# Монотонные линейные отображения матриц над полукольцами*

**А. Э. ГУТЕРМАН, Е. М. КРЕЙНЕС**
*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*
e-mail: alexander.guterman@gmail.com

**ЦИН-ВЭНЬ ВАН**
*Университет Шанхая, КНР*

УДК 512.643

**Ключевые слова:** полукольца, матрицы, частичные порядки, монотонные отображения.

**Аннотация**

Получена характеризация линейных отображений матриц над коммутативными антинегативными полукольцами, которые являются монотонными относительно минус-порядка, порядка Дрэйзина или $\sharp$-порядка.

**Abstract**

*A. E. Guterman, E. M. Kreines, Qing-Wen Wang, Monotone linear transformations on matrices over semirings*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 105—122.

We characterize linear transformations on matrices over commutative antinegative semirings that are monotone with respect to minus, star, and sharp partial orders.

*Александру Васильевичу Михалёву с восхищением*

## 1. Введение

Теория полуколец — активно развивающаяся область математики (см., например, [5, 8]). Полукольцо — это кольцо без вычитания, т. е. в полукольце только нулевой элемент имеет аддитивный обратный. Таким образом, все кольца являются полукольцами. Более того, полукольцами являются такие алгебраические системы, важные в комбинаторике, как булева алгебра подмножеств

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Национального научного фонда Китая (грант 11571220). Также работа первого автора частично поддержана грантами РФФИ 16-01-00113а и РНФ 16-11-10075, работа второго автора частично поддержана грантом РФФИ 15-31-20329.

конечного множества (сложением здесь является операция объединения подмножеств, а умножением — их пересечение), неотрицательные целые или вещественные числа (с обычной арифметикой), нечёткие множества и т. д. Линейная алгебра над полукольцами — это одно из ключевых направлений в современной теории полуколец с большим количеством глубоких и интересных задач, мотивированных целым рядом практических приложений (см., например, [11]). В частности, многие авторы исследовали различные обобщённые обратные для матриц над полукольцами и их свойства (см., например, работы [7, 10] и библиографию в них). Одно из стандартных приложений обобщённых обратных матриц — решение матричных уравнений. Другим таким классическим приложением является возможность введения отношений частичного порядка на матрицах при помощи обобщённых обратных (см. [4]).

В самом деле, целый ряд отношений порядка для матриц с коэффициентами из поля (минус-порядок, порядок Дрэйзина, $\sharp$-порядок и т. д.) можно определить неким стандартным образом при помощи ряда специальных классов обобщённых обратных матриц. Для минус-порядка это было установлено независимо Р. Хартвигом [9] и К. С. С. Намбурипадом [15]. М. П. Дрэйзин [6] установил это свойство для порядка, позже названного его именем. Для $\sharp$-порядка это было доказано С. К. Митрой [12]. Заметим, что эти отношения порядка актуальны как для теории матриц и теории полугрупп, так и для математической статистики (подробное изложение этого вопроса можно найти в [13]).

В настоящей работе мы вводим соответствующие отношения на матрицах над полукольцами и доказываем, что они действительно являются отношениями частичного порядка, т. е. эти отношения в самом деле являются антисимметричными, рефлексивными и транзитивными. Мы также исследуем свойства этих отношений и доказываем, что одни свойства этих порядков аналогичны соответствующим свойствам порядков над полем, в то время как другие свойства существенно отличаются. Основной результат данной работы — это характеризация биективных линейных преобразований матриц, монотонных относительно каждого из рассматриваемых порядков.

Наша работа построена следующим образом: в разделе 2 мы приводим основные определения и обозначения, в разделе 3 доказывается, что введённые отношения действительно являются отношениями порядка, и исследуются некоторые их свойства. В разделе 4 исследуются монотонные отображения, получена их характеризация. В разделе 5 полученная характеризация уточняется для некоторых специальных классов полуколец.

## 2. Определения и обозначения

**Определение 2.1.** *Полукольцо* $\mathcal{S}$ состоит из непустого множества $\mathcal{S}$ и двух бинарных операций, сложения $(+)$ и умножения $(\cdot)$, таких что

— $\mathcal{S}$ является абелевым моноидом по сложению (нейтральный элемент обозначается 0);

— $\mathcal{S}$ является полугруппой по умножению (нейтральный элемент, если существует, обозначается 1);
— умножение дистрибутивно по сложению с обеих сторон;
— $s0 = 0s = 0$ для всех $s \in S$.

В данной работе мы будем предполагать, что существует мультипликативная единица $1 \in \mathcal{S}$. Будем записывать операцию умножения, опуская символ умножения, когда это не приводит к разночтениям.

**Определение 2.2.** Полукольцо называется *антинегативным*, если в нём нет ненулевых элементов, имеющих аддитивный обратный.

**Определение 2.3.** Полукольцо называется *коммутативным*, если $ab = ba$ для произвольных $a, b \in \mathcal{S}$.

**Определение 2.4.** Полукольцо не имеет *делителей нуля*, если $ab = 0$ позволяет получить, что либо $a = 0$, либо $b = 0$.

В данной работе мы будем всегда предполагать, что $\mathcal{S}$ является коммутативным антинегативным полукольцом без делителей нуля.

Пусть $\mathrm{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ обозначает множество $m \times n$ матриц с коэффициентами из полукольца $\mathcal{S}$. Без ограничения общности будем предполагать, что $m \leqslant n$. Через $I_n$ будем обозначать единичную матрицу размера $n \times n$, $J_{m,n}$ обозначает $(m \times n)$-матрицу, состоящую из одних единиц, $O_{m,n}$ обозначает нулевую матрицу размера $m \times n$. Мы будем опускать индексы, когда размеры матриц очевидны из контекста, и будем писать $I$, $J$ и $O$ соответственно. $E_{i,j}$ обозначает матрицу с ровно одним ненулевым элементом, равным единице, на $(i, j)$-й позиции. Будем называть *клетками* матрицы, у которых в точности один ненулевой элемент, т. е. матрицы, являющиеся скалярными кратными матричных единиц. Будем обозначать через $\alpha E_{ii}$ диагональные клетки и через $E_{ij}$ при $i \neq j$ внедиагональные клетки. Будем говорить, что две клетки лежат на одной линии, если ненулевые элементы этих клеток лежат в одной строке или в одном столбце. Будем обозначать через $\nu(A)$ число ненулевых элементов матрицы $A$. Матрица $P \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ будет называться матрицей-перестановкой, отвечающей перестановке $\tau \in \mathrm{S}_n$, если

$$P = \sum_{i=1}^{n} E_{i\tau(i)}.$$

Пусть $R_i$ обозначает матрицу, $i$-я строка которой состоит из всех единиц, а остальные элементы равны нулю, и $C_j$ обозначает матрицу, $j$-й столбец которой состоит из одних единиц, а остальные элементы равны нулю. Будем обозначать через $A \oplus B$ блочно-диагональную матрицу вида

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}.$$

Заметим, что в этом смысле операция $\oplus$ не является коммутативной. Будем говорить, что матрица $A$ *мажорирует* матрицу $B$ в том и только том случае, если $b_{i,j} \neq 0$ позволяет заключить, что $a_{i,j} \neq 0$, в этом случае будем писать

$A \geqslant B$ или $B \leqslant A$. Если $A$ и $B$ — $(0,1)$-матрицы и $A \geqslant B$, то $A \setminus B$ обозначает матрицу $C$, где

$$c_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad b_{i,j} = 1, \\ a_{i,j} & \text{иначе.} \end{cases}$$

В дальнейшем нам понадобится следующая ранговая функция для матриц над полукольцами.

