Гомоморфизмы групп лиевского типа

И. З. ГОЛУБЧИК
Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы
e-mail: mgolubchik@mail.ru

А. И. МУРСЕЕВА
Уфимский политехнический колледж
e-mail: mAlsou@mail.ru

УДК 512.81

Ключевые слова: группы лиевского типа, представления групп, конгруэнц-подгруппы, PI-кольца.

Аннотация

В работе описаны гомоморфизмы групп лиевского типа $E(g)$ в группы обратимых элементов $u(R)$ ассоциативных колец R для широкого класса колец R, содержащего, в частности, произвольные подкольца в кольцах матриц над телами, а также нётеровы кольца.

Abstract

I. Z. Golubchik, A. I. Murseeva, Homomorphisms of Lie groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 83—92.

In this paper, the authors describe homomorphisms of Lie groups into the groups $u(R)$ of invertible elements of rings R for a large class of rings R, which contains, in particular, subrings of matrix rings and also Noetherian rings.

1. Ограниченные представления групп лиевского типа

Пусть P — подполе в поле комплексных чисел, содержащее все корни из единицы, n — целое число, $n \neq 0$,

$$G_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} \,\middle|\, \alpha, \beta \in P,\ \alpha \neq 0 \right\}.$$

Ясно, что G_n — группа.

Теорема 1. *Пусть R — ассоциативная алгебра с 1 над полем P и существует $m > 0$, такое что в R нет ортогональной системы $e_1, e_2, \ldots, e_m$, состоящей из ненулевых идемпотентов. Пусть $\varphi\colon G_n \to u(R)$ — гомоморфизм групп, где*

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 1, с. 83—92.

$u(R)$ — группа обратимых элементов кольца R. Тогда для любого $\beta \in P$ элементы

$$\varphi\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

унипотентны, т. е.

$$\left(\varphi\begin{pmatrix}1 & \beta\\ 0 & 1\end{pmatrix}-1\right)^k=0$$

для некоторого натурального k.

Данная теорема позволяет сводить ограниченные представления групп лиевского типа к представлению соответствующих алгебр Ли. Ядра этих представлений — конгруэнц-подгруппы.

Лемма 1. *Пусть B — ассоциативное кольцо с 1, A — коммутативное подкольцо в B, $b_1,\ldots,b_m \in B$ и $B = Ab_1+\ldots+Ab_m$. Тогда в кольце B выполнено стандартное тождество степени m^2+1.*

Доказательство. Действительно, если $r \in B$, то

$$b_i\cdot r=\sum_{j=1}^{m} s_{ji}b_j,$$

где $s_{ji}\in A$, и значит, для $\lambda_i \in A$

$$\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i b_i)r=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\lambda_i s_{ji}b_j=\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m}s_{ji}\lambda_i\right)b_j.$$

Мы воспользовались коммутативностью кольца A. Значит, для матриц $T = (s_{ji})$,

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \ldots\\ \lambda_m\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\mu_1\\ \ldots\\ \mu_m\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \ldots\\ \lambda_m\end{pmatrix} \tag{1}$$

справедливо

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i b_i\right)r=\sum_{j=1}^{m}\mu_j b_j. \tag{2}$$

Обозначим через $\bar r$ множество матриц $T\in A_{m\times m}$, для которых выполнены условия (1) и (2). Покажем, что

$$\bar r+\bar s\subseteq\overline{r+s}, \tag{3}$$

$$\bar r\cdot\bar s\subseteq\overline{s\cdot r}, \tag{4}$$

$$\bar r-\bar s\subseteq\overline{r-s}, \tag{5}$$

$$\bar 0+\bar 0=\bar 0, \tag{6}$$

$$\bar r=a+\bar 0,\ \text{где } a\in\bar r, \tag{7}$$

$$\bar r=\bar s \text{ тогда и только тогда, когда } r=s. \tag{8}$$

Действительно, свойства (3)—(7) вытекают из условий (1), (2), аксиом ассоциативности и дистрибутивности и определения $\bar{r}$, свойство (8) вытекает из того, что если $B \in \bar{r} \cap \bar{s}$, то $1 \cdot r = 1 \cdot s$ и $r = s$. Тогда $\bar{0}$ — двусторонний идеал подкольца C в $A_{m\times m}$, где

$$C = \bigcup_{\gamma \in B} \bar{r}.$$

Из свойства (7) следует, что $\bar{r}$ — элемент фактор-кольца $C/\bar{0}$ и включения в свойствах (3), (5) для фактор-кольца $C/\bar{0}$ можно заменить на равенства. Наконец, из свойств (3)—(8) следует, что отображение $\psi(r) = \bar{r} \in C/\bar{0}$ задаёт антиизоморфизм колец B и $C/\bar{0}$.

