Ещё раз о решётке подмногообразий сплетения многообразия полурешёток и многообразия полугрупп с нулевым умножением*

А. В. ТИЩЕНКО
Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации
e-mail: alextish@bk.ru

УДК 512.532.2

Ключевые слова: многообразие, полугруппа, решётка, подмногообразие, полурешётка, полугруппа с нулевым умножением.

Аннотация

Известно, что моноидное сплетение полугрупповых многообразий, которые являются атомами решётки полугрупповых многообразий, может иметь как конечную, так и бесконечную решётку подмногообразий. Как правило, если такая решётка конечна, то она имеет не более 11 подмногообразий. Исключение составляет моноидное сплетение многообразия полурешёток и многообразия полугрупп с нулевым умножением. Эта решётка конечна, число элементов в ней пока неизвестно. В предыдущей статье автора показано, что эта решётка имеет не менее 33 элементов. В настоящей статье показано, что рассматриваемая решётка имеет в точности три максимальных подмногообразия. Как первое приложение полученных результатов вычислен базис решёточного объединения многообразия полурешёток и наибольшего многообразия среди подмногообразий рассматриваемой решётки, обладающих хотя бы одним гетеротипным тождеством. Как второе приложение показано, что рассматриваемая решётка подмногообразий имеет не менее 39 элементов.

Abstract

A. V. Tishchenko, Once more on the lattice of subvarieties of the wreath product of the variety of semilattices and the variety of semigroups with zero multiplication, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 193—210.

It is known that the monoid wreath product of any two semigroup varieties that are atoms in the lattice of all semigroup varieties may have a finite as well as an infinite lattice of subvarieties. If this lattice is finite, then as a rule it has at most eleven elements. This was proved in a paper of the author in 2007. The exclusion is the monoid wreath product $\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2$ of the variety of semilattices and the variety of semigroups with zero multiplication. The number of elements of the lattice $L(\mathbf{Sl}\mathrm{w}\mathbf{N}_2)$ of subvarieties of $\mathbf{Sl}\mathrm{w}\mathbf{N}_2$ is still unknown. In a previous paper, we have shown that the lattice $L(\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2)$ contains a sublattice having 33 elements. In the present paper, it is proved that the lattice under consideration has exactly three maximal subvarieties. As a first application of the obtained results we calculate the finite basis of the lattice union of the variety of all semilattices and the largest variety among subvarieties of our lattice having at least one heterotypic identity. As a second application we show that the considered lattice of subvarieties has at least 39 elements.

*Работа была поддержана РФФИ, грант 16-01-00756.

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 1, с. 193—210.

Посвящается Александру Васильевичу Михалёву
в честь его 75-летия

1. Введение

Статья является продолжением работы [11]. В 60-е годы XX века Дж. Роудзом и его школой развивался подход к изучению теории конечных полугрупп, основанный на их групповой сложности, определяемой с помощью разложения полугруппы как делителя сплетения конечного числа конечных групп и конечных комбинаторных полугрупп (см. [1, статьи 5—7], а также [14] и [4, гл. 4—6]). Этот подход затем использовался рядом зарубежных авторов; возникли разные варианты определения: общее сплетение, моноидное сплетение и стандартное сплетение. При этом оказалось, что общее сплетение и моноидное сплетение полугрупповых многообразий ассоциативно, а стандартное сплетение не ассоциативно (см. [3, 6, 17]).

Напомним, что частично упорядоченный моноид полугрупповых многообразий относительно операции моноидного сплетения многообразий изучался в [9]. В [10] было систематически рассмотрено, как устроено сплетение атомов решётки полугрупповых многообразий. Напомним, что многообразие $\mathbf{U}$ полугрупп называется *кроссовым*, если оно обладает следующими тремя свойствами:

1) оно порождается конечной полугруппой;
2) оно конечно базируемо;
3) оно имеет конечную решётку подмногообразий.

Атомы решётки всех полугрупповых многообразий давно известны (см., например, [15]). Это многообразие $\mathbf{N}_2$ полугрупп с нулевым умножением, многообразие $\mathbf{L}$ полугрупп левых нулей, многообразие $\mathbf{R}$ полугрупп правых нулей, многообразие $\mathbf{Sl}$ полурешёток и счётное число групповых атомов $\mathbf{A}_p$, порождаемых циклическими группами простого порядка p.

Решётка $L(\mathbf{U}\,\mathrm{w}\,\mathbf{V})$ подмногообразий многообразия $\mathbf{U}\,\mathrm{w}\,\mathbf{V}$ бесконечна в случаях сплетения атомов $\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{Sl}$, $\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{R}$, $\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{A}_p$, $\mathbf{A}_p\,\mathrm{w}\,\mathbf{A}_p$ (p — простое число). В остальных случаях сплетение $\mathbf{U}\,\mathrm{w}\,\mathbf{V}$ двух атомов $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ решётки полугрупповых многообразий обладает конечной решёткой подмногообразий. При этом мощность этой решётки, как правило, не превосходит 11 [10, теорема 3.1]. Однако в случае сплетения многообразия полурешёток с многообразием полугрупп с нулевым умножением это не так. В [10] доказано, что такая решётка подмногообразий конечна, но точное вычисление этой решётки не так просто, как в случае других сплетений атомов, если такая решётка оказалась конечной. Поэтому в [11] были поставлены две взаимосвязанные задачи.

