Полуцепные групповые кольца конечных простых групп лиева типа*

А. В. КУХАРЕВ
Витебский государственный университет им. П. М. Машерова, Беларусь
e-mail: kukharev.av@mail.ru

Г. Е. ПУНИНСКИЙ
Белорусский государственный университет, Беларусь
e-mail: punins@mail.ru

УДК 512.552.7+512.547.23

Ключевые слова: групповое кольцо, полуцепное кольцо, конечная простая группа лиевского типа.

Аннотация

Пусть F — поле, характеристика p которого делит порядок конечной группы G. Показано, что если G — одна из групп ${}^3D_4(q)$, $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, $F_4(q)$, ${}^2F_4(q)$, ${}^2G_2(q)$, то групповое кольцо FG не полуцепное. Если $G = G_2(q^2)$, то кольцо FG полуцепное, если и только если либо $p > 2$ делит $q^2 - 1$, либо $p = 7$ делит $q^2 + \sqrt{3}q + 1$, но 49 не делит это число.

Abstract

A. V. Kukharev, G. E. Puninski, Serial group rings of finite simple groups of Lie type, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 135—144.

Suppose that F is a field whose characteristic p divides the order of a finite group G. It is shown that if G is one of the groups ${}^3D_4(q)$, $E_6(q)$, ${}^2E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, $F_4(q)$, ${}^2F_4(q)$, or ${}^2G_2(q)$, then the group ring FG is not serial. If $G = G_2(q^2)$, then the ring FG is serial if and only if either $p > 2$ divides $q^2 - 1$, or $p = 7$ divides $q^2 + \sqrt{3}q + 1$ but 49 does not divide this number.

1. Введение

Пусть G — конечная группа и $R = FG$ — её групповое кольцо на полем F характеристики p, делящей порядок G. Классической проблемой является описание пар (F, G), таких что кольцо FG полуцепное. Одно необходимое условие вытекает из результата Д. Г. Хигмана: силовская p-подгруппа группы G должна быть циклической. Но это условие не является достаточным.

Из результатов [1, 10] следует, что свойство кольца FG быть полуцепным зависит только от характеристики поля F. С учётом этого факта из результата

*Первый автор поддержан грантом БРФФИ (проект № Ф15РМ-025).

© 2016 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

К. Мориты выводится (см. [18]), что групповое кольцо p-разрешимой группы с силовской p-подгруппой P над полем характеристики p является полуцепным. Например, это так, когда группа G имеет нечётный порядок (следовательно, разрешима). Более того (см. [2]), если $p = 2$, то кольцо FG полуцепное, если и только если P циклическая и имеет нормальное дополнение в G (т. е. G является 2-нильпотентной).

Из рассмотрений [4] вытекает, что наш исходный вопрос может быть сведён к случаю, когда G является расширением своей нормальной p'-подгруппы с помощью простой неабелевой группы, силовская p-подгруппа которой циклическая. Итак, важным шагом является нахождение списка конечных простых групп, групповые кольца которых над данным полем характеристики p полуцепные. На настоящий момент такой список известен для знакопеременных групп [3], спорадических простых групп и групп Судзуки [4], а также для проективных специальных линейных групп [19]. Например, из простых спорадических групп только группа Янко J_1, $p = 3$ и группа Матьё M_{11}, $p = 5$ дают полуцепные групповые кольца, которые не являются классически полупростыми.

В этой работе мы рассмотрим исключительные группы $G_2(q)$, $F_4(q)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, их скрученные варианты ${}^2E_6(q)$, ${}^3D_4(q)$ и группы Ри ${}^2G_2(3^{2m+1})$, ${}^2F_4(2^{2m+1})$. Мы покажем, что среди этих групп полуцепные неполупростые групповые кольца возникают только для $G_2(q)$, когда $p > 2$ делит $q \pm 1$ или если $p = 7$ делит $q^2 + \sqrt{3}q + 1$, но 49 не делит это число.

Чтобы завершить классификацию конечных простых групп с полуцепным групповым кольцом, после этой работы останется рассмотреть (проективные) унитарные, спорадические и ортогональные группы.