Очевидно, что в кольце матриц $A_{m\times m}$ выполнено стандартное тождество степени m^2+1, так как A — коммутативное кольцо. Значит, и в подкольце $C \subseteq A_{m\times m}$ и в фактор-кольце $C/\bar{0}$ также выполнено стандартное тождество степени m^2+1. Но B антиизоморфно $C/\bar{0}$. Значит, в B также выполнено стандартное тождество степени m^2+1. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1. Пусть $\varepsilon \in P$, $\varepsilon^k = 1$, и B — подалгебра в R, порождённая

$$\bar{\varepsilon} = \varphi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^n \end{pmatrix}$$

и P-подалгеброй A, порождённой

$$\left\{ \varphi \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \gamma \in P \right\}.$$

Тогда A — коммутативное подкольцо в B и $P[\bar{\varepsilon}]$ — фактор-кольцо кольца $P[x]/(x^k-1) = S_1$. Но P содержит все корни многочлена x^k-1, и значит, S_1 — прямая сумма k экземпляров поля P. Так как в R не более m ненулевых ортогональных идемпотентов, то $P[\bar{\varepsilon}]$ — прямая сумма не более чем m экземпляров поля P, и значит, базис системы элементов $\bar{\varepsilon}^1, \ldots, \bar{\varepsilon}^k$ над P состоит из не более чем m элементов $b_1, \ldots, b_{m_1}$, $m_1 \leqslant m$, но $\bar{\varepsilon} A \bar{\varepsilon}^{-1} \subseteq A$, и значит,

$$B = \sum_{i=1}^{k} A\bar{\varepsilon}^k = \sum_{j=1}^{m_1} Ab_j.$$

По лемме 1 в кольце B выполнено стандартное тождество степени m^2+1, и значит, $\operatorname{pideg} B \leqslant m^2 + 1/2$.

Наконец, по теореме Колчина—Мальцева о почти триангулируемости разрешимой подгруппы в кольце матриц над алгебраически замкнутым полем и теореме о строении первичных PI-колец получаем, что элемент

$$\left[\bar{\varepsilon}^l, \varphi \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^l \right] -$$

унипотент кольца B, l зависит лишь от pi-степени B, т. е. является функцией от m. Подбирая $k > nl$ и $\gamma = 1/l\beta(\varepsilon^{nl} - 1)^{-1}$, получаем, что

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

унипотент в R для любого $\beta \in P$. Теорема 1 доказана. □

2. Стандартные представления групп лиевского типа

Определение 1. Пусть $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, K — конечное подмножество в $\mathbb{Z}^n$, $g = \bigoplus\limits_{\alpha \in K} g_\alpha$ — конечно градуированная алгебра Ли, не обязательно конечномерная над полем рациональных чисел,

$$g_0 \subseteq \sum_{\alpha \neq 0} [g_\alpha, g_{-\alpha}], \quad g_\alpha \subseteq \sum_{\beta} [g_\beta, g_{\alpha-\beta}],$$

где β и α линейно независимы, $E(g)$ — группа, порождённая $e^{\operatorname{ad} x_\alpha}$, $\alpha \neq 0$, $x_\alpha \in g_\alpha$.

Определение 2. Пусть R — произвольная ассоциативная алгебра над $\mathbb{Q}$ с 1. Элемент $a \in R$ называется унипотентным, если $(a-1)^n = 0$ для некоторого натурального n. Гомоморфизм $\varphi\colon E(g) \to u(R)$, где $u(R)$ — группа обратимых элементов кольца R, назовём стандартным представлением группы лиевского типа $E(g)$, если все элементы $\varphi\big(e^{\operatorname{ad}(x_\alpha)}\big)$ — унипотенты при $\alpha \neq 0$, $x_\alpha \in g_\alpha$.