Задача 1. Описать решётку подмногообразий $L(\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2)$, где $\mathbf{Sl}$ — многообразие всех полурешёток, а $\mathbf{N}_2$ — многообразие полугрупп с нулевым умножением.

Задача 2. Дать оценку мощности решётки подмногообразий $L(\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2)$.

Ясно, что полное решение задачи 1 полностью снимает задачу 2. Но пока полное решение задачи 1 отсутствует. В то же время решение такой задачи представляется существенным.

В дальнейшем многообразие $\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2$ будем кратко обозначать $\mathbf{W}$. В [11] было указано разложение

$$L = L' \cup L'' \tag{1.1}$$

в объединение двух непересекающихся подрешёток решётки подмногообразий $L = L(\mathbf{W})$, причём L' точно вычислена и имеет мощность 13, а вторая подрешётка содержит подрешётку $L_0 \subset L''$, состоящую из 20 подмногообразий. При этом множество $L' \cup L_0$ подрешёткой не является. Отсюда следует, что мощность рассматриваемой решётки не меньше 33. При анализе доказательства конечности рассматриваемой решётки в [11] была указана оценка сверху её мощности. Но это пока даёт лишь экспоненту порядка 2^{128}.

Пока мы не имеем полного решения задач 1 и 2. Поэтому представляет интерес нахождение и другой информации о решётке L. В данной работе рассмотрено решение следующих двух более частных задач, которые дают дополнительную информацию о решётке L.

Задача 3. Определить максимальные подмногообразия в решётке $L = L(\mathbf{W})$.

Задача 4. Вычислить решёточное объединение подмногообразий $\mathbf{L}_{2,3} \vee \mathbf{Sl}$ в решётке L, где $\mathbf{L}_{2,3}$ — наибольшее подмногообразие в L'.

Следует отметить, что решение задач 3 и 4 позволило также улучшить оценку снизу числа элементов в решётке L до 39.

Статья устроена следующим образом. В разделе 2 приводятся предварительные сведения, мотивируется постановка задач 3 и 4 и описывается подход к решению этих задач. В разделе 3 определяются все максимальные подмногообразия в решётке L (теорема 3.1 (основная теорема)). В разделе 4 решается задача 4 с использованием результатов раздела 3. Кроме того, здесь формулируется и доказывается следствие по новой оценке снизу числа подмногообразий в решётке L.

2. Предварительные сведения

Будем придерживаться обычной терминологии теории полугрупп и теории многообразий (см., например, [2, 5, 12, 13]). Бо́льшую часть определений можно найти также в [11], и частично она здесь воспроизводится. Напомним некоторые определения. Полугрупповым тождеством называется пара слов (u, v) в свободной полугруппе X^+ над счётным алфавитом X. Обычно тождество обозначается как

$$u \approx v. \tag{2.1}$$

Пусть X — счётный бесконечный алфавит, буквы которого мы будем обозначать x, y, z, t, $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, $y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$, $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$ и т. д. Если u, v — слова над алфавитом X, то через $u \approx v$ обозначается тождество над алфавитом X; $|u|$ — длина слова u, $c(u)$ — множество букв алфавита, встречающихся в слове u, $h_k(u)$ — начало слова u длины k. Тождество (2.1) называется *гомотипным*, если для него верно равенство $c(u) = c(v)$, и *гетеротипным*, если для него верно неравенство $c(u) \neq c(v)$.

Элемент a полугруппы S называется *периодическим*, если он удовлетворяет равенству $a^{m+n} = a^m$ для некоторых натуральных чисел m, n. При этом если m и n — наименьшие числа с таким свойством, то $m+n$ называется *порядком*, m — *индексом*, n — *периодом* элемента a. Легко убедиться, что моногенная полугруппа $\langle a \rangle$, порождённая элементом a порядка $l = m + n$, содержит l элементов.

Полугруппа называется *равномерно периодической*, если в ней верно некоторое тождество вида
$$x^m = x^{m+n}. \tag{2.2}$$

Непустое слово w назовём *линейным*, если любая переменная входит в него не более одного раза.

Сплетением полугрупп S и R при помощи правого R-полигона A называется полугруппа $T = S^A \mathrm{w} R$, определённая на декартовом произведении $S^A \times R$, где S^A — множество всех функций из A в S, а умножение задаётся по формуле
$$(f,p)(g,q) = (f^q g, pq), \tag{2.3}$$
$$(f^q g)(a) = f(a)g(ap) \tag{2.4}$$
для любого $a \in A$ [6, 7, 16]. В нашем случае нас интересует прежде всего сплетение полугрупп с точки зрения сплетения многообразий полугрупп. При изучении сплетений многообразий полугрупп была выделена операция моноидного сплетения многообразий [6, 7, 17] как наиболее удачная. При этом моноидное сплетение многообразий полугрупп порождается всевозможными расширенными стандартными сплетениями, в которых пассивная полугруппа принадлежит первому из сплетаемых многообразий, а активная — второму из них [6, 7]. Отметим, что в [17] моноидное сплетение называется просто сплетением многообразий. Сплетение полугрупп $T = S^A \mathrm{w} R$ называется расширенным стандартным сплетением, если полигон A совпадает с наименьшим моноидом R^1, содержащим полугруппу R. Расширенное стандартное сплетение обозначается $T = S \mathrm{w}_1 R$. В силу вышесказанного в статье рассматриваются только расширенные стандартные сплетения.

Мы будем существенно использовать результаты относительно многообразия $\mathbf{W} = \mathbf{Sl} \mathrm{w} \mathbf{N}_2$, полученные в [10]. Сформулируем их.