2. Базовые сведения

Все кольца в этой работе предполагаются ассоциативными с единицей, все модули являются правыми унитарными модулями. Модуль M называется *цепным*, если решётка его подмодулей является цепью. Модуль M *полуцепной*, если он разлагается в прямую сумму цепных модулей. Кольцо R называется *полуцепным*, если оно полуцепное как правый и как левый модуль над собой. Полуцепные кольца подробно рассматриваются в [21].

Пусть G — конечная группа и F — поле характеристики p. Нас будет интересовать следующая задача, являющаяся частным случаем проблемы Туганбаева (см. [5, проблема 16.9]).

Проблема 1. Описать все пары (F, G), такие что групповое кольцо FG полуцепное.

Если p не делит порядок G, то по теореме Машке групповое кольцо FG является классически полупростым (и, следовательно, полуцепным). В этой работе мы будем рассматривать только случай, когда p делит порядок G, т. е.

любая силовская p-подгруппа группы G нетривиальна. Тогда кольцо FG не является классически полупростым.

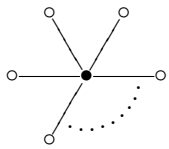
Заметим, что кольцо FG артиново и самоинъективно. Хорошо известно, что любое артиново полуцепное кольцо имеет конечный тип представлений. Итак, если кольцо FG полуцепное, то из результата Д. Г. Хигмана [14] вытекает, что силовская p-подгруппа P группы G циклическая. Обратное неверно: например, если $G = \mathrm{SL}(2,p)$ и $p \geqslant 5$, то $P \cong C_p$ — циклическая группа, но кольцо FG не полуцепное. Тем не менее, как мы отметили выше, импликация в обратную сторону выполняется для p-разрешимых групп.

Поскольку свойство кольца FG быть полуцепным зависит только от характеристики поля F, то мы можем предполагать, что F алгебраически замкнуто. Определение дерева Брауэра для блока с циклической дефектной группой и связанных с ним понятий можно найти в [6].

В этом случае удобный критерий того, что групповое кольцо является полуцепным, предложен У. Фейтом (см. [6, следствие 7.2.22]).

Факт 2. Кольцо FG полуцепное, если и только если силовская p-подгруппа группы G циклическая и дерево Брауэра любого блока B группы G является звездой с исключительной вершиной в центре (или без исключительной вершины).

На следующем рисунке представлен типичный вид звезды.



В частности, звезда может содержать только одно ребро или одну вершину (в последнем случае блок полупрост). Заметим, что дерево Брауэра блока однозначно определяется его матрицей разложения (и наоборот).

Предположим, что G — простая неабелева группа, определённая над конечным полем из q элементов, с нетривиальной силовской p-подгруппой P. Если $p = 2$, то P не является циклической (иначе группа G 2-нильпотентна, что невозможно). Более того (см. [22, предложение 5.1]), если $G \neq \mathrm{PSL}_2(q)$ и p делит q, то в этом случае P также не является циклической. Итак, в настоящей работе мы можем предполагать, что $p \neq 2$ не делит q.

Мы будем часто использовать следующий факт (см. [6, теорема 6.2.7]).

Факт 3. Пусть F — поле характеристики p и H — нормальная подгруппа конечной группы G, такая что G/H — p'-группа. Тогда кольцо FG полуцепное, если и только если FH — полуцепное кольцо.

Нам потребуется один факт о дефектной группе блока (см. [20, следствие 4.7.24]).

Факт 4. Если D — дефектная группа p-блока группы G, то $D = O_{p'}\big(N_G(D)\big)$. Здесь $O_{p'}(H)$ обозначает наибольшую нормальную подгруппу группы H, порядки элементов которой взаимно просты с p, и $N_G(D)$ — нормализатор D в G.

Через $A : B$ обозначим полупрямое произведение нормальной подгруппы A, на которой действует группа B. Кроме того, C_n обозначает циклическую мультипликативную группу порядка n.

3. Основной результат

Сначала мы покажем, что для большинства групп из нашего списка их групповые кольца не являются полуцепными.

