Конечная комбинаторная порождённость метабелева идеала

В. Н. ЛАТЫШЕВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 512.552

Ключевые слова: T-идеал, комбинаторные порождающие T-идеала, метабелев T-идеал.

Аннотация

В работе развивается идея построения системы комбинаторных порождающих T-идеала свободной ассоциативной алгебры, которая является аналогом базиса Грёбнера—Ширшова для полиномиального идеала. Доказывается теорема о полилинейных мономах, позволяющая установить конечную комбинаторную порождённость метабелева T-идеала.

Abstract

V. N. Latyshev, Finite combinatorial generation of metabelian T-ideal, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 145—163.

In this work, we develop our idea on the construction of a system of combinatorial generators in a T-ideal of a free associative algebra, which is a full analogy of a Gröbner—Shirshov basis in a polynomial ideal. We prove a theorem on multilinear monomials that enables us to establish the existence of a finite set of combinatorial generators in a metabelian T-ideal.

В [3] нами была определено понятие комбинаторной системы порождающих (или стандартного базиса, или базиса Грёбнера—Ширшова) T-идеала счётно порождённой свободной ассоциативной алгебры над полем нулевой характеристики. Там же была разработана некоторая техника работы с полилинейными словами, позволившая доказать наличие конечной системы комбинаторных порождающих у любого T-идеала, содержащего T-идеал алгебры Грассмана или алгебры верхних треугольных матриц. Позже [4] эта техника оказалась достаточной для доказательства существования конечного стандартного базиса у любого T-идеала, содержащего полином лиевой нильпотентности четвёртой степени.

В настоящей работе мы усиливаем нашу технику, относящуюся к комбинаторике полилинейных слов, что позволяет доказать конечную комбинаторную порождённость T-идеала, содержащего полином метабелевости.

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 1, с. 145—163.

Трудно ожидать, что все T-идеалы над полями нулевой характеристики конечно комбинаторно порождены. Более вероятным это предположение выглядит для нематричных T-идеалов.

Работа построена следующим образом. В разделе 1 изучаются асимптотические свойства двух выделенных частичных порядков на словах. Один из них был определён Г. Хигманом [5] на множестве слов над хорошо частично упорядоченным алфавитом (не обязательно конечным) и называется «отношением типа делимости», поскольку обобщает делимость в множестве коммутативных мономов. Замечательное утверждение Г. Хигмана состоит в том, что отношение типа делимости является хорошо частично упорядоченным. Это утверждение оказалось чрезвычайно полезным и многократно передоказывалось. Мы также приводим его интерпретации, удобные для наших целей. Другой частичный порядок был введён нами [3] на множестве полилинейных слов над бесконечным алфавитом, занумерованным натуральными числами. Мы называем его «накрытие». Всякое полилинейное слово определяет на своём «составе» (множестве букв, входящих в его запись) частичный порядок, являющийся пересечением двух линейных порядков: один линейный порядок определяют номера (индексы) букв, другой определяется расположением букв в слове (перестановки). Такой порядок естественно называть «перестановочным». Отношение накрытия, по существу, означает наличие изотонной в смысле перестановочного порядка биекции состава одного слова в состав другого слова. Накрытие на самом деле является частичным квазипорядком на множестве всех полилинейных слов. В этом разделе доказывается важная комбинаторная теорема, формулирующая достаточные условия, при которых некоторое множество полилинейных слов удовлетворяет условию Хигмана (см. [4,5]). Здесь же приводится ключевое для дальнейшего понятие нётеровой системы полилинейных слов. Так называется конечная система полилинейных слов, если множество полилинейных слов, не накрывающих («избегающих») всех слов исходной системы, удовлетворяет условию Хигмана относительно накрытия.

В разделе 2 мы называем T-идеал комбинаторно нётеровым, если он содержит конечное множество полилинейных элементов, старшие (в лексикографическом смысле) мономы которых образуют нётерову систему. Свойство комбинаторной нётеровости наследуется бо́льшим T-идеалом. Из очевидных соображений комбинаторно нётеровы T-идеалы конечно комбинаторно порождены. Далее мы передоказываем наши результаты из [3] о комбинаторной нётеровости идеалов тождеств алгебры верхнетреугольных матриц и алгебры Грассмана, используя комбинаторную теорему из раздела 1.

В разделе 3 мы выбираем некоторую базовую систему полилинейных элементов метабелева T-идеала и выделяем их старшие мономы. В разделе 4, используя комбинаторную теорему из раздела 1, мы доказываем нётеровость системы мономов, выделенной в предыдущем разделе 3. Отсюда следует основной результат о конечной комбинаторной порождённости любого T-идеала, содержащего метабелев полином.

1. Асимптотические свойства двух выделенных порядков на словах. Основная комбинаторная теорема

Пусть $(P, \leqslant)$ — частично упорядоченное множество, отношение порядка в котором выражается словосочетанием «меньше или равно». Под отношением порядка, как обычно, мы понимаем рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение. Последовательность элементов из P (быть может, бесконечная в обе стороны) называется *цепью*, если любая встречающаяся в ней пара элементов сравнима (расположение элементов в паре задаётся последовательностью). Бесконечная влево цепь (попарно различных элементов) называется (*строго*) *убывающей*. Аналогично бесконечная вправо цепь (попарно различных элементов) называется (*строго*) *возрастающей*. Упорядоченное множество, состоящее из попарно несравнимых элементов, называется *антицепью*. Говорят, что частично упорядоченное множество удовлетворяет *условию минимальности*, если не существует бесконечных строго убывающих цепочек его элементов. Частично упорядоченное множество P называется *хорошо* (*вполне*) *частично упорядоченным*, если всякое его непустое подмножество содержит не более чем конечное (непустое) подмножество минимальных элементов.

Предложение 1 (см. [4]). *Следующие условия, наложенные на частично упорядоченное множество $(P, \leqslant)$, равносильны*:

1) *P удовлетворяет условию минимальности и не содержит бесконечных антицепей* (*последнее назовём* условием Диксона);
2) *P хорошо частично упорядоченное*;
3) *всякая бесконечная вправо последовательность элементов из P содержит бесконечную возрастающую подпоследовательность*;
4) *в любой бесконечной вправо последовательности $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ элементов из P найдётся пара сравнимых элементов $a_i \leqslant a_j$, $i < j$ (условие Хигмана).* □

В дальнейшем нам удобно представлять себе хорошую частичную упорядоченность в контексте условия Хигмана.

Отношением (возможно, частичным) квазипорядка $\leqslant$ на множестве P называется рефлексивное и транзитивное отношение (условие антисимметрии отсутствует). Квазипорядок задаёт на множестве P отношение эквивалентности $\sim$ согласно правилу

$$a \sim b \iff a \leqslant b \text{ и } b \leqslant a, \quad a, b \in P.$$

На фактор-множестве $P/{\sim}$ множества P по этому отношению эквивалентности корректно определён частичный порядок $\leqslant_0$, наследуемый с представителей классов эквивалентности:

$$[a] \leqslant_0 [b] \iff a \leqslant_0 b, \quad a, b \in P.$$

Если исходный квазипорядок удовлетворяет условию Хигмана из предложения 1, то множество $(P/{\sim}, \leqslant_0)$ хорошо частично упорядоченное. Выбрав согласно некоторому принципу по одному элементу из каждого класса эквивалентности и составив из этих элементов подмножество $M \subseteq P$, мы получим два изоморфных частично упорядоченных множества $(M, \leqslant)$ и $(P/{\sim}, \leqslant_0)$ (между ними существует изотонная (сохраняющая порядок) биекция).

