды множеств Γ определяются легко: если мы видим квантор существования, то по данной оси должно существовать хотя бы одно натуральное число, для которого будет выделяться соответствующее подмножество по другим осям, определяемое кванторами, стоящими правее; если перед нами квантор всеобщности, то подмножества по другим осям должны выделяться для каждого натурального числа по данной оси.

Например, для перемены кванторов $\forall\forall\exists\forall$ подходят множества $\Gamma \subset \mathbb{N}^4$, у которых для любой пары $(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ существует такое натуральное $m(k, l)$, что четвёрка $(k, l, m(k, l), n)$ принадлежит Γ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Теперь мы готовы доказать первую из наших двух основных теорем.

Теорема 7. *Если произвольные ассоциативные кольца с единицей R и S элементарно эквивалентны, то стабильные линейные группы $\mathrm{GL}(R)$ и $\mathrm{GL}(S)$ также элементарно эквивалентны.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное предложение первого порядка Φ группового языка с t кванторами в предварённой нормальной форме. Определим по нему (как описано выше) все подмножества $\Gamma \subseteq \mathbb{N}^t$, для которых из истинности всех переводов $\tilde{\Phi}_{n_1,\ldots,n_t}$ при $(n_1, \ldots, n_t) \in \Gamma$ над кольцом следует истинность предложения Φ в соответствующей стабильной группе.

Если предложение Φ истинно в группе $\mathrm{GL}(R)$, то множество

$$\mathcal{M}_R := \{(n_1, \ldots, n_t) \in \mathbb{N}^t \mid \tilde{\Phi}_{n_1,\ldots,n_t} \text{ истинно в } R\}$$

содержит одно из описанных множеств Γ_0.

Так как кольца R и S элементарно эквивалентны, то $\mathcal{M}_R = \mathcal{M}_S$, поэтому $\mathcal{M}_S$ также содержит множество Γ_0, из чего следует, что предложение Φ выполняется в группе $\mathrm{GL}(S)$.

Значит, любое предложение, истинное в группе $\mathrm{GL}(R)$, истинно и в группе $\mathrm{GL}(S)$. Аналогично доказывается и обратное утверждение, поэтому группы $\mathrm{GL}(R)$ и $\mathrm{GL}(S)$ элементарно эквивалентны. □

5. Если группы эквивалентны, то и кольца эквивалентны

Теперь от произвольных колец перейдём к коммутативным локальным кольцам с $1/2$.

Рассмотрим группу $\mathrm{GL}(R)$, где R — коммутативное кольцо, $2 \in R^*$. Обозначим её единицу через E. Для упрощения формул будем писать $A \sim B$ вместо $\exists U\ A = UBU^{-1}$ и говорить, что A *сопряжённая* B. Также положим

$$D_k = \mathrm{diag}[\underbrace{-1, \ldots, -1}_{k}, 1, \ldots].$$

Следующая лемма доказывается, например, в [10], но следует она и из классических результатов линейной алгебры.

Лемма 1. *Для любого конечного числа попарно коммутирующих инволюций группы* $\mathrm{GL}_n(R)$ *над коммутативным локальным кольцом с* $1/2$ *существует базис, в котором все они имеют диагональный вид с* ± 1 *на диагонали. Ясно, что то же самое условие выполняется и в стабильной линейной группе* $\mathrm{GL}(R)$.

Пусть A и B — коммутирующие инволюции, сопряжённые D_k. Фиксируем такой базис, что обе эти инволюции имеют диагональный вид. Поскольку при замене базиса собственные значения матрицы сохраняются, получаем, что и в A, и в B на диагонали ровно k элементов -1. Рассмотрим произведение AB. Ясно, что это диагональная матрица, в которой чётное, меньшее $2k$ число элементов -1. Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 2. *Инволюция с диагональным видом* D_{2k} *представима в виде произведения двух коммутирующих инволюций, сопряжённых* D_l*, тогда и только тогда, когда* $k \leqslant l$.

Рассмотрим формулу

$$\varphi(A,B) := (A^2 = E) \wedge (B^2 = E) \wedge \exists P \ \exists Q \ (P \sim Q \sim B) \wedge (PQ = QP = A).$$

Две инволюции A и B удовлетворяют этой формуле тогда и только тогда, когда A представляется произведением двух коммутирующих инволюций, сопряжённых матрице B. Также ясно, что замена любого аргумента на сопряжённый ничего не меняет.

Фиксируем первый аргумент формулы (инволюцию A) и посмотрим на те инволюции, которые при подстановке в качестве второго аргумента дают ложную формулу:

$$\mathfrak{X}(A) := \{X \in \mathrm{GL}(R) \mid X^2 = E \wedge \neg\varphi(A,X)\}.$$

Ясно, что $\mathfrak{X}(E) = \varnothing$.

