Атомарная теория деления и пересечения двусторонних идеалов полуколец*

А. Е. ПЕНТУС
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: apentus@mech.math.msu.su

М. Р. ПЕНТУС
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Российский государственный гуманитарный университет,
Московский педагогический государственный университет,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

УДК 512+510.64

Ключевые слова: идеал полукольца, исчисление Ламбека.

Аннотация

В статье рассматриваются двусторонние идеалы полуколец. Изучается теория двусторонних идеалов в сигнатуре, состоящей из предикатного символа $\subseteq$ и трёх функциональных символов, обозначающих пересечение, правое деление и левое деление идеалов. Доказывается, что множество атомарных формул этой сигнатуры, истинных на всех полукольцах при всех оценках, разрешимо.

Abstract

A. E. Pentus, M. R. Pentus, The atomic theory of division and intersection of semiring ideals, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 181—191.

We consider two-sided ideals of semirings. More precisely, we study the theory of two-sided ideals in the signature consisting of the predicate symbol $\subseteq$ and three function symbols that denote the intersection, right division, and left division of ideals. We prove the decidability of the set of those atomic formulas in this signature that are valid for all semirings and all valuations.

Введение

На множестве всех двусторонних идеалов произвольного полукольца S можно определить операцию правого деления ($I/J = \{c \in S \mid c \cdot J \subseteq I\}$), операцию левого деления ($J\backslash I = \{c \in S \mid J \cdot c \subseteq I\}$) и операцию пересечения. Цель данной статьи — найти эффективный способ проверки тождественной истинности

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проекты 14-01-00127а, 15-01-09218а, 16-01-00615а, НШ-1423.2014.1).

© 2016 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

соотношений, формулируемых в терминах пересечения, правого деления, левого деления и отношения $\subseteq$. Та же задача для случая без пересечения была решена в [4].

В разделе 1 даются определения, касающиеся полуколец и их двусторонних идеалов. В разделе 2 вводится исчисление $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap)$ — исчисление Ламбека с двумя делениями и пересечением и добавленным правилом монотонности. В разделе 3 приводится доказательство корректности исчисления $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap)$ относительно интерпретации на множестве идеалов полукольца. В разделе 4 доказывается, что в исчислении $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap)$ выводятся все тождественно истинные свойства двусторонних идеалов полуколец, записываемые в указанной сигнатуре как атомарные формулы. (Доказательство основано на том, что невыводимые в $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap)$ свойства опровергаются в конкретной универсальной модели.) Так как множество выводимых секвенций исчисления $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap)$ разрешимо, установлена разрешимость атомарной теории деления и пересечения двусторонних идеалов.

1. Полукольца

Определение 1.1. В этой статье *полукольцом* называется алгебра $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$ с выделенным элементом 0 и бинарными операциями $+$ и $\cdot$, удовлетворяющими следующим аксиомам (где a, b, c — произвольные элементы множества S):

1) $a + b = b + a$,
2) $a + 0 = a$,
3) $(a + b) + c = a + (b + c)$,
4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$,
5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$,
6) $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$,
7) $a \cdot 0 = 0$,
8) $0 \cdot a = 0$.

Пример 1.2. Через $\mathbb{N}$ обозначим множество всех натуральных чисел (ноль считаем натуральным числом). Множество $\mathbb{N}$ с обычными операциями сложения и умножения и нулём образует полукольцо.

Пример 1.3. Определим на множестве $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ две бинарные операции $\oplus$ и $\odot$ следующим образом:

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	1	2	3	4
2	2	2	2	3	4
3	3	3	3	3	4
4	4	4	4	4	4

,

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	2	3	4	4
2	0	3	4	4	4
3	0	4	4	4	4
4	0	4	4	4	4

.

Тогда $\langle\{0, 1, 2, 3, 4\}, \oplus, \odot, 0\rangle$ — полукольцо.

Определение 1.4. Множество $I \subseteq S$ называется *двусторонним идеалом* полукольца $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$, если выполнены следующие условия:

1) $0 \in I$,
2) $a + b \in I$ для любых $a \in I$ и $b \in I$,
3) $a \cdot b \in I$ для любых $a \in I$ и $b \in S$,
4) $a \cdot b \in I$ для любых $a \in S$ и $b \in I$.