Теорема 2. *Стандартные представления групп лиевского типа $E(g)$ сводятся к гомоморфизмам алгебры Ли g, и ядра этих представлений — конгруэнц-подгруппы. Так как $\varphi\big(e^{\operatorname{ad}(x_\alpha)}\big)$ — унипотенты, то $\varphi\big(e^{\operatorname{ad}(x_\alpha)}\big) = e^{y_\alpha}$, где y_α — нильпотентный элемент кольца R. Доказывается, что отображение $\theta(x_\alpha) = \operatorname{der}(y_\alpha)$ продолжается до гомоморфизма алгебры Ли $\theta\colon g \to \operatorname{Inder}(R_1)$, где R_1 — подкольцо в R, порождённое $\varphi\big(E(g)\big)$. Справедливы следующие формулы*:

1) $\theta(AxA^{-1}) = \varphi(A)\theta(x)\varphi(A^{-1})$, $A \in E(g)$, $x \in g$;
2) $[E(g), C(\operatorname{Ker}\theta)] \subseteq \operatorname{Ker}\varphi \subseteq C(\operatorname{Ker}\theta)$, *где*

$$C(\operatorname{Ker}\theta) = \{A \in E(g) \mid [AxA^{-1} - x \in \operatorname{Ker}\theta] \text{ для каждого } x \in g\}.$$

Доказательство. Так как $\varphi(e^{\operatorname{ad}(x_\alpha)}) = e^{y_\alpha}$, где $\alpha \neq 0$, $x_\alpha \in g_\alpha$ и y_α — нильпотентный элемент кольца R, то для $\lambda \in Q$

$$\varphi\big(e^{\lambda \operatorname{ad} x_\alpha}\big) = e^{\lambda y_\alpha}. \tag{9}$$

Положим

$$\tau(x_\alpha) = y_\alpha. \tag{10}$$

1. Пусть $x_\alpha, x'_\alpha \in g_\alpha$, $x_\beta \in g_\beta$, где α, β линейно независимы. Покажем, что

$$\tau([x_\alpha, x_\beta]) = [\tau(x_\alpha), \tau(x_\beta)], \tag{11}$$

$$\tau(x_\alpha + x'_\alpha) = \tau(x_\alpha) + \tau(x'_\alpha). \tag{12}$$

Действительно, по формуле Кэмпбелла—Хаусдорфа

$$[e^{\lambda\tau(x_\alpha)}, e^{\lambda\tau(x_\beta)}] = \big[\varphi\big(e^{\lambda\,\mathrm{ad}(x_\alpha)}\big), \varphi\big(e^{\lambda\,\mathrm{ad}(x_\beta)}\big)\big] = \varphi\big(e^{\lambda^2\,\mathrm{ad}[x_\alpha, x_\beta]}\big) \cdot \prod_{i=3}^{k} \varphi e^{\lambda^i\,\mathrm{ad}\, z\gamma_i},$$

где $\gamma_i = m_i\alpha + n_i\beta$, $m_i + n_i = i$.

Приравнивая коэффициенты при λ^2 в последнем равенстве и учитывая (9), получаем, что $[\tau(x_\alpha), \tau(x_\beta)] = \tau[x_\alpha, x_\beta]$, поскольку $\varphi\big(e^{\lambda^2\,\mathrm{ad}[x_\alpha, x_\beta]}\big) = e^{\lambda^2\tau[x_\alpha, x_\beta]}$, $[x_\alpha, x_\beta] \in g_{\alpha+\beta}$. Аналогично по формуле Кэмпбелла—Хаусдорфа

$$e^{\lambda\tau(x_\alpha)} \cdot e^{\lambda\tau(x'_\alpha)} = \varphi\big(e^{\lambda\,\mathrm{ad}(x_\alpha)}\big) \cdot \varphi\big(e^{\lambda\,\mathrm{ad}(x'_\alpha)}\big) = \varphi\big(e^{\lambda\,\mathrm{ad}(x_\alpha + x'_\alpha)}\big) \cdot \prod_{j=2}^{k} \varphi\big(e^{\lambda^j\,\mathrm{ad}(z_{j\alpha})}\big),$$

где $z_{j\alpha} \in g_{j\alpha}$.

Приравнивая коэффициенты при λ в последнем равенстве и учитывая (9), получаем, что $\tau(x_\alpha + x'_\alpha) = \tau(x_\alpha) + \tau(x'_\alpha)$, поскольку $\varphi\big(e^{\lambda\,\mathrm{ad}(x_\alpha + x'_\alpha)}\big) = e^{\lambda\tau(x_\alpha + x'_\alpha)}$, $x_\alpha + x'_\alpha \in g_\alpha$.