Теорема 5. *Пусть G — одна из групп ${}^3D_4(q)$, $E_6(q)$, $E_7(q)$, $E_8(q)$, $F_4(q)$, $G_2(q)$, где q обозначает степень простого числа. Если F — поле характеристики p, делящей порядок G, то кольцо FG не полуцепное.*

Доказательство этой теоремы займет весь раздел. Сначала мы выпишем порядки этих групп:

$$|{}^3D_4(q)| = q^{12}(q^2-1)(q^6-1)(q^8+q^4+1),$$
$$|E_6(q)| = \frac{1}{(3,q-1)} \cdot q^{36}(q^2-1)(q^5-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9-1)(q^{12}-1),$$
$$|{}^2E_6(q)| = \frac{1}{(3,q+1)} \cdot q^{36}(q^2-1)(q^5+1)(q^6-1)(q^8-1)(q^9+1)(q^{12}-1),$$
$$|E_7(q)| = \frac{1}{(2,q-1)} \cdot q^{63}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{10}-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1),$$
$$|E_8(q)| = q^{120}(q^2-1)(q^8-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1)(q^{20}-1)(q^{24}-1)(q^{30}-1),$$
$$|F_4(q)| = q^{24}(q^2-1)(q^6-1)(q^8-1)(q^{12}-1),$$
$$|G_2(q)| = q^6(q^2-1)(q^6-1).$$

Заметим, что все группы в этом списке, за исключением $G_2(2)$, просты. Группа $G_2(2)$ имеет порядок $2^6 \cdot 3^3 \cdot 7$, причём её коммутант $G_2(2)' \cong \mathrm{PSU}(3,3)$ является простой группой порядка $2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$.

По замечанию выше мы можем предполагать, что $p \neq 2$ не делит q. Пусть e — порядок q по модулю p, в частности, e делит $p-1$. Напомним, что P обозначает силовскую p-подгруппу группы G. Мы рассмотрим группы из нашего списка по очереди.

Группы типа ${}^3D_4$

Пусть $G = {}^3D_4(q)$ — группа Стейнберга. Порядок G разлагается следующим образом:

$$|{}^3D_4(q)| = q^{12}(q^2-1)^2(q^4-q^2+1)(q^4+q^2+1)^2.$$

Мы покажем, что главный блок B_0 кольца FG всегда неполуцепной. Действительно, в противном случае дефектная группа P главного блока G циклическая. Тогда из [9, предложение 5.6 c)] вытекает, что p делит $q^4 - q^2 + 1$, т. е. P является подгруппой максимального тора $T_5 = C_{q^4-q^2+1}$ (см. [9, с. 42, табл. 1.1]). Согласно [11, с. 3265] в этом случае дерево Брауэра блока B_0 является отрезком с четырьмя рёбрами, поэтому блок B_0 не полуцепной, — противоречие.

Группы типа E_6

Пусть $G = E_6(q)$. Из формулы для порядка G легко вывести, что возможные значения для e — это $1, \ldots, 6, 8, 9, 12$. Сначала предположим, что $p > 3$. Если $e = 1, 6$, то не существует унипотентных блоков с циклической силовской p-подгруппой (см. [17, теорема 3.1]). В частности, это применимо к главному блоку B_0, поэтому этот блок не полуцепной.

Более того, для остальных значений e существует унипотентный блок с циклической дефектной группой, дерево Брауэра которого не является звездой.

Рассмотрим теперь случай $p = 3$. Тогда p делит $q \pm 1$. Согласно [8, с. 897] G содержит максимальный тор $T_8 = C^2_{q+1} \times C^2_{q^2-1}$, поэтому силовская 3-подгруппа не циклическая.

Группы типа ${}^2E_6$

Пусть $G = {}^2E_6(q)$. Тогда возможные значения для e — это 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 18.

Рассмотрим сначала случай $p > 3$. Если $e = 2, 3$, то по [16, теорема 2.2] в группе G нет унипотентных блоков с циклической дефектной группой. Для $e = 4, 6, 8, 10, 12, 18$ по той же теореме группа G имеет унипотентный блок с циклической дефектной p-подгруппой, дерево Брауэра которого не является звездой.

Наконец, предположим, что $e = 1$, т. е. p делит $q - 1$. Заметим (см. [8, с. 903]), что максимальные торы группы G можно получить из соответствующего списка для $E_6(q)$, используя формальную замену $q \mapsto -q$; например, $q - 1$ переходит в $q + 1$. Из [8, с. 897] вытекает, что G содержит максимальный тор $T_{11} = C_{q^2-1} \times C_{q^4-1}$, поэтому P не циклическая.