**Определение 2.5.** Пусть $\mathcal{S}$ — произвольное полукольцо. *Факторизационный ранг* $f(A)$ матрицы $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ равен наименьшему целому числу $k$, такому что $A = BC$ для некоторых матриц $B \in \mathrm{M}_{m,k}(\mathcal{S})$ и $C \in \mathrm{M}_{k,n}(\mathcal{S})$. Будет считаться, что только матрица, состоящая из всех нулей, имеет факторизационный ранг 0.

Заметим, что для матриц с элементами из поля факторизационный ранг совпадает с обычным рангом, однако эти функции могут отличаться для матриц над полукольцами (см., например, [3]).

Недавно обобщённые обратные над полукольцами подробно обсуждались и исследовались в [7, теоремы 3.1—3.3]. В частности, авторы указанной работы установили необходимые и достаточные условия существования обратной Мура—Пенроуза и групповой обобщённой обратной для матриц над полукольцами.

**Определение 2.6.** Матрица $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ называется *регулярной*, если существует такая матрица $X \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathcal{S})$, что $A = AXA$. Будем говорить, что эта матрица $X$ является $\{1\}$-*обратной* или *внутренней* обратной для $A$.

**Определение 2.7.** Матрица $Y \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathcal{S})$ называется $\{2\}$-*обратной* для $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, если $Y = YAY$. Такая матрица $Y$ также называется *внешней* обратной к матрице $A$.

**Замечание 2.8.** Заметим, что как $\{1\}$-обратная, так и $\{2\}$-обратная матрицы не единственные. Будем обозначать множества этих обратных для матрицы $A$ через $A\{1\}$ и $A\{2\}$ соответственно.

**Определение 2.9.** Матрица $X \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathcal{S})$ называется $\{1,2\}$-*обратной* или *рефлексивной обратной* для $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathcal{S})$, если $X \in A\{1\} \cap A\{2\}$. Множество рефлексивных обратных матрицы $A$ обозначается через $A\{1,2\}$.

**Определение 2.10.** Матрица $A \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathcal{S})$ имеет *групповую обратную*, если существует $X \in A\{1,2\}$, такая что $AX = XA$. Рассматриваемая матрица $X$ называется *групповой* обратной для матрицы $A$ и обозначается $A^\sharp$.

**Определение 2.11.** Отображение $*\colon \mathrm{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$, такое что $*\colon A \to A^*$, называется инволюцией, если равенства

$$(A^*)^* = A, \quad (A+B)^* = A^* + B^*, \quad (AB)^* = B^*A^*$$

справедливы для всех $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$.

**Пример 2.12.**

1. Транспонирование $A \to A^{\mathrm{t}}$ является инволюцией на $\mathrm{M}_n(\mathcal{S})$.

2. Если $\mathcal{S}$ — полукольцо с инволюцией $\tau$, то отображение $*\colon A \to (A^\tau)^{\mathrm{t}}$, где $A^\tau = \big(\tau(a_{ij})\big)$ состоит в поэлементном применении отображения $\tau$, также является инволюцией на $\mathrm{M}_n(\mathcal{S})$.

**Определение 2.13.** Пусть $*\colon \mathrm{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ — инволюция, $A \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$. Матрица $Z \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ называется *обратной Мура—Пенроуза* для матрицы $A$, если

$$A = AZA, \quad Z = ZAZ, \quad (AZ)^* = AZ, \quad (ZA)^* = ZA.$$

В этом случае матрица $A$ называется *обратимой по Муру—Пенроузу*.

Далее, основываясь на обобщённых обратных матрицах для матриц над полукольцами, мы вводим частичные порядки.

**Определение 2.14.** Пусть $A, B \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathcal{S})$. Будем говорить, что матрица $A$ меньше или равна матрице $B$ относительно *минус-порядка*, если существует такая матрица $A^- \in A\{1,2\}$, что $AA^- = BA^-$ и $A^-A = A^-B$. Данное отношение обозначается следующим образом: $A \overline{\leqslant} B$.

**Определение 2.15.** Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$. будем говорить, что матрица $A$ меньше или равна матрице $B$ относительно *порядка Дрэйзина*, если существует такая матрица $A^\dagger$, что $AA^\dagger = BA^\dagger$ и $A^\dagger A = A^\dagger B$. Это отношение обозначается $A \overset{*}{\leqslant} B$.

**Определение 2.16.** Пусть $A, B \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathcal{S})$. Будем говорить, что матрица $A$ меньше или равна матрице $B$ относительно *$\sharp$-порядка*, если существует матрица $A^\sharp$, такая что $AA^\sharp = BA^\sharp = A^\sharp B$. Это отношение обозначается $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$.

В каждом из приведённых выше определений мы будем использовать обозначения $A \overline{<} B$, $A \overset{\sharp}{<} B$, $A \overset{*}{<} B$ соответственно, если $A \neq B$.

# 3. Общие свойства

**Лемма 3.1.** *Каждое из отношений $\overline{\leqslant}$, $\overset{\sharp}{\leqslant}$ и $\overset{*}{\leqslant}$ определяет частичный порядок.*

**Доказательство.** 1. $\overline{\leqslant}$-порядок. Так как $\mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ — полугруппа относительно умножения матриц, то искомый результат следует из теоремы Хартвига [9].

2. $\overset{*}{\leqslant}$-порядок. Так как $\mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ является $*$-полугруппой относительно матричного умножения и транспонирования, то результат следует из теоремы Дрэйзина [6].

3. $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядок. Так как $\mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ является полугруппой относительно умножения матриц, то результат следует из теоремы Митча [14]. $\square$

Следующая лемма, доказанная в [6] для произвольных полугрупп, будет полезна для дальнейших рассуждений.