Теперь мы приступаем к рассмотрению некоторых «канонических» порядков на словах того или иного вида над алфавитом, буквы которого упорядочены тем или иным способом. При этом для большей выразительности текста мы будем использовать различные общепринятые синонимы: слово, строка, конечная последовательнность, перестановка с повторениями, упорядоченная выборка с повторениями, элемент декартовой степени, некоммутативный моном и др. Часто в тех случаях, когда это не приводит к путанице, мы, чтобы не загромождать текст, будем использовать один и тот же символ для обозначения различных порядков.

Отношение «делимости» на декартовой степени частично упорядоченного множества

Пусть $P_1, \ldots, P_m$ — частично упорядоченные множества, $M = P_1 \times \ldots \times P_m$ — их декартово произведение, элементы которого мы будем представлять себе в виде строк длины m, в которых на i-м месте стоит элемент из P_i, $i = 1, \ldots, m$. Отношение «делимости» определяется на M следующим образом:

$$(a_1, \ldots, a_m) \leqslant (b_1, \ldots, b_m) \overset{\text{def}}{\iff} a_i \leqslant b_i, \quad a_i, b_i \in P_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Тем самым множество $(M, \leqslant)$ оказывается частично упорядоченным. Если все P_i хорошо частично упорядоченные, то и M хорошо частично упорядоченное [4]. Если множества P_i совпадают, т. е. $P_1 = \ldots = P_m = P$, нами определён порядок делимости на m-й декартовой степени множества P. Взяв в качестве $P = \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ множество неотрицателных целых чисел и отождествив мысленно строку $(r_1, \ldots, r_m) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$ с коммутативным мономом $x_1^{r_1} \ldots x_m^{r_m}$ от m переменных, мы получим, что отношение делимости на $\mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}$ совпадает с отношением делимости на коммутативных мономах от m переменных.

Отношение типа делимости на словах над частично упорядоченным алфавитом

Рассмотрим частично упорядоченное множество $(P, \leqslant)$ и обозначим через P^* множество слов над «алфавитом» P, «буквами» которого являются элементы множества P.

Будем говорить, что слово $u = a_1 \ldots a_m \in P^*$, $u_i \in P$, является *разреженным подсловом* слова $v \in P^*$, если слово u, рассматриваемое как последовательность букв из P, встречается в слове v в качестве подпоследовательности, т. е. $v = \ldots a_1 \ldots a_2 \ldots a_m \ldots$. Здесь не предполагается, что все элементы a_i различны.

Г. Хигманом в [5] было определено на P^* отношение типа делимости: слово $u \in P^*$ «меньше или равно» слову $v \in P^*$, если v содержит разреженное подслово $w \in P^*$ степени, равной степени слова u, которое «делится» на слово u в смысле предыдущего определения. В обозначениях:

$$u = a_1 \ldots a_m \preceq v = \ldots b_1 \ldots b_m \ldots \overset{\text{def}}{\iff} a_i \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

$a_i, b_j \in P$, $u, v \in P^*$, $w = b_1 \ldots b_m$. Разумеется, таких разреженных подслов w и их «разреженных вхождений» может быть несколько.

Тем самым на множестве слов P^* введено отношение частичного порядка $\preceq$, называемое «порядком типа делимости».

Теорема 1 (Г. Хигман [5]). *Если множество $(P, \leqslant)$ хорошо частично упорядоченное, то и множество $(P^*, \preceq)$ тоже хорошо частично упорядоченное.*

Интересную интерпретацию получает теорема Хигмана, когда множество P конечно, а отношение порядка в P является отношением равенства.

Предложение 2. *Пусть P — конечный алфавит и $u_1, \ldots, u_m, \ldots$ — бесконечная последовательность слов над этим алфавитом. Тогда существует пара индексов $i < j$, такая что слово u_i встречается в слове u_j в качестве подпоследовательности.*

Будем считать, что на множестве P определён порядок, являющийся отношением равенства. Тогда порядок типа делимости на множестве слов P^* над алфавитом P должен удовлетворять условию Хигмана.

Отношение накрытия на полилинейных словах над счётным нумерованным алфавитом

Пусть $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ — счётный алфавит, буквы которого занумерованы (индексированы) натуральными числами. Буквы x_i будем иногда называть «переменными». Алфавит X считается упорядоченным по индексам букв. Через X^* обозначается множество всех слов над алфавитом X. Элементы множества X^* иногда будем называть (некоммутативными) мономами. Предметом нашего изучения будет множество $X_{\mathrm{mult}} \subset X^*$ полилинейных слов, т. е. слов, в запись которых каждая буква входит не более одного раза.

На множестве полилинейных слов X_{mult} определим отношение эквивалентности, действующее по правилу

$$u = x_{i_1} \ldots x_{i_m} \sim v = x_{j_1} \ldots x_{j_n} \overset{\text{def}}{\iff} m = n$$

и отображение $\varphi\colon \{i_1, \ldots, i_n\} \to \{j_1, \ldots j_n\}$, $\varphi\colon x_{i_k} \mapsto x_{j_k}$, $k = 1, \ldots, n$,

является изоморфизмом (изотонной биекцией)

двух множеств натуральных чисел мощности n с естественным порядком.

Отношение эквивалентности на полилинейных словах имеет наглядную итерпретацию на языке частично упорядоченных множеств. Выше отмечалось, что всякое полилинейное слово определяет частичный порядок на множестве букв, входящих в его состав, являющийся пересечением двух линейных порядков. Один линейный порядок задаётся индексами букв, другой — расположением букв в слове. Такой частичный порядок естественно назвать *перестановочным*. Эквивалентность двух полилинейных слов, по существу, означает, что их составы с перестановочными частичными порядками образуют изоморфные частично упорядоченные множества.

Впервые перестановочные порядки рассматривались в 1972 г. в [1], в 1976 г. в [2] они подробно изучались. В последней работе перестановочные упорядоченные множества назывались «нумерованными». Полилинейный моном степени n (n-полилинейный моном) будем называть *регулярным*, если в его запись входят «начальные» переменные $x_1, \ldots, x_n$. В каждый класс эквивалентности входит единственный регулярный моном, который мы будем называть *регулярной формой* всех мономов этого класса. Регулярная форма мономов данного класса эквивалентности является наименьшим в лексикографическом смысле мономом в этом классе эквивалентности. Со всяким подмножеством $M \subseteq X_{\mathrm{mult}}$ полилинейных мономов мы связываем множество $M_{\mathrm{reg}} \subseteq X_{\mathrm{mult}}$ их регулярных форм. В частности, когда M — класс эквивалентности, множество M_{reg} состоит из одного элемента. Далее, X_{reg} обозначает множество всех регулярных полилинейных мономов.

В 1976 г. в [2] было определено отношение на множестве полилинейных мономов, которое лежит в основе всех наших комбинаторных рассмотрений. Позже оно неоднократно использовалось (см., например, [3, 4]). Здесь мы воспроизводим его определение в расширенной редакции.