Лемма 2.1 [10, следствие 2.13]. *Тождество*
$$u \approx v \tag{2.5}$$
принадлежит множеству тождеств $I(\mathbf{Sl} \mathrm{w} \mathbf{N}_2)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $u \approx v$ — *тривиальное тождество или* $|u|, |v| \geqslant 3$;
2) $h_2(u) = h_2(v)$;

3) *замена общего начала* $h_2(u)$ *на подслово* z_1z_2, *где* $z_1, z_2 \notin c(uv)$, *приводит к тождеству* $z_1z_2u_1 = z_1z_2v_1$, *в котором* $c(u_1) = c(v_1)$.

Лемма 2.2 [10, следствие 2.14]. *Многообразие* $\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2$ *имеет в качестве базиса тождеств следующие два тождества*:

$$z_1z_2y \approx z_1z_2y^2, \tag{2.6}$$

$$z_1z_2yx \approx z_1z_2xy. \tag{2.7}$$

Предложение 2.1 [10, предложение 3.8]. *Решётка* $L(\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2)$ *конечна.*

В частности, при доказательстве этого предложения в [10] было установлено, что если в подмногообразии U многообразия $\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2$ истинно хотя бы одно гетеротипное тождество, то в нём истинно тождество

$$z_1z_2y \approx z_1z_2x. \tag{2.8}$$

Непосредственным следствием этого факта является следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Решётка* L' *содержит максимальное подмногообразие*

$$\mathbf{L}_{2,3} = \mathrm{var}(\beta(\mathbf{W}),\, z_1z_2y \approx z_1z_2x).$$

Напомним, что в разложении решётки L в объединение (1.1) подрешётка L' — это подрешётка всех подмногообразий в $\mathbf{W}$, в которых истинно хотя бы одно гетеротипное тождество, т. е. они не содержат многообразия полурешёток, а L" — это подрешётка всех подмногообразий в $\mathbf{Sl}\,\mathrm{w}\,\mathbf{N}_2$, которые содержат многообразие полурешёток $\mathbf{Sl}$.

Многообразие всех полугрупп, в которых истинны все тождества из множества тождеств Σ, в дальнейшем обозначается $\mathrm{var}\,\Sigma$.

Пусть $\beta(\mathbf{W})$ обозначает базис тождеств многообразия $\mathbf{W}$, состоящий из тождеств (2.6) и (2.7). Напомним, что $\mathbf{W}$-*каноническим словом* называется слово в алфавите X одного из следующих видов:

$$z, \quad z^2x_1\ldots x_k, \quad z^3x_1\ldots x_k, \quad wx_1\ldots x_k \quad (k \geqslant 0), \tag{2.9}$$

где $w \in \{z_1z_2,\, z_1z_2z_1,\, z_1z_2^2,\, z_1z_2^2z_1\}$.

Определение 2.1. Тождества $u \approx v$ и $u_1 \approx v_1$ называются $\mathbf{W}$-*эквивалентными* для многообразия $\mathbf{W}$, если совпадают подмногообразия, определённые в нём этими тождествами, т. е. если верно равенство

$$\mathrm{var}(\beta(\mathbf{W}),\, u \approx v) = \mathrm{var}(\beta(\mathbf{W}),\, u_1 \approx v_1). \tag{2.10}$$

Определение 2.2. Тождество (2.5) называется $\mathbf{W}$-*каноническим* для подмногообразия $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$, если правая и левая его части являются $\mathbf{W}$-каноническими словами.

Таким образом, если $\beta(\mathbf{W})$ — какой-нибудь базис тождеств многообразия $\mathbf{W}$, то для $\mathbf{W}$-эквивалентных тождеств справедливо равенство (2.10).

Определение 2.3. 1-*подмногообразием* в $\mathbf{W}$ называется подмногообразие, задаваемое добавлением к базису $\beta(\mathbf{W})$ одного тождества (2.5), т. е. это подмногообразие вида

$$\mathbf{U} = \mathrm{var}(\beta(\mathbf{W}),\, u \approx v). \tag{2.11}$$

Замечание 2.1. Согласно основному результату [10] многообразие $\mathbf{W}$ кроссово. Следовательно, в нём любое подмногообразие имеет конечный базис тождеств. Поэтому базис произвольного собственного подмногообразия $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}$ имеет вид

$$\beta(\mathbf{V}) = \beta(\mathbf{W}) \cup \{u \approx v\} \cup \alpha, \tag{2.12}$$

Считая, что тождество $u \approx v$ ложно в $\mathbf{W}$, получаем, что подмногообразие $\mathbf{V}$ содержится в некотором собственном 1-подмногообразии

$$\mathbf{U} = \mathrm{var}(\beta(\mathbf{W}),\, \{u \approx v\}). \tag{2.13}$$

Следствие 2.1. *Любое максимальное подмногообразие в* $\mathbf{W}$ *является* 1-*подмногообразием.*

Замечание 2.2. Если

$$\{\beta(\mathbf{W}),\, u \approx v\} \Rightarrow \{\beta(\mathbf{W}),\, u_1 \approx v_1\},$$

то

$$I(\{\beta(\mathbf{W}),\, u \approx v\}) \supseteq I(\{\beta(\mathbf{W}),\, u_1 \approx v_1\}).$$

Следовательно,

$$\mathrm{var}(\{\beta(\mathbf{W}),\, u \approx v\}) \subseteq \mathrm{var}(\{\beta(\mathbf{W}),\, u_1 \approx v_1\}).$$

Это замечание часто будет использоваться в дальнейшем без дополнительных ссылок.