**Лемма 3.2 [6].** *Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$. Тогда $A \overset{*}{\leqslant} B$ в том и только том случае, когда $A^*A = A^*B$ и $AA^* = BA^*$.*

**Замечание 3.3.** Отношение $A \overset{-}{\leqslant} B$ для матриц над полями называется *минус-порядком*, так как оно эквивалентно условию вычитаемости ранга, а именно $A \overset{-}{\leqslant} B$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{rk}(B-A) = \mathrm{rk}(B) - \mathrm{rk}(A)$ (см. [9]). Важно заметить, что указанное выше условие может быть эквивалентно переформулировано с использованием понятия факторизационного ранга следующим образом:

$$\text{найдётся } C\text{, такая что } B = A + C \text{ и } f(B) = f(A) + f(C). \tag{1}$$

В то же время над полукольцом в общем случае операция вычитания не определена, и, кроме того, известны различные неэквивалентные определения ранговых функций. Однако последняя переформулировка отношения минус-порядка через факторизационный ранг подходит также и для матриц над полукольцами. Для начала установим, что в то время как над полями условие (1) эквивалентно определению 2.14, над полукольцами эта эквивалентность места не имееет.

**Пример 3.4.** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $A$ является идемпотентной, а значит, $X = A \in A\{1,2\}$ и $AX = XA = A^2 = A = I_2X = XI_2$, таким образом, $A \overset{-}{<} B$. Однако в силу антинегативности $\mathcal{S}$ не существует матрицы $C$, такой что $A + C = B$.

Этот пример можно легко распространить на матрицы произвольных размеров, рассматривая матрицы $A = E_{11} + E_{12} \overset{-}{<} B = I_n$.

Прямым следствием определений является тот факт, что соотношение $A \overset{*}{\leqslant} B$ позволяет заключить, что $A \overset{-}{\leqslant} B$, и из $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$ следует $A \overset{-}{\leqslant} B$ для всех $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$. Однако противоположная импликация не является справедливой. Кроме того, $\overset{*}{\leqslant}$-порядок не сильнее $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка и $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядок не сильнее $\overset{*}{\leqslant}$-порядка.

В следующих примерах мы демонстрируем, что все эти три отношения порядка являются различными отношениями для матриц над полукольцами.

**Пример 3.5.** Рассмотрим матрицы $A$ и $B$ из предыдущего примера. Тогда $A \overset{-}{\leqslant} B$ и $A \overset{\sharp}{\leqslant} B$, так как матрица $A$ является идемпотентной. Однако $A \overset{*}{\nleqslant} B$, так как

$$AA^{\mathrm{t}} = (1+1)E_{11} \neq BA^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}} = E_{11} + E_{12}.$$

**Пример 3.6.** Рассмотрим матрицы

$$A = E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus O_{n-2}, \quad B = E_{12} + E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus O_{n-2}.$$

Тогда $A^* = E_{21} \in A\{1,2\}$ и

$$E_{12}E_{21} = (E_{12} + E_{21})E_{21}, \quad E_{21}E_{12} = E_{21}(E_{12} + E_{21}).$$

Таким образом, $A \overset{-}{\leqslant} B$ и $A \overset{*}{\leqslant} B$. Однако $A$ не имеет групповой обобщённой обратной, так как

$$A\{1,2\} = \left\{ E_{21} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i E_{2i} \;\middle|\; \alpha_i \in \mathcal{S} \right\}$$

и никакая из матриц

$$E_{21} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i E_{2i}$$

не коммутирует с матрицей $E_{12}$. Таким образом, $A \overset{\sharp}{\nleqslant} B$.

**Лемма 3.7.** *Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ и $A \leqslant B$, где $\leqslant$ совпадает с одним из отношений $\overset{-}{\leqslant}$, $\overset{*}{\leqslant}$, $\overset{\sharp}{\leqslant}$. Тогда $f(A) \leqslant f(B)$.*

**Доказательство.** В силу [3, утверждение 4.4] получаем, что $f(AB) \leqslant \leqslant \min\{f(A), f(B)\}$. Тогда для произвольной матрицы $X \in A\{2\}$ справедливо, что $f(X) = f(A)$. Таким образом, в силу уравнения $XAX = X$ получаем, что $f(AX) = f(X) = f(A)$. Так как каждый из рассматриваемых порядков определяется условием $AX = BX$, имеем, что $f(B) \geqslant f(AX) = f(A)$. $\square$

## 4. Монотонные линейные отображения

**Определение 4.1.** Отображение $T\colon \mathrm{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ называется *линейным*, если $T(A+B) = T(A)+T(B)$ и $T(\alpha A) = \alpha T(A)$ для всех $\alpha \in \mathcal{S}$, $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$.

**Определение 4.2.** Будем говорить, что линейное отображение *сохраняет* отношение $\rho$, если из $X \,\rho\, Y$ получаем, что $T(X) \,\rho\, T(Y)$.

**Определение 4.3.** Будем говорить, что линейное отображение *строго сохраняет* отношение $\rho$, если условие $X \,\rho\, Y$ эквивалентно $T(X) \,\rho\, T(Y)$.

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

**Лемма 4.4 [1, лемма 2.1].** *Пусть $T\colon \mathrm{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ — линейное отображение. Отображение $T$ биективно тогда и только тогда, когда оно сюръективно, что в свою очередь эквивалентно существованию такой биекции $\sigma$ на множестве $n^2$ пар $\{(i,j) \mid 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$, что для всех $i$, $j$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, справедливо соотношение $T(E_{ij}) = \alpha_{ij} E_{\sigma(ij)}$ для некоторых коэффициентов $\alpha \in \mathcal{S}$.*

Будем говорить, что $A$ — матрица-строка, если все её ненулевые элементы находятся в одной строке, и $A$ — матрица-столбец, если все ненулевые элементы этой матрицы находятся в одном столбце.

**Лемма 4.5.** *Пусть отображение $T\colon \mathrm{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ является сюръективным и переводит образы двух клеток, принадлежащих одной строке, в две* *клетки, лежащие в одной строке или в одном столбце. Тогда либо $T$ отображает все матрицы-строки в матрицы-строки и все матрицы-столбцы в матрицы-столбцы, либо $T$ отображает все матрицы-строки в матрицы-столбцы и все матрицы-столбцы в матрицы-строки.*

**Доказательство.** По лемме 4.4 отображение $T$ — биекция на множестве клеток. Предположим, что существуют матрицы-строки $R_1$ и $R_2$, такие что $T(R_1)$ — матрица-строка и $T(R_2)$ — матрица-столбец. Пусть ненулевые элементы матрицы $R_1$ лежат в $i$-й строке и ненулевые элементы матрицы $R_2$ лежат в $j$-й строке. Тогда все ненулевые элементы матрицы

$$T\left(\sum_{k=1}^{n} E_{ik} + \sum_{k=1}^{n} E_{jk}\right)$$

лежат в той же строке, что и ненулевые элементы $T(R_1)$, или в том же столбце, что и ненулевые элементы матрицы $T(R_2)$. В итоге получаем не более $2n-1$ ненулевых элементов. Однако матрица

$$\sum_{k=1}^{n} E_{ik} + \sum_{k=1}^{n} E_{jk}$$

содержит $2n$ ненулевых элементов, последнее противоречит тому факту, что $\sigma$ из леммы 4.4 является биекцией. $\square$

Доказательство основного результата основывается на следующих трёх леммах.

