Об аддитивной структуре и асимптотике коразмерностей c_n алгебры $F^{(5)}$

А. В. ГРИШИН
Московский педагогический государственный университет
e-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

УДК 512.552.4

Ключевые слова: тождество лиевой нильпотентности степени 5, собственный многочлен, расширенная алгебра Грассмана, многочлен Холла, инверсный многочлен.

Аннотация

В работе исследуется аддитивная структура алгебры $F^{(5)}$, т. е. относительно свободной, ассоциативной, счётно порождённой алгебры с тождеством $[x_1, \ldots, x_5] = 0$ над бесконечным полем характеристики, отличной от 2, 3. Изучается пространство собственных полилинейных многочленов в этой алгебре и построение базиса в одном из основных его подпространств. В качестве приложения получаются оценки коразмерностей $c_n = \dim P_n/P_n \cap T^{(5)}$, где P_n — пространство полилинейных многочленов степени n в $F^{(5)}$, а $T^{(5)}$ — T-идеал, порождённый длинным коммутатором $[x_1, \ldots, x_5]$.

Abstract

A. V. Grishin, On the additive structure and asymptotics of codimensions c_n in the algebra $F^{(5)}$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 93—104.

In this paper, we investigate the additive structure of the algebra $F^{(5)}$, i.e., a relatively free, associative, countably-generated algebra with the identity $[x_1, \ldots, x_5] = 0$ over an infinite field of characteristic $\neq 2, 3$. We study the space of proper multilinear polynomials in this algebra and means of basis construction in one of its basic subspaces. As an additional result, we obtain estimations of codimensions $c_n = \dim P_n/P_n \cap T^{(5)}$, where P_n is the space of multilinear polynomials of degree n in $F^{(5)}$ and $T^{(5)}$ is the T-ideal generated by the long commutator $[x_1, \ldots, x_5]$.

Введение

Пусть $F = k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ — свободная счётно порождённая ассоциативная алгебра с единицей над бесконечным полем k характеристики, отличной от 2, 3, $\bar{F} = F/T$ — относительно свободная алгебра, где T — унитарно замкнутый T-идеал. Через P_n обозначим пространство всех полилинейных многочленов степени n от переменных x_i в алгебре F, $T_n = P_n \cap T$. Пусть $P(\bar{F})$ — подалгебра в $\bar{F}$, состоящая из собственных многочленов, т. е. линейных комбинаций произведений коммутаторов произвольной длины от порождающих x_i

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 1, с. 93—104.

алгебры $\bar{F}$ (для упрощения элементы из $\bar{F}$ и из F обозначаются одинаково), и Ω — множество упорядоченных одночленов $x_{i_1}^{m_1} \ldots x_{i_r}^{m_r}$, где $i_1 < \ldots < i_r$.

Имеет место следующий фольклорно известный факт (доказательство тривиально).

Предложение 1. *$\bar{F} = \Omega P(\bar{F})$ — свободный правый $P(\bar{F})$-модуль со свободными порождающими из Ω.*

Наша цель — исследование аддитивной структуры алгебры $F^{(5)} = F/T^{(5)}$, где $T^{(n)} = ([x_1, \ldots, x_n])^T$ — T-идеал, порождённый длинным коммутатором $[x_1, \ldots, x_n]$. Учитывая, что аддитивная структура алгебры $F^{(4)}$ достаточно хорошо известна, исследуется T-идеал $T^{(4)}$ в алгебре $F^{(5)}$, точнее, полилинейная часть пространства $P(F^{(5)}) \cap T^{(4)}$, а также пространство $P_n/T_n^{(5)}$. Как показывает предложение 1, эти два пространства тесно связаны. Исследование аддитивной структуры, по существу, означает построение канонического базиса. Для пространства $P_n/T_n^{(5)}$ эта задача получила исчерпывающее решение в недавней работе С. В. Пчелинцева. Это весьма нетривиальный и тонкий результат. В настоящей работе используются более простые методы, которые не дают полного описания базиса, но позволяют оценить некоторые размерностные функции. Будем рассматривать $c_n(T^{(5)}) = \dim_k(P_n/T_n^{(5)})$ как функцию от n. Аналогичная функция $c_n(\mathfrak{W})$ для разных многообразий достаточно подробно изучалась многими авторами (см., например, [1, 5]) в основном в случае поля нулевой характеристики. Центральным результатом настоящей работы, помимо исследования базиса пространства $P_n/T_n^{(5)}$, является следующая теорема.