Далее будут использоваться следующие обозначения для 1-подмногообразий многообразия $\mathbf{W}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{00} &= \mathrm{var}(\beta(\mathbf{W}),\, y^3x \approx x^3y),\\
\mathbf{W}_{01} &= \mathrm{var}(\beta(\mathbf{W}), zy^2x \approx zx^2y),\\
\mathbf{V}' &= \mathrm{var}(\beta(\mathbf{W}),\, z^2y \approx z^3y),\\
\mathbf{V}_1 &= \mathrm{var}(\beta(\mathbf{W}),\, z^2 \approx z^3),\\
\mathbf{W}_3 &= \mathrm{var}(\beta(\mathbf{W}),\, yx \approx xy).
\end{aligned}$$

Также будет использоваться обозначение $\mathbf{V}_i$ для 1-подмногообразий, задаваемых тождеством (3.i), где $i \in \{8, \ldots, 19\} \cup \{21, \ldots, 27\}$. Отметим, что многообразия $\mathbf{V}'$, $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{W}_3$ были введены в [11], а тождества (3.i) определяются в следующем разделе.

3. Описание максимальных элементов решётки L

Основная цель этого раздела — доказательство следующей теоремы.

Теорема 3.1 (основная теорема). *Максимальными подмногообразиями в* $\mathbf{W}$ *являются следующие три многообразия*:

$$\mathbf{V}' = \operatorname{var}(\beta(\mathbf{W}),\ z^2y \approx z^3y),$$
$$\mathbf{V}_8 = \operatorname{var}(\beta(\mathbf{W}),\ z_1^3z_2 \approx z_1z_2^2z_1),$$
$$\mathbf{V}_{22} = \operatorname{var}(\beta(\mathbf{W}),\ z_1z_2z_1 \approx z_1z_2^2z_1).$$

Лемма 3.1. *Если* $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ *и* $I(\mathbf{U})$ *содержит нетривиальное тождество*

$$u \approx v, \tag{3.1}$$

в котором $|u| \leqslant 2$ *и* $|v| \geqslant 2$, *то многообразие* $\mathbf{U}$ *либо удовлетворяет тождеству*

$$z^2 \approx z^3, \tag{3.2}$$

либо удовлетворяет тождеству

$$yx \approx xy. \tag{3.3}$$

Доказательство. Если $|u| = |v| = 2$ и $c(u) = c(v) = \{x, y\}$, то в $\mathbf{U}$ истинно тождество (3.3). Если это не так, то в $\mathbf{U}$ истинно тождество (3.2). □

Следствие 3.1. *При выполнении условий леммы* 3.1 *подмногообразие* $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ *содержится либо в* $\mathbf{V}_1$, *либо в* $\mathbf{W}_3$. *В обоих случаях* $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}'$, *т. е.* $\mathbf{U}$ *удовлетворяет тождеству*

$$z^2y \approx z^3y. \tag{3.4}$$

Лемма 3.2. *Если* $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ *и* $I(\mathbf{U})$ *содержит гомотипное тождество* (3.1) *с условием*

$$|v| \geqslant |u| \geqslant 3, \tag{3.5}$$

причём

$$u \equiv z_1u' \approx z_2v' \equiv v, \tag{3.1$'$}$$

т. е. $h_1(u) \equiv z_1 \neq z_2 \equiv h_1(v)$, *то* $I(\mathbf{U})$ *содержит тождество вида*

$$y^3x \approx x^3y. \tag{3.6}$$

Доказательство. Полагая в тождестве (3.1′) $\varphi(z_1) = y^3$, $\varphi(z_2) = x^3$ и $\varphi(t) = y$ при $t \in X - \{z_1, z_2\}$ и используя тождества (2.6) и (2.7), получаем тождество (3.6). □

Следствие 3.2. *При выполнении условий леммы* 3.2 *подмногообразие* $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ *содержится в* $\mathbf{U}_{00} \subseteq \mathbf{W}_{01}$.

Доказательство. Умножая (3.6) слева на z и используя тождество $zy^2 \approx zy^3$, истинное в $\mathbf{W}$, получаем, что в $\mathbf{U}$ истинно тождество

$$zy^2x \approx zx^2y. \tag{3.7}$$

Следовательно, вложения, указанные в следствии, верны. □

Лемма 3.3. *Если* $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ *и* $I(\mathbf{U})$ *содержит гомотипное тождество* (3.1) *с условием* (3.5) *и условиями* $h_1(u) = h_1(v)$, *но* $h_2(u) \neq h_2(v)$, *то* $I(\mathbf{U})$ *содержит либо тождество* (3.7), *либо тождество*

$$z_1^3 z_2 \approx z_1 z_2^2 z_1. \tag{3.8}$$

Доказательство. Заметим, что условия леммы, накладываемые на начала длины не более двух в словах тождества, означают, что тождество (3.1) имеет либо вид

$$u \equiv z_1 z_2 u' \approx z_1 z_3 v' \equiv v, \tag{3.1.1}$$

либо вид

$$u \equiv z_1 z_2 u' \approx z_1^2 v' \equiv v. \tag{3.1.2}$$

В случае тождества (3.1.1) множество $I(\mathbf{U})$, очевидно, содержит тождество (3.7). В этом можно убедиться, если в (3.1.1) положить $\varphi(z_1) = z$, $\varphi(z_2) = y^2$, $\varphi(z_3) = x^2$ и $\varphi(t) = x$ для $t \in X - \{z_1, z_2, z_3\}$. По следствию 3.2 получим, что $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}_{01}$.