Лемма 3. *Любые две инволюции из* $\mathfrak{X}(A)$ *являются сопряжёнными тогда и только тогда, когда* $A \sim D_2$.

Доказательство. Если $A \sim D_2$, то $\mathfrak{X}(A)$ состоит только из E.

Если же $A \sim D_{2k}$, где $k \geqslant 2$, то в $\mathfrak{X}(A)$ есть не сопряжённые друг другу матрицы E и D_1. □

Таким образом, формуле

$$\phi_2(A) := (A \neq E) \wedge \big(\forall P \ \forall Q \ \big(\neg\varphi(A,P) \wedge \neg\varphi(A,Q)\big) \Rightarrow P \sim Q\big)$$

удовлетворяют лишь матрицы, сопряжённые D_2.

Рассмотрим произведение двух коммутирующих сопряжённых D_2 матриц, не равное единице и не сопряжённое D_2. Это матрица, сопряжённая D_4.

Множество $\mathfrak{X}(D_4)$ состоит из матриц, сопряжённых либо E, либо D_1. Поэтому формулой

$$\phi_1(A) := \neg\varphi(D_4, A) \wedge A \neq E$$

можно выделить сопряжённую D_1 матрицу.

Рассмотрим теперь три различных попарно коммутирующих инволюции, сопряжённые D_1. Обозначим их через A_1, A_2 и A_3 и будем считать, что мы фиксировали такой базис, что

$$A_1 = \mathrm{diag}[-1, 1, 1, 1, \ldots], \quad A_2 = \mathrm{diag}[1, -1, 1, 1, \ldots], \quad A_3 = \mathrm{diag}[1, 1, -1, 1, \ldots].$$

Рассмотрим множество $\mathfrak{C}$ матриц, сопряжённых D_1, коммутирующих и с A_1, и с A_2, и с A_3, но им не равных:

$$\mathfrak{C} := \{C \in \mathrm{GL}(R) \mid (C \sim D_1) \wedge \\ \wedge (C \neq A_1) \wedge (C \neq A_2) \wedge (C \neq A_3) \wedge (CA_1 = A_1C \wedge CA_2 = A_2C \wedge CA_3 = A_3C)\}.$$

Лемма 4. *Любая матрица из $\mathfrak{C}$ имеет вид $\mathrm{diag}[1, 1, 1, C_0]$, где C_0 — инволюция в $\mathrm{GL}(R)$.*

Доказательство. Матрица C в диагональном виде имеет ровно одну минус единицу. Поскольку C коммутирует со всеми A_i, $i = 1, 2, 3$, то в нашем базисе она имеет вид $\mathrm{diag}[\alpha, \beta, \gamma, C']$, где C' — некоторая матрица из $\mathrm{GL}(R)$. Так как $C^2 = E$, то $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1$, т. е. $\alpha = \pm 1$, $\beta = \pm 1$, $\gamma = \pm 1$.

Так как C может иметь только одну -1 на диагонали и не совпадает ни с одной A_i, то $\alpha = \beta = \gamma = 1$. □

Рассмотрим центр множества $\mathfrak{C}$. Очевидно, что он изоморфен группе $\mathrm{GL}_3(R)$. Таким образом, мы выделили формулами первого порядка в $\mathrm{GL}(R)$ подгруппу, изоморфную группе $\mathrm{GL}_3(R)$, и можем переходить к доказательству второй основной теоремы.

Теорема 8. *Пусть R_1 и R_2 — коммутативные локальные кольца с обратимой двойкой. Если стабильные линейные группы $\mathrm{GL}(R_1)$ и $\mathrm{GL}(R_2)$ элементарно эквивалентны, то кольца R_1 и R_2 также элементарно эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{GL}(R_1) \equiv \mathrm{GL}(R_2)$. Так как в предыдущих леммах мы показали, что подгруппа GL_3 является формульной в группе GL для коммутативного локального кольца с обратимой двойкой, то это означает, что $\mathrm{GL}_3(R_1) \equiv \mathrm{GL}_3(R_2)$. По теореме Бейдара—Михалёва из [30] отсюда следует, что $R_1 \equiv R_2$. □

В результате из двух предыдущих теорем получаем критерий элементарной эквивалентности стабильных линейных групп над коммутативными локальными кольцами с $1/2$.