Теорема. *Существуют такие положительные числа A и B, что для всех достаточно больших n*

$$A\, 2^n n^2 < c_n(T^{(5)}) < B\, 2^n n^2.$$

В исследовании используются свойства длинных коммутаторов, рассмотренные в [3].

Для дальнейшего нам понадобятся следующие понятия и факты.

Расширенная алгебра Грассмана кратности m (см. [2])

Напомним конструкцию построения расширенной алгебры Грассмана $E^{(m)}$, предложенную в [3]. Пусть E — ассоциативная алгебра с единицей над полем k, заданная множеством порождающих e_m ($m \in \mathbb{N}$), θ_{ij} ($i, j \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant j$) и определяющими соотношениями

$$e_i \circ e_j = \theta_{ij}, \quad [\theta_{ij}, e_m] = 0.$$

Известно, что подалгебра в E, порождённая 1 и θ_{ij} ($i, j \in \mathbb{N}$), является алгеброй многочленов $k[\ldots, \theta_{ij}, \ldots]$ от коммутирующих переменных, а E — свободным модулем над алгеброй $k[\ldots, \theta_{ij}, \ldots]$ с базисом из *стандартных слов* $e_{i1} e_{i2} \ldots e_{in}$, где $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_n$.

Пусть Θ — идеал алгебры E, порождённый элементами вида θ_{ij}. Положим $E^{(m)} = E/\Theta^m$. В [2] доказано, что в алгебре $E^{(m)}$ выполнено тождество $LN(2m+1)$ лиевой нильпотентности степени $2m+1$.

Пусть $E^{(2)}$ — расширенная алгебра Грассмана кратности 2. *Каноническим образом* многочлена f из алгебры $F^{(5)}$ назовём его образ при специализации $x_i \mapsto e_i$. Будем обозначать его $\rho(f)$. Ясно, что $\rho(\lambda f + \mu g) = \lambda\rho(f) + \mu\rho(g)$.

Многочлен Холла

Рассмотрим многочлены $h(x,y,z) = \big[[x,y]^2, z\big]$ и $h'(x,y) = \big[[x,y]^2, y\big]$. В [3] доказано, что h — ненулевой центральный многочлен алгебры $F^{(5)}$, а $h' = 0$ — нетривиальное тождество алгебры $E^{(2)}$. Более того, в [4] показано, что T-идеал, порождённый $LN(5)$ и h', описывает всю систему тождеств алгебры $E^{(2)}$.

Вспомогательные факты

Лемма Латышева (о зацеплении). $[x_n, x_{n+1}][x_1, \ldots, x_n] \in T^{(n+1)}$.

Лемма Воличенко. $T^{(3)}T^{(n)} \subset T^{(n+1)}$.

Алгебра $F^{(3)}$ обладает следующими свойствами:

$$[x_1,x_2][x_3,x_4] = -[x_1,x_3][x_2,x_4],$$
$$[x_1,x_2][x_3,x_4] = [x_3,x_4][x_1,x_2].$$

Пусть $\{c_1, \ldots, c_i, \ldots\}$ — множество всех коротких коммутаторов от порождающих в $F^{(5)}$, $C = k\langle c_1, \ldots, c_i, \ldots\rangle/I$, где I — идеал, порождённый элементами $[c_i, c_j]$ и $[x_{i_1}, x_{i_2}][x_{i_3}, x_{i_2}]$. С учётом леммы Воличенко можно считать, что $T^{(4)}$ — модуль над коммутативным кольцом C, а $P\big(F^{(5)}\big) \cap T^{(4)}$ — его C-подмодуль.

Пусть $U^{(1)}$ — C-модуль, порождённый всевозможными многочленами вида

$$c_1 \ldots c_m [u_1, u_2, u_3, u_4],$$

где c_i — короткие коммутаторы от порождающих x_i алгебры $F^{(5)}$, а $u_1, \ldots, u_4$ — некоторые порождающие этой алгебры, $u_1, \ldots, u_4 \in \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Аналогично рассматриваются C-модули $U^{(2)}$ и $U^{(3)}$, связанные с многочленами вида

$$c_1 \ldots c_m [u_1, u_2][u_3, u_4, u_5],$$
$$c_1 \ldots c_m ([u_1, u_2][u_3, u_4] + [u_1, u_4][u_3, u_2]).$$

Отметим ещё, что многочлен $c_1 \ldots c_m \big[[u_1, u_2], [u_3, u_4]\big]$, принадлежащий $P\big(F^{(5)}\big) \cap T^{(4)}$, из очевидных «лиевых» соображений лежит в $U^{(1)}$.

