О многообразиях коммутативных метабелевых алгебр

С. П. МИЩЕНКО
Ульяновский государственный университет
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

Н. П. ПАНОВ
Ульяновский государственный университет
e-mail: nppanov@yandex.ru

Ю. Ю. ФРОЛОВА
Ульяновский государственный университет
e-mail: yuyufrolova@mail.ru

ЧАНГ Т. К. НГУЕН
Ульяновский государственный университет
e-mail: trangnguyen.ru@gmail.com

УДК 512.5

Ключевые слова: многообразие алгебр, тождество, коммутативность, метабелевость.

Аннотация

В работе изложены новые результаты о многообразиях коммутативных метабелевых алгебр над полем нулевой характеристики. В частности, найдено строение полилинейной части коммутативно-метабелева многообразия как модуля симметрической группы, изучены свойства двух почти нильпотентных многообразий и доказано, что в классе коммутативных метабелевых алгебр других почти нильпотентных многообразий подэкспоненциального роста нет.

Abstract

S. P. Mishchenko, N. P. Panov, Yu. Yu. Frolova, Trang Nguyen, On the varieties of commutative metabelian algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 165—180.

The paper presents new results on varieties of commutative metabelian algebras over a field of zero characteristic. We study the structure of the multilinear part of the variety of all commutative metabelian algebras as a module of the symmetric group. Two almost nilpotent varieties are introduced and studied in this class of algebras. We prove the nonexistence of other almost nilpotent commutative metabelian varieties of subexponential growth.

Под термином *алгебра* будем понимать векторное пространство, на котором задана одна бинарная билинейная операция. Следуя А. Г. Курошу, такую универсальную алгебру будем называть *линейной алгеброй* или *алгеброй над*

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 1, с. 165—180.

полем. Характеристика основного поля в данной работе предполагается равной нулю. Для предварительного ознакомления с данным направлением можно воспользоваться монографией [7].

Данная работа связана с алгебрами, в которых выполняется тождество коммутативности

$$x_1x_2 \equiv x_2x_1 \tag{1}$$

и тождество метабелевости

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \equiv 0. \tag{2}$$

В данном классе алгебр получены интересные, важные результаты. В [3] построены коммутативно-метабелевы многообразия любой действительной экспоненты и континуальное семейство многообразий с различным промежуточным ростом. Для любого натурального числа m построено многообразие экспоненты m, состоящее из коммутативных метабелевых алгебр, любое подмногообразие которого является нильпотентным [2]. Эти результаты показывают, что наличие таких сильных тождеств, как коммутативность и метабелевость, не гарантирует отсутствия многообразий с непривычными для классических случаев свойствами. Это подтверждается и статьей [6], в которой изучаются многообразия коммутативных метабелевых алгебр с очень низким ростом. В ней для любого действительного α, $0 < \alpha < 1$, построено многообразие, рост которого задаётся последовательностью $n^{3+\alpha}$. Также доказано существование многообразия, состоящего из коммутативных метабелевых алгебр, имеющего очень низкий полиномиальный рост, однако не имеющего конечного базиса тождеств. Из результатов, привычных для классических случаев, можно отметить следующий. В [9] при условии коммутативности доказано отсутствие многообразий с ростом, задаваемым последовательностью, асимптотически ограниченной снизу и сверху последовательностями вида $n^{1+\alpha}$, $n^{1+\beta}$, где $0 < \alpha < \beta < 1$.

Числовые характеристики и другие свойства многообразия всех коммутативных метабелевых алгебр изучались в [10]. В данной работе продолжено исследование этого многообразия. Построена дискретная серия алгебр и получен алгоритм вычисления кратностей многообразия. Кроме этого, в работе уделено внимание почти нильпотентным многообразиям. Описание всех таких многообразий представляется нереальной задачей. Однако при наложении ограничения на рост многообразия почти нильпотентных многообразий будет ровно два. Отметим, что этот результат был анонсирован в [4] и его доказательство существенно опирается на результаты работ [5], [8].

Обозначим через Φ поле нулевой характеристики, над которым будут рассматриваться все алгебры. Операцию в алгебрах будем обозначать простым приписыванием сомножителей. Так как выполнение тождества ассоциативности не предполагается, то в произведениях необходимо следить за расстановкой скобок. В случае левонормированного произведения договоримся опускать скобки: $abc = (ab)c$. Понятно, что в силу тождеств (1) и (2) любое ненулевое произведение может быть переписано как левонормированное. Обозначим через $\mathbf{MC}$ многообразие всех коммутативных метабелевых алгебр.

В случае нулевой характеристики поля при исследовании многообразий алгебр одним из основных инструментов является теория представлений симметрических групп. Пусть $\mathbf{V} \subset \mathbf{MC}$ — некоторое многообразие коммутативно-метабелевых алгебр, а $F(X, \mathbf{V})$ — относительно свободная алгебра этого многообразия со счётным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Множество всех полилинейных элементов от $x_1, \ldots, x_n$ в алгебре $F(X, \mathbf{V})$ обозначим через $P_n(\mathbf{V})$. Будем считать, что все произведения, входящие в $P_n(\mathbf{V})$, имеют левонормированное скобочное строение. Определим на этом пространстве, как обычно, действие симметрической группы S_n. Результатом действия перестановки $p \in \mathrm{S}_n$ на полилинейном левонормированном мономе $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n} \in P_n(\mathbf{V})$ является моном $x_{p(i_1)}x_{p(i_2)}\ldots x_{p(i_n)}$. Модуль $P_n(\mathbf{V})$ группового кольца $\Phi\mathrm{S}_n$ является вполне приводимым. Рассмотрим разложение его характера в целочисленную комбинацию неприводимых характеров χ_λ с кратностями $m_\lambda(\mathbf{V})$, где $\lambda \vdash n$ — разбиение числа n:

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi\big(P_n(\mathbf{V})\big) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V})\chi_\lambda.$$

