Проективные и инъективные полигоны над вполне простыми полугруппами

И. Б. КОЖУХОВ, А. О. ПЕТРИКОВ
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

УДК 512.533.52+512.579

Ключевые слова: полигон над полугруппой, проективный полигон, инъективный полигон, вполне простая полугруппа.

Аннотация

Описаны проективные и инъективные полигоны над вполне простыми полугруппами. Построено проективное накрытие и инъективная оболочка полигонов над этими полугруппами.

Abstract

I. B. Kozhukhov, A. O. Petrikov, Projective and injective acts over completely simple semigroups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 123—133.

We describe projective and injective acts over completely simple semigroups. Projective covers and injective hulls of acts over such semigroups are constructed.

Инъективные и проективные универсальные алгебры могут быть определены в любой категории универсальных алгебр. Инъективные и проективные модули над кольцом занимают центральное место в гомологической теории колец. В [7] приведены многие результаты теории инъективности и проективности унитарных полигонов над моноидами. Аналогично тому, как это делается для модулей над кольцом, могут быть определены инъективная оболочка полигона — наименьший инъективный полигон, содержащий данный, и проективное накрытие полигона — наименьший проективный полигон, имеющий сюръективный гомоморфизм на данный. Как и в случае колец и модулей, инъективная оболочка существует у всякого полигона, а проективное накрытие не у всякого. Существование инъективной оболочки любого полигона было доказано в [5], а моноиды, над которыми любой полигон имеет проективное накрытие, охарактеризованы в [7, гл. 3, § 17].

В [6, 8] были описаны инъективные полигоны над полугруппой левых нулей в предположении сепарабельности полигона (полигон A над полугруппой S называется сепарабельным, если для любых элементов $a \neq b$ из A существует такой $s \in S \setminus \{1\}$, что $as \neq bs$). Как было отмечено в [2], предположение о сепарабельности полигона является излишним, однако корректного доказательства представлено не было. Мы исправляем этот недостаток. Кроме того, в [2] были охарактеризованы проективные полигоны над полугруппой левых нулей, а также инъективные и проективные полигоны над полугруппами правых нулей. Цель данной работы — получить необходимые и достаточные условия инъективности и проективности полигона над вполне простой полугруппой и построить инъективные оболочки и проективные накрытия полигонов над этой полугруппой. Тем самым упомянутые результаты работ [2,6,8] будут существенно обобщены.

Полигоном над полугруппой S (или S-полигоном) называется множество X, на котором действует полугруппа S, т. е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, такое что $x(st) = (xs)t$ при всех $x \in X$, $s, t \in S$. Полигон является унарной алгеброй: элементы полугруппы S задают унарные операции на X. Кроме того, полигон является алгебраической моделью автомата (см. [3]). Полигон X называется *проективным*, если для любого сюръективного гомоморфизма $\alpha\colon A \to B$ полигонов и любого гомоморфизма $\varphi\colon X \to B$ существует гомоморфизм $\psi\colon X \to A$, такой что $\psi\alpha = \varphi$ (здесь и далее произведение отображений мы осуществляем слева направо). Полигон X называется *инъективным*, если для любого инъективного гомоморфизма $\alpha\colon A \to B$ полигонов и любого гомоморфизма $\varphi\colon A \to X$ существует гомоморфизм $\psi\colon B \to X$, такой что $\alpha\psi = \varphi$. Если полигон X является объединением попарно не пересекающихся подполигонов X_i $(i \in I)$, то X называется копроизведением и обозначается $\coprod\limits_{i\in I} X_i$. Полигон X над полугруппой S называется *унитарным*, если в полугруппе S есть единица e и $xe = x$ для всех $x \in X$. Элемент z полигона X над полугруппой S называется *нулём*, если $zs = z$ для всех $s \in S$.

Пусть G — группа, H — её подгруппа (не обязательно нормальная), и пусть G/H — множество правых смежных классов Hg. Тогда G/H — полигон над G относительно умножения $Hg \cdot g' = Hgg'$. Нетрудно убедиться, что G/H — это общий вид любого унитарного циклического полигона над группой G.

Вполне простой полугруппой называется полугруппа, не имеющая нетривиальных идеалов и содержащая примитивный идемпотент (т. е. идемпотент, минимальный относительно естественного порядка $e \leqslant f \Leftrightarrow ef = fe = f$). Согласно теореме Сушкевича—Риса [1, § 3.2] вполне простые полугруппы — это в точности рисовские матричные полугруппы $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ (обозначения см. в [1]). Полигоны над такими полугруппами были описаны в [4]. А именно, пусть X — множество, G — группа, $Q = \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma} G/H_\gamma$ — полигон, $\pi_i\colon X \to Q$ $(i \in I)$, $\kappa_\lambda\colon Q \to X$ $(\lambda \in \Lambda)$ — отображения и $q\kappa_\lambda\pi_i = q \cdot p_{\lambda i}$ для всех $q \in Q$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Тогда X с умножением $x \cdot (g)_{i\lambda} = (x\pi_i \cdot g)\kappa_\lambda$ — полигон над полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ и все S-полигоны имеют такой вид. Нетрудно убедиться, что отображения π_i сюръективны, а κ_λ инъективны.