Непосредственная проверка показывает, что имеют место следующие факты.

Предложение 2. $T^{(4)} = \Omega\big(P\big(F^{(5)}\big) \cap T^{(4)}\big)$.

Предложение 3. $P\big(F^{(5)}\big) \cap T^{(4)} = U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)}$.

Следствие 1. $T^{(4)} = \Omega\big(U^{(1)} + U^{(2)} + U^{(3)}\big)$.

Это следствие показывает, что для исследования структуры полилинейной части идеала $T^{(4)}$ нужно исследовать все три пространства $U^{(i)}$.

1. О базисе пространства $U_n^{(1)}$

Пусть $F^{(5)} = F/T^{(5)}$, $T^{(5)} = ([x_1, \ldots, x_5])^T$, — относительно свободная алгебра. Её элементы обозначаются теми же буквами, что и элементы в $k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$. Переменные x_i иногда для удобства обозначаются другими буквами.

Рассмотрим полилинейные выражения $f(x_1, \ldots, x_n)$ вида

$$c_1 \ldots c_m[u_1, u_2, u_3, u_4], \tag{1}$$

где c_i — короткие коммутаторы, $m \geqslant 2$, $u_1, \ldots, u_4 \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, $n \geqslant 8$. Для удобства читателя сделаем следующий комментарий. Буквы u_i обозначают переменные «вообще», т. е. места, на которые могут быть поставлены любые переменные из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Будем говорить, что переменные $u_1, \ldots, u_4$ стоят на *первой*,..., *четвёртой* позициях и называть их *внутренними переменными* выражения (1). Остальные переменные будем называть *внешними*. Заметим, что в силу соотношений в алгебре $F^{(3)}$ и леммы Воличенко внешние переменные в выражении $c_1 \ldots c_m$ можно расставлять произвольным образом и при этом выражение (1) с точностью до знака не изменится. Обозначим через $U_n^{(1)}$ линейную оболочку выражений вида (1). Зафиксируем некоторую переменную t и рассмотрим подпространство $V_{n,t}$ в пространстве $U_n^{(1)}$, порождённое всеми многочленами вида (1), у которых t — внешняя переменная. На пространстве $V_{n,t}$ определим следующее *инверсное отображение*:

$$\mathrm{Inv}_i \colon V_{n,t} \to U_n^{(1)}, \quad f \mapsto f^{\sigma_i},$$

где $\sigma_i = (u_i\, t)$ — инверсия на $F^{(5)}$, т. е. подстановка вида

$$\begin{pmatrix} u_i & t \\ t & u_i \end{pmatrix},$$

при которой многочлен f^{σ_i} получается из f заменой в $c_1 \ldots c_m$ переменной t на переменную u_i, а u_i в $[u_1, u_2, u_3, u_4]$ — на t, т. е. t становится внутренней переменной. Заметим, что подстановка σ_i зависит от того, какая переменная находится у многочлена f на i-й позиции.

Пусть $W_{n,t}$ — подпространство в $U_n^{(1)}$, порождённое многочленами (будем называть их тоже *инверсными*) вида $f + f^{\sigma_i} = f^{1+\sigma_i}$, где $i = 2, 3$, т. е. переменные u_i из выражения (1) берутся только со второй и третьей позиции. Пусть f и g — многочлены вида (1). Многочлены $f^{1+\sigma_i}$ и $g^{1+\sigma_i}$ будем считать эквивалентными, если они совпадают на i-й позиции. Отметим, что количество классов эквивалентности равно $2(n-1)$.

Начнём с изучения фактор-пространства $U_n^{(1)}/W_{n,t}$. Для дальнейшего будут полезны следующие соотношения.

I. $[u_1, u_2, u_3, u_4] + [u_2, u_1, u_3, u_4] = 0$, т. е. $f + f^\sigma = f^{1+\sigma} = 0$, если

$$\sigma = (u_1\, u_2) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_2 & u_1 \end{pmatrix}.$$

Соотношение очевидно.

II. $f^{1+\sigma} = 0$, где

$$\sigma = (z\, u_4) = \begin{pmatrix} z & u_4 \\ u_4 & z \end{pmatrix},$$

z — любая внешняя переменная. Соотношение вытекает из стандартного *свойства зацепления*

$$[x_4, x_5][x_1, x_2, x_3, x_4] = 0.$$

III. $[x_1, x_2][x_1, x_2, x_3, x_4] = 0$. Равенство следует из центральности многочлена Холла. Значит, $f^{(1+\sigma)(1+\tau)} = 0$, где $\sigma = (u_1\, t)$, $\tau = (u_2\, z)$.