Итак, осталось рассмотреть случай $p = 3$. В этом случае силовская p-подгруппа группы G тоже не циклическая. Действительно, поскольку $q \equiv \pm 1 \pmod 3$, то нужное заключение вытекает из рассмотрения того же тора.

Группы типа E_7

Пусть $G = E_7(q)$. Тогда возможные значения для e следующие: $1, \ldots, 10$, 12, 14, 18.

Если $e = 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 18$, то из [12, теорема 12.6 и замечание на с. 2970] вытекает существование унипотентного блока с циклической силовской подгруппой, дерево Брауэра которого является отрезком длины не меньше 4; следовательно, этот блок не полуцепной.

Мы утверждаем, что в оставшихся случаях $e = 1, 2, 3, 4, 6$ силовская p-подгруппа в группе G не является циклической. Действительно, для $e = 1, 3$ достаточно рассмотреть максимальный тор $T_{10} = C_{q-1} \times C^2_{q^3-1}$ (см. [8, с. 898]). Аналогично для $e = 2$ мы можем использовать тор $T_8 = C_{q-1} \times C^2_{q+1} \times C^2_{q^2-1}$, а для $e = 4$ — тор $T_{28} = C_{(q-1)(q^2+1)} \times C_{q^2-1} \times C_{q^2+1}$. Наконец, для $e = 6$, заменяя q на $-q$ в T_{10}, заключаем, что G содержит максимальный тор $C_{q+1} \times C^2_{q^3+1}$.

Заметим, что случай $p = 3$, т. е. $p \mid q \pm 1$, уже был рассмотрен.

Группы типа E_8

Пусть $G = E_8(q)$. Тогда возможные значения для e следующие: $1, \ldots, 10$, 12, 14, 15, 18, 20, 24, 30.

Если $e = 7, 9, 14, 15, 18, 20, 24, 30$, то по [12, теорема 12.7] заключаем, что существует неполуцепной унипотентный блок.

В оставшихся случаях (т. е. для $e = 1, \ldots, 6, 8, 10, 12$) можно утверждать, что силовская p-подгруппа не является циклической. Это вытекает из того, что G содержит следующие торы (см. [8, с. 899—901]): для $e = 1, 2, 3$ — тор $T_{34} = C^2_{(q+1)(q^3-1)}$, для $e = 4$ — тор $T_{36} = C^2_{q^4-1}$, для $e = 5$ — тор $T_{57} = C^2_{q^4+q^3+q^2+q+1}$, для $e = 6$ — тор $C_{(q^4-q^2+1)(q^2-q+1)} \times C_{q^2-q+1}$, который получен из T_{62} подстановкой $q \mapsto -q$ (см. [8, замечание на с. 902]), для $e = 8$ — тор $T_{61} = C^2_{q^4+1}$. Для $e = 10$ имеется тор $C_{q^4-q^3+q^2-q+1}$, полученный из T_{57} подстановкой $q \mapsto -q$. Для $e = 12$ мы используем тор $T_{67} = C^2_{q^4-q^2+1}$.

Группы типа F_4

Пусть $G = F_4(q)$. Возможные значения для e — это $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12$.

Предположим сначала, что $p > 3$. Если $e = 1, 2, 3, 6$, то по [16, теорема 2.1] не существует унипотентных блоков с циклической силовской p-подгруппой, следовательно, главный блок не полуцепной.

Если $e = 4, 8, 12$, то по той же теореме существует неполуцепной унипотентный блок (с циклической дефектной p-группой).

Теперь предположим, что $p = 3$, и докажем, что силовская 3-подгруппа группы G не циклическая. Действительно, по [13, таблица 4.7.3] G имеет три класса сопряжённости элементов порядка 3.

3.1. Группы типа G_2

Пусть $G = G_2(q)$. Разложим порядок G следующим образом:

$$|G_2(q)| = q^6(q^2-1)^2(q^2-q+1)(q^2+q+1).$$

Сначала предположим, что $q > 2$, следовательно, группа простая. Согласно [23, с. 1902] G содержит тор $C^2_{q\pm1}$. Итак, если p делит $q \pm 1$, то силовская p-подгруппа группы G не циклическая.