Пусть теперь в $\mathbf{U}$ истинно тождество (3.1.2). Тогда $I(\mathbf{U})$ содержит гомотипное тождество от двух переменных, в котором $v \in \{z_1^2 z_2, z_1^3 z_2\}$, $u \in \in \{z_1 z_2 z_1, z_1 z_2^2, z_1 z_2^2 z_1\}$.

Можно перебрать все возможные варианты таких тождеств с учётом того, что любое гомотипное тождество с условием (3.5) согласно [11, лемма 4.5] эквивалентно тождеству, зависящему либо от двух переменных z_1, z_2, либо от трёх переменных z_1, z_2, t. Это либо тождество (3.8), либо одно из следующих тождеств:

$$z_1^2 z_2 \approx z_1 z_2 z_1, \tag{3.9}$$
$$z_1^2 z_2 \approx z_1 z_2^2, \tag{3.10}$$
$$z_1^2 z_2 \approx z_1 z_2^2 z_1, \tag{3.11}$$
$$z_1^3 z_2 \approx z_1 z_2 z_1, \tag{3.12}$$
$$z_1^3 z_2 \approx z_1 z_2^2, \tag{3.13}$$
$$z_1^2 z_2 t \approx z_1 z_2 z_1 t, \tag{3.14}$$
$$z_1^2 z_2 t \approx z_1 z_2^2 t, \tag{3.15}$$
$$z_1^2 z_2 t \approx z_1 z_2^2 z_1 t, \tag{3.16}$$
$$z_1^3 z_2 t \approx z_1 z_2 z_1 t, \tag{3.17}$$
$$z_1^3 z_2 t \approx z_1 z_2^2 t, \tag{3.18}$$
$$z_1^3 z_2 t \approx z_1 z_2^2 z_1 t. \tag{3.19}$$

Очевидны следующие импликации в многообразии $\mathbf{W}$: (3.9) $\Rightarrow$ (3.14), (3.10) $\Rightarrow$ (3.15), (3.11) $\Rightarrow$ (3.16), (3.12) $\Rightarrow$ (3.17), (3.13) $\Rightarrow$ (3.18), (3.8) $\Rightarrow$ (3.19). Полагая $\varphi(t) = z_2$ в (3.14)—(3.16), (3.18), (3.19) и используя (2.6) и (2.7), получаем эквивалентности (3.15) $\leftrightarrow$ (3.10), (3.16) $\leftrightarrow$ (3.11), (3.18) $\leftrightarrow$ (3.13), (3.19) $\leftrightarrow$ (3.8) и импликацию (3.14) $\Rightarrow$ (3.11). Полагая $\varphi(t) = z_1$ в (3.17) и используя (2.6) и (2.7), получаем эквивалентность (3.17) $\leftrightarrow$ (3.12).

Домножением тождеств (3.9)—(3.11), (3.13) справа на z_1, а (3.12) на z_2 и применением тождеств (2.6) и (2.7) получим следующие импликации: (3.9) $\Rightarrow$ (3.12), (3.10) $\Rightarrow$ (3.8), (3.11) $\Rightarrow$ (3.8), (3.13) $\Rightarrow$ (3.8), (3.12) $\Rightarrow$ (3.8). Полагая $\varphi(t) = z_1$ в (3.14) и используя (2.6) и (2.7), получаем импликацию (3.14) $\Rightarrow$ (3.12). В результате имеем равенства многообразий $\mathbf{V}_{15} = \mathbf{V}_{10}$, $\mathbf{V}_{16} = \mathbf{V}_{11}$, $\mathbf{V}_{17} = \mathbf{V}_{12}$, $\mathbf{V}_{18} = \mathbf{V}_{13}$, $\mathbf{V}_{19} = \mathbf{V}_8$ и вложения подмногообразий $\mathbf{V}_9 \subseteq \mathbf{V}_{12} \subseteq \mathbf{V}_8$, $\mathbf{V}_{10} \subseteq \mathbf{V}_8$, $\mathbf{V}_{13} \subseteq \mathbf{V}_8$, $\mathbf{V}_{14} \subseteq \mathbf{V}_{11} \subseteq \mathbf{V}_8$, $\mathbf{V}_{14} \subseteq \mathbf{V}_{12} \subseteq \mathbf{V}_8$. В итоге получаем, что имеется семь возможных 1-подмногообразий многообразия $\mathbf{W}$, а именно $\mathbf{V}_8$, $\mathbf{V}_9$, $\mathbf{V}_{10}$, $\mathbf{V}_{11}$, $\mathbf{V}_{12}$, $\mathbf{V}_{13}$, $\mathbf{V}_{14}$. □

Следствие 3.3. *При выполнении условий леммы* 3.3 *подмногообразие* $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{W}$ *содержится либо в* $\mathbf{W}_{01}$, *либо в* $\mathbf{V}_8$.

Лемма 3.4. *Тождество* (3.8) *— это следствие тождества* (3.7). *Поэтому* $\mathbf{W}_{01} \subseteq \mathbf{V}_8$.