IV. *Свойство инверсии*. Пусть f и g — два многочлена, содержащие переменную a линейно. Пусть f_1 получается из f заменой a на y, а g_1 — заменой a на z, f_2 и g_2 — аналогичной заменой на z и на y. Если в алгебре $F^{(n)}$ произведение fg равно 0, то $f_1 g_1 + f_2 g_2 = 0$.

Лемма 1. $\dim\bigl(U_n^{(1)}/W_{n,t}\bigr) = 1$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$f_0 = d_1 \ldots d_m [x_1, x_2, x_3, x_4].$$

Нетрудно проверить, что, применяя соотношения I и II по модулю $W_{n,t}$, можно осуществить любую инверсию типа $\sigma = (u_i\, t)$. С помощью цепочки таких инверсий из указанного многочлена можно получить с точностью до знака любой многочлен (1). То, что никакой такой многочлен не лежит в $W_{n,t}$, следует из рассмотрения его канонического образа в $E^{(2)}$. $\square$

У пространства $W_{n,t}$ имеется серия подпространств $W_{n,t}^{(i,\sigma_i)}$, каждое из которых при фиксированных i и u_i является линейной оболочкой множества многочленов вида $f^{1+\sigma_i}$, являющегося классом введённого выше отношения эквивалентности и состоящего, как нетрудно убедиться, из $(n-2)(n-3)(n-4)$ многочленов, причём $W_{n,t}$ является прямой суммой всех таких подпространств. Количество фиксаций, т. е. подпространств $W_{n,t}^{(i,\sigma_i)}$, равно, очевидно, $2(n-1)$. Исследуем каждое из таких подпространств.

Всюду ниже $t = x_n$. Положим

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle = c_1 \ldots c_m [x_1, x_2, x_3, x_4].$$

В пространствах $W_{n,t}^{(2,\sigma_2)}$ рассмотрим инверсные многочлены

$$f_{\alpha\delta}^{(2)} = f^{1+\sigma_2} = \langle x_\gamma, x_n, x_\delta, x_\beta \rangle + \langle x_\gamma, x_\alpha, x_\delta, x_\beta \rangle,$$

где $x_\alpha \in \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, x_δ пробегает все переменные из $\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{x_\alpha, x_n\}$, x_γ — любая фиксированная переменная, отличная от x_α, x_δ, x_n, а x_β — любая переменная, отличная от x_α, x_γ, x_δ, x_n,

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} x_n & x_\alpha \\ x_\alpha & x_n \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что при построении системы многочленов $f^{(2)}_{\alpha\delta}$ сначала выбираются переменные x_α и x_δ (имеется $(n-1)(n-2)$ вариантов выбора), а затем уже фиксируются переменные x_γ и x_β с единственным условием, чтобы многочлены были полилинейны. При этом x_γ и x_β можно менять на любые другие переменные, отличные от x_α, x_δ, x_n, и многочлен будет оставаться тем же (с точностью до знака).

В пространствах $W^{(3,\sigma_3)}_{n,t}$ рассмотрим инверсные многочлены

$$f^{(3)}_{\alpha\gamma\delta} = f^{1+\sigma_3} = \langle x_\gamma, x_\delta, x_n, x_\beta\rangle + \langle x_\gamma, x_\delta, x_\alpha, x_\beta\rangle,$$

где $x_\alpha \in \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, x_δ пробегает все переменные из $\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{x_\alpha, x_n\}$, x_γ пробегает все переменные из $\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{x_\alpha, x_\delta, x_n\}$, x_β — любая фиксированная переменная из оставшихся с условием полилинейности,

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} x_n & x_\alpha \\ x_\alpha & x_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для получения всех многочленов $f^{(3)}_{\alpha\gamma\delta}$ с учётом свойства I имеется $(n-1)(n-2)(n-3)/2$ варианта.

Лемма 2. *Система многочленов* $\{f^{(2)}_{\alpha\delta}, f^{(3)}_{\alpha\gamma\delta}\}$ *порождает всё пространство* $W_{n,t}$.

Доказательство. Рассмотрим отдельно случаи $i = 2$ и $i = 3$.