**Лемма 4.6.** *Пусть* $T\colon \mathrm{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ — *линейное сюръективное отображение, монотонное относительно минус-порядка. Тогда либо отображение $T$ переводит все матрицы-строки в матрицы-строки и все матрицы-столбцы в матрицы-столбцы, либо $T$ отображает все матрицы-строки в матрицы-столбцы и все матрицы-столбцы в матрицы-строки.*

**Доказательство.** По лемме 4.4 отображение $T$ является биекцией и индуцирует биективное отображение на множестве клеток. Предположим, что существуют такие $i$, $j$, $k$, $l$, что клетки $E_{ij}$ и $E_{kl}$ не принадлежат одному столбцу или одной строке, однако их образы обладают этим свойством. В этом случае $E_{ij} \overset{-}{\leqslant} E_{ij} + E_{kl}$, так как $E_{ji} \in E_{ij}\{1,2\}$ и $E_{ji}E_{kl} = E_{kl}E_{ji} = 0$. Однако $T(E_{ij}) \overset{-}{\nleqslant} T(E_{ij} + E_{kl}) = T(E_{ij}) + T(E_{kl})$, так как ненулевые элементы $T(E_{ij})$ и $T(E_{kl})$ лежат в одной строке или в одном столбце и полукольцо $\mathcal{S}$ не имеет делителей нуля.

Последнее противоречие показывает, что $T^{-1}$ отображает матрицы с ненулевыми элементами в одной строке или одном столбце в матрицы с ненулевыми элементами в одной строке или столбце. Так как отображение $T$ биективно на множестве скалярных кратных клеток, получаем, что $T$ переводит также клетки, лежащие в одной строке или столбце, в клетки, лежащие в одной строке или столбце, что доказывает требуемый результат. Лемма 4.5 завершает доказательство. $\square$

**Лемма 4.7.** *Пусть отображение $T\colon \mathrm{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ сюръективно, линейно и является монотонным относительно порядка Дрэйзина. Тогда либо отображение $T$ переводит все матрицы-строки в матрицы-строки и все матрицы-столбцы в матрицы-столбцы, либо $T$ переводит все матрицы-строки в матрицы-столбцы и матрицы-столбцы в матрицы-строки.*

**Доказательство.** Как и в доказательстве леммы 4.6, заметим, что $E_{ji}E_{ij} = E_{ji}E_{ij} + E_{ji}E_{kl}$ и $E_{ij}E_{ji} = E_{ij}E_{ji} + E_{kl}E_{ji}$ тогда и только тогда, когда $E_{ij}$ и $E_{kl}$ не лежат в одной строке или одном столбце. По аналогии с доказательством леммы 4.6 устанавливается, что отображение $T$ переводит матрицы-строки и матрицы-столбцы в матрицы-строки и матрицы-столбцы. Тогда по лемме 4.5 мы получаем требуемый результат. □

**Лемма 4.8.** *Пусть $T\colon \mathrm{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ — сюръективное линейное преобразование, монотонное относительно $\sharp$-порядка. Тогда либо $T$ отображает все матрицы-строки в матрицы-строки и все матрицы-столбцы в матрицы-столбцы, либо $T$ отображает все матрицы-строки в матрицы-столбцы и все матрицы-столбцы в матрицы-строки.*

**Доказательство.** По лемме 4.4 отображение $T$ является биекцией и индуцирует биекцию на множестве клеток. Предположим, что существуют такие $i$, $j$, $k$, $l$, что $E_{ij}$ и $E_{kl}$ не лежат в одной строке или в одном столбце, однако их образы обладают этим свойством. В указанных условиях $E_{ii}+E_{ij} \overset{\sharp}{\leqslant} E_{ii}+E_{ij}+E_{kl}$, так как $(E_{ii}+E_{ji})^2 = E_{ii}+E_{ij}$ и

$$(E_{ii}+E_{ij})(E_{ii}+E_{ij}+E_{kl}) = E_{ii}+E_{ij} = (E_{ii}+E_{ij}+E_{kl})(E_{ii}+E_{ij}).$$

Более того,

$$T(E_{ii}+E_{ij}) \overset{\sharp}{\nleqslant} T(E_{ii}+E_{ij}+E_{kl}) = T(E_{ii})+T(E_{ij})+T(E_{kl}),$$

так как ненулевые элементы матриц $T(E_{ij})$ и $T(E_{kl})$ лежат в одной строке или одном столбце и $\mathcal{S}$ не имеет делителей нуля.

Полученное противоречие показывает, что $T^{-1}$ отображает матрицы-строки или матрицы-столбцы в матрицы-строки или матрицы-столбцы. Так как отображение $T$ биективно на множестве скалярных кратных клеток, получаем, что $T$ также отображает клетки, лежащие в одной строке или столбце, в клетки, лежащие в одной строке или столбце, откуда получается требуемый результат. Лемма 4.5 завершает доказательство. □

Теперь мы готовы получить общую характеризацию отображения $T$.

**Следствие 4.9.** *Пусть $T\colon \mathrm{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ — сюръективное линейное отображение, которое является монотонным относительно одного из следующих порядков: минус-порядок, порядок Дрэйзина, $\sharp$-порядок. Тогда существуют такие матрицы-перестановки $P, Q \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$, матрица $B$ с мультипликативно обратимыми элементами и перестановка $\tau \in \mathrm{S}_n$, что отображение $T$ является композицией следующих:*

1) $X \to PXQ$ *для всех* $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$;
2) $X \to X \circ B$ *для всех* $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ (*здесь* $X \circ B$ *обозначает произведение Адамара, т. е. поэлементное произведение матриц* $(X \circ B)_{ij} = x_{ij}b_{ij}$);
3) $X \to X^{\mathrm{t}}$ *для всех* $X \in \mathrm{M}_n$.