Обозначим через $c_n(\mathbf{V})$ размерность пространства $P_n(\mathbf{V})$. Последовательность так называемых *коразмерностей* многообразия $c_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \ldots$, является основной числовой характеристикой многообразия и определяет его рост. В частности, рост многообразия называют *подэкспоненциальным*, если для любого действительного $a > 1$ существует такое число C, что для любого n выполняется неравенство $c_n(\mathbf{V}) < Ca^n$. Так, многообразия полиномиального или промежуточного роста имеют подэкспоненциальный рост. Важными числовыми характеристиками являются также *кратности* $m_\lambda(\mathbf{V})$ и *последовательность кодлин* $l_n(\mathbf{V}) = \sum\limits_{\lambda \vdash n} m_\lambda$, $n = 1, 2, \ldots$. Обозначим через d_λ размерность неприводимого модуля, соответствующего разбиению λ. Верно равенство

$$c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V}) d_\lambda.$$

Если последовательность $c_n(\mathbf{V})$ мажорируется экспонентой a^n для подходящего a, то существуют нижний и верхний пределы

$$\underline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}, \quad \overline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})},$$

которые называют *нижней* и *верхней экспонентой* многообразия $\mathbf{V}$ соответственно. Если

$$\underline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \overline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \alpha,$$

то число α называют *экспонентой* многообразия $\mathbf{V}$ и обозначают $\mathrm{EXP}(\mathbf{V})$.

Пусть B — некоторая алгебра, а b — некоторый её элемент. Тогда через R_b обозначим линейный оператор на пространстве B, $R_b\colon B \to B$, умножения справа на элемент $b \in B$. Результат действия этого оператора на элемент c будем записывать как $cR_b = cb$.

Договоримся использовать в качестве свободных образующих относительно свободной алгебры не только x с индексом, но и другие латинские буквы, например y, z или t. Для обозначения оператора умножения справа в случае относительно свободной алгебры будем использовать просто соответствующую заглавную букву. Например, для образующей y алгебры $F(X, \mathbf{V})$ будем обозначать через Y линейный оператор на векторном пространстве $F(X, \mathbf{V})$, который определяется следующим образом: $xY = xy$. Это обозначение удобно, например, в таком случае: левонормированное произведение $xy \dots y$ степени $m+1$ можно записать как xY^m, где Y^m — степень линейного оператора. Ещё раз отметим, что, например, $xy^2 = x(yy)$, но $xY^2 = (xy)y$.

Будем использовать специальный символ над образующими, например черту, для обозначения кососимметризации. Например,

$$x_0\bar{x}_1\bar{x}_2\dots\bar{x}_k = \sum_{p\in \mathrm{S}_k} (-1)^p x_0 x_{p(1)} x_{p(2)} \dots x_{p(k)},$$

где $(-1)^p$ — чётность перестановки p. Если элемент содержит два кососимметричных набора образующих, то будем использовать различные символы, например черту и волну:

$$x_0\bar{x}_1\tilde{y}_1\bar{x}_2 z_1 z_2 \tilde{y}_2 = \sum_{p\in \mathrm{S}_2,\ q\in \mathrm{S}_2} (-1)^p(-1)^q x_0 x_{p(1)} y_{q(1)} x_{p(2)} z_1 z_2 y_{q(2)}.$$

В случае наличия кососимметричного набора отметим равенство

$$x_0\dots\bar{x}_1\dots\bar{x}_2\dots\bar{x}_k = (-1)^p x_0\dots\bar{x}_{p(1)}\dots\bar{x}_{p(2)}\dots\bar{x}_{p(k)}.$$

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_k; y_1, y_2, \dots, y_l) \equiv 0$ — некоторое полилинейное по образующим $x_1, x_2, \dots, x_k$ тождество. Под результатом кососимметризации этого тождества по набору образующих $x_1, x_2, \dots, x_k$ будем понимать его следствие

$$\sum_{p\in \mathrm{S}_k} (-1)^p f(x_{p(1)}, x_{p(2)}, \dots, x_{p(k)}; y_1, y_2, \dots, y_l) \equiv 0.$$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \vdash n$ — разбиение числа n на l частей, т. е. выполняются неравенства $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_l$, при этом

$$n = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i.$$

Соответствующая диаграмма Юнга содержит l строк длины λ_i, $i = 1, 2, \dots, l$. Если заполнить клетки диаграммы числами $1, 2, \dots, n$ по возрастанию вдоль каждой строки и каждого столбца, то получим стандартную таблицу Юнга, которую обозначим T. Пусть R_T — подгруппа симметрической группы S_n, которая оставляет инвариантным каждое множество чисел, расположенных в одной строке таблицы Юнга. Аналогично, только относительно столбцов таблицы Юнга, определяется подгруппа C_T. Как обычно, рассмотрим следующие суммы группового кольца $\Phi\mathrm{S}_n$:

$$\bar{R}_T = \sum_{p\in R_T} p, \quad \bar{C}_T = \sum_{q\in C_T} (-1)^q q.$$

Тогда, как хорошо известно, элемент $e_T = \bar{R}_T\bar{C}_T$ является квазиидемпотентом группового кольца, т. е. $e_T^2 = \bar{R}_T\bar{C}_T\bar{R}_T\bar{C}_T = \gamma e_T$, где γ — ненулевое рациональное число. Если соответствующее полилинейное тождество $f_\lambda = e_T(x_1x_2\ldots x_n) \equiv 0$ не выполняется в многообразии $\mathbf{V}$, то модуль $M = \Phi\mathrm{S}_n f_\lambda$ является ненулевым и неприводимым. Подставим в тождество $f_\lambda \equiv 0$ вместо образующих, соответствующих числам в клетках i-й строки таблицы Юнга, образующую x_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, получим тождество $g_\lambda \equiv 0$. Это тождество является полиоднородным степени λ_i относительно образующей x_i, $i = 1, 2, \ldots, l$. Теперь заметим, что элемент $h_\lambda = \bar{C}_T\bar{R}_T\bar{C}_T(x_1x_2\ldots x_n)$ не является нулевым, так как $e_T^2 = \bar{R}_T\bar{C}_T\bar{R}_T\bar{C}_T = \gamma e_T$, и порождает тот же модуль M. Заметим, что тождество $h_\lambda \equiv 0$ содержит λ_1 кососимметрических наборов с числом образующих в i-м наборе, равным λ_i', длине i-го столбца, $1, 2, \ldots, l$. Отметим, что три тождества $f_\lambda \equiv 0$, $g_\lambda \equiv 0$ и $h_\lambda \equiv 0$ эквивалентны друг другу.