Пусть $i = 2$. Тогда, учитывая свойство III, переменную x_γ с помощью допустимых инверсий в многочлене $f^{(2)}_{\alpha\delta}$ (т. е. инверсий по первой позиции, не меняющих с точностью до знака сам многочлен) можно заменить на любую другую внешнюю переменную. Учитывая свойство II, то же самое можно сказать о переменной x_β. Таким образом, из многочленов $f^{(2)}_{\alpha\delta}$ с помощью допустимых инверсий можно получить любой многочлен из пространства $W^{(2,\sigma_2)}_{n,t}$.

Пусть $i = 3$. В этом случае свойство III неприменимо, и многочлен $f^{(3)}_{\alpha\gamma\delta}$ может существенно зависеть теперь от x_γ, стоящего на первой позиции (но этого не происходит), а переменную x_β, стоящую на четвёртой позиции, можно, как и прежде, заменить на любую другую внешнюю переменную (по свойству II). Таким образом, из многочленов $f^{(3)}_{\alpha\gamma\delta}$ можно с помощью допустимых инверсий получить все элементы из $W^{(3,\sigma_3)}_{n,t}$. $\square$

Лемма 3. *Из многочленов системы* $\{f^{(2)}_{\alpha\delta}\}$ *с помощью линейных действий можно получить любой многочлен* $f^{(3)}_{\alpha\gamma\delta}$.

Доказательство. Достаточно показать, что любой многочлен $f^{(3)}_{\alpha\gamma\delta}$ выражается через многочлены типа $f^{(2)}_{\alpha\delta}$. Применяя тождество Якоби, имеем

$$\langle x_\gamma, x_\delta, x_n, x_\beta\rangle + \langle x_n, x_\gamma, x_\delta, x_\beta\rangle + \langle x_\delta, x_n, x_\gamma, x_\beta\rangle = 0.$$

Следовательно,

$$\langle x_\gamma, x_\delta, x_n, x_\beta\rangle = \langle x_\gamma, x_n, x_\delta, x_\beta\rangle - \langle x_\delta, x_n, x_\gamma, x_\beta\rangle.$$

Учитывая аналогичное соотношение, получающееся заменой x_n на x_α, имеем

$$f^{(3)}_{\alpha\gamma\delta} = f^{(2)}_{\alpha\delta} - f^{(2)}_{\alpha\gamma}.$$

Лемма доказана. □

Непосредственным следствием леммы 3 является следующий результат.

Лемма 4. $W^{(3,\sigma_3)}_{n,t} \subset W^{(2,\sigma_2)}_{n,t}$. *Система* $\{f^{(2)}_{\alpha\delta}\}$ *порождает всё пространство* $W_{n,t}$.

Лемма 5. *Система* $S = \{f_0, f^{(2)}_{\alpha\delta}\}$, *состоящая из* $1+(n-1)(n-2)$ *многочленов, линейно независима.*

Доказательство. Отметим, что канонический образ элемента

$$f_0 = \langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$$

равен с точностью до константы

$$(e_1e_4\theta_{23} - e_2e_4\theta_{13})e_5e_6\ldots e_se_{s+1} \tag{2}$$

(см. [2]).

Как следует из (2), канонические образы элементов из $\{f^{(2)}_{\alpha\delta}\}$ имеют вид

$$\rho\big(f^{(2)}_{\alpha\delta}\big) = (e_\gamma\theta_{\delta n} - e_n\theta_{\gamma\delta})A_1 + (e_\gamma\theta_{\delta\alpha} - e_\alpha\theta_{\gamma\delta})A_2,$$

где A_1, A_2 — произведения оставшихся e_i. Учитывая, что второе и четвёртое слагаемые взаимно противоположны, имеем, что $\rho\big(f^{(2)}_{\alpha\delta}\big) = e_\gamma(\theta_{\delta n}A_1 + \theta_{\delta\alpha}A_2)$. Сравнивая индексы, легко убедиться, что система канонических образов линейно независима. Следовательно, и сама система S линейно независима. □

Из лемм 4 и 5 вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Система S является базисом пространства $U^{(1)}_n$, и следовательно,* $\dim U^{(1)}_n = 1 + (n-1)(n-2)$.

2. Оценка размерности пространств $U^{(2)}_n$ и $U^{(3)}_n$

В предыдущем разделе был найден базис пространства $U^{(1)}_n$. Здесь мы не будем по такой же схеме давать полное описание базисов аналогичных пространств $U^{(2)}_n$ и $U^{(3)}_n$, но оценим их размерности, после чего применим полученные результаты к оцениванию чисел $c_n\big(T^{(5)}\big)$.