Предположим, что p делит $q^2 \pm q + 1$. Если $p \neq 3$, то (см. [24, с. 380–381]) деревья Брауэра главных блоков изображены на следующем рисунке.

Здесь случай q^2+q+1 показан слева, q^2-q+1 — справа, и 1 обозначает тривиальный характер. Итак, в обоих случаях главный блок не является полуцепным.

Теперь предположим, что $p = 3$. Если 3 делит $q^2 + q + 1$, то $q \equiv 1 \pmod 3$, и этот случай уже был рассмотрен. Аналогично условие $3 \mid q^2 - q + 1$ влечёт $3 \mid q + 1$.

Осталось рассмотреть группу $G = G_2(2)$ порядка $2^6 \cdot 3^3 \cdot 7$ с простым коммутантом $G' \cong \mathrm{PSU}(3,3)$ индекса 2. Для $p = 2, 3$ легко проверить, что силовские p-подгруппы G и G' не являются циклическими. Если $p = 7$, то, используя матрицы разложения из [25], заключаем, что дерево Брауэра главного блока группы G' является отрезком с тремя рёбрами, следовательно, кольцо FG' не полуцепное. Тогда из леммы 3 следует, что и кольцо FG не полуцепное.

4. Группы типа ${}^2G_2(q^2)$

Пусть $G = {}^2G_2(q^2)$, где $q^2 = 3^{2n+1}$, $n \geqslant 0$. Порядок этой группы равен

$$q^6(q^2-1)(q^6+1) = q^6(q^2-1)(q^2+1)(q^2+\sqrt{3}q+1)(q^2-\sqrt{3}q+1).$$

Более того, G простая, если и только если $n > 0$. Рассмотрим сначала случай $n = 0$. Тогда $G = {}^2G_2(3) \cong \mathrm{P\Gamma L}_2(8)$ — непростая группа порядка $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7$, коммутант которой является простой группой индекса 3 в G. Если $p = 2, 3$, то легко проверить, что силовские p-подгруппы в обеих группах нециклические.

Если $p = 7$, то из [15, предложение 3.2] вытекает, что все блоки кольца FG с нетривиальным дефектом содержат только один модулярный характер, следовательно, кольцо FG полуцепное. По факту 3 то же самое верно для кольца FG'.

Теперь мы рассмотрим основной случай.

Теорема 6. *Пусть $G = {}^2G_2(q^2)$, $q^2 = 3^{2n+1}$, $n > 0$, и пусть F — поле характеристики p, делящей порядок G. Тогда групповое кольцо FG полуцепное, если и только если выполнено одно из следующих условий*:

1) *$p > 2$ делит $q^2 - 1$;*
2) *$p = 7$ делит $q^2 + \sqrt{3}q + 1$, но 49 не делит это число.*

Доказательство. Как выше, мы можем считать, что $p \neq 2$ не делит q.

Если p делит $q^2 + 1$ или $q^2 - \sqrt{3}q + 1$, то по [15, теоремы 4.2, 4.4] силовская p-подгруппа группы G циклическая, но дерево Брауэра главного блока G не является звездой, поэтому кольцо FG не полуцепное.

Теперь рассмотрим случай, когда $p \mid q^2 + \sqrt{3}q + 1$, следовательно, $p > 5$. По [15, теорема 4.3] P — циклическая группа, и дерево Брауэра главного блока является звездой с шестью рёбрами и исключительной вершиной на краю. Если $p > 7$, то кратность исключительной вершины равна $(|P| - 1)/6 > 1$, следовательно, главный блок неполуцепной. Мы получим то же заключение и в случае, когда $p = 7$ и 49 делит $q^2 + \sqrt{3}q + 1$.

Предположим теперь, что $p = 7$ делит $q^2 + \sqrt{3}q + 1$, но 49 не делит это число. Тогда главный 7-блок группы G полуцепной. По [15, теорема 4.3] все неглавные 7-блоки максимального дефекта содержат только по одному модулярному характеру, следовательно, они полуцепные. Итак, достаточно доказать, что любой блок с нетривиальной дефектной группой D имеет максимальный дефект, т. е. $D = P$.