Будем говорить, что полилинейное слово v *накрывает* полилинейное слово u, если v содержит разреженное подслово w, эквивалентное u. В обозначениях:

$$
\begin{aligned}
u \preceq v \overset{\text{def}}{\iff} {} & u = x_{i_1} \ldots x_{i_m}, \quad v = \ldots x_{j_1} \ldots x_{i_m} \ldots, \\
& \text{отображение } \varphi\colon \{i_1, \ldots, i_m\} \to \{j_1, \ldots, j_m\}, \quad \varphi\colon i_k \mapsto j_k, \quad k = 1, \ldots, m, \text{ —} \\
& \text{изотонная биекция множеств натуральных чисел мощности } m,
\end{aligned}
$$

$w = x_{j_1} \ldots x_{j_m}$. Мысленно отождествляя переменные с их индексами, мы можем считать, что φ — изотонная инъекция множества переменных.

Очевидно, что *отношение накрытия* $\preceq$ на множестве полилинейных мономов является квазипорядком, а соответствующее ему отношение эквивалентности $\sim$ на X_{mult} совпадает с определённым выше отношением эквивалентности $\preceq$ на полилинейных мономах. Частично упорядоченное фактор-множество $(X_{\mathrm{mult}}/{\sim}, \preceq)$ изоморфно частично упорядоченному множеству $(X_{\mathrm{reg}}, \preceq)$.

В [2] показано, что отношение накрытия на X_{mult} не удовлетворяет условию Хигмана, и поэтому частично упорядоченное множество $(X_{\mathrm{reg}}, \preceq)$ не является хорошо частично упорядоченным. Напротив, если отношение накрытия на подмножестве полилинейных мономов $M \subseteq X_{\mathrm{mult}}$ удовлетворяет условию Хигмана, то множество $(M_{\mathrm{reg}}, \preceq)$ хорошо частично упорядоченное.

Отношение накрытия имеет прозрачную интерпретацию на языке частично упорядоченных множеств. А именно, тот факт, что полилинейный моном v накрывает полилинейный моном u (обозначение: $u \preceq v$) просто означает, что множество переменных, составляющих u, с перестановочным частичным порядком имеет изотонную инъекцию в множество переменных, составляющих v, с перестановочным частичным порядком.

Некоторые подмножества полилинейных слов, на которых отношение накрытия удовлетворяет условию Хигмана

Полилинейным моном $u = u_1 \ldots u_m \in X_{\mathrm{mult}}$ назовём *прямым произведением* мономов u_i, если при $i < j$ всякая переменная монома u_i меньше любой переменной из u_j.

Лемма 1. *Пусть $u = u_1 \ldots u_m$, $v = v_1 \ldots v_m \in X_{\mathrm{mult}}$ — прямые произведения мономов и имеют место эквивалентности $u_i \sim v_i$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда справедлива эквивалентность $u \sim v$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_i \colon u_i \to v_i$, $i = 1, \ldots, m$, — изоморфизм полилинейных мономов, рассматриваемых как перестановочно частично упорядоченные множества букв из алфавита X. Тогда в силу того что исходные произведения мономов u и v прямые, биекция $\varphi \colon u \to v$, совпадающая на буквах из монома u_i с отображением φ_i, является искомым изоморфизмом перестановочно частично упорядоченных множеств, реализующим эквивалентность $u \sim v$. $\square$

Следствие 1. *Пусть $u = u_1 \ldots u_m$, $v = v_1 \ldots v_m \in X_{\mathrm{mult}}$ — прямые произведения мономов и имеют место накрытия $u_i \preceq v_i$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда справедливо накрытие $u \preceq v$.*

Доказательство. По условию каждое слово v_i содержит разреженное подслово w_i, эквивалентное u_i, $w_i \sim u_i$, $i = 1, \ldots, m$, причём произведение мономов $w = w_1 \ldots w_m$ прямое. По лемме 1 имеет место эквивалентность $u \sim w$, где w — разреженное подслово в v. Следовательно, $u \preceq v$. $\square$

Предложение 3. *Пусть на подмножестве мономов $M \subset X_{\mathrm{mult}}$ отношение накрытия удовлетворяет условию Хигмана. Тогда на множестве M_d^* всевозможных прямых произведений мономов из M оно также удовлетворяет условию Хигмана.*

Доказательство. На множестве классов эквивалентности

$$[M] = \{[u] \mid u \in M\} \subseteq X_{\mathrm{mult}}/\sim$$

элементов из M отношение накрытия $\preceq$ индуцирует структуру хорошо упорядоченного множества $([M], \preceq)$.

На множестве строк

$$T = \{([u_1], \dots, [u_m] \mid u_i \in M\}$$

определено отношение $\preceq_0$ частичного порядка типа делимости. По теореме 1 множество $(T, \preceq_0)$ хорошо частично определённое.

Рассмотрим произвольную бесконечную последовательность элементов из M_d^*, т. е. элементов, которые могут быть представлены в виде прямых произведений мономов из M. При этом будем предполагать, что что для каждого элемента из M_d^* нашей последовательности фиксировано *одно* представление $u = u_1 \dots u_m$ в виде прямого произведения мономов $u_i \in M$. Тогда элементу u можно *однозначно* поставить в соответствие строку $t_u = ([u_1], \dots, [u_m]) \in T$.

Стро́ки из T, соответствующие таким образом элементам выбранной нами последовательности, также образуют бесконечную последовательность. Так как частично упорядоченное множество $(T, \preceq_0)$ удовлетворяет условию Хигмана, то в нашей последовательности элементов из T найдутся две строки $t_u = ([u_1], \dots, [u_m])$ и $t_v = ([v_1], \dots, [v_n])$, t_u предшествует t_v, такие что $t_u \preceq_0 t_v$, $u_i, v_j \in M$, произведения мономов $u = u_1 \dots u_m$ и $v = v_1 \dots v_n$ прямые, т. е. принадлежат выбранной нами последовательности из M_d^*. По предположению $t_v = ([v_1], \dots, [v_{j_1}], \dots, [v_{j_m}], \dots, [v_n])$, $[u_k] \preceq_0 [v_{j_k}]$, $k = 1, \dots, m$, если и только если $u_k \preceq v_{j_k}$, $k = 1, \dots, m$. Произведение $w = v_{j_1} \dots v_{j_m}$ прямое и является разреженным подсловом в v. По следствию 1 $u \preceq w$, откуда следует, что $u \preceq v$ (отношение накрытия — квазипорядок) и условие Хигмана выполняется. □

Для дальнейшего нам необходимо выделить некоторые типы слов. Слово вида $x_j x_i$, $j > i$, будем называть *скачком*. Полилинейный моном, в котором индексы переменных слева направо возрастают, назовём *цепью*, а если индексы слева направо *убывают* — антицепью. Эти названия совпадают с общепринятыми, если переменные, входящие в запись монома, рассматривать как перестановочно упорядоченные множества. Одну переменную (букву) считаем цепью. Очевидно, любое полилинейное слово (моном) может быть представлено в виде произведения цепей, вообще говоря, многими способами. Наименьшее количество множителей в таком представлении назовём *инверсной шириной слова*. Инверсная ширина цепи равна единице, а антицепи — длине слова.

Предложение 4. *Разложение полилинейного слова в произведение цепей с минимальным числом множителей единственно, количество множителей в нём на единицу больше числа скачков в этом слове.*

Доказательство. Пусть $u \in X_{\mathrm{mult}}$ — полилинейное слово, содержащее $d \geqslant 0$ скачков. Априори возможны два случая.