По аналогии с (1) рассмотрим всевозможные полилинейные выражения

$$f(x_1,\dots,x_n)=c_1\dots c_m[u_1,u_2,u_3][u_4,u_5], \tag{3}$$

где $m\geqslant 2$, $n\geqslant 8$, $u_1,\dots,u_5\in\{x_1,\dots,x_5\}$, c_i — короткие коммутаторы от порождающих x_i. Рассмотрим также аналогичные полилинейные выражения

$$c_1\dots c_m([u_1,u_2][u_3,u_4]+[u_1,u_4][u_3,u_2]). \tag{4}$$

Пусть $U_n^{(2)}$ и $U_n^{(3)}$ — линейные оболочки выражений вида (3) и (4) соответственно, $d_n^{(i)}=\dim U_n^{(i)}$. В предыдущем разделе было показано, что $d_n^{(1)}=1+(n-1)(n-2)$. Наша цель — доказать, что существует такое число $D>0$, что для всех n, начиная с некоторого, $d_n^{(i)}<Dn^2$.

Начнём с оценки $d_n^{(2)}$. По аналогии с предыдущим разделом назовём переменные u_1, u_2, u_3 из выражения (3) *внутренними* переменными, стоящими на первой, второй и третьей позициях. Остальные переменные назовём *внешними* для выражения (3).

Пусть $U_{n,x_i}^{(2)}$ — подпространство в $U_n^{(2)}$, порождённое множеством Π_i многочленов (3), содержащих переменную x_i в качестве внешней, Π — множество всех многочленов (3), $\Pi=\bigcup\Pi_i$. Как будет показано ниже, в объединении достаточно четырёх компонент.

Лемма 6. *Существует такое положительное число D, что $\dim U_{n,x_i}^{(2)}<Dn^2$ для всех достаточно больших n.*

Доказательство. Рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned}[u_1,u_2,u_3u_4,u_5]&=\big[[u_1,u_2,u_3]u_4+u_3[u_1,u_2,u_4],u_5\big]=\\&=[u_1,u_2,u_3,u_5]u_4+[u_1,u_2,u_3][u_4,u_5]+[u_3,u_5][u_1,u_2,u_4]+u_3[u_1,u_2,u_4,u_5].\end{aligned}$$

Из него следует, что

$$[u_1,u_2,u_3][u_4,u_5]=[u_3,u_5][u_1,u_2,u_4]+[u_1,u_2,u_3u_4,u_5]+\Delta, \tag{5}$$

где Δ — сумма двух многочленов, один из которых лежит в подпространстве $u_3U_{n-1,3}^{(1)}$, а другой в $u_4U_{n-1,4}^{(1)}$, где $U_{n-1,3}^{(1)}$ и $U_{n-1,4}^{(1)}$ — такие же подпространства, как и $U_n^{(1)}$, только от $n-1$ переменной (нет переменной u_3 или u_4). Легко убедиться, что их размерности тоже ограничены числом Dn^2. То же самое можно сказать про $u_3U_{n-1,3}^{(1)}$ и $u_4U_{n-1,4}^{(1)}$.

Положим для определённости $i=4$ и $u_4=x_4$. На первой, второй и третьей позициях выражения (3) может стоять любая переменная, кроме x_4. Переменная x_4 зафиксирована в положении u_4, а остальные u_i принимают любые значения, лишь бы сохранялась полилинейность. Оценим всевозможные варианты в правой части выражения (5). В первом слагаемом u_3 и u_5 ни на что не влияют, а за счёт u_1 и u_2 имеем $n(n-1)$ вариантов возможных значений многочлена.

Оценим второе слагаемое. Выражение $c_1\dots c_m[u_1,u_2,u_3u_4,u_5]$ рассмотрим с точки зрения техники предыдущего раздела. Там показано, что элементы

u_1 и u_5, по существу, ни на что не влияют (в элементах $f_{\alpha\beta}^{(i)}$ существенную роль играет только то, что стоит на второй и третьей позициях). Таким образом, u_2 может принимать значения $x_1, \ldots, x_n$ (кроме x_4), а u_3u_4 — значения $x_1x_4, \ldots, x_nx_4$, чтобы соблюдалась полилинейность. При этом возможны линейно независимые значения рассматриваемого многочлена. Это даёт менее Dn^2 вариантов. Следовательно, вклад в суммарную размерность каждой из трёх компонент меньше Dn^2. Лемма доказана. $\square$

Лемма 7. $U_n^{(2)} = U_{n,x_4}^{(2)} + U_{n,x_5}^{(2)} + U_{n,x_6}^{(2)} + U_{n,x_7}^{(2)}$.