**Доказательство.** Согласно леммам 4.6, 4.7 и 4.8 для соответственно минус-порядка, порядка Дрэйзина, $\sharp$-порядка мы получаем, что либо отображение $T$, либо композиция отображения $T$ и преобразования транспонирования переводят все матрицы-строки в матрицы-строки и матрицы-столбцы в матрицы-столбцы. Рассмотрим такие перестановки $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{S}_n$, что $\sigma_1(i) = j$, если ненулевые элементы образа матрицы-строки с $i$-й ненулевой строкой лежат в $j$-й строке, $\sigma_2(i) = j$, если ненулевые элементы образа матрицы-столбца с $i$-м ненулевым столбцом лежат в $j$-м столбце. Тогда $\sigma_1$, $\sigma_2$ являются перестановками на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, так как отображение $T$ является биективным и индуцирует биекцию на множестве скалярных кратных клеток.

Если матрицы-строки отображаются в матрицы-строки, то по лемме 4.4 мы получаем, что $T(E_{ij}) = \alpha_{ij}E_{\sigma_1(i)\sigma_2(j)}$. Если матрицы-строки отображаются в матрицы-столбцы, то по лемме 4.4 получаем, что $T(E_{ij}) = \alpha_{ij}E_{\sigma_2(j)\sigma_1(i)}$. Пусть матрица $B = (b_{ij}) \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ такова, что $b_{ij} = \alpha_{ij}$, $P, Q \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ — матрицы-перестановки, отвечающие перестановкам $\sigma_1$, $\sigma_2$ соответственно, т. е.

$$P = \sum_{k=1}^{n} E_{\sigma_1(k)k}, \quad Q = \sum_{k=1}^{n} E_{k\sigma_2(k)}.$$

Заметим, что $b_{ij}$ являются мультипликативно обратимыми для всех $i$, $j$ в силу биективности отображения $T$. Утверждение доказано. $\square$

Заметим, что не все преобразования указанного типа сохраняют минус-порядок.

**Пример 4.10.** Пусть $\mathcal{S} = \mathbb{R}_{\max}$ — тропическое полукольцо, т. е. множество $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ с операцией $\max\{a, b\}$ вместо сложения и операцией $a+b$ вместо умножения. Пусть также $T\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}_{\max}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R}_{\max})$ определяется следующим образом: $T(X) = X \circ A$, где $A = (a_{ij})$, $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{ij} = 0$ для всех $i$, $j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $(i, j) \notin \{(1, 1), (2, 2)\}$. Заметим, что все элементы $\mathbb{R}_{\max}$, кроме $-\infty$, являются мультипликативно обратимыми и 0 обозначает не аналог нулевого элемента, а аналог единичного элемента для тропического полукольца. Рассмотрим матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus O_{n-2}, \quad Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \oplus O_{n-2},$$

где $O_k$ обозначает обычную нулевую матрицу, т. е. $(k \times k)$-матрицу, все элементы которой равны $-\infty$. Непосредственная проверка показывает, что

$$X^2 = X = XY = YX,$$

т. е. $X \overline{\leqslant} Y$. С другой стороны,

$$T(X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus O_{n-2}, \quad T(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus O_{n-2},$$

и $T(X) \overline{\nleqslant} T(Y)$ согласно лемме 3.7, так как $f\big(T(X)\big) = 2$ и $f\big(T(Y)\big) = 1$.

Пусть

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus O_{n-2}, \quad Y_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus O_{n-2}.$$

Будем рассматривать отображение $T_1\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}_{\max}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R}_{\max})$, определённое следующим образом: $T_1(X) = X \circ B$, где $B = (b_{ij})$ и $b_{11} = 1$, $b_{ij} = 0$ для всех $i$, $j$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, $(i,j) \neq (1,1)$. Тогда $X_1 \overset{*}{\leqslant} Y_1$, так как $X_1^2 = X_1^{\mathrm{t}} = X_1$ и $X_1Y_1 = Y_1X_1 = X_1$. Однако $T_1(X_1) \overset{*}{\nleqslant} T_1(Y_1)$. В самом деле,

$$U_1 = T_1(X_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus O_{n-2}, \quad V_1 = T_1(Y_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus O_{n-2}.$$

Заметим, что $U_1 = U_1^{\mathrm{t}}$. Таким образом,

$$U_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus O_{n-2} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus O_{n-2} = V_1 U_1^{\mathrm{t}}.$$

При рассмотрении $\sharp$-порядка возьмём матрицы

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\infty & -\infty \end{pmatrix} \oplus O_{n-2}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 0 \end{pmatrix} \oplus O_{n-2}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $X_2^2 = X_2 = X_2Y_2 = Y_2X_2$, т. е. $X_2 \overset{\sharp}{\leqslant} Y_2$. Рассмотрим отображение $T_2\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{R}_{\max}) \to \mathrm{M}_n(\mathbb{R}_{\max})$, определённое как $T_2(X) = X \circ C$, где $C = (c_{ij})$, $c_{12} = 1$, $c_{22} = 2$, $c_{ij} = 0$ для всех $i$, $j$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$, $(i,j) \notin \{(1,2),(2,2)\}$. Тогда

$$U_2 = T_2(X_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\infty & -\infty \end{pmatrix} \oplus O_{n-2}, \quad V_2 = T_2(Y_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\infty \\ -\infty & 2 \end{pmatrix} \oplus O_{n-2},$$

откуда получаем, что $U_2^2 = U_2$. Однако

$$U_2V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -\infty & -\infty \end{pmatrix} \oplus O_{n-2} \neq U_2,$$

следовательно, $T_2(X_2) \overset{\sharp}{\nleqslant} T_2(Y_2)$.

Наша следующая цель — исключить из рассмотрений леммы 4.9 те преобразования, которые не являются монотонными по крайней мере для некоторых классов полуколец, и тем самым получить необходимые и достаточные условия монотонности отображений.

# 5. Характеризация монотонных преобразований для различных классов полуколец

В данном разделе мы предполагаем, что полукольцо $\mathcal{S}$ удовлетворяет одному из следующих условий.

C1. Для каждой матрицы $C \in \mathrm{M}_2(\mathcal{S})$ факторизационного ранга 2 с обратимыми элементами существует матрица $D \in \mathrm{M}_2(\mathcal{S})$, такая что $D \overset{-}{<} C$.

C2. Для каждой матрицы $C \in \mathrm{M}_2(\mathcal{S})$ факторизационного ранга 2 с обратимыми элементами существует матрица $D \in \mathrm{M}_2(\mathcal{S})$, такая что $D \overset{*}{<} C$.

C3. Для каждой матрицы $C \in \mathrm{M}_2(\mathcal{S})$ факторизационного ранга 2 с обратимыми элементами существует матрица $D \in \mathrm{M}_2(\mathcal{S})$, такая что $D \overset{\sharp}{<} C$.

Если полукольцо $\mathcal{S}$ таково, что не существует $C \in \mathrm{M}_2(\mathcal{S})$ факторизационного ранга 2 с обратимыми элементами, то будем говорить, что условия C1—C3 выполнены для полукольца $\mathcal{S}$.