Сформулируем теперь основной результат работы [5], который нам потребуется в дальнейшем. Обозначим через $\lambda_1', \lambda_2', \ldots$ сопряжённое к $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ разбиение, где λ_i' — длина i-го столбца диаграммы Юнга, соответствующей разбиению λ.

Теорема [5]. *Пусть α, $\alpha > 1$, — действительное число и $\{\lambda^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность разбиений $\lambda^{(n)} \vdash n$, таких что $\lambda_1^{(n)}, \lambda_1^{(n)\prime} \leqslant n/\alpha$. Тогда для любого $1 < \beta < \alpha$ существует такое натуральное число n_0, что для всех $n \geqslant n_0$ выполняется неравенство $d_{\lambda^{(n)}} \geqslant \beta^n$.*

Перейдём к изложению новых результатов. Представим серию важных примеров коммутативных метабелевых алгебр A_m, $m = 1, 2, \ldots$. Пусть A_m задана $m^2 + 1$ образующими z, t_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, и следующими определяющими соотношениями. Для любых индексов $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant m$ выполняются равенства

1) $zt_{ij} = t_{ij}z = 0$,
2) $t_{ij}t_{kl} = 0$,
3) $z^2t_{ij} = t_{ij}z^2$,
4) $uv = 0$, $\deg_z u + \deg_z v > 2$,
5) $(z^2t_{ij})t_{kl} = t_{kl}(z^2t_{ij}) = \delta_{jk}z^2t_{il}$, где δ_{jk} — символ Кронекера.

Легко проверить, что в A_m выполняются тождества коммутативности и метабелевости.

Теорема 1. *Базис пространства $P_n(\mathbf{MC})$, $n \geqslant 2$, образуют элементы вида*

$$x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}, \quad i_1 > i_2, \tag{3}$$

и выполняется равенство

$$c_n(\mathbf{MC}) = \frac{n!}{2}. \tag{4}$$

Доказательство. Заметим, что базис пространства $P_1(\mathbf{MC})$ представлен единственной свободной образующей x_1, поэтому $c_1(\mathbf{MC}) = 1$. Рассмотрим множество мономов с левонормированной расстановкой скобок (3). Так как из тождества коммутативности следует равенство $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n} = x_{i_2}x_{i_1}\dots x_{i_n}$ для любых i_1, i_2, то для определённости будем считать, что $i_1 > i_2$. Обозначим множество $n!/2$ таких элементов через T_n. Применение тождеств коммутативности и метабелевости к элементам пространства $P_n(\mathbf{MC})$ позволяет их переписать в виде линейной комбинации левонормированных элементов множества T_n, поэтому T_n порождает полилинейную часть $P_n(\mathbf{MC})$ как векторное пространство.

Покажем линейную независимость элементов множества T_n. Предположим, они линейно зависимы. Так как в относительно свободной алгебре любое равенство от свободных образующих является тождеством многообразия, то получаем, что в многообразии $\mathbf{MC}$ должно выполняться тождество

$$\sum_{i=1}^{n!/2} \alpha_i x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n} \equiv 0,$$

где не все коэффициенты α_i, $\alpha_i \in \Phi$, равны нулю.

Проверим данное тождество в алгебре $A_{n-1} \in \mathbf{MC}$. Пусть $\alpha_s \neq 0$ для некоторого фиксированного s, $1 \leqslant s \leqslant n!/2$. Выполним следующую подстановку образующих алгебры A_{n-1} вместо свободных образующих:

$$x_{s_1} = x_{s_2} = z,\ x_{s_3} = t_{12},\ x_{s_4} = t_{23}, \dots,\ x_{s_{n-1}} = t_{(n-3)(n-2)},\ x_{s_n} = t_{(n-2)(n-1)}.$$

Рассмотрим два случая. В первом случае $n = 2$, $s = 1$, тождество превращается в равенство $\alpha_1 z^2 = 0$, поэтому $\alpha_1 = 0$. Во втором случае для $n \geqslant 3$, применив определяющие соотношения алгебры A_{n-1}, получим, что выбранное s-е слагаемое равно $\alpha_s z^2 t_{1(n-1)}$, а остальные слагаемые равны нулю. Таким образом, вопреки предположению $\alpha_s = 0$. Противоречие. Следовательно, приведённое тождество не выполняется в алгебре A_{n-1}, а потому не является тождеством многообразия $\mathbf{MC}$.

Итак, все элементы вида (3) образуют базис пространства $P_n(\mathbf{MC})$ и $c_n(\mathbf{MC}) = n!/2$. Теорема 1 доказана. □

Так как модуль $P_n(\mathbf{MC})$ является фактор-модулем регулярного модуля, то кратность для одночленного разбиения $(n) \vdash n$ равна 1, т. е. $m_{(n)}(\mathbf{MC}) = 1$. Кроме того, из тождества коммутативности следует, что кратность для разбиения $(1^n) \vdash n$ равна 0, т. е. $m_{(1^n)}(\mathbf{MC}) = 0$ для любого $n \geqslant 2$. В частности, в случае $n = 2$ получаем, что $\chi\big(P_2(\mathbf{V})\big) = \chi_{(2)}$.

Опишем и докажем алгоритм поиска кратностей $m_\lambda(\mathbf{MC})$ многообразия $\mathbf{MC}$ для других разбиений.

Алгоритм. Зафиксируем диаграмму Юнга $\lambda \vdash n$, $n \geqslant 3$, состоящую из двух или более строк. В двух различных столбцах диаграммы λ выберем и удалим по одной клетке так, чтобы в результате получилась диаграмма μ разбиения числа $n-2$, $\mu \vdash (n-2)$. Для всех таких диаграмм μ по формуле крюков найдём соответствующие значения размерностей d_μ. Тогда кратность m_λ равна сумме полученных значений d_μ.