Следствие 1. *Пусть R_1 и R_2 — коммутативные локальные кольца с обратимой двойкой. Стабильные линейные группы $\mathrm{GL}(R_1)$ и $\mathrm{GL}(R_2)$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда кольца R_1 и R_2 элементарно эквивалентны.*

Литература

[1] Аткарская А. С. Стабильные группы над ассоциативными кольцами с 1/2. Описание изоморфизмов стабильных унитарных групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 4. — С. 3—21.

[2] Брагин В. А., Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность линейных групп над кольцами с конечным числом центральных идемпотентов и над булевыми кольцами // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 1. — С. 45—55.

[3] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами // УМН. — 1998. — Т. 53, № 2. — С. 137—138.

[4] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над полями // Фундамент. и прикл. матем. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1265—1278.

[5] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность групп Шевалле // УМН. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 157—158.

[6] Бунина Е. И. Автоморфизмы присоединённых групп Шевалле типов B_2 и G_2 над локальными кольцами // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, вып. 4. — С. 3—27.

[7] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типа B_l над локальными кольцами с 1/2 // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Т. 15, вып. 7. — С. 3—47. — arXiv:0911.4243.

[8] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Т. 15, вып. 7. — С. 47—80.

[9] Бунина Е. И. Автоморфизмы и нормализаторы групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с 1/2 // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Т. 15, вып. 2. — С. 35—59. — arXiv:0907.5595.

[10] Бунина Е. И. Автоморфизмы элементарных присоединённых групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами // Алгебра и логика. — 2009. — Т. 48, № 1. — С. 443—470. — arXiv:math/0702046.

[11] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность групп Шевалле над локальными кольцами // Матем. сб. — 2010. — Т. 201, № 3. — С. 3—20.

[12] Бунина Е. И., Верёвкин П. А. Автоморфизмы групп Шевалле типа G_2 над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 7. — С. 49—66.

[13] Бунина Е. И., Верёвкин П. А. Нормализатор группы Шевалле типа G_2 над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 1. — С. 57—62.

[14] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов абелевых p-групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2004. — Т. 10, вып. 2. — С. 135—224.

[15] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Элементарные свойства категорий модулей над кольцом, колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов модулей // Фундамент. и прикл. матем. — 2004. — Т. 10, вып. 2. — С. 51—134.

[16] Бунина Е. И., Михалёв А. В., Пинус А. Г. Элементарная и другие близкие логические эквивалентности классических универсальных алгебр. — М.: Изд-во МЦНМО, 2015.

[17] Бунина Е. И., Михалёв А. В., Ройзнер М. А. Критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов и колец эндоморфизмов абелевых p-групп // Докл. РАН. — 2014. — Т. 457, № 1. — С. 11—12.

[18] Голубчик И. З. Линейные группы над ассоциативными кольцами: Дис.... докт. физ.-мат. наук. — Уфа, 1998.

[19] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизмы общей линейной группы над ассоциативными кольцами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1983. — № 3. — С. 61—72.

[20] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизм унитарных групп над ассоциативными кольцами // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1983. — Т. 132. — С. 97—109.

[21] Зельманов Е. И. Изоморфизмы линейных групп над ассоциативным кольцом // Сиб. матем. журн. — 1985. — Т. 26, № 4. — С. 49—67.

[22] Мальцев А. И. Об элементарных свойствах линейных групп // Проблемы математики и механики. — Новосибирск, 1961. — С. 110—132.

[23] О'Мира О. Лекции о симплектических группах. — М.: Мир, 1979.

[24] О'Мира О. Лекции о линейных группах // Автоморфизмы классических групп. — М.: Мир, 1976. — С. 57—167.

[25] Петечук В. М. Автоморфизмы симплектической группы $\mathrm{Sp}_n(R)$ над некоторыми локальными кольцами. — Деп. в ВИНИТИ; № 2224-80.

[26] Петечук В. М. Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами // Матем. сб. — 1982. — Т. 117, № 4. — С. 534—547.

[27] Петечук В. М. Изоморфизмы симплектических групп над коммутативными кольцами // Алгебра и логика. — 1983. — Т. 22, № 5. — С. 551—562.

[28] Помфрэ Ж., Макдональд Б. Автоморфизмы группы GL_n над локальным кольцом // Автоморфизмы классических групп. — М.: Мир, 1976. — С. 176—187.

[29] Abe E. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // Algebra Anal. — 1993. — Vol. 5, no. 2. — P. 74—90.

[30] Beidar C. I., Mikhalev A. V. On Mal'cev's theorem on elementary equivalence of linear groups // Proc. of the Int. Conf. on Algebra Dedicated to the Memory of A. I. Malcev (Novosibirsk, 1989) / L. A. Bokut', A. I. Mal'cev, A. I. Kostrikin, eds. — Amer. Math. Soc., 1992. — (Contemp. Math.; Vol. 131). — P. 29—35.