2. Покажем, что отображение

$$\theta(x_\alpha) = \mathrm{der}\,\tau(x_\alpha), \tag{13}$$

где $\mathrm{der}\, a(b) = ab - ba$, $a, b \in R_1$ и R_1 — подкольцо в R, порождаемое $\varphi\big(E(g)\big)$, продолжается до гомоморфизма алгебр Ли

$$\theta\colon g \to \mathrm{Inder}(R_1), \tag{14}$$

где $\mathrm{Inder}(R_1)$ порождается внутренними дифференцированиями $\mathrm{der}\, a$, $a \in R_1$.

Действительно, положим $\bar{g}$ равным алгебре Ли с образующими $\bar{x}_\alpha$, где $x_\alpha \in g_\alpha$, $\alpha \neq 0$, и соотношениями

$$[\bar{x}_\alpha, \bar{x}_\beta] = \overline{[x_\alpha, x_\beta]}, \tag{15}$$

где α и β линейно независимы,

$$\bar{x}_\alpha + \bar{y}_\alpha = \overline{x_\alpha + y_\alpha}. \tag{16}$$

Из пункта 1 следует, что существует гомоморфизм алгебры Ли

$$\tau\colon \bar{g} \to \mathrm{Inder}(R_1),$$

для которого

$$\tau(\bar{x}_\alpha) = \tau(x_\alpha). \tag{17}$$

Кроме того, из (15), (16) следует, что существует гомоморфизм $\theta_2\colon \bar{g} \to g$, для которого

$$\theta_2(\bar{x}_\alpha) = x_\alpha. \tag{18}$$

Наконец, по определению алгебры Ли g если $x \in \operatorname{Ker}\theta_2$ и $\alpha \neq 0$, $\alpha \in K$, то

$$x = \sum_{i=1}^{k} [\bar{x}_i, \bar{y}_i],$$

где $x_i \in g_{\beta_i}$, $y_i \in g_{-\beta_i}$ и β_i линейно независимы с α. Тогда

$$[\tau(x), \tau(x_\alpha)] = \left[\sum_{i=1}^{k} [\tau(\bar{x}_i), \tau(\bar{y}_i)], \tau(x_\alpha)\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \big[\tau(x_i), [\tau(y_i), \tau(x_i)]\big] = \sum_{i=1}^{k} \tau\big[x_i, [y_i, x_\alpha]\big] = \tau\left[\left[\sum_{i=1}^{k} x_i, y_i\right], x_\alpha\right] = 0,$$

поскольку

$$\sum_{i=1}^{k} [x_i, y_i] = \theta_2(x) = 0.$$

Мы получили, что $\operatorname{Ker}\tau_2$ лежит в центре кольца R_1, порождённого $\tau(g_\alpha)$, $\alpha \neq 0$, и значит, для $\theta_2(x) = \operatorname{der}\tau_2(x) \operatorname{Ker}\theta_1 \subseteq \operatorname{Ker}\theta_2$, и отображение θ продолжается до гомоморфизма $\theta\colon g \to \operatorname{Inder} R_1$.

3. Докажем, что $\theta(AxA^{-1}) = \varphi(A)\theta(x)\varphi(A^{-1})$.

Действительно, пусть α и β — линейно независимые векторы из K и $x_\alpha \in g_\alpha$, $x_\beta \in g_\beta$. Тогда для $\lambda \in Q$

$$B = \varphi\big(e^{\operatorname{ad} x_\alpha} \cdot e^{\lambda \operatorname{ad} x_\beta} \cdot e^{-\operatorname{ad} x_\alpha}\big) = \varphi\big(e^{\operatorname{ad}(x_\alpha)}\big) \cdot e^{\lambda\tau(x_\beta)} \cdot \varphi\big(e^{-\operatorname{ad}(x_\alpha)}\big) \tag{19}$$

и

$$B = \varphi\big(e^{\lambda e^{\operatorname{ad} x_\alpha \cdot \operatorname{ad} x_\beta} \cdot e^{-\operatorname{ad} x_\alpha}}\big) = \varphi\left(e^{\lambda \sum\limits_{i=0}^{m} \frac{1}{m!} \operatorname{ad}(\operatorname{ad}(x_\alpha)^n(x_\beta))}\right) =$$
$$= \varphi \prod_{i=0}^{n} e^{\lambda \frac{1}{m!} \operatorname{ad}(\operatorname{ad}(x_\alpha^n) \cdot x_\beta)} \cdot \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda^{k_j} \operatorname{ad}(y_{\gamma_j})}, \quad k_j > 1.$$