Пример 1.5. Определим на множестве $\{0, 1, 2, 3, 4, \infty\}$ две бинарные операции $\oplus$ и $\odot$ следующим образом:

$\oplus$	0	1	2	3	4	∞
0	0	1	2	3	4	∞
1	1	2	3	4	∞	∞
2	2	3	4	∞	∞	∞
3	3	4	∞	∞	∞	∞
4	4	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

,

$\odot$	0	1	2	3	4	∞
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	∞
2	0	2	4	∞	∞	∞
3	0	3	∞	∞	∞	∞
4	0	4	∞	∞	∞	∞
∞	0	∞	∞	∞	∞	∞

.

Тогда $\langle\{0, 1, 2, 3, 4, \infty\}, \oplus, \odot, 0\rangle$ — полукольцо. Его идеалами являются следующие восемь множеств: $I_0 = \{0\}$, $I_\infty = \{0, \infty\}$, $I_4 = \{0, 4, \infty\}$, $I_3 = \{0, 3, \infty\}$, $I_{3,4} = \{0, 3, 4, \infty\}$, $I_2 = \{0, 2, 4, \infty\}$, $I_{2,3} = \{0, 2, 3, 4, \infty\}$, $I_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, \infty\}$.

Определение 1.6. Пусть $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$ — некоторое полукольцо, $c \in S$ и $D \subseteq S$. Тогда через $c \cdot D$ обозначается множество

$$\{a \in S \mid a = c \cdot d \text{ для некоторого } d \in D\}$$

и через $D \cdot c$ — множество

$$\{a \in S \mid a = d \cdot c \text{ для некоторого } d \in D\}.$$

Определение 1.7. Пусть I и J — двусторонние идеалы полукольца $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$. *Правое частное идеала I по идеалу J* определяется формулой

$$I/J = \{c \in S \mid c \cdot J \subseteq I\}.$$

Левое частное идеала I по идеалу J определяется формулой

$$J\backslash I = \{c \in S \mid J \cdot c \subseteq I\}.$$

Иногда вместо I/J пишут $I : J$, а вместо $J\backslash I$ — $I :: J$ (см. [5, гл. XII]).

Определение 1.8. Пусть I и J — двусторонние идеалы полукольца $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$. *Произведение идеала I и идеала J* (обозначение $I \cdot J$) определяется как подмножество полукольца S, состоящее из всех конечных сумм $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k$, где $a_k \in I$ и $b_k \in J$ для всех k. Как обычно, суммой элементов пустого множества считается элемент 0.

Лемма 1.9. *Если I и J — двусторонние идеалы некоторого полукольца, то множества $I \cap J$, $I \cdot J$, I/J и $J\backslash I$ тоже двусторонние идеалы этого полукольца.*

Доказательство. Пусть I и J — двусторонние идеалы полукольца $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$.

То, что $I \cap J$ — двусторонний идеал, очевидно из определения. Доказательство для I/J и $J\backslash I$ можно найти в [4].

Докажем, что $I \cdot J$ является двусторонним идеалом.

Элемент 0 принадлежит $I \cdot J$ как сумма элементов пустого множества. Аксиома 2 очевидна из определения произведеня идеалов.

Проверим аксиому 3 из определения 1.4. Пусть $a \in I \cdot J$ и $b \in S$. Согласно определению произведения идеалов a имеет вид $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot b_k$, где $a_k \in I$ и $b_k \in J$ для всех k. Очевидно, $a \cdot b = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \cdot (b_k \cdot b)$. Так как $b_k \cdot b \in J$ для всех k, то $a \cdot b \in I \cdot J$.

Аксиома 4 доказывается аналогично. □

Пример 1.10. Рассмотрим идеалы полукольца из примера 1.5. Согласно определению

$$I_{3,4} \cap I_2 = I_4, \quad I_4/I_2 = I_2\backslash I_4 = I_{2,3},$$
$$I_3/I_{2,3} = I_{2,3}\backslash I_3 = I_{3,4}, \quad I_0/I_0 = I_0\backslash I_0 = I_1.$$

2. Исчисление

Рассмотрим монотонное исчисление Ламбека с двумя делениями и пересечением, обозначим его $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap)$. *Типы* этого исчисления строятся из примитивных типов $p_1, p_2, \ldots$ с помощью трёх бинарных связок $\backslash$, $/$, $\cap$. Обозначим множество всех типов, построенных таким образом, через $\mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)$. Прописные буквы латинского алфавита будем использовать для обозначения типов, а прописные греческие буквы — для обозначения конечных последовательностей типов.