Доказательство. Для $n \geqslant 3$ рассмотрим следующее подпространство $Q_n(\mathbf{MC})$ пространства $P_n(\mathbf{MC})$:

$$Q_n(\mathbf{MC}) = \{x_n x_{n-1} x_{i_1} \dots x_{i_{n-2}}\}.$$

Пусть H — подгруппа группы S_n, состоящая из тождественной перестановки и транспозиции $(n-1, n)$. Считая, что S_{n-2} естественным образом вложена в группу S_n, рассматриваем прямое произведение $G = H \times \mathrm{S}_{n-2}$, которое также является подгруппой симметрической группы S_n. Действие группы S_{n-2} является регулярным модулем, поэтому кратности совпадают с размерностями соответствующих неприводимых подмодулей. В силу тождества коммутативности соответствующий характер действия группы H на каждом одномерном подпространстве, порождённом полилинейным мономом $x_n x_{n-1} x_{i_1} \dots x_{i_{n-2}}$, является неприводимым и отвечает диаграмме Юнга в виде одной строки длины 2. Индуцируем действие прямого произведения G на всю группу S_n. Тогда по правилу Ричардсона—Литтлвуда каждая диаграмма Юнга $\lambda \vdash n$ каждого неприводимого модуля в разложении $P_n(\mathbf{MC})$ получена в результате всевозможных присоединений клеток диаграммы $(2) \vdash 2$ к некоторым диаграммам $\mu \vdash (n-2)$ таким образом, что ни один из столбцов не содержит двух новых клеток. Поэтому получаем, что кратность m_λ каждого неприводимого модуля в разложении $P_n(\mathbf{MC})$ определяется как сумма значений размерностей d_μ модулей с диаграммами $\mu \vdash (n-2)$, которые получены удалением двух клеток из разных столбцов диаграммы λ. Доказательство алгоритма завершено. $\square$

Приведём пример вычисления $m_\lambda(\mathbf{MC})$ и d_λ для $n = 5$:

$$\begin{array}{ll}
m_{(5)} = d_{(3)} = 1, & d_{(5)} = 1, \\
m_{(4,1)} = d_{(3)} + d_{(2,1)} = 3, & d_{(4,1)} = 4, \\
m_{(3,2)} = d_{(3)} + d_{(2,1)} = 3, & d_{(3,2)} = 5, \\
m_{(3,1,1)} = d_{(2,1)} + d_{(1,1,1)} = 3, & d_{(3,1,1)} = 6, \\
m_{(2,2,1)} = d_{(2,1)} = 2, & d_{(2,2,1)} = 5, \\
m_{(2,1,1,1)} = d_{(1,1,1)} = 1, & d_{(2,1,1,1)} = 4, \\
m_{(1,1,1,1,1)} = 0, & d_{(1,1,1,1,1)} = 1.
\end{array}$$

Произведём подстановку полученных значений и убедимся, что в рассматриваемом случае равенство (4) выполняется:

$$1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 = 60 = \frac{5!}{2}.$$

Замечание. По модулю тождеств многообразия $\mathbf{MC}$ тождество

$$x_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{n-1} \equiv 0,$$

соответствующее разбиению $(2,1^{n-2})\vdash n$, эквивалентно тождеству

$$x_n\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_{n-1}\equiv 0. \tag{5}$$

Доказательство. Понятно, что в случае $n=2$ по модулю тождества коммутативности тождества $x_1x_1\equiv 0$ и $x_2x_1\equiv 0$ эквивалентны. Пусть теперь $n\geqslant 3$ и $f=x_n\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_{n-1}$ — полилинейный элемент, а $M=\Phi S_nf$ — подмодуль полилинейной части $P_n(\mathbf{MC})$, порождённый элементом f. Легко проверить, что тождество $f\equiv 0$ не выполняется в алгебре A_n, поэтому и в многообразии $\mathbf{MC}$. Таким образом, модуль M отличен от нуля. Так как имеется кососимметрический набор, состоящий из $n-1$ образующей, в разложении модуля M в сумму неприводимых подмодулей присутствуют только неприводимые подмодули, соответствующие разбиениям $(2,1^{n-2})\vdash n$ и $(1^n)\vdash n$. Используя доказанный алгоритм, получаем, что для любого $n\geqslant 3$ для соответствующих кратностей выполняются равенства $m_{(2,1^{n-2})}(\mathbf{MC})=1$, $m_{(1^n)}(\mathbf{MC})=0$. Отсюда получаем, что модуль M является неприводимым и соответствует разбиению $(2,1^{n-2})\vdash n$.

Полиоднородные элементы, построенные по различным стандартным таблицам Юнга разбиения $(2,1^{n-2})\vdash n$, имеют вид

$$\bar{x}_1x_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_{n-1},\ \bar{x}_1\bar{x}_2x_1\bar{x}_3\ldots\bar{x}_{n-1},\ldots,\ \bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_{n-1}x_1.$$

В силу тождества коммутативности все элементы начиная со второго сами задают тождества многообразия $\mathbf{MC}$. Поэтому полная линеаризация первого элемента порождает ненулевой неприводимый модуль, соответствующий этому разбиению, а именно модуль M. Таким образом, тождества $x_1\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_{n-1}\equiv 0$ и $x_0\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_l\equiv 0$ эквивалентны. Доказательство завершено. □

Отметим также, что доказать эквивалентность этих двух тождеств по модулю тождеств многообразия $\mathbf{MC}$ можно было непосредственными вычислениями. Чтобы получить тождество (5), надо к результату полной линеаризации тождества $x_1\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_{n-1}\equiv 0$ применить кососимметризацию по образующим $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$.

Представим примеры почти нильпотентных коммутативных метабелевых многообразий полиномиального роста. Пусть A — неассоциативная алгебра, порождённая одной образующей a и определяющими соотношениями

$$au=ua, \tag{6}$$

$$uv=0, \tag{7}$$

где u, v — неассоциативные слова длины больше единицы: $\deg_a u>1$, $\deg_a v>1$. Приведём примеры элементов алгебры A степеней 3 и 4:

1) $(aa)a=a(aa)$,
2) $\big((aa)a\big)a=a\big((aa)a\big)$, $(aa)(aa)=0$.