**Пример 5.1.** Бинарная булева алгебра $\mathbb{B} = (\{0,1\}, \max, \cdot)$ — это один из примеров полукольца, для которого единственная $(2 \times 2)$-матрица с мультипликативно обратимыми элементами — это

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

эта матрица имеет факторизационный ранг 1. Следовательно, полукольцо $\mathbb{B}$ удовлетворяет условиям C1—C3.

Приведём ещё один нетривиальный пример полукольца, удовлетворяющего условию C1.

**Лемма 5.2.** *Пусть $\mathcal{S}$ — это $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ с обычными операциями сложения и умножения. Тогда полукольцо $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию* C1.

**Доказательство.** Если $\mathcal{S} = \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, то для любой обратимой матрицы

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}_{\geqslant 0}),$$

справедливо, что

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \overset{-}{\leqslant} C$$

и $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$, так как $C \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}_{\geqslant 0})$. □

**Лемма 5.3.** *Пусть $T\colon \mathrm{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ — биективное линейное отображение, монотонное относительно одного из следующих порядков: минус-порядка, порядка Дрэйзина, $\sharp$-порядка, и $\mathcal{S}$ удовлетворяет условиям* C1, C2 *или* C3 *соответственно. Предположим, что отображение $T$ имеет вид* 2) *из следствия* 4.9. *Тогда $f(B) = 1$.*

**Доказательство.** Допустим противное, т. е. $f(B) \geqslant 2$. Тогда согласно [4] существует $(2\times 2)$-подматрица в матрице $B$, имеющая факторизационный ранг 2. Обозначим эту подматрицу $B[i,k \mid j,l]$. По предположению существует матрица $C = (c_{ij}) \in \mathrm{M}_2(\mathcal{S})$, такая что

$$C \overset{-}{<} \begin{pmatrix} b_{ij}^{-1} & b_{il}^{-1} \\ b_{kj}^{-1} & b_{kl}^{-1} \end{pmatrix}$$

и соответственно

$$C \overset{*}{<} \begin{pmatrix} b_{ij}^{-1} & b_{il}^{-1} \\ b_{kj}^{-1} & b_{kl}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Непосредственная проверка показывает, что в этом случае

$$C' = c_{11}E_{ij} + c_{12}E_{il} + c_{21}E_{kj} + c_{22}E_{kl} \overset{*}{<} b_{ij}^{-1}E_{ij} + b_{il}^{-1}E_{il} + b_{kj}^{-1}E_{kj} + b_{kl}^{-1}E_{kl}B'.$$

Таким образом, по условию

$$T(C') = C' \circ B \overset{*}{<} T(B') = B' \circ B = E_{ij} + E_{il} + E_{kj} + E_{kl},$$

что противоречит предположению, так как непосредственные вычисления показывают, что исключительно нулевая матрица строго меньше матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

относительно минус-порядка. □

**Лемма 5.4.** *Пусть отображение $T\colon \mathrm{M}_n \to \mathrm{M}_n$ биективно, линейно и имеет один из следующих двух видов:*

1) $X \to PDXEQ$ *для всех* $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$,
2) $X \to X^{\mathrm{t}}$ *для всех* $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$,

*где $P$, $Q$ — матрицы-перестановки и $D$, $E$ — обратимые диагональные матрицы. Тогда отображение $T$ является монотонным относительно минус-порядка.*

**Доказательство.** Для произвольной матрицы $Y \in A\{1,2\}$ легко получается, что

$$Q^{-1}E^{-1}YD^{-1}P^{-1} \in (PDAEQ)\{1,2\}, \quad Y^{\mathrm{t}} \in A^{\mathrm{t}}\{1,2\}.$$

Следовательно, если $YA = YB$, то

$$\begin{aligned} Q^{-1}E^{-1}YD^{-1}P^{-1}PDBEQ = Q^{-1}E^{-1}YBEQ = Q^{-1}E^{-1}YAEQ = \\ = Q^{-1}E^{-1}YD^{-1}P^{-1}PDAEQ \end{aligned}$$

Аналогично для равенства $AY = BY$.

Повторяя те же аргументы для преобразования матричного транспонирования, получаем требуемое утверждение. □

Теперь мы готовы дать полную характеризацию биективных линейных отображений, монотонных относительно минус-порядка.

**Теорема 5.5.** *Пусть полукольцо $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию* C1 *и отображение $T\colon \mathrm{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ является биективным и линейным. Тогда отображение $T$ является монотонным относительно минус-порядка тогда и только тогда, когда существуют матрицы-перестановки $P, Q \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ и обратимые диагональные матрицы $D, E \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$, такие что отображение $T$ является композицией следующих*:

1) $X \to PDXEQ$ *для всех* $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$;
2) $X \to X^{\mathrm{t}}$ *для всех* $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$.

**Доказательство.** Лемма 5.4 показывает, что рассматриваемые отображения действительно монотонны относительно минус-порядка.

Применяя следствие 4.9, получаем, что отображение $T$ имеет один из следующих двух видов:

1) $X \to P(X \circ B)Q$ для всех $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$;
2) $X \to X^{\mathrm{t}}$ для всех $X \in \mathrm{M}_n$.

Тогда по лемме 5.3 имеем $f(B) = 1$, что по определению равносильно существованию таких столбца $d = (d_1, \ldots, d_n)^{\mathrm{t}}$ и строки $e = (e_1, \ldots, e_n)$, что $B = de$. Непосредственная проверка показывает, что для диагональных матриц $D = \mathrm{diag}\{d_1, \ldots, d_n\}$ и $E = \mathrm{diag}\{e_1, \ldots, e_n\}$ справедливо $X \circ B = DXE$ для всех $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$, что доказывает теорему. $\square$

**Лемма 5.6.** *Пусть $T\colon \mathrm{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ — линейное биективное отображение, имеющее один из следующих двух видов*:

1) $T(X) = \alpha PDXEQ$ *для всех* $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$,
2) $T(X) = \alpha PDX^{\mathrm{t}}EQ$ *для всех* $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$,

*где $P$, $Q$ — матрицы-перестановки, $D$, $E$ — обратимые диагональные матрицы, для которых $E^{-1} = E^*$ и $D^{-1} = D^*$, а $\alpha \in \mathcal{S}$ — обратимый элемент полукольца. Тогда отображение $T$ является монотонным относительно порядка Дрэйзина.*

**Доказательство.** Предположим, что $A \overset{*}{\leqslant} B$. Согласно определению это означает, что $AA^* = BA^*$ и $A^*A = A^*B$. Так как $P$ и $Q$ — матрицы-перестановки, получаем, что $PP^* = QQ^* = I$. Тогда

$$\begin{aligned} T(A)T(A)^* &= \alpha PDAEQ\alpha^* Q^* E^* A^* D^* P^* = \alpha\alpha^* PDAEE^* A^* D^* P^* = \\ &= \alpha\alpha^* PDAA^* D^* P^* = \alpha\alpha^* PDBA^* D^* P^* = T(B)T(A)^* \end{aligned}$$

и

$$T(A)^*T(A) = \alpha\alpha^* Q^* E^* A^* AEQ = \alpha\alpha^* Q^* E^* A^* BEQ = T(A)^*T(B),$$

т. е. $T(A) \overset{*}{\leqslant} T(B)$.