Выводимыми объектами монотонного исчисления Ламбека с двумя делениями и пересечением являются *секвенции* вида $\Gamma \to A$, где последовательность Γ непустая. Аксиомы имеют вид $A \to A$. Выводы строятся с помощью следующих правил:

$$\frac{A\Pi \to B}{\Pi \to A\backslash B}\ (\to\backslash), \text{ где } \Pi \text{ непустая}, \qquad \frac{\Phi \to A \quad \Gamma B\Delta \to C}{\Gamma\Phi(A\backslash B)\Delta \to C}\ (\backslash\to),$$

$$\frac{\Pi A \to B}{\Pi \to B/A}\ (\to/), \text{ где } \Pi \text{ непустая}, \qquad \frac{\Phi \to A \quad \Gamma B\Delta \to C}{\Gamma(B/A)\Phi\Delta \to C}\ (/\to),$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \cap B}\ (\to\cap), \qquad \frac{\Gamma A\Delta \to C}{\Gamma(A \cap B)\Delta \to C}\ (\cap\to)_1,$$

$$\frac{\Gamma B\Delta \to C}{\Gamma(A \cap B)\Delta \to C}\ (\cap\to)_2,$$

$$\frac{\Gamma\Delta \to A}{\Gamma B\Delta \to A}\ (\mathrm{M}), \qquad \frac{\Pi \to B \quad \Gamma B\Delta \to A}{\Gamma\Pi\Delta \to A}\ (\mathrm{cut}).$$

Правило (cut) называют *правилом сечения*. Правило (M) называют *правилом монотонности* (см. [8, с. 47]) или *правилом ослабления* (см. [7, с. 359]).

Пример 2.1. Вывод

$$\frac{A \to A}{A \cap B \to A}\ (\cap\to)_1$$

показывает, что $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash A \cap B \to A$ при любых типах A и B.

Пример 2.2. Вывод

$$\dfrac{\dfrac{p_2 \to p_2}{p_1 \cap p_2 \to p_2}\ (\cap\to)_2 \quad \dfrac{\dfrac{p_2 \to p_2}{p_2\, p_3 \to p_2}\ (\mathrm{M})}{p_2 \to p_2/p_3}\ (\to/)}{p_1 \cap p_2 \to p_2/p_3}\ (\mathrm{cut})$$

показывает, что $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash p_1 \cap p_2 \to p_2/p_3$.

Теорема 2.3 (теорема об устранимости правила сечения). *Удаление правила* (cut) *из исчисления* $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap)$ *не меняет множества выводимых секвенций.*

Эта теорема доказывается аналогично теореме об устранимости сечения в исчислении Ламбека (см. [2]).

Пример 2.4. Секвенция $p_1 \cap p_2 \to p_2/p_3$ выводится и без применения правила (cut):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p_2 \to p_2}{p_2\, p_3 \to p_2}\ (\mathrm{M})}{p_2 \to p_2/p_3}\ (\to/)}{p_1 \cap p_2 \to p_2/p_3}\ (\cap\to)_2\ .$$

Следствие 2.5. *Множество тех секвенций, которые выводимы в исчислении* $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap)$, *разрешимо.*

Доказательство. В выводе без правила (cut) при движении снизу вверх (от заключения правила к его посылкам) уменьшается сложность секвенций, понимаемая как суммарное число вхождений примитивных типов и знаков операций. Поэтому для любой данной секвенции известно ограничение на длину вывода и можно перебрать все потенциальные выводы этой секвенции. □

3. Модели

Определение 3.1. *Оценкой* на полукольце называется произвольная функция v, ставящая в соответствие примитивным типам $p_1, p_2, \ldots$ некоторые двусторонние идеалы этого полукольца. Естественное продолжение оценки v на множество всех типов будем тоже обозначать через v. Оно задаётся следующими соотношениями:

1) $v(A \cap B) = v(A) \cap v(B)$,

2) $v(A\backslash B) = v(A)\backslash v(B)$,
3) $v(B/A) = v(B)/v(A)$,

где $A \in \mathrm{Tp}$ и $B \in \mathrm{Tp}$. *Моделью на полукольце* (или просто *моделью*) называется произвольное полукольцо вместе с оценкой на нём.