Имеем

$$B = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda \frac{1}{m!} \tau(\operatorname{ad} x_\alpha^n(x_\beta))} \cdot \prod_{j=1}^{n} e^{\lambda^{k_j} \tau(y_{\gamma_j})} = 1 + \sum_{i=0}^{n} \lambda\tau\left(\frac{1}{m!}\big((\operatorname{ad} x_\alpha)^m x_\beta\big)\right) + \lambda^2 P(\lambda).$$

С другой стороны, из (19) следует, что

$$B = 1 + \lambda\varphi(e^{\operatorname{ad} x_\alpha})\tau(y_\alpha)\varphi(e^{-\operatorname{ad} x_\alpha}) + \lambda^2 P(\lambda).$$

Приравнивая коэффициенты при λ, получаем, что

$$\sum_{i=0}^{m} \tau\left(\frac{1}{m!} \operatorname{ad} x_\alpha^m(x_\beta)\right) = \varphi(e^{\operatorname{ad} x_\alpha})\tau(x_\beta)\varphi(e^{-\operatorname{ad} x_\alpha}).$$

Поскольку $\theta(y_\gamma) = \operatorname{der}\tau(y_\gamma)$ и θ — гомоморфизм алгебр Ли, имеем

$$\theta\big((e^{\operatorname{ad} x_\alpha})\cdot x_\beta\cdot(e^{-\operatorname{ad} x_\alpha})\big) = \theta\Big(\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{m!}\operatorname{ad} x_\alpha^m(x_\beta)\Big) = \varphi(e^{\operatorname{ad} x_\alpha})\cdot\theta(x_\beta)\cdot\varphi(e^{-\operatorname{ad} x_\alpha}).$$

Поскольку алгебра Ли g порождается элементами x_β, где $x_\beta \in g_\beta$ и β линейно независимо с α, то

$$\theta(e^{\operatorname{ad} x_\alpha} x e^{-\operatorname{ad} x_\alpha}) = \varphi(e^{\operatorname{ad} x_\alpha})\cdot\theta(x)\cdot\varphi(e^{-\operatorname{ad} x_\alpha})$$

для всех $x \in g$.

Группа $E(g)$ порождается элементами $e^{\operatorname{ad} x_\alpha}$, $\alpha \neq 0$, поэтому $\theta(AxA^{-1}) = \varphi(A)\tau(x)\varphi(A^{-1})$ для всех $x \in g$, $A \in E(g)$.

4. Докажем, что

$$[E(g), C(\operatorname{Ker}(\theta))] \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi) \subseteq C(\operatorname{Ker}\theta),$$

где

$$C(\operatorname{Ker}\theta) = \{A \in E(g) \mid [AxA^{-1} - x \in \operatorname{Ker}\theta] \text{ для всех } x \in g\}.$$

Действительно, пусть $A \in \operatorname{Ker}\varphi$, $x \in g$. Тогда

$$\theta(AxA^{-1} - x) = \varphi(A)\theta(x)\varphi(A^{-1}) - \theta(x) = 0$$

и $AxA^{-1} - x \in \operatorname{Ker}\theta$, $A \subseteq C(\operatorname{Ker}\theta)$. Мы показали, что $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq C(\operatorname{Ker}\theta)$.

Пусть теперь $B \in C(\operatorname{Ker}\theta)$, $\alpha \neq 0$, $x_\alpha \in g_\alpha$. Тогда $Bx_\alpha B^{-1} - x_\alpha \in \operatorname{Ker}\theta$ и

$$0 = \theta(Bx_\alpha B^{-1} - x_\alpha) = \varphi(B)\theta(x_\alpha)\varphi(B^{-1}) - \theta(x_\alpha).$$

Следовательно,

$$\varphi(B)\tau(x_\alpha)\varphi(B^{-1}) = \tau(x_\alpha) + z, \tag{20}$$

где z из центра кольца R_1. Но для $\beta \neq 0$

$$g_\beta \subseteq \sum_\beta [g_\alpha, g_{\beta-\alpha}], \tag{21}$$

где β линейно независимо с α, и из (20), (21) следует, что $\varphi(B)\tau(x_\beta)\varphi(B^{-1}) = \tau(x_\beta)$. Значит, $\varphi(B)$ лежит в центре кольца R_1 и $\varphi[B, E(g)] = 1$, $[B, E(g)] \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$.