Аналогично можно показать, что все ненулевые мономы алгебры A степени $k\geqslant 1$ равны между собой, поэтому мы их обозначим b_k, $k=1,2,3,\ldots$. Так как соотношения (6), (7), задающие алгебру A, являются однородными, то множество элементов b_k образует базис алгебры A. Напомним, что множество линейных комбинаций произведений элементов любой алгебры является её идеалом. Для алгебры A обозначим такой идеал через A^2. Базисом идеала A^2 является множество $b_2, b_3, \ldots$. Заметим, что A^2 — алгебра с нулевым умножением коразмерности один.

Предложение. *Многообразие* $\mathrm{var}\, A$, *порождённое алгеброй* A, *является коммутативным, метабелевым, в нём выполнены тождества*

$$xyzt \equiv xytz, \tag{8}$$

$$\bar{x}\tilde{y}\bar{z}\tilde{t} = xyzt - zyxt - xtzy + ztxy \equiv 0. \tag{9}$$

Доказательство. Оба тождества являются полилинейными, поэтому при их проверке достаточно подставлять только базисные элементы алгебры A. Если подставить в тождество (8) $z = t = a$, получим равенство. Если же вместо z или вместо t подставлен базисный элемент из A^2, то, так как результат подстановки в произведение xy принадлежит идеалу A^2, получим, что после подстановки левая и правая части равны нулю. Докажем теперь выполнение тождества (9). Пары образующих x, z и y, t входят в тождество (9)) кососимметричным образом, поэтому результат подстановки будет равен нулю, если вместо хотя бы одной пары подставлен один и тот же базисный элемент алгебры. Если же вместо каждой пары подставлены различные базисные элементы, то мы получим, что подставлены как минимум два базисных элемента из идеала A^2. Поэтому и в данном случае результат подстановки равен нулю. Доказательство завершено. □

Используя доказанное предложение, получим верхнюю оценку для коразмерности $c_n(\mathrm{var}\, A)$. Докажем, что все элементы $P_n(\mathrm{var}\, A)$ являются линейными комбинациями полилинейных элементов

$$h = x_{n-1}x_{n-2}x_nx_{n-3}\ldots x_1,$$
$$h_i = x_nx_ix_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{n-2}}, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \quad i_1 > i_2 > \ldots > i_{n-2}.$$

В силу тождества коммутативности ограничимся рассмотрением мономов $x_ix_jx_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_{n-2}}$, где $i > j$. В силу тождества (8) индексы начиная с третьего можно упорядочить по убыванию, т. е. $i_1 > i_2 > \ldots > i_{n-2}$.

Если элемент отличен от h и h_i, то возможны три случая:

1) $x_ix_jx_nx_{n-1}x_{n-2}\ldots$,
2) $x_{n-1}x_jx_nx_{n-2}\ldots$,
3) $x_{n-2}x_jx_nx_{n-1}\ldots$.

Применим тождество (9) к элементу из первого случая:

$$x_ix_jx_nx_{n-1}x_{n-2}\ldots \equiv x_ix_{n-1}x_nx_j\ldots + x_nx_jx_ix_{n-1}\ldots - x_nx_{n-1}x_ix_j\ldots.$$

Получим, что второе и третье слагаемые совпадают с h_j и h_{n-1} соответственно, а первое слагаемое совпадает с элементом из второго случая.

Рассмотрим второй случай. В силу тождества (9) получаем

$$x_{n-1}x_jx_nx_{n-2}\ldots \equiv x_{n-1}x_{n-2}x_nx_j\ldots + x_nx_jx_{n-1}x_{n-2}\ldots - x_nx_{n-2}x_{n-1}x_j\ldots .$$

В данном случае второе и третье слагаемые совпадают с h_j и h_{n-2} соответственно, а первое слагаемое равно элементу h. Осталось рассмотреть третий случай. По тождеству (9) получим

$$x_{n-2}x_jx_nx_{n-1}\ldots \equiv x_{n-2}x_{n-1}x_nx_j\ldots + x_nx_jx_{n-2}x_{n-1}\ldots - x_nx_{n-1}x_{n-2}x_j\ldots .$$

Как и в первом случае, второе и третье слагаемые совпадают с h_j и h_{n-1} соответственно, а первое слагаемое в результате применения тождества коммутативности совпадает с h.

Следовательно, для коразмерности многообразия $\operatorname{var} A$ выполняется неравенство

$$c_n(\operatorname{var} A) \leqslant n. \tag{10}$$

Найдём теперь нижнюю оценку размерности полилинейной части многообразия $\operatorname{var} A$. Однородный элемент, линеаризация которого порождает одномерный неприводимый модуль, соответствующий разбиению $(n) \vdash n$, имеет вид $g_{(n)} = xX^{n-1}$. Подставим вместо x сумму $a^2 + a$, получим

$$(a^2+a)(a^2+a)\ldots(a^2+a) = a^2aa\ldots a + aa^2a\ldots a = 2aR_a^n = 2b_{n+1} \neq 0.$$

Таким образом, получаем, что соответствующая кратность не равна нулю: $m_{(n)}(\operatorname{var} A) = 1$.

Для $n \geqslant 3$ рассмотрим разбиение $(n-1,1) \vdash n$. Однородный элемент, линеаризация которого порождает неприводимый модуль, соответствующий этому разбиению, имеет вид

$$g_{(n-1,1)} = \bar{x}x\bar{y}X^{n-3} = xxyX^{n-3} - yX^{n-1}.$$

Подставим a^2 вместо y и a вместо x, получим

$$aaa^2a\ldots a - a^2aa\ldots a = -aR_a^n = -b_{n+1} \neq 0.$$

Поэтому соответствующая кратность не равна нулю: $m_{(n-1,1)}(\operatorname{var} A) \geqslant 1$. Следовательно, для коразмерности многообразия $\operatorname{var} A$ выполняется также неравенство

$$c_n(\operatorname{var} A) \geqslant m_{(n)}(\operatorname{var} A)d_{(n)} + m_{(n-1,1)}(\operatorname{var} A)d_{(n-1,1)} = n.$$

Учитывая неравенство (10), получаем, что $c_n(\operatorname{var} A) = n$. Сформулируем полученные результаты в виде предложения.