Доказательство. Покажем, что $\Pi = \Pi_4 \cup \Pi_5 \cup \Pi_6 \cup \Pi_7$. Положим $\bar{\Pi}_i = \Pi \setminus \Pi_i$. Тогда $\bar{\Pi}_4 \cap \bar{\Pi}_5 \cap \bar{\Pi}_6 \cap \bar{\Pi}_7 = \varnothing$. Следовательно, $\Pi = \Pi_4 \cup \Pi_5 \cup \Pi_6 \cup \Pi_7$ и $U_n^{(2)} = U_{n,x_4}^{(2)} + U_{n,x_5}^{(2)} + U_{n,x_6}^{(2)} + U_{n,x_7}^{(2)}$. Лемма доказана. $\square$

Из доказанных лемм вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Существует такое положительное D, что $d_n^{(2)} < Dn^2$ для всех достаточно больших n.*

Доказательство. Пространство $U_n^{(2)}$ является суммой четырёх своих подпространств, причём размерность каждого из них меньше Dn^2. $\square$

Перейдём к оценке размерности пространства $U_n^{(3)}$. Это пространство является линейной оболочкой множества всевозможных полилинейных многочленов от n переменных вида $f = f_1 + f_2$, где

$$f_1 = c_1 \ldots c_m [u_1, u_2][u_3, u_4],$$
$$f_2 = c_1 \ldots c_m [u_1, u_4][u_3, u_2].$$

Будем использовать применительно к f_1 и f_2 прежнюю терминологию. Переменные $u_1, \ldots, u_4$ будем называть *внутренними*, а остальные — *внешними*. Пусть z и t — любые внешние переменные, отличные от $x_1, \ldots, x_4$. Как и прежде, определим инверсию на i-й позиции как подстановку

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} t & u_i \\ u_i & t \end{pmatrix}$$

и рассмотрим многочлены $f + f^{\sigma_i} = f_1 + f_1^{\sigma_i}$. Нас будут интересовать инверсии по первой и третьей позициям. Имеем

$$f_1 + f_1^{\sigma_1} = C([z,t][u_1,u_2][u_3,u_4] + [z,u_1][t,u_2][u_3,u_4]),$$
$$f_2 + f_2^{\sigma_1} = C([z,t][u_1,u_4][u_3,u_2] + [z,u_1][t,u_4][u_3,u_2]),$$
$$f_1 + f_1^{\sigma_3} = C([u_1,u_2][u_3,u_4][z,t] + [u_1,u_2][t,u_4][z,u_3]),$$
$$f_2 + f_2^{\sigma_3} = C([u_1,u_4][u_3,u_2][z,t] + [u_1,u_4][t,u_2][z,u_3]),$$

где C — произведение всех c_i без одного коммутатора $[z,t]$. При этом следует учитывать, что многочлены типа $[z,t][u_1,u_2] + [z,u_1][t,u_2]$ лежат в $T^{(3)}$, а произведение двух многочленов такого типа лежит в $T^{(5)}$ (лемма Воличенко).

Пусть W — линейная оболочка множества всех многочленов вида $f + f^{\sigma_i}$, $i = 1, 3$.

Лемма 8. *Пространство* $U_n^{(3)}/W$ *порождается многочленом вида*

$$c_1 \dots c_m([x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_4][x_3, x_2]).$$

Доказательство. Факторизация по соотношениям из W позволяет в элементах f из $U_n^{(3)}$ делать любые инверсии σ_i. За конечное число инверсий можно сначала $x_1, \dots, x_4$ сделать внешними, а затем поставить их на первую,..., четвёртую позиции соответственно. При этом ничего, кроме, может быть, знака не изменится. Это и даёт указанный многочлен. Лемма доказана. $\square$

Следствие 2. $\dim U_n^{(3)}/W \leqslant 1$.

Для формулировки следующей леммы будем использовать *инверсный* многочлен $g = [x_1, x_2][x_3, x_4] + [x_1, x_4][x_3, x_2]$.

Лемма 9. $\dim W < Dn^2$ *для всех достаточно больших* n.

Доказательство. Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} f_1 + f_1^{\sigma_1} &= C[u_3, u_4]g_1, \\ f_2 + f_2^{\sigma_1} &= C[u_3, u_2]g_2, \\ f_1 + f_1^{\sigma_3} &= C[u_1, u_2]g_3, \\ f_2 + f_2^{\sigma_3} &= C[u_1, u_4]g_4, \end{aligned}$$

где g_i — инверсный многочлен g от двух из четырёх переменных u_1, u_2, u_3, u_4 и фиксированных переменных z и t. При этом многочлен $C[u_i, u_j]$ с точностью до знака не зависит от расположения входящих в него оставшихся переменных. Таким образом, пространство W лежит в сумме четырёх пространств, размерность каждого из которых меньше Dn^2. $\square$

Из лемм 8 и 9 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Существует такое положительное* D, *что* $d_n^{(3)} < Dn^2$ *для всех достаточно больших* n.