Мы показали, что $\big[C\big(\operatorname{Ker}(\theta), E(g)\big)\big] \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$.

Теорема 2 доказана. □

Определение 3. Кольцо R назовём ограниченным, если существует натуральное число m, для которого в кольце R нет системы из m ненулевых ортогональных идемпотентов.

Класс ограниченных колец очень широк и содержит, в частности, произвольные подкольца в кольцах матриц над телами, а также нётеровы кольца.

Основной в работе является следующая теорема 3.

Пусть P — подполе в поле комплексных чисел, содержащее все корни из 1. В теореме 3, в отличие от теоремы 2, алгебра Ли $g = \bigoplus\limits_{\alpha\in K} g_\alpha$ является алгеброй над полем P, а не над полем рациональных чисел. Напомним, что $\operatorname{Aut} g$ — группа автоморфизмов алгебры Ли g, а $E(g)$ — подгруппа в $\operatorname{Aut} g$, порождённая элементами $e^{\operatorname{ad} x_\alpha}$, $\alpha \neq 0$, $x_\alpha \in g_\alpha$. Пусть D — подгруппа в $\operatorname{Aut} g$, порождённая элементами $D_i(\lambda)$, где $\lambda \in P$, $\lambda \neq 0$, и $D_i(\lambda)(x_\alpha) = \lambda^{\alpha_i} \cdot x_\alpha$, $G(g)$ — некоторая подгруппа в $\operatorname{Aut} g$, содержащая $E(g)$ и D, такая что $BE(g)B^{-1} = E(g)$ для всех $B \in G(g)$.

Теорема 3. *Пусть R — ограниченное ассоциативное кольцо, R — алгебра над полем P и $\varphi\colon G(g) \to u(R)$ — гомоморфизм групп. Тогда существует гомоморфизм алгебр Ли $\Theta\colon g \to \operatorname{Inder} R_1$, где R_1 — подкольцо R, порождённое $\varphi\big(E(g)\big)$, для которого*

$$\Theta(AxA^{-1}) = \varphi(A) \cdot \Theta(x) \cdot \varphi(A)^{-1}$$

для всех $x \in g$, $A \in G(g)$ и

$$[E(g), C(\operatorname{Ker}\Theta)] \subseteq \operatorname{Ker}\varphi \subseteq C(\operatorname{Ker}\Theta),$$

где

$$C(\operatorname{Ker}\Theta) = \{A \in G(g) \mid [AxA^{-1} - x \in \operatorname{Ker}\Theta] \text{ для всех } x \in g\}.$$

Доказательство. Фиксируем $x_\alpha \in g_\alpha$, $\alpha \neq 0$. Пусть $\alpha_i \neq 0$, i фиксируем, и H — подгруппа в $G(g)$,

$$H = \{D_i(\lambda) \cdot e^{\mu \cdot \operatorname{ad} x_\alpha},\ \lambda, \mu \in P,\ \lambda \neq 0\}.$$

Тогда H изоморфна группе

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \,\middle|\, \mu, \lambda \in P,\ \lambda \neq 0 \right\}$$

и $n = -\alpha_i$.

По теореме 1 $\varphi(e^{\mu \operatorname{ad} x_\alpha})$ — унипотентные элементы кольца R, и значит, представление $\varphi\colon E(g) \to u(R)$ стандартное. Тогда по теореме 2 существует гомоморфизм алгебр Ли $\Theta\colon g \to \operatorname{Inder} R_1$, для которого

$$\Theta(AxA^{-1}) = \varphi(A) \cdot \Theta(x) \cdot \varphi(A)^{-1} \tag{22}$$

при $x \in g$, $A \in E(g)$.

1. Докажем, что

$$\Theta(BxB^{-1}) = \varphi(B) \cdot \Theta(x) \cdot \varphi(B^{-1}) \tag{23}$$

при $x \in g$, $B \in G(g)$.

Докажем сначала, что элемент

$$z = \Theta(BxB^{-1}) - \varphi(B) \cdot \Theta(x) \cdot \varphi(B^{-1}) \tag{24}$$

перестановочен с $\Theta(g)$.