Подполигон G/H_γ полигона Q обозначим через Q_γ. Для всех $q \in Q$ положим

$$X_q = \{q\kappa_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

Для $\gamma \in \Gamma$ положим
$$X^{(\gamma)} = \bigcup \{X_q \mid q \in Q_\gamma\}.$$

Лемма 1. *$X^{(\gamma)}$ — подполигон полигона X.*

Доказательство. Пусть $x \in X^{(\gamma)}$, $s = (g)_{i\lambda} \in S$. Так как $x \in X^{(\gamma)}$, то $x = q\kappa_\mu$ при некоторых $q \in Q_\gamma$, $\mu \in \Lambda$. Имеем
$$xs = q\kappa_\mu \cdot (g)_{i\lambda} = (q\kappa_\mu\pi_i \cdot g)\kappa_\lambda = (q \cdot p_{\mu i} \cdot g)\kappa_\lambda \in Q_\gamma\kappa_\lambda \subseteq X^{(\gamma)}. \qquad \square$$

Лемма 2. *$X^{(\alpha)} \cap X^{(\beta)} = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$.*

Доказательство. Пусть $x \in X^{(\alpha)} \cap X^{(\beta)}$. Тогда $x = q_1\kappa_\mu = q_2\kappa_\nu$ для некоторых $q_1 \in Q_\alpha$, $q_2 \in Q_\beta$. Умножив на π_i, получим $q_1\kappa_\mu\pi_i = q_2\kappa_\nu\pi_i$. Отсюда следует, что $q_1 \cdot p_{\mu i} = q_2 \cdot p_{\nu i}$. Следовательно, $q_1G = q_2G$, а значит, $\alpha = \beta$. $\square$

Положим $Y = XS$.

Лемма 3. *$XS = \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} X^{(\gamma)}$.*

Доказательство. Если $x \in XS$, то
$$x = x' \cdot (g)_{i\lambda} = (x'\pi_i \cdot g)\kappa_\lambda \in Q\kappa_\lambda \subseteq X^{(\gamma)}$$
(если $x'\pi_i \in Q_\gamma$). Наоборот, пусть $x \in X^{(\gamma)}$. Тогда $x = q\kappa_\lambda$ при некоторых $q \in Q_\alpha$ и $\lambda \in \Lambda$. Имеем
$$x \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = (x\pi_i \cdot p_{\lambda i}^{-1})\kappa_\lambda = (q\kappa_\lambda\pi_i \cdot p_{\lambda i}^{-1})\kappa_\lambda = q\kappa_\lambda = x.$$
Следовательно, $x \in XS$. $\square$

Следствие. $XS = \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma} X^{(\gamma)}$.

Пусть $x \in X$. Определим отображение $\omega_x \colon I \to Q$ формулой $i\omega_x = x\pi_i$.

Лемма 4. *Полугруппа S действует на множестве $X^{(\gamma)}$ транзитивно, т. е. для любых $x_1, x_2 \in X^{(\gamma)}$ существует такой $s \in S$, что $x_1 s = x_2$.*

Доказательство. Имеем, что $x_1 = q_1\kappa_\lambda$, $x_2 = q_2\kappa_\mu$, где $q_1, q_2 \in Q_\gamma$. Так как на множестве Q_γ группа G действует транзитивно, то $q_1 g = q_2$ при некотором $g \in G$. Возьмём любое $i \in I$. Тогда
$$x_1 \cdot (p_{\lambda i}^{-1}g)_{i\mu} = (x_1\pi_i \cdot p_{\lambda i}^{-1}g)\kappa_\mu = (q_1\kappa_\lambda\pi_i \cdot p_{\lambda i}^{-1}g)\kappa_\mu = (q_1 g)\kappa_\mu = q_2\kappa_\mu = x_2. \qquad \square$$

Лемма 5. *Нули полигона X — это в точности такие элементы z, что $X^{(\gamma)} = \{z\}$ при некотором $\gamma \in \Gamma$. При этом также $|Q_\gamma| = 1$.*

Доказательство. Если $X^{(\gamma)} = \{z\}$, то z — нуль, так как $X^{(\gamma)}$ — подполигон.

Пусть z — нуль. Так как $zs = z$ при всех $s \in S$, то $z \in XS$, поэтому $z \in X^{(\gamma)}$ при некотором $\gamma \in \Gamma$. Так как S действует на $X^{(\gamma)}$ транзитивно, то $z \in X^{(\gamma)}$ будет нулём лишь в случае, когда $X^{(\gamma)} = \{z\}$. Так как $X^{(\gamma)} = \bigcup\limits_{\lambda} Q_\gamma\kappa_\lambda$ и κ_λ инъективно, то $|Q_\gamma| = 1$. $\square$

Следующая теорема даёт характеризацию инъективных полигонов над вполне простой полугруппой.