Пусть $U_n = U_n^{(1)} + U_n^{(2)} + U_n^{(3)}$ — пространство всех собственных полилинейных многочленов степени n из $P\big(F^{(5)}\big) \cap T^{(4)}$, $d_n = \dim U_n$. Из теорем 1—3 следует, что найдутся такие положительные числа D_1 и D_2, что для всех достаточно больших натуральных n имеет место соотношение $D_1 n^2 < d_n < D_2 n^2$.

3. Оценка коразмерностей

Согласно предложениям 1—3 пространство $P_n/T_n^{(5)}$ распадается на два пространства. Первое пространство $P_n/T_n^{(4)}$ хорошо изучено (см., например, [1]), второе — прямая сумма подпространств в $T_n^{(4)}$ вида

$$x_{i_1} \dots x_{i_m}\big(U_{n-m}^{(1)} + U_{n-m}^{(2)} + U_{n-m}^{(3)}\big),$$

где $i_1 < \ldots < i_m$, а $U^{(i)}_{n-m}$ — подпространства полилинейных собственных многочленов, введённых выше, от переменных $\{x_1, \ldots, x_n\} \backslash \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}\}$. Количество таких подпространств равно, очевидно, $\binom{n}{m}$, а размерность каждого из них равна d_{n-m} и оценивается при некоторых положительных D_1 и D_2 соотношениями

$$D_1(n-m)^2 < d_{n-m} < D_2(n-m)^2$$

для всех достаточно больших n.

Оцениваемая коразмерность $c_n\bigl(T^{(5)}\bigr)$ распадается в сумму $c_n\bigl(T^{(4)}\bigr) + \Delta_n$, где Δ_n — размерность второго из введённых в начале раздела пространств. Числа $c_n\bigl(T^{(4)}\bigr)$, которые согласно [1] имеют вид

$$c_n\bigl(T^{(4)}\bigr) = 2^{n-1} + 2\binom{n}{3} + 2\binom{n}{4},$$

не могут повлиять на асимптотику $c_n\bigl(T^{(5)}\bigr)$.

Оценим Δ_n. Так как

$$\Delta_n = \sum_{m=0}^{n} d_{n-m}\binom{n}{m},$$

то

$$\Delta_n < d_n \sum \binom{n}{m} = D_2 2^n n^2.$$

С другой стороны,

$$\Delta_n > \sum_{m=[\frac{n}{2}]}^{n} d_{n-m}\binom{n}{m} > d_{n-[\frac{n}{2}]}\left(\binom{n}{\frac{n}{2}} + \ldots + \binom{n}{n}\right) >$$
$$> D_1\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)^2 2^{n-1} > A\,2^n n^2$$

для подходящего положительного A и достаточно больших n.

С учётом того что $c_n\bigl(T^{(4)}\bigr)$ не влияет на асимптотику оценки сверху, получаем окончательный результат.

Теорема 4. *Существуют такие положительные числа A и B, что для всех достаточно больших n*

$$A\,2^n n^2 < c_n\bigl(T^{(5)}\bigr) < B\,2^n n^2.$$

В заключение автор выражает признательность С. В. Пчелинцеву за полезные обсуждения.

Литература

[1] Воличенко И. Б. T-идеал, порождённый элементом $[x_1, x_2, x_3, x_4]$: Препринт. — Минск: Институт математики АН БССР, 1978.

[2] Гришин А. В., Цыбуля Л. М., Шокола А. А. О Т-пространствах и соотношениях в относительно свободных лиевски нильпотентных ассоциативных алгебрах // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 3. — С. 135—148.

[3] Гришин А. В., Пчелинцев С. В. О центрах относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности // Матем. сб. — 2015. — Т. 206, № 11. — С. 113—130.

[4] Гришин А. В., Пчелинцев С. В. Собственные центральные и ядерные многочлены относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности степени 5 и 6 // Матем. сб. — 2016. — Т. 207, № 12. — С. 54—72.

[5] Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M. Codimensions of algebras and growth functions // Adv. Math. — 2008. — Vol. 217. — P. 1027—1052.