Действительно, для $\lambda \in Q$ по определению группы $G(g)$ $Be^{\operatorname{ad}\lambda x_\alpha}B^{-1} = A \in E(g)$. По (22)

$$\varphi(B)\cdot\varphi\big(e^{\lambda\operatorname{ad}(x_\alpha)}\big)\cdot\varphi\big(B^{-1}\big)\cdot\Theta(y)\cdot\varphi(B)\cdot\varphi(e^{-\lambda\operatorname{ad}x_\alpha})\varphi(B)^{-1} = \\ = \Theta\big(e^{\lambda\operatorname{ad}(Bx_\alpha B^{-1})}ye^{-\lambda\operatorname{ad}Bx_\alpha B^{-1}}\big),$$

где $\alpha \neq 0$, $x_\alpha \in g_\alpha$.

Приравнивая коэффициенты при λ в многочленах по λ в правой и левой частях, получаем, что

$$[\varphi(B)\Theta(x_\alpha)\varphi(B)^{-1} - \Theta(B(x_\alpha)B^{-1}), \Theta(y)] = 0$$

для всех $x_\alpha \in g_\alpha$, $\alpha \neq 0$ и $y \in g$. Тогда элемент $\varphi(B)\Theta(x)\varphi(B^{-1}) - \Theta(BxB^{-1})$ перестановочен с $\Theta(g)$, для всех $x \in g$ условие (24) доказано.

Пусть $z = \operatorname{der} z_1$, $z_1 \in R_1$. По определению отображений τ и Θ из теоремы 2

$$\Theta(x_\alpha) = \operatorname{der}\tau(x_\alpha),$$
$$\Theta(y_\beta) = \operatorname{der}\tau(y_\beta),$$

где α и β линейно независимы, и из условия (24) следует, что $\operatorname{der}[z_1, \tau(x_\alpha)] = \operatorname{der}[z_1, \tau(x_\beta)] = 0$. Тогда $[z_1, \tau(x_\alpha)]$ и $[z_1, \tau(x_\beta)]$ лежат в центре кольца R_1 и

$$0 = \big[z_1, [\tau(x_\alpha), \tau(x_\beta)]\big] = \big[z_1, \tau[x_\alpha, x_\beta]\big].$$

Следовательно, z_1 перестановочен с $\tau(g_{\alpha+\beta})$ и z_1 лежит в центре кольца R_1. Тогда $z = \operatorname{der} z_1 = 0$. Равенство (23) доказано.

Доказательство формулы $[C(\operatorname{Ker}\Theta), E(g)] \subseteq \operatorname{Ker}\varphi \subseteq C(\operatorname{Ker}\Theta)$ вытекает из пункта 1 и проводится так же, как доказательство пункта 4 из теоремы 2.

Теорема 3 доказана. □

Литература

[1] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле некоторых типов над локальными кольцами // УМН. — 2009. — Т. 62, № 5. — С. 250—267.

[2] Голубчик И. З. Группы лиевского типа над PI-кольцами // Фундамент. и прикл. матем. — 1997. — Т. 3, вып. 2. — С. 399—424.

[3] Голубчик И. З. Эпиморфизмы групп лиевского типа // IV Междунар. алг. конф., посвящ. 60-летию со дня рождения Ю. И. Мерзлякова (1940—1995). — Новосибирск, 2000. — С. 61.

[4] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативным кольцом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1983. — № 3. — С. 61—71.

[5] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизмы унитарных групп над ассоциативным кольцом // Модули и алгебраические группы. 2. Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1983. — Т. 132. — С. 97—109.

[6] Зельманов Е. И. Изоморфизм полной линейной группы над ассоциативным кольцом // Сиб. матем. журн. — 1985. — Т. 26, № 4. — С. 49—67.

[7] Исмагилова А. С. Изоморфизмы унитарных групп над кольцами // Фундамент. и прикл. матем. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 55—70.

[8] Golubchik I. Z. Isomorphisms of the general linear group $\mathrm{GL}_n(R)$, $n \geqslant 4$ over an associative ring // Proc. of the Internat. Conf. on Algebra Dedicated to the Memory of A. I. Mal'cev. — Amer. Math. Soc., 1992. — (Contemp. Math.; Vol. 131, Pt. 1). — P. 123—136.