Теорема 6. *Полигон X над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ инъективен в том и только том случае, если выполняются следующие условия*:

1) *X содержит нуль*;
2) *для любого отображения $\omega\colon I \to Q$ существует такое $x \in X$, что $i\omega = x\pi_i$ при всех $i \in I$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть полигон X инъективен. Известно, что в этом случае X содержит нуль [7, лемма III.1.7]. Пусть $\omega\colon I \to Q$ — произвольное отображение. Присоединим к полигону X элемент b и положим $b \cdot (g)_{i\lambda} = (i\omega \cdot g)\kappa_\lambda$ при $g \in G$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Проверим, что $X \cup \{b\}$ является S-полигоном. Действительно,

$$(b \cdot (g)_{i\lambda}) \cdot (h)_{j\mu} = (i\omega \cdot g)\kappa_\lambda \cdot (h)_{j\mu} = \big((i\omega \cdot g)\kappa_\lambda\pi_j \cdot h\big)\kappa_\mu = \\ = (i\omega \cdot g \cdot p_{\lambda j} \cdot h)\kappa_\mu = (i\omega \cdot gp_{\lambda j}h)\kappa_\mu = b \cdot (gp_{\lambda j}h)_{i\mu} = b \cdot \big((g)_{i\lambda} \cdot (h)_{j\mu}\big).$$

Так как полигон X инъективен, то тождественное отображение $X \to X$ продолжается до гомоморфизма $\beta\colon X \cup \{b\} \to X$. Пусть $x = b\beta$. Тогда $x \in X$ и $x \cdot (g)_{i\lambda} = (b \cdot (g)_{i\lambda})\beta = b \cdot (g)_{i\lambda} = (i\omega \cdot g)\kappa_\lambda$ и $x \cdot (g)_{i\lambda} = (x\pi_i \cdot g)\kappa_\lambda$. Так как κ_λ инъективно и $(i\omega \cdot g)\kappa_\lambda = (x\pi_i \cdot g)\kappa_\lambda$, то $i\omega = x\pi_i$.

Достаточность. Инъективность полигона X равносильна следующему утверждению: для любого S-полигона T' и его подполигона $T \subseteq T'$ всякий гомоморфизм $\varphi\colon T \to X$ продолжается до гомоморфизма $\varphi'\colon T' \to X$.

Полигон X представим в виде $X = A \cup \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma} X^{(\gamma)}$, где $A = X \setminus XS$. Кроме того, имеется унитарный G-полигон $Q = \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma} Q_\gamma$ и отображения $\pi_i\colon X \to Q$ $(i \in I)$, $\kappa_\lambda\colon Q \to X$ $(\lambda \in \Lambda)$, такие что $q\kappa_\lambda\pi_i = q \cdot p_{\lambda i}$ для всех $q \in Q$. Полигоны T и T' имеют вид $T = B \cup \coprod\limits_{\beta\in\Delta} U^{(\beta)}$, где $B = T \setminus TS$, $T' = B' \cup \coprod\limits_{\beta'\in\Delta'} U'^{(\beta')}$, $B' = T' \setminus T'S$. Очевидно, $TS \subseteq T'S$. По лемме 4 полугруппа S действует транзитивно на каждом $U^{(\beta)}$, $U'^{(\beta')}$, поэтому каждое $U^{(\beta)}$ совпадает с каким-либо из $U'^{(\beta')}$, т. е. мы можем считать, что $\Delta \subseteq \Delta'$ и $T'S = TS \cup \coprod\limits_{\gamma\in\Delta'\setminus\Delta} U'^{(\gamma)}$. Полигон $U'^{(\gamma)}$ будем записывать просто как $U^{(\gamma)}$. Теперь ясно, что $B \subseteq B'$.

Итак, B' — расширение B, а $T'S$ — расширение TS. По условию X имеет нуль z_0, а по лемме 4 $X^{(\alpha_0)} = \{z_0\}$ при некотором $\alpha_0 \in \Gamma$ и $Q_{\alpha_0} = \{q_0\}$. Кроме того,

$$T'S = T' \setminus B' = \coprod_{\gamma\in\Delta'} U^{(\gamma)}, \quad TS = T \setminus B = \coprod_{\gamma\in\Delta} U^{(\gamma)}.$$

Построим отображение $\varphi'\colon T' \to X$. Если $t \in T$, то полагаем $t\varphi' = t\varphi$. Если $t \in T'S \setminus TS = \coprod\limits_{\gamma\in\Delta'\setminus\Delta} U^{(\gamma)}$, то полагаем $t\varphi' = z_0$. Осталось определить $b\varphi'$ для $b \in B' \setminus B$.