1. Начальная буква в слове u «скачковая» (начинает скачок). Имеем: $u = x_j x_i v$, $j > i$. В любом разложении u в произведение цепей буква x_j является отдельным множителем. Поэтому любое разложение слова u в произведение цепей получается из разложения слова $w = x_i v$ в произведение цепей присоединением множителя x_j слева. Количество скачков в слове w равно $d-1$.

Из индуктивных соображений, связанных с длиной слова, для w предложение верно. Следовательно, оно верно и для слова u.

2. Начальная буква в слове u «цепная» (начинает в u цепь длины не меньше 2). Имеем: $u = x_i x_j v$, $i < j$. Количество скачков в слове $w = x_j v$ равно d, и всякое разложение слова u в произведение минимально возможного количества цепей получается из аналогичного разложения слова w присоединением буквы x_i к первому множителю. Снова ведя рассуждения индукцией по длине слова, мы можем предполагать, что предложение верно для слова w, а потому оно верно и для слова u. □

Предложение 5. *На множестве полилинейных слов фиксированной инверсной ширины d отношение накрытия удовлетворяет условию Хигмана.*

Доказательство. Пусть $M \subset X_{\mathrm{mult}}$ — множество полилинейных слов фиксированной инверсной ширины d. Рассмотрим бесконечную последовательность слов из M. Без ограничения общности можно предполагать, что все слова выбранной последовательности имеют регулярную форму. Всякое слово $u \in M$ нашей последовательности обладает единственным представлением в виде произведения цепей $u = u_1 \dots u_d$ с минимально возможным количеством множителей d. Обозначим через n длину слова u. Тогда в запись u входят переменные $x_1, \dots, x_n$. Обозначим через $\pi(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, номер цепи, в запись которой входит буква x_i. «Шифром» слова u назовём конечную последовательность $\pi(u) = \pi(x_1), \pi(x_2), \dots, \pi(x_n)$ длины n, состоящую из натуральных чисел, принадлежащих отрезку $\overline{1, d}$, $d \leqslant n$. Согласно предложению 2 наша последовательность слов из M содержит пару слов (u, v) (именно в этом порядке), такую что последовательность $\pi(u)$ содержится в качестве подпоследовательности в последовательности $\pi(v)$. Обозначим длины слов $\deg u = n$, $\deg v = m$, $n \leqslant m$. Если элементы последовательности $\pi(u)$ занимают в последовательнсти $\pi(v)$ «места» с номерами $j_1 \dots j_n$, то отображение

$$\varphi\colon \{x_1, \dots, x_n\} \to \{x_1, \dots, x_{j_1}, \dots, x_{j_n}, \dots, x_m\}, \quad \varphi(x_k) = x_{j_k}, \quad k = 1, \dots, n,$$

осуществляет накрытие слова u словом v. Таким образом, на множестве полилинейных слов M отношение накрытия удовлетворяет условию Хигмана. □

Следствие 2. *На множестве полилинейных слов, инверсная ширина которых ограничена сверху фиксированным числом, отношение накрытия удовлетворяет условию Хигмана.*

Доказательство. Бесконечная последовательность полилинейных слов рассматриваемого типа содержит бесконечную подпоследовательность слов фиксированной инверсной ширины. □

Теорема 2. *На множестве прямых произведений полилинейных слов, инверсная ширина которых ограничена сверху фиксированным числом, отношение накрытия удовлетворяет условию Хигмана.*

Доказательство. Утверждение непосредственно вытекает из предложения 3 и следствия 2. □

Последняя теорема является основным комбинаторным утверждением, которое нами используется для получения результатов о T-идеалах свободной ассоциативной алгебры.

Избегание и нётеровость в полилинейных словах

Если полилинейное слово u не накрывает полилинейного слова v, то будем говорить, что оно его *избегает*. Если полилинейное слово u избегает всех слов из некоторого множества полилинейных слов $M \subseteq X_{\mathrm{mult}}$, то скажем, что u *избегает множества* M. Следуя терминологии Аника, слово $u \in M$ назовём *T-обструкцией* M, если u не накрывает ни одного другого слова из M. Если допустить, что M содержит эквивалентные слова, то в M вообще может не быть T-обструкций.

Теперь предположим, что M состоит из регулярных слов: $M \subseteq X_{\mathrm{reg}}$, т.е. n-линейное слово из M зависит от переменных $x_1, \ldots, x_n$. На множестве $(X_{\mathrm{reg}}, \preceq) \cong (X_{\mathrm{mult}}/{\sim}, \preceq)$ с частичным порядком накрытия выполняется условие минимальности, и поэтому M содержит T-обструкции, являющиеся в M минимальными элементами. Обозначим через $M_{\min}$ множество всех T-обструкций (минимальных элементов) в M. Очевидно, что множества избегающих элементов у множеств $M_{\min}$ и M совпадают.

Конечное множество регулярных полилинейных слов $M \subseteq X_{\mathrm{reg}}$ назовём *комбинаторно нётеровым*, если избегающее его множество полилинейных слов удовлетворяет условию Хигмана относительно накрытия. Это означает, что избегающие M регулярные полилинейные слова (лежащие в X_{reg}) образуют относительно накрытия хорошо частично упорядоченное множество, содержащее лишь конечное число T-обструкций, поскольку последние составляют в нём антицепь.

Сейчас мы приведём два примера нётеровых множеств полилинейных слов, полезных для дальнейшего.

Пример 1. Фиксируем натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и обозначим через $M \subseteq X_{\mathrm{reg}}$ множество всех произведений n скачков, т. е. слов вида

$$x_{\sigma(2)}x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(2n)}x_{\sigma(2n-1)}, \quad \sigma(2i) > \sigma(2i-1),$$

$i = 1, \ldots, n$, $\sigma \in \mathrm{S}_{2n}$ — перестановка чисел $1, 2, \ldots, 2n$. Всякое полилинейное слово, не накрывающее M, содержит не более чем $2n$ незацепляющихся скачков, т. е. вообще в нём количество скачков ограничено сверху некоторым фиксированным числом, а его инверсная ширина ограничена числом, на единицу бóльшим. По следствию 2 на таком множестве полилинейных слов отношение накрытия удовлетворяет условию Хигмана.

Пример 2. Положим $M = \{x_3x_2x_1, x_3x_1x_2\} \subset X_{\mathrm{reg}}$. Опишем общий вид слова $u \in X_{\mathrm{reg}}$, избегающего множества M.

Для краткости слово вида

$$x_1 \ldots x_{s-1}x_{s+1} \ldots x_i x_s, \quad i \geqslant 2,$$

и любое эквивалентное ему слово будем называть *блоком*. В частности, при $s=1$ произведение $x_1\dots x_{s-1}$ считается пустым, при $s=i-1$ пустым считается произведение $x_{s+1}\dots x_{i-1}$, при $i=2$ блок совпадает со скачком x_2x_1. Покажем, что в общем случае полилинейное слово $u\in X_{\mathrm{reg}}$, избегающее множества M, имеет вид произведения слов

$$u=u_1\dots u_m v,$$

где u_j — блоки и v — цепь. В частном случае отдельные фрагменты слова u могут отсутствовать. Например, если отсутствуют блоки u_j, то $u=v=x_1\dots x_n$ — цепь, где n — длина (степень) слова u. Но может отсутствовать цепь v, и тогда $u=u_1\dots u_m$ — прямое произведение блоков или просто один блок.