Пример 3.2. Рассмотрим модель на полукольце $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0\rangle$ с оценкой v, заданной следующим образом:

$$v(p_i) = \{k \mid k \geqslant i\} \cup \{0\}.$$

В этой модели

$$\begin{aligned} v(p_9 \cap p_5) &= \{k \mid k \geqslant 9\} \cup \{0\} = v(p_9), \\ v(p_{19}/p_9) &= \{k \mid k \geqslant 3\} \cup \{0\} = v(p_3), \\ v\big((p_{19}/p_9)\backslash p_{19}\big) &= \{k \mid k \geqslant 7\} \cup \{0\} = v(p_7). \end{aligned}$$

Определение 3.3. Секвенция $A_1 \ldots A_n \to B$ называется *истинной* в модели с оценкой v, если $v(A_1) \cdot \ldots \cdot v(A_n) \subseteq v(B)$. В частности, секвенция $A \to B$, где $A \in \mathrm{Tp}$ и $B \in \mathrm{Tp}$, истинна, если $v(A) \subseteq v(B)$.

Пример 3.4. Рассмотрим модель из примера 3.2. В этой модели секвенция $p_9 \cap p_5 \to (p_{19}/p_9)\backslash p_{19}$ истинна, а секвенция $(p_{19}/p_9)\backslash p_{19} \to p_9 \cap p_5$ ложна.

Пример 3.5. Следующие секвенции истинны во всех моделях на полукольцах:

1) $p_1 \cap p_2 \to p_1$,
2) $p_1 \to p_1/p_2$,
3) $p_2 \to (p_1/p_2)\backslash p_1$,
4) $p_2 \to p_1/(p_2\backslash p_1)$,
5) $p_1/p_2 \to (p_1/p_3)/(p_2/p_3)$,
6) $p_2\backslash p_1 \to (p_3\backslash p_2)\backslash(p_3\backslash p_1)$,
7) $p_1 \to (p_1/p_2) \cap (p_3\backslash p_1)$,
8) $p_1/p_2 \to p_1/(p_2 \cap p_3)$,
9) $p_1/\big(p_2/(p_3 \cap p_4)\big) \to \big(p_1/(p_2/p_3)\big) \cap \big(p_1/(p_2/p_4)\big)$.

Определение 3.6. Равенство типов $A = B$, где $A \in \mathrm{Tp}$ и $B \in \mathrm{Tp}$, называется *истинным* в модели с оценкой v, если $v(A) = v(B)$.

Пример 3.7. Рассмотрим модель из примера 3.2. Равенства $p_6/p_3 = p_3\backslash p_6$ и $p_7/p_2 = p_1\backslash(p_4 \cap p_2)$ истинны в этой модели.

Пример 3.8. Следующие равенства типов истинны во всех моделях на полукольцах:

1) $p_1 \cap p_2 = p_2 \cap p_1$,
2) $(p_1 \cap p_2) \cap p_3 = p_1 \cap (p_2 \cap p_3)$,
3) $(p_1\backslash p_2)/p_3 = p_1\backslash(p_2/p_3)$,
4) $p_1/\big((p_1/p_2)\backslash p_1\big) = p_1/p_2$,
5) $\big(p_1/(p_2\backslash p_1)\big)\backslash p_1 = p_2\backslash p_1$,

6) $p_1 \cap (p_1/p_2) = p_1$,
7) $(p_1/p_3) \cap (p_2/p_3) = (p_1 \cap p_2)/p_3$.

Теорема 3.9. *Исчисление* $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap)$ *корректно относительно моделей на полукольцах* (*т. е. каждая выводимая в исчислении* $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap)$ *секвенция истинна на всех полукольцах при всех оценках*).

Доказательство. Пусть даны полукольцо $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$ и оценка v.

Нетрудно доказать, что для любых двусторонних идеалов I, J, K выполняются следующие соотношения:
1) $(I \cdot J) \cdot K = I \cdot (J \cdot K)$,
2) $I \cdot J \subseteq K$ тогда и только тогда, когда $I \subseteq K/J$,
3) $I \cdot J \subseteq K$ тогда и только тогда, когда $J \subseteq I\backslash K$,
4) $I \cdot J \subseteq I$,
5) $I \cdot J \subseteq J$.