Построим по элементу $b \in B'\backslash B$ отображение $\omega\colon I \to Q$ следующим образом. Пусть $i \in I$. Если $b\cdot(p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} \in T'S\backslash TS$ для какого-то $\lambda \in \Lambda$, то полагаем $i\omega = q_0$. Заметим, что в этом случае $b\cdot(p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} \in T'S\backslash TS$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Действительно, если $b \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\mu} \in TS$, то $b \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = b \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} \in TS$. В случае когда $b \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} \in TS$, полагаем $i\omega = (b \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda})\varphi\pi_i$. Докажем, что это выражение не зависит от λ. Действительно,

$$(b \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu})\varphi\pi_i = (b \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu})\varphi\pi_i = \big((b \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda})\varphi \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu}\big)\pi_i =$$
$$= \big((b \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda})\varphi\pi_i \cdot p_{\mu i}^{-1}\big)\kappa_\mu\pi_i = (b \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda})\varphi\pi_i \cdot p_{\mu i}^{-1} \cdot p_{\mu i} = (b \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda})\varphi\pi_i.$$

Итак, мы построили по элементу $b \in B'\backslash B$ отображение $\omega\colon I \to Q$. Согласно условию 2) существует элемент $x \in X$, такой что $i\omega = x\pi_i$ при всех $i \in I$. Положим $b\varphi' = x$. Таким образом, отображение $\varphi'\colon T' \to X$, продолжающее гомоморфизм $\varphi\colon T \to X$, построено.

Докажем, что φ' — гомоморфизм. Пусть $s \in S$. Если $t \in T$, то $ts \in T$, поэтому

$$(ts)\varphi' = (ts)\varphi = t\varphi \cdot s = t\varphi' \cdot s.$$

Если $t \in T'S \setminus TS$, то также $ts \in T'S \setminus TS$, поэтому $t\varphi' = (ts)\varphi' = z_0$, а значит, $(ts)\varphi' = t\varphi' \cdot s$. Осталось разобрать случай, когда $t = b \in B' \setminus B$. Запишем s в виде $s = (g)_{i\lambda}$.

Пусть $\omega\colon I \to Q$ — отображение, построенное по элементу b, и $x \in X$ — такой элемент, что $i\omega = x\pi_i$ при всех $i \in I$. Напомним, что $b\varphi' = x$.

Если $b \cdot (g)_{i\lambda} \in TS$, то

$$(b \cdot (g)_{i\lambda})\varphi' = (b \cdot (g)_{i\lambda})\varphi = (b \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} \cdot (g)_{i\lambda})\varphi =$$
$$= (b \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda})\varphi \cdot (g)_{i\lambda} = \big((b \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda})\varphi\pi_i \cdot g\big)\kappa_\lambda =$$
$$= (i\omega \cdot g)\kappa_\lambda = (x\pi_i \cdot g)\kappa_\lambda = x \cdot (g)_{i\lambda} = b\varphi' \cdot (g)_{i\lambda}.$$

Если $b \cdot (g)_{i\lambda} \in T'S \setminus TS$, то также $b \cdot (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} \in T'S \setminus TS$, поэтому $i\omega = q_0$. Имеем, что $(b \cdot (g)_{i\lambda})\varphi' = z_0$ и

$$b\varphi' \cdot (g)_{i\lambda} = x \cdot (g)_{i\lambda} = (x\pi_i \cdot g)\kappa_\lambda = (i\omega \cdot g)\kappa_\lambda = (q_0 \cdot g)\kappa_\lambda = q_0\kappa_\lambda = z_0.$$

Таким образом, φ' — гомоморфизм. Следовательно, полигон X инъективен. $\square$

На основании этой теоремы можно получить описание инъективных полигонов над прямоугольной связкой. Напомним, что *прямоугольной связкой* называется полугруппа, изоморфная прямому произведению полугруппы левых и полугруппы правых нулей. Прямоугольная связка может быть задана также совокупностью тождеств $x^2 = x$, $xyz = xz$, одним тождеством $xyx = x$ или квазитождеством $xy = yx \to x = y$. Кроме того, прямоугольная связка является вполне простой полугруппой: она представима в виде $\mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, где G — тривиальная группа ($G = \{e\}$) и $p_{\lambda i} = e$ при всех $\lambda \in \Lambda$, $i \in I$. Вместо $(e)_{i\lambda}$ будем писать (i, λ). Таким образом, умножение в $S = \mathcal{M}(\{e\}, I, \Lambda, P)$ будет следующим: $(i, \lambda) \cdot (j, \mu) = (i, \mu)$. Это значит, что $S \cong I \times \Lambda$, где на I и Λ

введены умножения, превращающие их соответственно в полугруппу левых и полугруппу правых нулей.

Полигон X над прямоугольной связкой $S = I \times \Lambda$ выглядит следующим образом. Пусть Q — множество, $\pi_i\colon X \to Q$ $(i \in I)$ и $\kappa_\lambda\colon Q \to X$ $(\lambda \in \Lambda)$ — такие отображения, что $\kappa_\lambda \pi_i = 1_Q$ при всех $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Положим $x \cdot (i, \lambda) = x\pi_i\kappa_\lambda$ для $x \in X$. Тогда X будет являться S-полигоном, и всякий S-полигон может быть получен таким образом.