Последнее справедливо также для отображения $T_1(X) = \alpha PDX^{\mathrm{t}}EQ$ для всех $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$. В самом деле,

$$A^{\mathrm{t}}(A^{\mathrm{t}})^* = (A^*A)^{\mathrm{t}} = (A^*B)^{\mathrm{t}} = B^{\mathrm{t}}(A^{\mathrm{t}})^*$$

и

$$(A^{\mathrm{t}})^* A^{\mathrm{t}} = (AA^*)^{\mathrm{t}} = (BA^*)^{\mathrm{t}} = (A^{\mathrm{t}})^* B^{\mathrm{t}},$$

т. е. $A^{\mathrm{t}} \overset{*}{\leqslant} B^{\mathrm{t}}$.

Следовательно, отображение $T_1$ является монотонным относительно порядка Дрэйзина как композиция двух монотонных относительно порядка Дрэйзина отображений. □

Для следующего результата нам потребуется некоторое дополнительное условие на полукольцо $\mathcal{S}$.

$\mathcal{D}$. Для каждой пары обратимых элементов $x, y \in \mathcal{S}$ равенство $x + x = y + y$ в $\mathcal{S}$ позволяет заключить, что $x = y$.

**Замечание 5.7.** Заметим, что существует целый ряд полуколец, удовлетворяющих условию $\mathcal{D}$. Например, таковы идемпотентные полукольца, т. е. полукольца, удовлетворяющие условию $x + x = x$, неотрицательные вещественные числа, неотрицательные целые числа, другие полукольца с обратимым элементом $1 + 1$ и т. д.

**Лемма 5.8.** *Предположим, что полукольцо $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию $\mathcal{D}$. Пусть отображение $T\colon \mathrm{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ является линейным и биективным и определяется одним из следующих способов:*

1) $T(X) = PDXEQ$ *для всех* $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$,
2) $T(X) = PDX^{\mathrm{t}}EQ$ *для всех* $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$,

*где $P$, $Q$ — матрицы-перестановки и $D$, $E$ — обратимые диагональные матрицы. Тогда отображение $T$ является монотонным относительно порядка Дрэйзина в том и только в том случае, когда $E^{-1} = \alpha_1 E^*$ и $D^{-1} = \alpha_2 D^*$ для некоторых обратимых элементов $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{S}$.*

**Доказательство.** По лемме 5.6 отображения $X \mapsto PXQ$ и $X \mapsto PX^{\mathrm{t}}Q$ сохраняют отношение порядка Дрэйзина. Следовательно, для доказательства требуемого результата, достаточно рассматривать отображение вида $T(X) = DXE$.

Нам необходимо проверить, что матрицы $EE^* = \alpha_1 I$ и $DD^* = \alpha_2 I$ являются скалярными. Так как $D$ и $E$ — диагональные матрицы, $G = EE^* = \mathrm{diag}\{g_1, \ldots, g_n\}$ и $F = D^*D = \mathrm{diag}\{f_1, \ldots, f_n\}$. Предположим противное, т. е. существование таких индексов $i$, $j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, что $g_i \neq g_j$.

Рассмотрим $A = E_{ii} + E_{ij} + E_{ji} + E_{jj}$ и $B = (1+1)E_{ii} + (1+1)E_{jj}$. Тогда $A \overline{\leqslant} B$. В самом деле, $A^* = A$ и $AA = A + A = AB = BA$. Так как отображение $T$ сохраняет порядок Дрэйзина, получаем, что $T(A) \overline{\leqslant} T(B)$, т. е.

$$DAE(DAE)^* = DBE(DAE)^*, \quad (DAE)^* DAE = (DAE)^* DBE.$$

Последнее эквивалентно равенствам

$$AGA^* = BGA^*, \quad A^*FA = A^*FB,$$

так как матрицы $D$ и $E$ обратимые.

Начнём наши рассмотрения с первого равенства. Условие $AGA^* = BGA^*$ позволяет заключить, что

$$(g_i+g_j)(E_{ii}+E_{ij}+E_{ji}+E_{jj}) = g_i(1+1)E_{ii}+g_i(1+1)E_{ij}+g_j(1+1)E_{ji}+g_j(1+1)E_{jj}.$$

Следовательно,

$$g_i + g_j = g_i(1+1) = g_j(1+1),$$

и согласно условию $\mathcal{D}$ на $\mathcal{S}$ мы получаем, что $g_i = g_j$, противоречие.

Аналогично из равенства $A^*FA = A^*FB$ следует, что $F$ является скалярной матрицей, что доказывает требуемый результат. □

Итогом приведённых выше рассмотрений является следующая теорема.

**Теорема 5.9.** *Пусть полукольцо $\mathcal{S}$ удовлетворяет условиям* C2 *и $\mathcal{D}$. Предположим, что отображение $T\colon \mathrm{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ биективное и линейное. Тогда отображение $T$ является монотонным относительно порядка Дрэйзина тогда и только тогда, когда существуют матрицы-перестановки $P, Q \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$, обратимые диагональные матрицы $D, E \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$, удовлетворяющие условиям $D^{-1} = D^*$, $E^{-1} = E^*$, и элемент $\alpha \in \mathcal{S}$, такой что отображение $T$ записывается одним из следующих способов:*

1) $X \to \alpha PDXEQ$ *для всех* $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$;
2) $X \to \alpha PDX^{\mathrm{t}}EQ$ *для всех* $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$.

**Доказательство.** Аналогично доказательству теоремы 5.5 к следствию 4.9 применяется лемма 5.3. Далее к полученному результату применяется лемма 5.8, что доказывает необходимость. Достаточность проверена в лемме 5.6. □

Аналогично доказывается следующая теорема.

**Теорема 5.10.** *Пусть полукольцо $\mathcal{S}$ удовлетворяет условию* C3 *и отображение $T\colon \mathrm{M}_n(\mathcal{S}) \to \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ является биективным и линейным. Отображение $T$ монотонно относительно $\sharp$-порядка тогда и только тогда, когда существуют матрица-перестановка $P \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$, обратимая диагональная матрица $D \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ и элемент $\alpha \in \mathcal{S}$, такие что отображение $T$ записывается одним из следующих способов:*

1) $X \to \alpha PDXD^{-1}P^{-1}$ *для всех* $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$;
2) $X \to \alpha PDX^{\mathrm{t}}D^{-1}P^{-1}$ *для всех* $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$.