Приведём обоснование общего вида слова $U\in Xreg$, избегающего множества M. Будем «сканировать» (просматривать) слово u слева направо. Если при этом мы не встретим скачка, то $u=x_1x_2\dots x_n$ — цепь. Если скачки в слове u всё же есть, то останавливаем сканирование на второй букве первого скачка. Слово u представляется в виде $u=(\dots x_ix_s)w$, $s<i$. Слово w может оказаться пустым, и тогда u — блок. Предположим, что слово w не пустое, тогда w не может содержать переменную x_t с индексом $t<i$, иначе u содержит разреженное подслово $x_ix_sx_t$, эквивалентное одному из слов множества M, т. е. u не избегает M — противоречие. Следовательно, в скобках стоит блок $u_1=x_1\dots x_{s-1}x_{s+1}\dots x_ix_s$ и произведение слов $u=u_1w$ прямое. Слово w избегает множества M. Таким образом, слово w, а вместе с ним и слово u, имеет нужный вид по индуктивным соображениям, связанным со степенью слова.

Инверсная ширина цепи равна 1, а инверсная ширина блока равна 2. Из теоремы 2 вытекает, что на множестве слов, избегающих M, отношение накрытия удовлетворяет условию Хигмана, т. е. множество M нётерово.

В [2] приводится пример, показывающий, что одно слово $x_3x_2x_1$ не образует нётерова множества.

2. Комбинаторные порождающие T-идеалов

Пусть $\mathfrak{A}=K\langle X\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра со счётным множеством порождающих $X=\{x_i\mid i\in\mathbb{N}\}$ над полем K нулевой характеристики. Всякий T-идеал $T\lhd\mathfrak{A}$ свободной алгебры $\mathfrak{A}$ порождается множеством своих полилинейных элементов. Мономы в суппорте полилинейного элемента $f\in\mathfrak{A}$ можно сравнить лексикографически и выделить среди них старший моном $\bar f\in X_{\mathrm{mult}}$.

Систему полилинейных элементов $F=\{f_1,\dots,f_m\}$ T-идеала T, конечную или бесконечную, будем называть *комбинаторной системой порождающих*, если для всякого полилинейного элемента $f\in T$ найдётся элемент $f_i\in F$, старший моном которого накрывается старшим мономом $\bar f$ элемента f, обозначение: $\bar f_i\preceq\bar f$. Положим для определённости $\bar f_i=x_{r_1}\dots x_{r_k}$, т. е. $f_i=f_i(x_{r_1},\dots,x_{r_k})$, $\bar f=u_1x_{s_1}u_2x_{s_2}\dots u_kx_{s_k}u_{k+1}$ (некоторые из мономов u_i

могут быть пустыми), где отображение переменных $\varphi(x_{r_j}) = x_{s_j}$, $j = 1, \dots k$, изотонное, т. е. осуществляет накрытие $\bar{f}_i \preceq \bar{f}$. Полилинейные мономы f и $g = \alpha\beta^{-1} f_i(x_{s_1} u_2, \dots x_{s_k} u_{k+1})$, где $\alpha, \beta \in K$ — старшие коэффициенты f и g соответственно, зависят от одного и того же набора переменных и имеют одинаковые старшие мономы и старшие коэффициенты. Поэтому элемент $h = f - g \in T$ либо равен нулю, либо является полилинейным элементом T-идеала T со старшим мономом, меньшим старшего монома $\bar{f}$ элемента f. Полиномы f и h зависят от одинакового набора переменных. Преобразование элемента f в элемент h назовём *редукцией элемента f с помощью элемента f_i* или *редукцией элемента f относительно множества F*. Если элемент h ненулевой, мы его снова можем подвергнуть редукции относительно F и т. д. Так как старшие мономы элементов, появляющиеся в процессе последовательных редукций элемента f, не могут убывать бесконечно, то на некотором шаге мы получим нулевой элемент. А это означает, что f принадлежит T-идеалу F^T, порождённому множеством F. Таким образом, комбинаторная система порождающих T-идеала T порождает его как вполне характеристический идеал.

Главный вопрос, который нас интересует в этой работе, — это наличие конечной системы комбинаторных порождающих в T-идеале. По очевидным соображениям мы можем ограничиться рассмотрением лишь *регулярных полилинейных элементов* T-идеала, т. е. элементов, суппорты которых состоят из регулярных мономов. Регулярный (полилинейный) элемент степени n зависит от переменных $x_1, \dots, x_n$.

Для любого T-идеала $T \lhd \mathfrak{A}$ множество старших мономов всякой комбинаторной системы порождающих F должно содержать все T-обструкции в множестве старших мономов регулярных элементов из T. Обратно, если это условие для F выполнено, то F — комбинаторная система порождающих для T-идеала T. Поэтому наличие конечной комбинаторной системы порождающих в T-идеале T равносильно конечности числа T-обструкций в множестве старших мономов регулярных элементов из T.

Укажем одно достаточное условие конечной комбинаторной порождённости T-идеала. Будем говорить, что T-идеал $T \lhd \mathfrak{A}$ является *комбинаторно нётеровым*, если он содержит конечное множество полилинейных элементов $F = \{f_1, \dots f_m\} \subset T$, старшие мономы $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m$ которых образуют нётерово множество в совокупности всех полилинейных мономов X_{mult}. Свойство комбинаторной нётеровости наследуется T-идеалами при включении. Не ограничивая общности рассуждений, можно предполагать, что F состоит из регулярных элементов. В предыдущем разделе мы видели, что в рассматриваемом случае множество T-обструкций в совокупности старших мономов регулярных элементов из T конечно. Взяв по одному «носителю» для каждой T-обструкции (элементу, имеющему в качестве старшего монома эту обструкцию), мы получим конечное число комбинаторных порождающих T-идеала T.

Теорема 3. *Тождества алгебры верхнетреугольных матриц образуют комбинаторно нётеров T-идеал.*

Доказательство. Идеал тождеств алгебры верхнетреугольных матриц размера $n \times n$ порождается $2n$-линейным элементом

$$[x_2, x_1][x_4, x_3] \dots [x_{2n}, x_{2n-1}],$$

где $[a, b] = ab - ba$ — аддитивный коммутатор. Следовательно, в этом T-идеале лежат все элементы вида

$$[x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(1)}] \dots [x_{\sigma(2n)}, x_{\sigma(2n-1)}], \quad \sigma \in S_{2n},$$

где $\sigma(2i) > \sigma(2i-1)$, множество старших мономов которых совпадает со всевозможными $2n$-линейными произведениями n скачков

$$x_\sigma(2)x_\sigma(1) \dots x_\sigma(2n)x_\sigma(2n-1).$$

В примере 1 мы видели, что это множество нётерово в X_{mult}. $\square$

Предложение 6. *Тождества алгебры Грассмана образуют комбинаторно нётеров T-идеал.*

Доказательство. Идеал тождеств алгебры Грассмана содержит правонормированный тройной коммутатор $[x_3, x_2, x_1]$, а в случае счётного множества образующих им порождается. Рассмотрим также коммутатор $[x_3, x_1, x_2]$, лежащий в рассматриваемом T-идеале. Старшие мономы $x_3x_2x_1$ и $x_3x_1x_2$ этих коммутаторов образуют нётерово множество мономов в X_{mult}, как это было объяснено в примере 2. $\square$