Доказательство. Полагая в тождестве (3.7) $\varphi(z) = \varphi(y) = z_1$, $\varphi(x) = z_2$, получаем тождество (3.8). □

С учётом ранее сказанного любое максимальное подмногообразие в $\mathbf{W}$ является 1-подмногообразием в $\mathbf{W}$. Поэтому из лемм 3.1—3.4 и их следствий получаем следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Из всевозможных* 1*-подмногообразий в* $\mathbf{W}$ *максимальными могут быть только подмногообразия* $\mathbf{V}'$, $\mathbf{V}_8$, $\mathbf{V}_{22}$.

Замечание 3.1. Рассмотрим теперь случай, в котором для гомотипного тождества (3.1) с условием (3.5) выполнены условия 1) и 2) тождеств из $I(\mathbf{W})$, но нарушено условие 3) (см. лемму 2.1). Такое возможно только в случаях 1 и 2 доказательства леммы 4.6 из [11]. Всего таких тождеств восемь: это тождество (3.4), определяющее подмногообразие $\mathbf{V}'$ в многообразии $\mathbf{W}$, и семь следующих тождеств, определяющих соответствующие 1-подмногообразия:

$$z_1 z_2 z_1 \approx z_1 z_2^2, \tag{3.20}$$

$$z_1 z_2 z_1 \approx z_1 z_2^2 z_1, \tag{3.21}$$

$$z_1 z_2^2 \approx z_1 z_2^2 z_1, \tag{3.22}$$

$$z_1 z_2 z_1 x \approx z_1 z_2^2 x, \tag{3.23}$$

$$z_1 z_2 x \approx z_1 z_2 z_1 x, \tag{3.24}$$

$$z_1 z_2 x \approx z_1 z_2^2 x, \tag{3.25}$$

$$z_1 z_2 x \approx z_1 z_2^2 z_1 x. \tag{3.26}$$

Лемма 3.5. *Подмногообразия* $\mathbf{V}_{21}$—$\mathbf{V}_{27}$ *многообразия* $\mathbf{W}$ *связаны следующими вложениями*: $\mathbf{V}_{21} \subseteq \mathbf{V}_{24} \subseteq \mathbf{V}_{22}$, $\mathbf{V}_{24} \subseteq \mathbf{V}_{23}$, $\mathbf{V}_{25} \subseteq \mathbf{V}_{23}$, $\mathbf{V}_{26} \subseteq \mathbf{V}_{22}$, $\mathbf{V}_{27} \subseteq \mathbf{V}_{23}$, $\mathbf{V}_{27} \subseteq \mathbf{V}_{22}$.

Доказательство. Импликация (3.20) $\Rightarrow$ (3.23) очевидна. Полагая $\varphi(x) = z_1$ в тождествах (3.23), (3.25), (3.26), получаем импликации (3.23) $\Rightarrow$ (3.21), (3.25) $\Rightarrow$ (3.21), (3.26) $\Rightarrow$ (3.21). Полагая $\varphi(x) = z_2$ в тождествах (3.23), (3.24), (3.26), получаем (3.23) $\Rightarrow$ (3.22), (3.24) $\Rightarrow$ (3.22), (3.26) $\Rightarrow$ (3.22). Из этих импликаций и следуют указанные вложения. $\square$

Лемма 3.6. *Из тождеств* (3.22), (2.6), (2.7) *следует тождество* (3.4). *Следовательно,* $\mathbf{V}_{23} \subseteq \mathbf{V}'$.

Доказательство. Положим в (3.22) $\varphi(z_1) = z^2$, $\varphi(z_2) = y$. Тогда из (3.22) и $\beta(\mathbf{W})$ следует цепочка тождеств

$$z^2y \overset{(2.6)}{\approx} z^2y^2 \overset{(3.22)}{\approx} z^2y^2z^2 \overset{(2.6)}{\approx} z^2yz \overset{(2.7)}{\approx} z^3y. \qquad \square$$

Лемма 3.7. *Справедливы соотношения* $\mathbf{V}_{24} = \mathbf{V}_{21} = \mathbf{V}_{22} \cap \mathbf{V}_{23}$ *и* $\mathbf{V}_{26} \subseteq \mathbf{V}'$.

Доказательство. Заметим, что верна импликация $(3.21) \wedge (3.22) \Rightarrow (3.20)$. Следовательно, $\mathbf{V}_{22} \cap \mathbf{V}_{23} \subseteq \mathbf{V}_{21}$. С другой стороны, по лемме 3.4 $\mathbf{V}_{21} \subseteq \mathbf{V}_{24}$ и $\mathbf{V}_{24} \subseteq \mathbf{V}_{22} \cap \mathbf{V}_{23}$. Отсюда следует справедливость первых двух равенств леммы. Кроме того, из (3.25), очевидно, следует тождество 3.4. Поэтому $\mathbf{V}_{26} \subseteq \mathbf{V}'$. $\square$

Лемма 3.8. *Справедливы соотношения* $\mathbf{V}_{25} \cap \mathbf{V}_{22} = \mathbf{V}_{27}$ *и* $\mathbf{V}_{21} \cap \mathbf{V}_{25} = \mathbf{V}_{21} \cap \mathbf{V}_{26} = \mathbf{V}_{25} \cap \mathbf{V}_{26}$.