По лемме 4 достаточно проверить, что P нормальна в $N_G(D)$. По [15, с. 873] $N_G(D)$ является полупрямым произведением $T_3 : C_6$, где $T_3 \cong C_{q^2+\sqrt{3}q+1}$ — максимальный тор. Поскольку P содержится в T_3, мы получаем требуемое.

Итак, в этом случае групповое кольцо FG полуцепное.

Теперь рассмотрим оставшийся случай $2 < p \mid q^2 - 1$. По [15, теорема 4.1] силовская p-подгруппа P группы G является циклической, и дерево Брауэра любого блока максимального дефекта является либо отрезком с двумя рёбрами и исключительной вершиной в центре, либо состоит из одного ребра.

Снова достаточно проверить, что все блоки с нетривиальной дефектной группой D имеют максимальный дефект. Согласно [15, с. 873] нормализатор $N_G(D)$ является полупрямым произведением $T_1 : C_2$, где $T_1 \cong C_{q^2-1}$ — максимальный тор. Поскольку P содержится в T_1, мы получаем требуемое.

Из этого вытекает, что FG — полуцепное кольцо. □

5. Группы типа ${}^2F_4(q^2)$

Наконец, рассмотрим группу $G = {}^2F_4(q^2)$, где $q^2 = 2^{2n+1}$, $n \geqslant 0$. Её порядок

$$|{}^2F_4(q^2)| = q^{24}(q^2 - 1)(q^6 + 1)(q^8 - 1)(q^{12} + 1)$$

факторизуется следующим образом:

$$q^{24}(q^2 - 1)^2(q^2 + 1)^2(q^4 - q^2 + 1)(q^4 + 1)^2(q^4 \pm \sqrt{2}q^3 + q^2 \pm \sqrt{2}q + 1).$$

Более того, эта группа является простой, если и только если $n > 0$. Рассмотрим сначала случай непростой группы $G = {}^2F_4(2)$ порядка $2^{12} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$, коммутант

которой изоморфен простой группе Титса и имеет индекс 2 в G. Поскольку G' содержит максимальные подгруппы $\mathrm{PSL}(3,3) : C_2$ и $\mathrm{PSL}(2,25)$ (см. [7, с. 74]), то для $p = 2, 3, 5$ силовские p-подгруппы G и G' нециклические.

Для $p = 13$ дерево Брауэра главного блока группы G' не является звездой (см. [25]), поэтому кольцо FG' не полуцепное. По факту 3 то же верно для кольца FG.

Теперь рассмотрим основной случай.

Теорема 7. *Пусть $G = {}^2F_4(q^2)$, $q^2 = 2^{2n+1}$, $n > 0$ и F — поле характеристики p, делящей порядок G. Тогда групповое кольцо FG не полуцепное.*

Доказательство. Если силовская p-подгруппа группы G циклическая, то по [15, раздел 4.2] $p > 3$, и имеет место одна из следующих возможностей:

1) $p \mid q^4 - q^2 + 1$;
2) $p \mid q^4 - \sqrt{2}q^3 + q^2 - \sqrt{2}q + 1$;
3) $p \mid q^4 + \sqrt{2}q^3 + q^2 + \sqrt{2}q + 1$.

В каждом из этих случаев дерево Брауэра главного p-блока группы G не является звездой (см. [15, теоремы 4.5—4.7]), следовательно, кольцо FG не полуцепное. □

6. Заключение

Чтобы завершить описание конечных простых групп, модулярное групповое кольцо которых полуцепное, осталось ответить на следующий вопрос.

Вопрос 8. Пусть G — конечная простая группа, принадлежащая одной из следующих серий: $\mathrm{PSU}_n(q)$ (специальная проективная унитарная группа), $\mathrm{PSp}_{2n}(q)$ (проективная специальная спинорная группа), $\mathrm{P}\Omega_{2n+1}(q)$ или $\mathrm{P}\Omega^{\pm}_{2n}(q)$ (проективная ортогональная группа). Для данного поля F характеристики p, делящей порядок группы G, перечислить все случаи, когда кольцо FG полуцепное.