Следствие (из теоремы 6). *Пусть $S = I \times \Lambda$ — прямоугольная связка. Полигон X над полугруппой S инъективен в том и только том случае, если для любого отображения $\omega\colon I \to Q$ существует элемент $x \in X$, такой что $x\pi_i = i\omega$ при всех $i \in I$. В случае когда $|\Lambda| = 1$, мы получаем, что $S = I \times \Lambda$ — полугруппа левых нулей. Таким образом, характеризация инъективных полигонов над полугруппами левых нулей выглядит одинаково в случае сепарабельных и в случае несепарабельных полигонов.*

Построим теперь инъективную оболочку полигона над вполне простой полугруппой.

Теорема 7. *Пусть $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ — вполне простая полугруппа, X — полигон над S. Если в X нет нуля, присоединим к X нуль z_0; если в X есть нули, зафиксируем какой-нибудь из них и обозначим его через z_0. При присоединении нуля z_0 внешним образом множество Q пополнится элементом q_0. Для каждого отображения $\omega\colon I \to Q$ (или $\omega\colon I \to Q \cup \{q_0\}$ в случае присоединения нуля), для которого не существует элемента $x \in X$, такого что $x\pi_i = i\omega$ при всех $i \in I$, присоединим к X элемент b_ω и определим действие на нём элементов полугруппы S следующим образом: $b_\omega \cdot (g)_{i\lambda} = (i\omega \cdot g)\kappa_\lambda$. Тогда полученный после присоединения элементов полигон $\tilde{X}$ является инъективной оболочкой полигона X.*

Доказательство. Тот факт, что полигон $\tilde{X}$ инъективен, следует из предыдущей теоремы. Та же теорема показывает, что подполигон Y полигона $\tilde{X}$, удовлетворяющий условию $X \subseteq Y \subset \tilde{X}$, не является инъективным. $\square$

Лемма 8. *Пусть X — полигон над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, $A = X \setminus XS$, $Z = XS \setminus AS$. Тогда Z — подполигон, причём множество Γ можно разбить на два подмножества: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, причём $AS = \coprod\limits_{\gamma \in \Gamma_1} X^{(\gamma)}$, $Z = \coprod\limits_{\gamma \in \Gamma_2} X^{(\gamma)}$.*

Доказательство. Пусть $x \in AS$. Имеем, что $x \in X^{(\gamma)}$ при некотором $\gamma \in \Gamma$. По лемме 4 $xS = X^{(\gamma)}$. Следовательно, $X^{(\gamma)} \subseteq AS$. Пусть $\Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma \mid X^{(\gamma)} \subseteq AS\}$. Отсюда получаем, что $XS \setminus AS = \coprod\limits_{\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_1} X^{(\gamma)}$, т. е. можно положить $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$. Из этого следует, что $XS \setminus AS$ — подполигон. $\square$

Замечание. Одно из множеств Γ_1, Γ_2 может быть пустым.

В полугруппе $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ для $i \in I$ положим

$$R_i = \{(g)_{i\lambda} \mid g \in G,\ \lambda \in \Lambda\}.$$

Очевидно, R_i — правый идеал полугруппы S. Он является также $\mathcal{R}$-классом Грина этой полугруппы и $rS = R_i$ для любого $r \in R_i$ (имеет место даже более сильное утверждение: $rR_i = R_i$ при всех $r \in R_i$). Также ясно, что R_i являются подполигонами полигона S и $S = \coprod\limits_{i \in I} R_i$.

Для каждого $\lambda \in \Lambda$ положим $e_\lambda = (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$ (при фиксированном $i \in I$). Легко проверить, что e_λ — идемпотенты и $e_\lambda e_\mu = e_\mu$ при всех $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Лемма 9. *R_i является проективным S-полигоном для каждого $i \in I$.*

Доказательство. Пусть M, N — произвольные S-полигоны, $\alpha\colon M \to N$ — сюръективный гомоморфизм и $\varphi\colon R_i \to N$ — произвольный гомоморфизм. Требуется доказать существование гомоморфизма $\psi\colon R_i \to M$, такого что $\psi\alpha = \phi$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\alpha"] & & N \\ & R_i \arrow[ul, dotted, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}.$$

Зафиксируем любое $\lambda \in \Lambda$. Пусть $e_\lambda\varphi = n \in N$. Так как α сюръективно, то $m\alpha = n$ при некотором $m \in M$. Положим $(e_\lambda s)\psi = me_\lambda s$ для всех $s \in S$. Так как R_i — циклический S-полигон с образующим элементом e_λ (на самом деле любой элемент из R_i является образующим), то $e_\lambda S = R_i$, поэтому отображение ψ определено на всём множестве R_i. Проверим, что ψ — гомоморфизм.