Доказательство. Заметим, что верны импликации $(3.21) \wedge (3.24) \Rightarrow (3.26)$ и $(3.21) \wedge (3.26) \Rightarrow (3.24)$. Более того, (3.26) $\Rightarrow$ (3.24), так как (3.21) есть следствие 3.26 согласно лемме 3.4. Тогда $\mathbf{V}_{22} \cap \mathbf{V}_{25} \subseteq \mathbf{V}_{27} = \mathbf{V}_{22} \cap \mathbf{V}_{27} \subseteq \mathbf{V}_{22} \cap \mathbf{V}_{25}$. Отсюда и следует первое равенство леммы. Далее, $(3.20) \wedge (3.24) \Rightarrow (3.25)$ и $(3.20) \wedge (3.25) \Rightarrow (3.24)$. Следовательно, $\mathbf{V}_{21} \cap \mathbf{V}_{25} \subseteq \mathbf{V}_{21} \cap \mathbf{V}_{26}$ и $\mathbf{V}_{21} \cap \mathbf{V}_{26} \subseteq \mathbf{V}_{21} \cap \mathbf{V}_{25}$. Поэтому верно второе равенство леммы. Наконец, $(3.24) \wedge (3.25) \Rightarrow (3.23)$. Поэтому $\mathbf{V}_{25} \cap \mathbf{V}_{26} \subseteq \mathbf{V}_{24} = \mathbf{V}_{21}$ по лемме 3.7. Следовательно, $\mathbf{V}_{25} \cap \mathbf{V}_{26} \subseteq \mathbf{V}_{21} \cap \mathbf{V}_{26}$. Обратное вложение следует из доказательства второго равенства. $\square$

Лемма 3.9. *Справедливо соотношение* $\mathbf{V}_{27} = \mathbf{V}_{23} \cap \mathbf{V}_{26} = \mathbf{V}_{21} \cap \mathbf{V}_{26}$.

Доказательство. По леммам 3.4 и 3.7 верно соотношение $\mathbf{V}_{27} \subseteq \mathbf{V}_{22} \cap \mathbf{V}_{23} = \mathbf{V}_{21}$. Легко убедиться, что верна импликация $(3.22) \wedge (3.25) \Rightarrow (3.26)$ С учётом леммы 3.8 получаем, что верна цепочка вложений

$$\mathbf{V}_{23} \cap \mathbf{V}_{26} \subseteq \mathbf{V}_{27} \subseteq \mathbf{V}_{21} \cap \mathbf{V}_{25} = \mathbf{V}_{21} \cap \mathbf{V}_{26} \subseteq \mathbf{V}_{23} \cap \mathbf{V}_{26}.$$

Отсюда и следуют равенства, указанные в лемме. $\square$

Замечание 3.2. Итог рассмотрения канонических гомотипных тождеств (3.1) с условием (3.5), для которых выполнены условия 1) и 2) тождеств из $I(\mathbf{W})$, но нарушено условие 3) (см. лемму 2.1), а также соответствующих 1-подмногообразий в $\mathbf{W}$ представлен на рис. 1. На этом рисунке присутствует также многообразие $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_{22} \cap \mathbf{V}'$, которое не является 1-подмногообразием в $\mathbf{W}$, но задаётся в нём двумя тождествами (3.21) и (3.4).

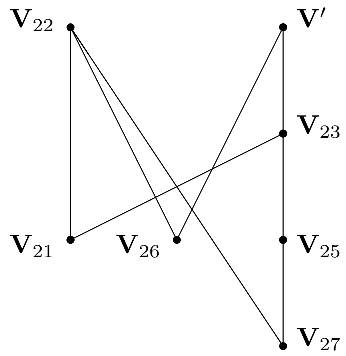

Рис. 1. Подмножество L_1 в L'' 1-подмногообразий многообразия $\mathbf{W}$, обладающих свойствами 1), 2), но не обладающих свойством 3)

Покажем теперь, что подмногообразия, полученные в предложении 3.1, — это действительно три различных подмногообразия. Для этого рассмотрим три примера конечных полугрупп.

Пример 3.1. Известно, что многообразие $\mathbf{W}$ порождается 16-элементной полугруппой $T_0 = U_2 \,\mathrm{w}\, N$ (см. [10, предложение 4.5]). Здесь T_0 — моноидное сплетение двухэлементной полурешётки $U_2 = \{0, 1\}$ и двухэлементной полугруппы $N = \{0, a\}$ с нулевым умножением. Это моноидное сплетение — полупрямое произведение множества $F(N^1, U_2)$ всевозможных функций из N^1 в U_2. Таким образом, всего существует восемь таких функций, которые можно задать естественной таблицей значений (табл. 1).

Таблица 1

f	0	a	1
f_0	0	0	0
f_1	0	0	1
f_2	0	1	0
f_3	0	1	1
f_4	1	0	0
f_5	1	0	1
f_6	1	1	0
f_7	1	1	1

Заметим, что любой элемент сплетения T_0 есть пара (f_i, d), где $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ и $d \in \{0, a\}$. Для упрощения записи введём следующие обозначения:

$b_i = (f_i, a)$, $b_j = (f_{j-8}, 0)$, где $0 \leqslant i \leqslant 7$, $8 \leqslant j \leqslant 15$. Нетрудно заметить, что $T_0 = \{b_i \mid 0 \leqslant i \leqslant 15\}$, причём элемент b_8 является нулём полугруппы T_0. Этот элемент мы будем обозначать как обычно, т. е. просто 0. Тогда можно построить таблицу умножения в полугруппе T_0. Мы не будем этого делать, а просто используем две подполугруппы этой полугруппы.

Пример 3.2. Вторая полугруппа — это пятиэлементная подполугруппа S_1 полугруппы T_0, заданная своей таблицей умножения (табл. 2).