Из них выводятся соотношения
6) если $I \subseteq J$, то $I \cdot K \subseteq J \cdot K$ и $K \cdot I \subseteq K \cdot J$,
7) $(I/J) \cdot J \subseteq I$,
8) $J \cdot (J\backslash I) \subseteq I$.

Используя приведённые соотношения, можно индукцией по длине вывода доказать, что если $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash A_1 \ldots A_n \to B$, то $v(A_1) \cdot \ldots \cdot v(A_n) \subseteq v(B)$. $\square$

Основная цель данной статьи — доказать обратную теорему (см. следствие 4.2).

4. Основной результат

Теорема 4.1. *Существует модель на полукольце, относительно которой исчисление* $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap)$ *полно* (*т. е. каждая истинная в этой модели секвенция выводима в исчислении* $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap)$).

Доказательство. Построим искомое полукольцо на множестве

$$S = \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+ \cup \{0, \infty\},$$

где 0 и ∞ — два новых элемента, не принадлежащих множеству $\mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+$. Сложение в полукольце S задаём следующим образом:

$$a + b = \begin{cases} b, & \text{если } a = 0, \\ a, & \text{если } b = 0, \\ \infty, & \text{если } a \neq 0 \text{ и } b \neq 0. \end{cases}$$

Умножение в полукольце S задаём следующим образом:

$$a \cdot b = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0 \text{ или } b = 0, \\ ab, & \text{если } a \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+ \text{ и } b \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+, \\ \infty & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Сначала докажем, что $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$ — полукольцо. Очевидно, что выполняются аксиомы 2, 7, 8 из определения 1.1. Аксиомы 1 и 3 легко проверяются.

Проверим аксиому 4. Если хотя бы один из элементов a, b, c есть 0, то $(a \cdot b) \cdot c = 0$ и $a \cdot (b \cdot c) = 0$. Если $a \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+$, $b \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+$ и $c \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+$, то $(a \cdot b) \cdot c = abc$ и $a \cdot (b \cdot c) = abc$. В остальных случаях $(a \cdot b) \cdot c = \infty$ и $a \cdot (b \cdot c) = \infty$.

Проверим аксиому 5. Если $a = 0$, то $a \cdot (b + c) = 0$ и $a \cdot b + a \cdot c = 0 + 0 = 0$. Если $b = 0$, то $a \cdot (b + c) = a \cdot c$ и $a \cdot b + a \cdot c = 0 + a \cdot c = a \cdot c$. Аналогично рассматривается случай $c = 0$. Если же $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $c \neq 0$, то $a \cdot (b + c) = a \cdot \infty = \infty$ и, с другой стороны, $a \cdot b \neq 0$, $a \cdot c \neq 0$, поэтому $a \cdot b + a \cdot c = \infty$.

Аксиома 6 проверяется аналогично.

Зададим оценку v на полукольце $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$ следующим образом:

$$v(p_i) = \{\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+ \mid \mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Gamma \to p_i\} \cup \{0, \infty\}.$$

Докажем, что для каждого p_i значение $v(p_i)$ является двусторонним идеалом рассматриваемого полукольца.

Пусть $a \in v(p_i)$ и $b \in v(p_i)$. Проверим, что $a + b \in v(p_i)$. Если $a = 0$, то $a + b = b \in v(p_i)$. Если $b = 0$, то $a + b = a \in v(p_i)$. Если $a \neq 0$ и $b \neq 0$, то $a + b = \infty \in v(p_i)$.

Пусть теперь $a \in v(p_i)$ и $b \in S$. Проверим, что $a \cdot b \in v(p_i)$. Если $a \in \{0, \infty\}$ или $b \in \{0, \infty\}$, то $a \cdot b \in \{0, \infty\} \subseteq v(p_i)$. Пусть $a = \Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+$ и $b = \Phi \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+$. Применив несколько раз правило монотонности, выведем из $\Gamma \to p_i$ секвенцию $\Gamma\Phi \to p_i$. Следовательно, $\Gamma\Phi \in v(p_i)$.