Имеем

$$(e_\lambda s \cdot t)\psi = (e_\lambda st)\psi = me_\lambda st = me_\lambda s \cdot t = (e_\lambda s)\psi \cdot t.$$

Проверим, что $\psi\alpha = \varphi$. Имеем

$$(e_\lambda s)\psi\alpha = (me_\lambda s)\alpha = m\alpha \cdot e_\lambda s = n \cdot e_\lambda s = e_\lambda\varphi \cdot e_\lambda s = (e_\lambda \cdot e_\lambda s)\varphi = (e_\lambda s)\varphi.$$

Это завершает доказательство леммы. □

Лемма 10 [7, предложение 17.1]. *Копроизведение $Y = \coprod\limits_{i \in I} Y_i$ полигонов является проективным полигоном в том и только том случае, если Y_i — проективные полигоны.*

Лемма 11. *Пусть Z — полигон над полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ и для всех $z \in Z$ выполнены следующие условия:*

1) *$zS = Z$;*
2) *для любых $j \in I$, $\lambda, \mu \in \Lambda$ и $g, h \in G$ из равенства $z \cdot (g)_{j\lambda} = z \cdot (h)_{j\mu}$ следует, что $\lambda = \mu$ и $g = h$.*

Тогда $Z \cong R_i$ (где i — любой элемент из I).

Доказательство. Пусть $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, $z \in Z$. Тогда ввиду условия 1) $z \cdot (e)_{i\lambda} \cdot s = z$ при некотором $s \in S$. Пусть $s = (g)_{j\mu}$. Тогда $z \cdot (p_{\lambda j}g)_{i\mu} = z$. Отсюда следует, что

$$z \cdot (p_{\lambda j}g)_{i\mu} \cdot (p_{\lambda j}g)_{i\mu} = z \cdot (p_{\lambda j} \cdot g)_{i\mu} \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu}.$$

Взяв в условии 2) $z \cdot (p_{\lambda j} \cdot g)_{i\mu}$ вместо z, получим, что $p_{\lambda j}g = p_{\mu i}^{-1}$. Следовательно, $z \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} = z$. Построим отображение $Z \xrightarrow{\beta} R_i$, полагая $(zs)\beta = (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu}s$ при всех $s \in S$. Проверим корректность этого отображения. Пусть $zs = zt$. Тогда

$$z \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} \cdot s = z \cdot (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu} \cdot t.$$

Из условия 2) получаем, что $(p_{\mu i}^{-1})_{i\mu}s = (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu}t$. Отображение β взаимно-однозначно, так как если $(p_{\mu i}^{-1})_{i\mu}s = (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu}t$, то, умножая слева на z, получаем, что $zs = zt$. Осталось доказать, что β — гомоморфизм. Действительно, при любом $t \in S$

$$(zs \cdot t)\beta = \big(z(st)\big)\beta = (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu}(st) = (p_{\mu i}^{-1})_{i\mu}s \cdot t = (zs)\beta \cdot t.$$

Таким образом, $Z \cong R_i$. □

Следствие. *Полигоны R_i и R_j изоморфны при всех $i, j \in I$.*

Замечание. $R_i \cong R_j$ при любых i, j не только как S-полигоны, но и как полугруппы. Хотя это утверждение в дальнейшем нам не понадобится, докажем его, так как оно представляет самостоятельный интерес.

Предложение 12. *Введём на множестве Λ умножение $\lambda \cdot \mu = \mu$, превращающее Λ в полугруппу правых нулей. Если $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, $i \in I$ и $R_i = \{(g)_{i\lambda} \mid g \in G,\ \lambda \in \Lambda\}$, то $R_i \cong G \times \Lambda$ (как полугруппы).*

Доказательство. Тот факт, что R_i изоморфно прямому произведению группы и полугруппы правых нулей, следует из следствия 2.52 b в [1]. Действительно, R_i — простая справа полугруппа, содержащая идемпотент, т. е. правая группа. В нашем случае это может быть установлено и непосредственно. Зафиксируем $i \in I$. Тогда отображение $(g)_{i\lambda} \mapsto (gp_{\lambda i}, \lambda)$ будет изоморфизмом полугрупп R_i и $G \times \Lambda$. □

В следующей теореме мы характеризуем проективные полигоны над вполне простой полугруппой.

Теорема 13. *Пусть X — полигон над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$, XS — подполигон, $A = X \setminus XS$, $Z = XS \setminus AS$. Полигон X проективен в том и только том случае, когда выполнены следующие условия:*

1) *из того, что $as = bt$, следует, что $(a = b) \wedge (s = t)$ при $a, b \in A$, $s, t \in S$;*
2) *из того, что $z \cdot (g)_{i\lambda} = z \cdot (h)_{i\mu}$, следует, что $(g = h) \wedge (\lambda = \mu)$ при $z \in Z$, $i \in I$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, $g, h \in G$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть X — проективный S-полигон. По следствию из леммы 3 $XS = \coprod\limits_{\gamma \in \Gamma} X^{(\gamma)}$, а по лемме 8 $AS = \coprod\limits_{\gamma \in \Gamma_1} X^{(\gamma)}$,

$Z = \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma_2} X^{(\gamma)}$, причём $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ и $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$. Выберем в каждом $X^{(\gamma)}$ при $\gamma \in \Gamma_2$ по элементу z_γ.