3. Выделенные старшие мономы полилинейных элементов метабелева T-идеала

Метабелевым T-идеалом называется T-идеал, порождённый элементом

$$\big[[x_4, x_3], [x_2, x_1]\big].$$

Лемма 2. *Мономы следующих типов являются старшими в элементах метабелева T-идеала*:

1) $x_4x_3x_2x_1$;
2) $x_4x_{\sigma(1)}x_2x_{\sigma(2)}$, $\sigma \in \mathrm{S}_2$;
3) $x_3x_{\sigma(1)}x_5x_4x_{\sigma(2)}$, $\sigma \in \mathrm{S}_2$;
4) $x_4x_{\sigma(1)}x_5x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}$, $\sigma \in \mathrm{S}_3$;
5) $x_4x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_5x_{\sigma(3)}$, $\sigma \in \mathrm{S}_3$;
6) $x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}x_{\sigma(4)}x_{\sigma(5)}x_{\sigma(6)}$, $\sigma \in \mathrm{S}_3$,

где $\sigma(1) > \sigma(2), \sigma(3)$ *и* $\sigma(4) > \sigma(5), \sigma(6)$.

Доказательство. Всюду далее сравнения производятся по модулю метабелева T-идеала.

Моном типа 1) — старший моном левой части сравнения

$$\big[[x_4, x_3], [x_2, x_1]\big] \equiv 0.$$

Моном типа 2) — старший моном в сравнении

$$\big[[x_4, x_{\sigma(1)}], [x_3, x_{\sigma(2)}]\big] \equiv 0, \quad \sigma \in \mathrm{S}_2.$$

Перейдём к рассмотрению монома третьего пункта. Имеем

$$\begin{aligned}\big[[x_3, x_2, x_1], [x_5, x_4]\big] &= \big[[x_3, x_2]x_1 + x_2[x_3, x_1], [x_5, x_4]\big] \equiv \\ &\equiv [x_3, x_2]\big[x_1, [x_5, x_4]\big] + \big[x_2, [x_5, x_4]\big][x_3, x_1] = \\ &= -[x_3, x_2][x_5, x_4, x_1] - [x_5, x_4, x_2][x_3, x_1] \equiv 0,\end{aligned}$$

значит,

$$[x_3, x_2][x_5, x_4, x_1] + [x_3, x_1][x_5, x_4, x_2] \equiv 0. \tag{1}$$

Старший моном в левой части последнего сравнения равен

$$x_3\, \underline{x_2}\, x_5\, x_4\, \underline{x_1}.$$

Сделаем в этом сравнении циклическую подстановку индексов $(1, 2, 3)$:

$$[x_1, x_3][x_5, x_4, x_2] + [x_1, x_2][x_5, x_4, x_3] \equiv 0.$$

Старший моном в левой части полученного сравнения равен

$$x_3\, \underline{x_1}\, x_5\, x_4\, \underline{x_2}.$$

Рассмотрим четвёртый пункт. В сравнении (1) сделаем подстановку индексов переменных

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma(3) & 4 & \sigma(1) & \sigma(2) & 5 \end{pmatrix},$$

после чего получим сравнение

$$\big[x_{\sigma(1)}, x_4][x_5, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}\big] + \big[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(3)}\big]\big[x_5, x_{\sigma(2)}, x_4\big] \equiv 0,$$

в левой части которого старшим является моном

$$x_4 x_{\sigma(1)} x_5 x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}.$$

Перейдём к рассмотрению пятого пункта. Из сравнения (1) вытекает сравнение

$$[x_3, x_2][x_5, x_4, x_1] + [x_5, x_4, x_2][x_3, x_1] \equiv 0. \tag{2}$$

В сравнении (2) сделаем подстановку индексов переменных

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(1) & 4 \end{pmatrix},$$

после чего получим сравнение

$$\big[x_{\sigma(3)}, x_{\sigma(2)}\big]\big[x_4, x_{\sigma(1)}, x_5\big] + \big[x_4, x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}\big]\big[x_{\sigma(3)}, x_5\big] \equiv 0,$$

старший моном которого равен

$$x_4 x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_5 x_{\sigma(3)}.$$

Рассмотрим шестой пункт. В сравнении (1) придадим значения переменным: $x_2 \mapsto [x_2, x_6]$, $x_i \mapsto x_i$, $i \neq 2$. Получаем сравнение

$$[x_2, x_6, x_3][x_5, x_4, x_1] \equiv 0.$$

Затем делаем подстановку индексов переменных

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \sigma(6) & \sigma(1) & \sigma(3) & \sigma(5) & \sigma(4) & \sigma(2) \end{pmatrix}, \quad \sigma \in \mathrm{S}_6,$$

$$\sigma(1) > \sigma(2), \sigma(3), \quad \sigma(4) > \sigma(5), \sigma(6),$$

после чего получаем сравнение

$$\left[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}\right]\left[x_{\sigma(4)}, x_{\sigma(5)}, x_{\sigma(6)}\right] \equiv 0,$$

старший моном которого равен

$$x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)} x_{\sigma(5)} x_{\sigma(6)}. \qquad \square$$

4. Комбинаторная нётеровость метабелева T-идеала

Следующее утверждение является основным результатом нашей работы.

Теорема 4. *Метабелев T-идеал комбинаторно нётеров.*

Доказательство. Достаточно установить, что приведённая в разделе 3 система старших мономов элементов метабелева T-идеала комбинаторно нётерова, т. е. избегающее её множество полилинейных мономов удовлетворяет условию Хигмана в смысле отношения накрытия. Для этого необходимо описать общий вид монома, избегающего выделенных мономов 1)—6) из раздела 3, и показать, что все такие мономы разлагаются в прямые произведения мономов, инверсная ширина которых ограничена некоторым фиксированным числом. После этого теорема 4 непосредственно следует из теоремы 2.

Рассмотрим полилинейный моном $u \in X_{\mathrm{mult}}$, избегающий мономов 1)—6) раздела 3. Если он не накрывает ни одного из двух «грассмановых» мономов

$$x_3 x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)}, \quad \sigma \in \mathrm{S}_2,$$

то он в общем случае является прямым произведением блоков и одной цепи (см. пример 2), инверсная ширина которых не превосходит 2. Поэтому будем исследовать моном u, не накрывающий ни одного из мономов 1)—6), но накрывающий хотя бы один из грассмановых мономов.

Сканируем моном u слева направо и останавливаемся на *первой* переменной, заканчивающей префикс (начало) v монома u, накрывающий один из грассмановых мономов. Эту переменную назовём «граничной» и пометим её сверху знаком $*$. Из примера 2 вытекает, что если в префиксе v монома u вычеркнуть граничную (или, что то же самое, последнюю) переменную, то получится префикс v' монома u, являющийся в общем случае прямым произведением нескольких блоков (быть может, одного блока) и одной цепи в конце. При этом v' не может состоять только из одной цепи, так как тогда префикс v не накрывал бы ни одного из двух грассмановых мономов. Поэтому префикс v содержит в качестве множителей несколько блоков (быть может, один). Из сказанного следует, что моном u имеет в общем случае следующий вид:

$$u = \ldots(\ldots x_p x_\beta)(\ldots x_i x_{\alpha_1}) x_{j_1} \ldots x_{j_d} x^*_{\alpha_2} w,\qquad \beta < p < \alpha_1 < i, \quad j_1 < \ldots < j_d, \quad \alpha_2 < i.$$

Здесь в скобках стоят блоки, переменные x_{j_k} образуют цепь, $x^*_{\alpha_2}$ — граничная переменная, $v = \ldots(\ldots x_p x_\beta)(\ldots x_i x_{\alpha_1}) x_{j_1} \ldots x_{j_d} x^*_{\alpha_2}$, суффикс w монома u не накрывает ни один из грассмановых мономов, иначе моном u накрывал бы выделенный моном типа 6). Следовательно, в общем случае w представляется в виде прямого произведения блоков и одной цепи (см. пример 2). Конечно, в конкретных ситуациях отдельные фрагменты в указанном виде монома u могут отсутствовать. Например, может отсутствовать цепь $x_{j_1} \ldots x_{j_d}$ или суффикс w.