Предложение. *Для многообразия* $\operatorname{var} A$ *выполняются следующие равенства для коразмерности, кохарактера и кодлины*:

$$c_n(\operatorname{var} A) = n, \quad \chi_n(\operatorname{var} A) = \chi_{(n)} + \chi_{(n-1,1)}, \quad l_n(\operatorname{var} A) = 2, \quad n \geqslant 3.$$

Отметим, что

$$c_1(\operatorname{var} A) = 1, \quad \chi_1(\operatorname{var} A) = \chi_{(1)}, \quad l_1(\operatorname{var} A) = 1,$$
$$c_2(\operatorname{var} A) = 1, \quad \chi_2(\operatorname{var} A) = \chi_{(2)}, \quad l_2(\operatorname{var} A) = 1.$$

Докажем теперь одно свойство, касающееся алгебры A, которое нам понадобится для доказательства теоремы 2.

Предложение. *Алгебра A не принадлежит многообразию $\mathbf{V}$ коммутативно-метабелевых алгебр, т. е. $A \notin \mathbf{V} \subset \mathbf{MC}$, тогда и только тогда, когда в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество $x_0X^k \equiv 0$.*

Доказательство. Из условий теоремы 1 и разложения характера полилинейной части многообразия $\operatorname{var} A$ как модуля симметрической группы следует, что в многообразии $\mathbf{V}$ должно быть выполнено тождество $xX^{n-1} \equiv 0$, соответствующее разбиению $(n) \vdash n$, или тождество, соответствующее разбиению $(n-1,1) \vdash n$. Рассмотрим для последнего разбиения все стандартные таблицы Юнга. Полиоднородные элементы, линеаризация которых соответствует этим стандартным таблицам, имеют вид

$$\bar{x}X^{s-2}\bar{y}X^{n-s}, \quad s = 2, 3, \ldots, n.$$

Из теории представлений симметрической группы следует, что тождество, которое может быть выполнено в многообразии $\mathbf{V} \subset \mathbf{MC}$, имеет вид

$$\sum_{s=3}^{n} \alpha_s \bar{x}X^{s-2}\bar{y}X^{n-s} \equiv 0. \tag{11}$$

Суммирование начинается со значения $s = 3$, так как при $s = 2$ тождество $\bar{x}\bar{y}X^{n-2} \equiv 0$ выполняется в любом коммутативном многообразии. Если в тождестве (11) сумма коэффициентов равна нулю, т. е. $\sum\limits_{s=3}^{n} \alpha_s = 0$, то оно выполнено в алгебре A. Действительно, в силу тождества (8)

$$\bar{x}X^{t-2}\bar{y}X^{n-t} = \bar{x}X^{s-2}\bar{y}X^{n-s}, \quad s, t \geqslant 2.$$

Таким образом, необходимо предположить, что $\sum\limits_{s=3}^{n} \alpha_s \neq 0$. Рассмотрим два случая.

Пусть тождество $xX^{n-1} \equiv 0$ выполнено в многообразии $\mathbf{V}$. Тогда подставим в него вместо x сумму $x + x_0x$. Получим, что $2(x_0x)X^{n-1} \equiv 0$, т. е. тождество $x_0X^n \equiv 0$ также выполнено в многообразии $\mathbf{V}$.

Пусть теперь выполняется (11), в котором $\sum\limits_{s=3}^{n} \alpha_s \neq 0$. Подставим в него произведение x_0x вместо образующей y. Получим тождество

$$\left(\sum_{s=3}^{n} \alpha_s\right)(x_0x)X^{n-1} \equiv 0.$$

Следовательно, тождество $x_0X^n \equiv 0$ выполнено в многообразии $\mathbf{V}$. Предложение доказано. □

Следствие. *Многообразие $\operatorname{var} A$ является почти нильпотентным.*

Доказательство. Пусть $V \subset \operatorname{var} A$ — собственное подмногообразие многообразия $\operatorname{var} A$. Тогда по предложению в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество $x_0X^m \equiv 0$. Подставим в данное тождество вместо x_0 произведение x_1x_2, а вместо x сумму $x_3 + x_4 + \ldots + x_{m-2}$. Полученная полилинейная часть имеет вид $m!\,x_1x_2x_3\ldots x_{m+2}$, поэтому в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество нильпотентности степени $m+2$. Следствие доказано. $\square$

Построим ещё одну алгебру, которая порождает почти нильпотентное многообразие, состоящее из коммутативных метабелевых алгебр. Алгебра B задана бесконечным числом образующих z, e_i, $i = 1, 2, \ldots$, и определяющими соотношениями

$$ue_ie_j = -ue_je_i, \tag{12}$$

$$e_ie_j = 0, \quad ue_i = e_iu,$$

$$uv = 0, \quad \deg_z u + \deg_z v \geqslant 2. \tag{13}$$

Заметим, что так как характеристика основного поля равна нулю, то при $i = j$ соотношение (12) превращается в равенство $ue_ie_i = 0$.

Предложение. *Многообразие* $\operatorname{var} B$*, порождённое алгеброй* B*, является коммутативным, метабелевым, в нём выполняются тождества*

$$x_1x_2x_3x_4 \equiv -x_1x_2x_4x_3, \tag{14}$$

$$xxx \equiv 0. \tag{15}$$

Доказательство. Тождество (14) полилинейное, поэтому при его проверке достаточно подставлять сами образующие алгебры B или их произведения. Если в (14) выполнить подстановку $x_3 = e_i$, $x_4 = e_j$, то по соотношению (12) получим верное равенство. Если же в тождество (14) вместо x_3 или x_4 подставить z или некоторое произведение образующих u, $\deg u \geqslant 2$, то по соотношению (13) левая и правая части окажутся равными нулю.