Литература

[1] Волков Ю. В., Кухарев А. В., Пунинский Г. Е. Полуцепность группового кольца конечной группы зависит только от характеристики поля // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2014. — Т. 423. — С. 57—66.

[2] Кухарев А. В., Пунинский Г. Е. Полуцепные групповые кольца конечных групп. p-нильпотентность // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2013. – Т. 413. — С. 134—152.

[3] Кухарев А. В., Пунинский Г. Е. Полуцепность групповых колец знакопеременных и симметрических групп // Вестн. БГУ. Сер. 1. — 2014. — № 2. — С. 61—64.

[4] Кухарев А. В., Пунинский Г. Е. Полуцепные групповые кольца конечных групп. Спорадические простые группы и группы Судзуки // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2015. – Т. 435. — С. 73—94.

[5] Туганбаев А. Теория колец. Арифметические кольца и модули. — М.: МЦНМО, 2009.

[6] Фейт У. Теория представлений конечных групп. — М.: Наука, 1990.

[7] Atlas of Finite Groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups / J. H. Conway, ed. — Oxford : Clarendon Press, 1985.

[8] Deriziotis D. I., Fakiolas A. P. The maximal tori in the finite Chevalley groups of type E_6, E_7 and E_8 // Commun. Algebra. — 1991. — Vol. 19, no. 3. — P. 889—903.

[9] Deriziotis D. I., Michler G. O. Character tables and blocks of finite simple triality groups ${}^3D_4(q)$ // Trans. Amer. Math. Soc. — 1987. — Vol. 303, no. 1. — P. 39—70.

[10] Eisenbud D., Griffith P. Serial rings // J. Algebra. — 1971. — Vol. 17, no. 3. — P. 389—400.

[11] Geck M. Generalized Gelfand—Graev characters for Steinberg's triality groups and their applications // Commun. Algebra. — 1991. — Vol. 19, no. 12. — P. 3249—3269.

[12] Geck M. Brauer trees of Hecke algebras // Commun. Algebra. — 1992. — Vol. 20, no. 10. — P. 2937—2973.

[13] Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. The Classification of the Finite Simple Groups, Number 3. — Providence: Amer. Math. Soc., 1998. — (Math. Surveys Monographs; Vol. 40.3).

[14] Higman D. G. Indecomposable representations at characteristic p // Duke J. Math. — 1954. — Vol. 21. — P. 377—381.

[15] Hiss G. The Brauer trees of the Ree groups // Commun. Algebra. — 1991. — Vol. 19, no. 3. — P. 871—888.

[16] Hiss G., Lübeck F. The Brauer trees of the exceptional Chevalley groups of types F_4 and ${}^2E_6$ // Arch. Math. — 1998. — Vol. 70, no. 1. — P. 16—21.

[17] Hiss G., Lübeck F., Malle G. The Brauer trees of the exceptional Chevalley groups of type E_6 // Manuscripta Math. — 1995. — Vol. 87, no. 1. — P. 131—144.

[18] Kukharev A., Puninski G. Serial group rings of finite groups. p-solvability // Algebra Discrete Math. — 2013. — Vol. 16, no. 2. — P. 201—216.

[19] Kukharev A., Puninski G. Serial group rings of finite groups. General linear and close groups // Algebra Discrete Math. — 2015. — Vol. 20, no. 1. — P. 115—125.

[20] Lux K., Pahlings H. Representations of Groups: A Computational Approach. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.

[21] Puninski G. Serial Rings. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2001.

[22] Sawabe M., Watanabe A. On the principal blocks of finite groups with Abelian Sylow p-subgroups // J. Algebra. — 2001. — Vol. 237, no. 2. — P. 719—734.

[23] Shamash J. Blocks and Brauer trees in the group $G_2(q)$ for primes dividing $q \pm 1$ // Commun. Algebra. — 1989. — Vol. 17, no. 8. — P. 1901—1949.

[24] Shamash J. Brauer trees for blocks of cyclic defect in the group $G_2(q)$ for primes dividing $q^2 \pm q + 1$ // J. Algebra. — 1989. — Vol. 123, no. 2. — P. 378—396.

[25] The Modular Atlas Homepage: Decomposition Matrices / Breuer T. et al. — `http://www.math.rwth-aachen.de/homes/MOC/decomposition/`.