Далее рассуждения целесообразно разбить на два случая.

Случай 1. Цепь $x_{j_1} \ldots x_{j_d}$ в мономе u пуста (отсутствует).

Общий вид монома u в рассматриваемом случае таков:

$$u = \ldots(\ldots x_p x_\beta)(\ldots x_i x_{\alpha_1}) x^*_{\alpha_2} w.$$

Смысл обозначений прежний. Правее переменной x_{α_1} в мономе u не может встретиться переменная x_γ с $\gamma < p$, иначе моном u содержал бы разреженное подслово $x_p x_\beta x_i x_{\alpha_1} x_\gamma$, где $\beta, \gamma < p < \alpha_1 < i$, эквивалентное запрещённому моному типа 3) (изотонное отображение индексов переменных: $p \mapsto 3$, $\beta \mapsto \sigma(1)$, $i \mapsto 5$, $\alpha_1 \mapsto 4$, $\gamma \mapsto \sigma(2)$), что невозможно. В частности, $p < \alpha_2$.

Отдельно рассмотрим две возможности.

1. Моном u не содержит правее граничной переменной $x^*_{\alpha_2}$ (т. е. в суффиксе w) переменных x_γ при $p < \gamma < i$. Тогда в общей ситуации моном u является прямым произведением блоков, цепи (лежащей в w) и «расширенного блока» $(\ldots x_i x_{\alpha_1}) x^*_{\alpha_2}$, $p < \alpha_1, \alpha_2 < i$. Инверсная ширина цепи равна 1, блока — 2, а для расширенного блока она не превосходит 3.

2. Моном u содержит правее граничной переменной $x^*_{\alpha_2}$ (т. е. в суффиксе w) переменные x_γ при $p < \gamma < i$. Моном u при указанном допущении имеет вид

$$u = \ldots(\ldots x_p x_\beta)(\ldots x_i x_{\alpha_1}) x^*_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_3} \ldots x_{\alpha_s} \ldots,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_s < i$. Остальные переменные x_γ, кроме переменных $x_{\alpha_3}, \ldots x_{\alpha_s}$, стоящие в u правее граничной переменной $x^*_{\alpha_2}$, имеют индексы $\gamma > i$. Сделаем два замечания.

Во-первых, разреженное подслово $x^*_{\alpha_2} x_{\alpha_3} \ldots x_{\alpha_s}$ в u является цепью, т. е. $\alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_s$. В самом деле, положим $\alpha_{t-1} > \alpha_t$ для некоторого $t = 3, \ldots s$. Тогда моном u содержит разреженное подслово $x_i x_{\alpha_1} x_{\alpha_{t-1}} x_{\alpha_t}$, которое при $\alpha_{t-1} < \alpha_1$ эквивалентно запрещённому слову $x_4 x_3 x_2 x_1$ типа 1) ($i \mapsto 4$, $\alpha_1 \mapsto 3$, $\alpha_{t-1} \mapsto 2$, $\alpha_t \mapsto 1$), а при $\alpha_{t-1} > \alpha_1$ эквивалентно запрещённому слову $x_4 x_{\sigma(1)} x_3 x_{\sigma(2)}$ типа 2) ($i \mapsto 4$, $\alpha_1 \mapsto \sigma(1)$, $\alpha_{t-1} \mapsto 3$, $\alpha_t \mapsto \sigma(2)$), что недопустимо. Итак, в рассматриваемом случае моном u имеет вид

$$u = \ldots(\ldots x_p x_\beta)(\ldots x_i x_{\alpha_1})x^*_{\alpha_2}\ldots x_{\alpha_3}\ldots x_{\alpha_s}\ldots w',$$

где $\beta < p < \alpha_1 < i$, $p < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_s$, в запись суффикса w' входят только переменные x_γ при $\gamma > i$.

Во-вторых, переменная x_γ, $\gamma > i$, не может находиться между двумя переменными x_{α_r} и $x_{\alpha_{r+1}}$, $r = 2, \ldots s-1$. Иначе моном u содержал бы разреженное подслово $x_i x_{\alpha_1} x_{\alpha_r} x_\gamma x_{\alpha_{r+1}}$, где $\alpha_1, \alpha_r, \alpha_{r+1} < i$, $i < \gamma$, эквивалентное запрещённому подслову $x_4 x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_5 x_{\sigma(3)}$ типа 5) ($i \mapsto 4$, $\alpha_1 \mapsto \sigma(1)$, $\alpha_r \mapsto \sigma(2)$, $\gamma \mapsto 5$, $\alpha_{r+1} \mapsto \sigma(3)$).

Итак, на самом деле моном u имеет вид

$$u = \ldots(\ldots x_p x_\beta)(\ldots x_i x_{\alpha_1})x^*_{\alpha_2} x_{\alpha_3}\ldots x_{\alpha_s} w',$$

где $p < \alpha_1 < i$, $p < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots < \alpha_s$, в запись суффикса w' монома u входят переменные x_γ, $\gamma > i$, причём w' не накрывает ни одного из двух грассмановых мономов. Опять приходим к заключению, что моном u является прямым произведением блоков, быть может цепи (лежащей в w') и расширенного блока $(\ldots x_i x_{\alpha_1})x^*_{\alpha_2} x_{\alpha_3}\ldots x_{\alpha_s}$, инверсная ширина которого равна 3. Значит, моном u распадается в прямое произведение мономов инверсной ширины не выше 3.

Случай 2. Цепь $x_{j_1}\ldots x_{j_\alpha}$, $j_1 < \ldots < j_\alpha$, присутствует в записи монома u. Сначала заметим, что в мономе u правее граничной переменной $x^*_{\alpha_2}$ (т. е. в составе суффикса w) не могут содержаться переменные x_{α_3} с $\alpha_3 < i$. Дело в том, что тогда моном u содержал бы разреженное подслово $x_i x_{\alpha_1} x_{j_d} x^*_{\alpha_2} x_{\alpha_3}$, которое эквивалентно запрещённому слову $x_4 x_{\sigma(1)} x_5 x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}$ типа 4) ($i \mapsto 4$, $\alpha_1 \mapsto \sigma(1)$, $j_d \mapsto 5$, $\alpha_2 \mapsto \sigma(2)$, $\alpha_3 \mapsto \sigma(3)$), что невозможно. Но априори правее граничной переменной $x^*_{\alpha_2}$ (т. е. в составе суффикса w) могут встречаться переменные x_k при $i < k < j_d$. Поэтому отдельно рассмотрим следующие три возможности.