Докажем теперь выполнение тождества (15) в алгебре B. Подставим вместо x произвольный элемент алгебры B, т. е.

$$x = \alpha z + \sum_i \alpha_i e_i + u,$$

где сумма по индексу i конечна, а элемент u принадлежит идеалу B^2 алгебры B. Учитывая, что $u^2 = uz = ue_iz = 0$, получаем цепочку равенств

$$\Bigl(\alpha z + u + \sum_i \alpha_i e_i\Bigr)\Bigl(\alpha z + u + \sum_i \alpha_i e_i\Bigr)\Bigl(\alpha z + u + \sum_i \alpha_i e_i\Bigr) =$$

$$= \biggl((\alpha z + u)\Bigl(\sum_i \alpha_i e_i\Bigr) + \Bigl(\sum_i \alpha_i e_i\Bigr)(\alpha z + u)\biggr)\Bigl(\sum_i \alpha_i e_i\Bigr) =$$

$$= 2\alpha z\Big(\sum_i \alpha_i e_i\Big)\Big(\sum_i \alpha_i e_i\Big) + 2u\Big(\sum_i \alpha_i e_i\Big)\Big(\sum_i \alpha_i e_i\Big) =$$
$$= 2\alpha \sum_{i,j} \alpha_i\alpha_j(ze_ie_j + ze_je_i) + 2\sum_{i,j}\alpha_i\alpha_j(ue_ie_j + ue_je_i) = 0.$$

Предложение доказано. □

Используя доказанное предложение, получим верхнюю оценку для коразмерности $c_n(\operatorname{var} B)$. Докажем, что все элементы пространства $P_n(\operatorname{var} B)$ являются линейными комбинациями полилинейных элементов

$$x_n x_i x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{n-2}}, \quad i_1 > i_2 > \dots i_{n-2}. \tag{16}$$

Из тождеств (1), (15) следует полилинейное тождество

$$xyz + yzx + zxy \equiv 0. \tag{17}$$

Рассмотрим полилинейный элемент пространства $P_n(\operatorname{var} B)$, имеющий вид, отличный от вида (16). В таком мономе образующая x_n находится на позиции с номером, бóльшим 2. Но с помощью тождества (14) x_n можно переместить на третью позицию. К результату преобразования можно применить тождества (1), (17) и получить полилинейный элемент, который имеет представление в виде линейной комбинации элементов (16). Следовательно, для коразмерности многообразия $\operatorname{var} B$ выполняется неравенство

$$c_n(\operatorname{var} B) \leqslant n - 1. \tag{18}$$

Найдём теперь нижнюю оценку размерности полилинейной части многообразия $\operatorname{var} B$. Тождество (5) не выполняется в алгебре B. Действительно, для проверки достаточно подставить в него $x_n = z$, $x_i = e_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Поэтому

$$m_{(2,1^{n-2})}(\operatorname{var} B) = m_{(2,1^{n-2})}(\mathbf{MC}) = 1.$$

Получаем следующее неравенство для коразмерности многообразия $\operatorname{var} B$:

$$c_n(\operatorname{var} B) \geqslant m_{(2,1^{n-2})}(\operatorname{var} B) d_{(2,1^{n-2})} = n - 1.$$

Учитывая неравенство (18), видим, что $c_n(\operatorname{var} B) = n - 1$.

Сформулируем полученные для многообразия $\operatorname{var} B$ результаты в виде предложения.

Предложение. *Для многообразия* $\operatorname{var} B$ *выполняются следующие равенства для коразмерности, кохарактера и кодлины*:

$$c_n(\operatorname{var} B) = n - 1, \quad \chi_n(\operatorname{var} B) = \chi_{(2,1^{n-2})}, \quad l_n(\operatorname{var} B) = 1, \quad n \geqslant 2.$$

Понятно, что

$$c_1(\operatorname{var} B) = 1, \quad \chi_1(\operatorname{var} B) = \chi_{(1)}, \quad l_1(\operatorname{var} B) = 1.$$

Отметим ещё одно свойство алгебры B.

Предложение. *Алгебра B не принадлежит многообразию $\mathbf{V}$ коммутативных метабелевых алгебр, т. е. $B \notin \mathbf{V} \subset \mathbf{MC}$, тогда и только тогда, когда в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество $x_0\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_l \equiv 0$.*

Доказательство следует из предыдущего предложения и замечания.

Следствие. *Многообразие $\operatorname{var} B$ является почти нильпотентным.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{V} \subset \operatorname{var} B$ — собственное подмногообразие многообразия $\operatorname{var} B$. Тогда по предложению в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество $x_0\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_l \equiv 0$, следовательно, $c_n(\mathbf{V}) = 0$ для всех $n \geqslant l-1$. Следствие доказано. □

Отметим, что алгебра B является йордановой, а многообразие $\operatorname{var} B$ совпадает с одним из трёх многообразий с кодлиной, равной 1 для любого n (см. [1]).

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{V}$ — подмногообразие многообразия $\mathbf{MC}$. Если многообразие $\mathbf{V}$ имеет рост не выше подэкспоненциального, то или $\operatorname{var} A \subseteq \mathbf{V}$, т. е. $A \in \mathbf{V}$, или $\operatorname{var} B \subseteq \mathbf{V}$, т. е. $B \in \mathbf{V}$, или многообразие $\mathbf{V}$ нильпотентное.*

Доказательство. Доказательство теоремы существенно опирается на достаточно новый результат работы [5], который мы сформулировали ранее в виде теоремы.

Предположим, что $\mathbf{V}$ не нильпотентное многообразие, т. е. для любого натурального $n \geqslant 1$ полилинейная часть не равна нулю, $P_n(\mathbf{V}) \neq 0$. Кроме того, предположим, что многообразие $\mathbf{V}$ не содержит алгебр A и B. Тогда по предложениям и в нём для некоторых натуральных k и l выполнены тождества $x_0X^k \equiv 0$ и $x_0\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_l \equiv 0$.