Аналогично доказывается, что если $a \in S$ и $b \in v(p_i)$, то $a \cdot b \in v(p_i)$.

Мы установили, что $v(p_i)$ — двусторонний идеал рассматриваемого полукольца.

Проверим, что для каждого типа $C \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)$ выполняется равенство

$$v(C) = \{\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+ \mid \mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Gamma \to C\} \cup \{0, \infty\} \tag{1}$$

(доказательство этого равенства подобно приведённому в [6] доказательству аналогичного утверждения для похожего исчисления, но без правила монотонности). Рассуждаем индукцией по построению типа C. Для случая $C = p_i$ искомое равенство обеспечивается непосредственно конструкцией оценки v.

Пусть теперь $C = B/A$. По предположению индукции

$$v(B) = \{\Phi \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+ \mid \mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Phi \to B\} \cup \{0, \infty\},$$
$$v(A) = \{\Psi \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+ \mid \mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Psi \to A\} \cup \{0, \infty\}.$$

Докажем сначала, что

$$v(B)/v(A) \subseteq \{\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+ \mid \mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Gamma \to B/A\} \cup \{0, \infty\}. \tag{2}$$

Для элементов 0 и ∞ принадлежность правой части очевидна. Пусть $\Gamma \in v(B)/v(A)$, где $\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+$. Тогда $\Gamma \cdot v(A) \subseteq v(B)$. Так как

$$\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash A \to A,$$

то $A \in v(A)$ и, следовательно, $\Gamma A \in v(B)$. Это означает, что

$$\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Gamma A \to B.$$

Применив правило $(\to/)$, получим

$$\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Gamma \to B/A,$$

что завершает доказательство соотношения (2).

Теперь докажем обратное включение:

$$\{\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+ \mid \mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Gamma \to B/A\} \cup \{0, \infty\} \subseteq v(B)/v(A). \qquad (3)$$

Очевидно, что $0 \cdot v(A) = \{0\} \subseteq v(B)$ и, следовательно, $0 \in v(B)/v(A)$. Очевидно, что $\infty \cdot v(A) = \{0, \infty\} \subseteq v(B)$, следовательно, $\infty \in v(B)/v(A)$. Наконец, пусть $\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+$ и

$$\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Gamma \to B/A. \qquad (4)$$

Необходимо доказать, что $\Gamma \cdot v(A) \subseteq v(B)$. Очевидно, что $\Gamma \cdot 0 = 0 \in v(B)$ и $\Gamma \cdot \infty = \infty \in v(B)$. Рассмотрим произвольный элемент $\Psi \in v(A)$, где $\Psi \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+$. Тогда

$$\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Psi \to A. \qquad (5)$$

Легко проверить, что $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash (B/A)A \to B$. Используя (4) и правило (cut), получаем, что $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Gamma A \to B$. Отсюда, используя (5) и снова правило (cut), выводим, что $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Gamma\Psi \to B$. Следовательно, $\Gamma \cdot \Psi = \Gamma\Psi \in v(B)$, что завершает доказательство соотношения (3).

Случай $C = A\backslash B$ разбирается аналогично.

Пусть теперь $C = A \cap B$. По предположению индукции

$$v(A) = \{\Psi \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+ \mid \mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Psi \to A\} \cup \{0, \infty\},$$
$$v(B) = \{\Phi \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+ \mid \mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Phi \to B\} \cup \{0, \infty\}.$$

Докажем сначала, что

$$v(A) \cap v(B) \subseteq \{\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+ \mid \mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Gamma \to A \cap B\} \cup \{0, \infty\}. \qquad (6)$$

Для элементов 0 и ∞ принадлежность правой части очевидна. Пусть $\Gamma \in v(A) \cap v(B)$, где $\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+$. Тогда $\Gamma \in v(A)$ и $\Gamma \in v(B)$. Это означает, что $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Gamma \to A$ и $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Gamma \to B$. Применив правило $(\to\cap)$, получим, что $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Gamma \to A \cap B$; это завершает доказательство соотношения (6).