[31] Borel A., Tits J. Homomorphismes «abstraits» de groupes algébriques simples // Ann. Math. — 1973. — Vol. 73. — P. 499—571.

[32] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of type F_4 over local rings with 1/2 // J. Algebra. — 2010. — Vol. 323. — P. 2270—2289. — arXiv:0907.5592.

[33] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings // J. Algebra. — 2012. — Vol. 355, no. 1. — P. 154—170.

[34] Carter R. W., Chen Yu. Automorphisms of affine Kac—Moody groups and related Chevalley groups over rings // J. Algebra. — 1993. — Vol. 155. — P. 44—94.

[35] Chen Yu. Isomorphic Chevalley groups over integral domains // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1994. — Vol. 92. — P. 231—237.

[36] Chen Yu. Automorphisms of simple Chevalley groups over $\mathbb{Q}$-algebras // Tôhoku Math. J. — 1995. — Vol. 348. — P. 81—97.

[37] Chen Yu. On representations of elementary subgroups of Chevalley groups over algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1995. — Vol. 123, no. 8. — P. 2357—2361.

[38] Chen Yu. Isomorphisms of adjoint Chevalley groups over integral domains // Trans. Amer. Math. Soc. — 1996. — Vol. 348, no. 2. — P. 1—19.

[39] Chen Yu. Isomorphisms of Chevalley groups over algebras // J. Algebra. — 2000. — Vol. 226. — P. 719—741.

[40] Dieudonné J. On the Automorphisms of Classical Groups. — Amer. Math. Soc., 1951. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 2).

[41] Golubchik I. Z. Isomorphisms of the linear general group $\mathrm{GL}_n(R)$, $n \geqslant 4$, over an associative ring // Contemp. Math. — 1992. — Vol. 131, no. 1. — P. 123—136.

[42] Hahn A. J., O'Meara O. T. The Classical Groups and K-Theory. — Berlin: Springer, 1989.

[43] Hua L. K. On the automorphisms of the symplectic group over any field // Ann. Math. — 1948. — Vol. 49. — P. 739—759.

[44] Hua L. K., Reiner I. Automorphisms of unimodular groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1951. — Vol. 71. — P. 331—348.

[45] Humphreys J. F. On the automorphisms of infinite Chevalley groups // Can. J. Math. — 1969. — Vol. 21. — P. 908—911.

[46] Johnson A. A. The automorphisms of the unitary groups over infinite fields // Amer. J. Math. — 1973. — Vol. 95, no. 1. — P. 87—107.

[47] Klyachko A. A. Automorphisms and isomorphisms of Chevalley groups and algebras. — 2007. — arXiv:math/0708.2256v3.

[48] Landin J., Reiner I. Automorphisms of the general linear group over a principal ideal domain // Ann. Math. — 1957. — Vol. 65, no. 3. — P. 519—526.

[49] Li Fuan. Infinite Steinberg groups // Acta Math. Sinica. — 1994. — Vol. 10, no. 2. — P. 149—157.

[50] McQueen L., McDonald B. R. Automorphisms of the symplectic group over a local ring // J. Algebra. — 1974. — Vol. 30, no. 1—3. — P. 485—495.

[51] Rickart C. E. Isomorphic group of linear transformations. I // Amer. J. Math. — 1950. — Vol. 72. — P. 451—464.

[52] Rickart C. E. Isomorphic group of linear transformations. II // Amer. J. Math. — 1951. — Vol. 73. — P. 697—716.

[53] Schreier O., van der Waerden B. L. Die Automorphismen der projektiven Gruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1928. — Bd. 6. — S. 303—322.

[54] Shi-Jian Yan. Linear groups over a ring // Chinese Math. Acta. — 1965. — Vol. 7, no. 2. — P. 163—179.

[55] Steinberg R. Automorphisms of finite linear groups // Can. J. Math. — 1960. — Vol. 121. — P. 606—615.

[56] Stephenson W. Lattice isomorphism between modules // J. London Math. Soc. — 1969. — Vol. 1. — P. 177—188.

[57] Tolstykh V. Elementary equivalence of infinite-dimensional classical groups // Ann. Pure Appl. Logic. — 2000. — Vol. 105. — P. 103—156.

[58] Wan C. A. On the automorphism of linear group over a noncommutative principal ideal domain of characteristic $\neq 2$ // Acta Math. Sinica. — 1957. — Vol. 7. — P. 533—573.

[59] Waterhouse W. C. Automorphisms of $\mathrm{GL}_n(R)$ // Proc. Amer. Math. Soc. — 1980. — Vol. 79. — P. 347—351.