**Доказательство.** Сперва покажем, что отображения типа 1) и 2) монотонны относительно $\overset{\sharp}{\leqslant}$-порядка. Легко убедиться, что для любой обратимой матрицы $U \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ и любой матрицы $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ справедливо, что групповая обобщённая обратная матрица $X^\sharp$ существует тогда и только тогда, когда существует $(UXU^{-1})^\sharp$, причём $(UXU^{-1})^\sharp = UX^\sharp U^{-1}$. Теперь результат получается непосредственным вычислением.

Проверим обратную импликацию. Аналогично доказательству теоремы 5.5, применяя лемму 5.3 к отображениям, полученным в следствии 4.9, имеем, что существуют такие перестановочные матрицы $P, Q \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$ и обратимые диагональные матрицы $D, E \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$, что или $T(X) = PDXEQ$ для всех $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$, или $T(X) = PDX^{\mathrm{t}}EQ$ для всех $X \in \mathrm{M}_n(\mathcal{S})$.

Поскольку транспонирование и подобие монотонны относительно $\sharp$-порядка, рассмотрим отображение $S(X) = (PD)^{-1}PDXEQ(PD)$ в первом случае и отображение $S(X) = (PD)^{-1}PDX^{\mathrm{t}}EQ(PD)$ во втором случае. Тогда требуется доказать, что если отображение $S(X) = XV$, где $V$ — произведение перестановочной и обратимой диагональной матриц, монотонно относительно $\sharp$-порядка, то $V = (v_{ij})$ — скалярная матрица.

Допустим, что $V$ не является диагональной и элемент $v_{ij} \neq 0$ для некоторых $i \neq j$. Тогда $E_{ii}V = v_{ij}E_{ij}$, поскольку $V$ — произведение перестановочной и обратимой диагональной матриц. Тогда из неравенства $E_{ii} \overset{\sharp}{\leqslant} I$ следует, что $v_{ij}E_{ij} \overset{\sharp}{\leqslant} V$, поскольку отображение $S$ монотонно относительно $\sharp$-порядка как композиция монотонных отображений. В то же время непосредственная проверка показывает, что матрица $v_{ij}E_{ij}$ не имеет групповой обратной при $i \neq j$. Полученное противоречие показывает, что матрица $V$ диагональная.

Допустим, что для некоторых $1 \leqslant i, j \leqslant n$ выполнено $v_{ii} \neq v_{jj}$. Рассмотрим неравенство
$$E_{ii} + E_{ij} \overset{\sharp}{\leqslant} E_{ii} + E_{jj}.$$
Тогда
$$v_{ii}E_{ii} + v_{ij}E_{ij} \overset{\sharp}{\leqslant} v_{ii}E_{ii} + v_{jj}E_{jj}.$$
Однако
$$(v_{ii}E_{ii} + v_{ij}E_{ij})^{\sharp} = v_{ii}^{-1}E_{ii} + v_{ii}^{-2}v_{jj}E_{ij}.$$
Тогда по определению $\sharp$-порядка получаем
$$\begin{aligned}(v_{ii}^{-1}E_{ii} + v_{ii}^{-2}v_{jj}E_{ij})(v_{ii}E_{ii} + v_{ij}E_{ij}) = E_{ii} + v_{ii}^{-1}v_{jj}E_{ij} = \\ = (v_{ii}^{-1}E_{ii} + v_{ii}^{-2}v_{jj}E_{ij})(v_{ii}E_{ii} + v_{jj}E_{jj}).\end{aligned}$$
Рассматривая правую часть последнего неравенства, получаем, что
$$v_{ii}^{-1}v_{jj}E_{ij} = v_{ii}^{-2}v_{jj}^{2}E_{ij}.$$
Из обратимости $v_{ii}$ и $v_{jj}$ следует, что $v_{ii} = v_{jj}$, и теорема доказана. □

## Литература

[1] Бисли Л. Б., Гутерман А. Э. LP-проблемы для ранговых неравенств над полукольцами: факторизационный ранг // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2004. — Т. 13. — С. 53—70.

[2] Гутерман А. Э. Монотонные аддитивные отображения матриц // Матем. заметки. — 2007. — Т. 81, № 5. — С. 681—692.

[3] Beasley L., Guterman A. Rank inequalities over semirings // J. Korean Math. Soc. — 2005. — Vol. 42, no. 2. — P. 223—241.

[4] Ben-Israel A., Greville T. Generalized Inverses: Theory and Applications. — New York: Wiley, 1974.

[5] Butkovič P. Max-Linear Systems: Theory and Applications. — (Springer Monographs Math.). — London: Springer, 2010.

[6] Drazin M. P. Natural structures on semigroups with involution // Bull. Amer. Math. Soc. — 1978. — Vol. 84, no. 1. — P. 139—141.

[7] Farid F. O., Khan I. A., Wang Q.-W. On matrices over arbitrary semiring and their generalized inverses // Linear Algebra Its Appl. — 2013. — Vol. 439. — P. 2085—2105.

[8] Glazek K. A Guide to the Literature on Semirings and their Applications in Mathematics and Information Sciences // Springer Netherlands, 2002.

[9] Hartwig R. E. How to partially order regular elements // Math. Japon. — 1980. — Vol. 25, no. 1. — P. 1—13.

[10] Khan I. A., Wang Q. W. The Drazin inverses in an arbitrary semiring // Linear Multilinear Algebra. — 2011. — Vol. 59, no. 9. — P. 1019—1029.

[11] Kim K. H. Boolean Matrix Theory and Applications. — (Pure Appl. Math.; Vol. 70). — New York: Marcel Dekker, 1982.

[12] Mitra S. K. On group inverses and the sharp order // Linear Algebra Appl. — 1987. — Vol. 92. — P. 17—37.

[13] Mitra, S. K. Bhimasankaram P., Malik S. B. Matrix Partial Orders, Shorted Operators and Applications. — (Ser. Algebra; Vol.10). — New York: World Scientific, 2010.

[14] Mitsch H. A natural partial order on semigroups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1986. — Vol. 97, no. 3. — P. 384—388.

[15] Nambooripad K. S. S. The natural partial order on a regular semigroup // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1980. — Vol. 23. — P. 249—260.

[16] Rakić D., Djordjević D. Star, sharp, core and dual core partial order in rings with involution // Appl. Math. Comput. — 2015. — Vol. 259. — P. 800—818.