Теперь докажем обратное включение:

$$\{\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+ \mid \mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Gamma \to A \cap B\} \cup \{0, \infty\} \subseteq v(A) \cap v(B). \qquad (7)$$

По предположению индукции $\{0, \infty\} \subseteq v(A)$ и $\{0, \infty\} \subseteq v(B)$, следовательно, $\{0, \infty\} \subseteq v(A) \cap v(B)$. Осталось рассмотреть случай, где $\Gamma \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)^+$ и $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Gamma \to A \cap B$. Необходимо доказать, что $\Gamma \in v(A)$ и $\Gamma \in v(B)$. Используя пример 2.1 и правило (cut), получаем, что $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Gamma \to A$. Аналогично выводится, что $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \vdash \Gamma \to B$; это завершает доказательство соотношения (7).

Теперь можно доказать, что каждая невыводимая в исчислении $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap)$ секвенция ложна на построенном полукольце при указанной оценке v. Пусть

$$\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap) \nvdash A_1 \dots A_n \to B,$$

где $A_i \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)$ (для всех i) и $B \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)$. Из соотношения (1) видно, что $A_i \in v(A_i)$ (для всех i) и $A_1 \dots A_n \notin v(B)$. Следовательно,

$$v(A_1) \cdot \ldots \cdot v(A_n) \nsubseteq v(B),$$

и ложность невыводимой секвенции $A_1 \dots A_n \to B$ доказана. □

Следствие 4.2. *Исчисление* $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap)$ *полно относительно моделей на полукольцах* (*т. е. для каждой секвенции из истинности на всех полукольцах при всех оценках следует выводимость в исчислении* $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap)$).

Доказательство. Если некоторая секвенция истинна во всех моделях на полукольцах, то она истинна в модели, построенной в теореме 4.1, а поэтому выводима в исчислении $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap)$. □

Следствие 4.3. *Рассмотрим множество секвенций вида* $A \to B$, *где* $A \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)$ *и* $B \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)$. *Выделим среди них множество тех секвенций, которые истинны во всех моделях на полукольцах. Это множество разрешимо.*

Доказательство. Согласно теореме 3.9 и следствию 4.2 множество секвенций вида $A \to B$, истинных во всех моделях на полукольцах, совпадает с множеством выводимых в исчислении $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap)$ секвенций вида $A \to B$ (здесь $A \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)$ и $B \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)$). Осталось проверить, что множество выводимых в $\mathrm{LM}(\backslash, /, \cap)$ секвенций разрешимо.

Заметим, что в выводе без сечения при движении снизу вверх (от заключения правила к его посылкам) уменьшается сложность секвенций, понимаемая как суммарное число вхождений примитивных типов и знаков операций. Поэтому по данной секвенции можно оценить сверху размер вывода и разрешающий алгоритм заключается в переборе всех потенциальных выводов. □

Следствие 4.4. *Рассмотрим множество равенств вида* $A = B$, *где* $A \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)$ *и* $B \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)$. *Выделим среди них множество тех равенств, которые истинны во всех моделях на полукольцах. Это множество разрешимо.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)$ и $B \in \mathrm{Tp}(\backslash, /, \cap)$. Равенство $A = B$ истинно во всех моделях на полукольцах тогда и только тогда, когда секвенции $A \to B$ и $B \to A$ истинны во всех моделях на полукольцах. □

Литература

[1] Бушковский В. Синтаксическое исчисление Ламбека и его семантика // Логические исследования. Вып. 1. — М.: Наука, 1993. — С. 77—96.

[2] Ламбек И. Математическое исследование структуры предложения // Математическая лингвистика: Сб. переводов / Под ред. Ю. А. Шрейдера и др. — М.: Мир, 1964. — С. 47—68.

[3] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.

[4] Пентус А. Е., Пентус М. Р. Атомарная теория деления двусторонних идеалов полуколец // Фундамент. и прикл. матем. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 201—208.

[5] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

[6] Buszkowski W. Completeness results for Lambek syntactic calculus // Z. Math. Logik Grundlag. Math. — 1986. — Vol. 32. — P. 13—28.

[7] Buszkowski W. Type logics in grammar // Trends in Logic: 50 Years of Studia Logica / V. F. Hendricks, J. Malinowski, eds. — Kluwer Academic, 2003. — P. 337—382.

[8] Van Benthem J. Language in Action. Categories, Lambdas and Dynamic Logic. — Amsterdam: North-Holland, 1991. — (Stud. Logic Foundations Math.; Vol. 130).