Рассмотрим множество переменных

$$U = \{u_a \mid a \in A\} \cup \{u_\gamma \mid \gamma \in \Gamma_2\},$$

и пусть $F(U)$ — свободный S-полигон с множеством свободных образующих U. Пусть $\varphi\colon F(U) \to X$ — гомоморфизм, такой что $u_a\varphi = a$ при $a \in A$ и $u_\gamma\varphi = z_\gamma$. Очевидно, что $A \cup \{z_\gamma \mid \gamma \in \Gamma_2\}$ — множество образующих полигона X, следовательно, φ — сюръективный гомоморфизм. Так как X проективен, то существует гомоморфизм ψ, такой что $\psi\varphi = 1_X$:

$$\begin{tikzcd} F(U) \arrow[rr, "\varphi"] & & X \\ & X \arrow[ul, dotted, "\psi"] \arrow[ur, "1_X"'] & \end{tikzcd}.$$

Докажем, что $a\psi = u_a$ при $a \in A$. Так как $(a\psi)\varphi = a \notin XS$, то $a\psi \notin F(U)S$, следовательно, $a\psi \in U$. Предположим, что $a\psi = u_\gamma$ при некотором $\gamma \in \Gamma_2$. Тогда $z_\gamma = u_\gamma\varphi = a\psi\varphi = a$, что невозможно. Следовательно, $a\psi = u_b$ при некотором $b \in A$. Тогда $b = u_b\varphi = a\psi\varphi = a$. Таким образом, $a\psi = u_a$.

Проверим, что $z_\gamma\psi \in u_\gamma S$. Так как $F(U) = US^1$, то $z_\gamma\psi \in uS^1$ при некотором $u \in U$. Равенство $z_\gamma\psi = u_a s$ ($a \in A$, $s \in S^1$) невозможно, так как оно влечёт

$$z_\gamma = z_\gamma\psi\varphi = (u_a s)\varphi = (u_a\varphi)s = as \in AS.$$

Следовательно, $z_\gamma\psi = u_\delta s$ при некоторых $\delta \in \Gamma_2$ и $s \in S^1$. Имеем

$$z_\gamma = z_\gamma\psi\varphi = (u_\delta s)\varphi = (u_\delta\varphi)s = z_\delta s \in X^{(\delta)},$$

откуда следует, что $\delta = \gamma$. Таким образом, $z_\gamma\psi \in u_\gamma S^1$. Но $z_\gamma \in z_\gamma S$, поэтому $z_\gamma\psi \in u_\gamma S$.

Докажем свойство 1). Пусть $a, b \in A$, $s, t \in S$ и $as = bt$. Тогда $(as)\psi = (bt)\psi$, откуда следует, что $a\psi\cdot s = b\psi\cdot t$, а значит, $u_a s = u_b t$. Так как u_a, u_b — свободные образующие, то $a = b$ и $s = t$.

Теперь докажем свойство 2). Пусть $z \in Z$ и $z \cdot (g)_{i\lambda} = z \cdot (h)_{i\mu}$. Ясно, что $z \in X^{(\gamma)}$ при некотором $\gamma \in \Gamma_2$. По лемме 4 $z_\gamma S = X^{(\gamma)}$. Следовательно, $z = z_\gamma s$ при некотором $s \in S$. Тогда $z_\gamma s(g)_{i\lambda} = z_\gamma s(h)_{i\mu}$. Имеем, что $z_\gamma s(g)_{i\lambda}\psi = z_\gamma s(h)_{i\mu}\psi$. Ранее было доказано, что $z_\gamma\psi = u_\gamma t$ при некотором $t \in S$. Отсюда следует, что $u_\gamma ts(g)_{i\lambda} = u_\gamma ts(h)_{i\mu}$. Так как u_γ — свободный образующий, то $ts(g)_{i\lambda} = ts(h)_{i\mu}$. Пусть $ts = (b)_{k\nu}$. Тогда $(bp_{\nu i}g)_{k\lambda} = (bp_{k\nu}h)_{k\mu}$. Отсюда следует, что $g = h$ и $\lambda = \mu$.

Достаточность. Пусть для полигона X выполнены условия 1), 2). Ранее было доказано, что $X = (A \cup AS) \sqcup \coprod\limits_{\gamma\in\Gamma_2} X^{(\gamma)}$. Условие 1) показывает, что $A \cup AS$ — свободный S-полигон с множеством свободных образующих A. Следовательно,

$A \cup AS$ — проективный S-полигон. Ввиду леммы 10 остаётся доказать проективность полигона $X^{(\gamma)}$ при $\gamma \in \Gamma_2$.

Пусть $\gamma \in \Gamma_2$. Положим $Y = X^{(\gamma)}$. По лемме 4 $yS = Y$ при всех $y \in Y$, т. е. для полигона Y выполнено условие 1) леммы 11. Условие 2) нашей теоремы влечёт выполнение условия 2) леммы 11 для полигона Y. Таким образом, полигон Y удовлетворяет условиям леммы 11, а значит, $Y \cong R_i$ (напомним, что $R_i = \{(g)_{i\lambda} \mid g \in G,\ \lambda \in \Lambda\}$). По лемме 9 полигон R_i проективен. Следовательно, Y — проективный полигон. Теорема доказана. □

Следующая теорема даёт ещё одну характеризацию проективных полигонов над вполне простой полугруппой.