1. Правее граничной переменной $x^*_{\alpha_2}$ в мономе u переменные x_k при $i < k < j_d$ не встречаются. Тогда моном u записывается в виде

$$u = \ldots(\ldots x_p x_\beta)(\ldots x_i x_{\alpha_1})x_{j_1}\ldots x_{j_d} w,$$

где $j_1 < \ldots < j_d$, суффикс w составлен из переменных x_k, $k > j_d$, и не накрывает грассмановых мономов. Следовательно, моном u разлагается в прямое произведение блоков и не более двух цепей (возможно, одна из них является суффиксом монома w). Все указанные множители имеют инверсную ширину, не превосходящую 2.

2. Правее граничной переменной $x^*_{\alpha_2}$ в мономе u содержатся переменные x_k, $i < k < j_d$, в количестве не меньше 2. Пусть суффикс w монома u содержит разреженное подслово $x_{\beta_1}\ldots x_{\beta_3}$, $i < \beta_1, \ldots, \beta_s < j_d$, $s \geqslant 2$. Сделаем два замечания.

Во-первых, переменные x_{β_l} образуют в w разреженную цепь. Действительно, если $\beta_r > \beta_{r+1}$ для некоторого $r = 1, \ldots, s-1$, то u содержит разреженное подслово $x_{j_d}x^*_{\alpha_2}x_{\beta_r}x_{\beta_{r+1}}$, эквивалентное запрещённому слову $x_4x_{\sigma(1)}x_3x_{\sigma(2)}$ типа 2) ($j_d \mapsto 4$, $\alpha_2 \mapsto \sigma(1)$, $\beta_r \mapsto 3$, $\beta_{r+1} \mapsto \sigma(2)$), противоречие.

Во-вторых, ни одна переменная x_l, $l > j_d$, не предшествует в u непосредственно ни одной переменной x_{β_k}. В самом деле, если x_l предшествует переменной x_{β_1}, то моном u содержит разреженное подслово $x_{j_d}x^*_{\alpha_2}x_lx_{\beta_1}x_{\beta_2}$, эквивалентное запрещённому слову $x_4x_{\sigma(1)}x_5x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)}$ типа 4) ($j_d \mapsto 4$, $\alpha_2 \mapsto \sigma(1)$, $l \mapsto 5$, $\beta_1 \mapsto \sigma(2)$, $\beta_2 \mapsto \sigma(3)$), что невозможно. Если же x_l предшествует x_{β_r} для некоторого $r = 2, \ldots, s$, то моном u содержит разреженное подслово $x_{j_d}x^*_{\alpha_2}x_{\beta_1}x_lx_{\beta_r}$, эквивалентное запрещённому слову $x_4x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}x_5x_{\sigma(3)}$ типа 5) ($j_d \mapsto 4$, $\alpha_2 \mapsto \sigma(1)$, $\beta_1 \mapsto \sigma(2)$, $l \mapsto 5$, $\beta_r \mapsto \sigma(3)$), противоречие.

Эти рассуждения показывают, что моном u имеет следующее строение:

$$u = \ldots(\ldots x_px_\beta)(\ldots x_ix_{\alpha_1})x_{j_1}\ldots x_{j_d}x_{\beta_1}\ldots x_{\beta_s}w',$$

где $i < j_1 < \ldots < j_d$, $i < \beta_1 < \ldots < \beta_s < j_d$, $s \geqslant 2$, в суффикс w' монома u входят лишь переменные x_l, $l > j_d$, и w' не накрывает ни одного из двух грассмановых мономов. Поэтому u является прямым произведением блоков и монома $x_{j_1}\ldots x_{j_d}x_{\beta_1}\ldots x_{\beta_s}$, $i < \beta_1 < \ldots < \beta_s < j_d$, $j_1 < \ldots < j_d$. Значит, все прямые множители, на которые распадается моном u, имеют инверсную ширину, не превосходящую 2.

3. Правее граничной переменной $x^*_{\alpha_2}$ в мономе u содержится ровно одна переменная x_γ при $i < \gamma < j_d$. Моном u, вообще говоря, в рассматриваемом случае имеет вид

$$u = \ldots(\ldots x_px_\beta)(\ldots x_ix_{\alpha_1})x_{j_1}\ldots x_{j_d}x^*_{\alpha_2}x_{k_1}\ldots x_{k_m}x_\gamma w',$$

где $k_1, \ldots, k_m > j_d$, в запись суффикса w' входят лишь переменные x_l, $l > j_d$, суффикс w' не накрывает грассмановых мономов, поскольку это верно для суффикса $w = x_{k_1}\ldots x_{k_m}x_\gamma w'$ монома u. В частном случае переменные x_{k_r} могут отсутствовать или $m = 1$. Суффикс w' также может оказаться пустым. Сделаем два замечания.

Во-первых, переменные x_{k_r} образуют в u цепь, т. е. $k_1 < \ldots < k_m$. Дело в том, что если $k_r > k_{r+1}$ для некоторого $r = 1, \ldots, m-1$ (когда $m \geqslant 2$), то суффикс w содержит разреженное подслово $x_{k_r}x_{k_{r+1}}x_\gamma$, эквивалентное грассманову моному $x_3x_2x_1$ ($k_r \mapsto 3$, $k_{r+1} \mapsto 2$, $\gamma \mapsto 1$), но это не допускается.

Во-вторых, в запись монома w' входят переменные x_l, $l > k_r$, $r = 1, \ldots, m$. Если предположить иное, что w' содержит переменную x_l при $l < k_r$ для некоторого $r = 1, \ldots, m$, то суффикс w содержит разреженное подслово $x_{k_r}x_\gamma x_l$, эквивалентное грассманову моному $x_3x_1x_2$ ($k_r \mapsto 3$, $\gamma \mapsto 1$, $l \mapsto 2$), но это недопустимо.

Тем самым мы показали, что моном u представи́м в виде прямого произведения блоков, быть может одной цепи и монома

$$(\ldots x_ix_{\alpha_1})x_{j_1}\ldots x_{j_d}x^*_{\alpha_2}x_{k_1}\ldots x_{k_r}x_\gamma,$$

инверсная ширина которого не превосходит 6, т. е. 6 — это верхняя оценка инверсной ширины всех «прямых множителей» монома u.

Справедливость доказываемой теоремы теперь непосредственно следует из теоремы 2. □

Вызывает удивление, что обработка такого простого (некоммутативного) полинома, каковым является полином метабелевости, потребовала довольно тонких соображений из комбинаторики полилинейных слов.

Литература

[1] Латышев В. Н. К теореме Регева о тождествах тензорного произведения PI-алгебр // УМН. — 1972. — Т. 27, № 4 (166). — С. 213—214.

[2] Латышев В. Н. Частично упорядоченные множества и нематричные многообразия ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1976. — Т. 18, № 1. — С. 53—70.

[3] Латышев В. Н. Комбинаторные порождающие полилинейных полиномиальных тождеств // Фундамент. и прикл. матем. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 101—110.

[4] Латышев В. Н. Конечность стандартного базиса T-идеала, содержащего лиеву нильпотентность индекса 4 // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, вып. 5. — С. 75—85.

[5] Higman G. Ordering by divisibility in abstract algebras // Proc. London Math. Soc. — 1952. — Vol. s3-2, No. 1. — P. 326—336.