Для каждого натурального n в ненулевом модуле $P_n(\mathbf{V})$ содержится неприводимый S_n-модуль $M_\lambda^{(n)}$, соответствующий некоторому разбиению $\lambda^{(n)} \vdash n$. Докажем, что последовательность разбиений $\{\lambda^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет условиям теоремы работы [5]. Рассмотрим элемент $g_{\lambda^{(n)}}$, линеаризация которого порождает модуль $M_\lambda^{(n)}$. Степень элемента $g_{\lambda^{(n)}}$ по образующей x_1 равна $\lambda_1^{(n)}$, первому члену разбиения $\lambda^{(n)} \vdash n$. Выпишем этот элемент в виде линейной комбинации ненулевых одночленов

$$x_{i_1}X_1^{\alpha_1}x_{i_2}X_1^{\alpha_2}x_{i_3}\ldots x_{i_m}X_1^{\alpha_m}$$

или

$$x_1X_1^{\alpha_0}x_{i_1}X_1^{\alpha_1}x_{i_2}\ldots x_{i_m}X_1^{\alpha_m},$$

где $m = n - \lambda_1^{(n)}$, $i_s \neq 1$ и $\alpha_i < k$, $0 \leqslant i \leqslant m$. Так как в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество $x_0X^k \equiv 0$, а одночлены ненулевые, то $\alpha_i < k$ для всех $0 \leqslant i \leqslant m$. В случае первого одночлена получаем, что $\lambda_1^{(n)} < km = k\bigl(n - \lambda_1^{(n)}\bigr)$ и, таким образом, $\lambda_1^{(n)} < n/\alpha_1$ для $\alpha_1 = (k+1)/k$. Во втором случае имеем, что $\lambda_1^{(n)} < k(m+1) \leqslant 2km = 2k\bigl(n - \lambda_1^{(n)}\bigr)$ и $\lambda_1^{(n)} < n/\alpha_2$ для $\alpha_2 = (2k+1)/(2k)$.

Рассмотрим теперь полилинейный элемент $h_{\lambda^{(n)}}$, который порождает ненулевой модуль $M_\lambda^{(n)}$ и является кососимметричным по образующим $x_1, x_2, \ldots, x_r$, где $r = \lambda_1^{(n)\prime}$ — длина первого столбца диаграммы Юнга, соответствующей разбиению $\lambda^{(n)}$. Обозначим через y_j все остальные образующие элемента $h_{\lambda^{(n)}}$. Элемент $h_{\lambda^{(n)}}$ — линейная комбинация ненулевых одночленов вида

$$y_{i_1}\bar{x}_1\ldots\bar{x}_{s_1}y_{i_2}\bar{x}_{s_1+1}\ldots\bar{x}_{s_1+s_2}y_{i_3}\ldots y_{i_m}\bar{x}_{s_1+\ldots+s_{m-1}+1}\ldots\bar{x}_{s_1+\ldots+s_m}$$

или

$$\bar{x}_1\ldots\bar{x}_{s_0}y_{i_1}\bar{x}_{s_0+1}\ldots\bar{x}_{s_0+s_1}y_{i_2}\ldots y_{i_m}\bar{x}_{s_0+\ldots+s_{m-1}+1}\ldots\bar{x}_{s_0+\ldots+s_m},$$

где $m = n - {\lambda_1}^{(n)\prime}$, $s_0 \leqslant l$ и $s_i < l$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Так как в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество $x_0\bar{x}_1\bar{x}_2\ldots\bar{x}_l \equiv 0$, то, как и в первом случае, получаем, что ${\lambda_1}^{(n)\prime} < lm = l\big(n - {\lambda_1}^{(n)\prime}\big)$ и ${\lambda_1}^{(n)\prime} < n/\alpha_3$, где $\alpha_3 = (l+1)/l$, а во втором случае ${\lambda_1}^{(n)\prime} \leqslant n/\alpha_4$, $\alpha_4 = (2l+1)/(2l)$. Таким образом, мы нашли последовательность разбиений $\lambda^{(n)} \vdash n$, таких что $\lambda_1^{(n)}, {\lambda_1}^{(n)\prime} < n/\alpha$, где $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, $\alpha > 1$. Пусть β — некоторая константа, удовлетворяющая условию $1 < \beta < \alpha$. По теореме существует n_0, такое что для всех $n \geqslant n_0$ $c_n(\mathbf{V}) \geqslant d_{\lambda^{(n)}} \geqslant \beta^n$, что противоречит условию, так как многообразие $\mathbf{V}$ имеет рост не выше подэкспоненциального. Доказательство теоремы 2 завершено. $\square$

Следствие. *Пусть многообразие* $\mathbf{V}$ *является почти нильпотентным, имеет подэкспоненциальный рост и состоит из коммутативных метабелевых алгебр, т. е. является собственным подмногообразием многообразия* $\mathbf{MC}$. *Тогда или* $\mathbf{V} = \operatorname{var} A$, *или* $\mathbf{V} = \operatorname{var} B$.

Литература

[1] Мищенко С. П. Многообразия линейных алгебр кодлины один // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2010. — № 1. — С. 25—30.

[2] Мищенко С. П., Шулежко О. В. О почти нильпотентных многообразиях в классе коммутативных метабелевых алгебр // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2015. — № 3 (125). — С. 21—28.

[3] Мищенко С. С. О росте многообразий коммутативных линейных алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 5. — С. 165—170.

[4] Чанг Н. Т. К., Фролова Ю. Ю. Почти нильпотентные коммутативные метабелевы многообразия, рост которых не выше экспоненциального // Междунар. конф. «Мальцевские чтения». Тезисы докладов. — Новосибирск, 2014. — С. 113.

[5] Giambruno A., Mishchenko S. Degrees of irreducible characters of the symmetric group and exponential growth // Proc. Amer. Math. Soc. — 2016. — Vol. 144. — P. 943—953.

[6] Giambruno A., Mishchenko S., Valenti A., Zaicev M. Polynomial codimension growth and the Specht problem // J. Algebra. — 2017. — Vol. 469. — P. 421—436.

[7] Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. — Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Providence: Amer. Math. Soc., 2005. — (Math. Surv. Monogr.; Vol. 122).

[8] Mishchenko S., Valenti A. On almost nilpotent varieties of subexponential growth // J. Algebra. — 2015. — Vol. 423. — P. 902—915.

[9] Mishchenko S., Valenti A. Varieties with at most quadratic growth // Israel J. Math. — 2010. — Vol. 178. — P. 209—228.

[10] Petrogradsky V. M. Enumeration of algebras close to absolutely free algebras and binary trees // J. Algebra. — 2005. — Vol. 290. — P. 337—371.