Теорема 14. *Пусть $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$ — вполне простая полугруппа. Для $i \in I$ пусть $R_i = \{(g)_{i\lambda} \mid g \in G,\ \lambda \in \Lambda\}$. Полигон X над полугруппой S проективен в том и только том случае, если*

$$X \cong \coprod_{\delta \in \Delta} Y_\delta \sqcup \coprod_{\varepsilon \in \mathrm{E}} Z_\varepsilon,$$

где $Y_\delta \cong S^1$, $Z_\varepsilon \cong R_i$ для любых $\delta \in \Delta$, $\varepsilon \in \mathrm{E}$ (при этом возможно, что $\Delta = \varnothing$ или $\mathrm{E} = \varnothing$).

Доказательство. Пусть $A = X \setminus XS$, $Z = XS \setminus AS$. Условие 1) теоремы 13 означает, что $A \cup AS$ — свободный S-полигон с множеством свободных образующих A, поэтому $A \cup AS$ — копроизведение совокупности полигонов, изоморфных полигону S^1. Мы знаем, что $Z = \coprod\limits_{\gamma \in \Gamma_2} z_\gamma S$ (см. лемму 9). При доказательстве теоремы 13 было показано, что $z_\gamma S \cong R_i$. Остаётся воспользоваться равенством $X = (A \cup AS) \coprod Z$. □

Только что доказанные теоремы можно применить к прямоугольным связкам.

Следствие (из теорем 13, 14). *Пусть $S = I \times \Lambda$ — прямоугольная связка. Полигон X над полугруппой S проективен в том и только том случае, если выполнены следующие условия:*

1) *из того, что $as = bt$, следует, что $a = b$, $s = t$ для всех $a, b \in X \setminus XS$, $s, t \in S$;*
2) *из того, что $x \cdot (i, \lambda) = x \cdot (i, \mu)$, следует, что $\lambda = \mu$ для всех $x \in$ $\in XS \setminus (X \setminus XS)S$.*

Другая характеризация: X проективен в том и только том случае, если

$$X \cong \coprod_{\delta \in \Delta} Y_\delta \sqcup \coprod_{\varepsilon \in \mathrm{E}} Z_\varepsilon,$$

где $Y_\delta \cong S^1$, $Z_\varepsilon \cong \Lambda$, Λ рассматривается как S-полигон относительно умножения $\lambda \cdot (i, \mu) = \mu$ ($i \in I$, $\lambda, \mu \in \Lambda$).

Построим теперь проективное накрытие полигона над вполне простой полугруппой.

Теорема 15. *Пусть X — полигон над вполне простой полугруппой $S = \mathcal{M}(G, I, \Lambda, P)$. Представим X в виде $X = (A \cup AS) \sqcup \coprod_{\gamma \in \Gamma_2} z_\gamma S$. Пусть $F(A)$ — свободный S-полигон с множеством свободных образующих A, $R_i = \{(g)_{i\lambda} \mid g \in G,\ \lambda \in \Lambda\}$ — правый S-полигон ($i \in I$ фиксировано). Положим $P(X) = F(A) \sqcup \coprod_{\gamma \in \Gamma_2} R^{(\gamma)}$, где $R^{(\gamma)} \cong R_i$, и определим отображение $\beta\colon P(X) \to X$ по правилу $(as)\beta = as$ (для $a \in A$, $s \in S^1$), $(g)_{i\lambda}\beta = z_\gamma (g)_{i\lambda}$ (если $(g)_{i\lambda}$ рассматривается как элемент из $R^{(\gamma)}$). Тогда β — сюръективный гомоморфизм, а $P(X)$ — проективное накрытие полигона X.*

Доказательство. Тот факт, что β — сюръективный гомоморфизм, проверяется непосредственно. Также очевидно, что для любого собственного подполигона $P_1 \subset P(X)$ мы будем иметь $P_1\beta \neq X$. □

Литература

[1] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. — М.: Мир, 1972.

[2] Кожухов И. Б., Халиуллина А. Р. Инъективность и проективность полигонов над сингулярными полугруппами // Электрон. информ. сист. — 2014. — № 2 (2). — С. 45—56.

[3] Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. — М.: Высшая школа, 1994.

[4] Avdeyev A. Yu., Kozhukhov I. B. Acts over completely 0-simple semigroups // Acta Cybernetica. — 2000. — Vol. 14, no. 4. — P. 523—531.

[5] Berthiaume P. The injective envelope of S-sets over left zero semigroups // Can. Math. Bull. — 1967. — Vol. 10, no. 2. — P. 261—273.

[6] Ebrahimi M. M., Mahnoudi M., Moghaddasi A. Gh. Injective hulls of acts over left zero semigroups // Semigroup Forum. — 2007. — Vol. 75, no. 1. — P. 212—220.

[7] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, Acts and Categories. — New York: Walter de Gruyter, 2000.

[8] Moghaddasi Gh. On injective and subdirectly irreducible S-acts over left zero semigroups // Turk. J. Math. — 2012. — Vol. 36. — P. 359—365.