Таблица 2

S_1	0	b_9	b_{10}	b_7	b_{15}
0	0	0	0	0	0
b_9	0	0	0	b_9	b_9
b_{10}	0	0	0	b_{10}	b_{10}
b_7	0	0	b_9	b_{15}	b_{15}
b_{15}	0	0	0	b_{15}	b_{15}

Пример 3.3. Третья полугруппа — это также пятиэлементная подполугруппа S_2 полугруппы T_0, заданная своей таблицей умножения (табл. 3).

Таблица 3

S_2	0	b_3	b_9	b_{10}	b_{12}
0	0	0	0	0	0
b_3	0	b_9	0	b_9	b_{10}
b_9	0	0	0	0	b_9
b_{10}	0	0	0	0	b_{10}
b_{12}	0	0	0	0	b_{12}

Лемма 3.10. *Верно, что $S_1 \in \mathbf{V}' - \mathbf{V}_{22}$ и $S_1 \in \mathbf{V}_8 - \mathbf{V}_{22}$. Таким образом, вложения $\mathbf{V}' \subseteq \mathbf{V}_{22}$ и $\mathbf{V}_8 \subseteq \mathbf{V}_{22}$ ложны.*

Доказательство. Достаточно проверить, что в S_1 истинны тождества (3.4) и (3.8), но ложно тождество (3.21). Если положить $\varphi(z_1) = b_7$ и $\varphi(z_2) = b_{10}$, то получим, что $\varphi(z_1 z_2 z_1) = b_7 b_{10} b_7 = b_9 b_7 = b_9$, но при этом $\varphi(z_1 z_2^2 z_1) = b_7 b_{10}^2 b_7 = b_7 0 b_7 = 0 \neq b_9$. Следовательно, тождество (3.21) ложно в S_1. В S_1 истинно тождество (3.4), так как в S_1 истинно даже тождество $z^2 \approx z^3$. Проверим выполнение тождества (3.8) в S_1.

Пусть $\varphi(z_1) \in \{0, b_9, b_{10}\}$. Тогда $\varphi(z_1^3 z_2) = 0$ и $\varphi(z_1 z_2^2 z_1) = 0$, так как $S_1 b_9 = 0$ и $(b_{10} S_1) b_{10} \subseteq \{0, b_{10}\} b_{10} = 0$. Пусть теперь $\varphi(z_1) \in \{b_7, b_{15}\}$. Тогда $\varphi(z_1^3 z_2) = 0$ при $\varphi(z_2) \in \{0, b_9, b_{10}\}$, но $\varphi(z_1^3 z_2) = b_{15}$ при $\varphi(z_2) \in \{b_7, b_{15}\}$. Лемма доказана. □

Лемма 3.11. *Верно, что* $S_2 \in \mathbf{V}_8 - \mathbf{V}'$ *и* $S_2 \in \mathbf{V}_{22} - \mathbf{V}'$. *Таким образом, вложения* $\mathbf{V}_8 \subseteq \mathbf{V}'$ *и* $\mathbf{V}_{22} \subseteq \mathbf{V}'$ *ложны.*

Доказательство. Достаточно проверить, что в S_2 истинны тождества (3.8) и (3.21), но ложно тождество (3.4). Нетрудно убедиться, что, полагая $\varphi(z) = b_3$ и $\varphi(y) = b_{12}$, мы получим, что $\varphi(z^2) = b_9$, $\varphi(z^3) = 0$. Поэтому $\varphi(z^3 y) = 0$, $\varphi(z^2 y) = b_9 b_{12} = b_9 \neq 0$. Следовательно, (3.4) ложно в S_2.

Для $\varphi(z_1) = b_3$ имеем, что $\varphi(z_1^3 z_2) = 0$ и $\varphi(z_1 z_2^2 z_1) \in b_3 S b_3 \subseteq b_3\{0, b_3\} = 0$. Для $\varphi(z_1) \in \{0, b_9, b_{10}\}$ имеем, что $\varphi(z_1^3 z_2) = 0$ и $b_9 S b_9 = 0$, $b_{10} S b_{10} = 0$.

Для $\varphi(z_1) = b_{12}$ имеем, что $\varphi(z_1^3 z_2) = 0$ при $\varphi(z_2) \neq b_{12}$ и $\varphi(z_1^3 z_2) = b_{12}$ при $\varphi(z_2) = b_{12}$. При этом при $\varphi(z_2) = b_{12}$ имеем, что $\varphi(z_1 z_2^2 z_1) = b_{12}$, и при $\varphi(z_2) \neq b_{12}$ имеем, что $\varphi(z_1 z_2^2 z_1) \subseteq b_{12}\{0, b_9\} b_{12} = 0$. Поэтому (3.8) истинно в S_2.

Для доказательства истинности (3.21) заметим, что оно верно, если $\varphi(z_2)$ — идемпотент в S_2, т. е. при $\varphi(z_2) \in \{0, b_{12}\}$. Если $\varphi(z_2) = b_9$, то $\varphi(z_1 z_2^2 z_1) = 0$ и $\varphi(z_1 z_2 z_1) = 0$. Если $\varphi(z_2) = b_{10}$, то нетрудно проверить, что $\varphi(z_1 z_2 z_1) = 0$. Наконец, при $\varphi(z_2) = b_3$ имеем, что $\varphi(z_1 z_2^2 z_1) = z_1 b_9 z_1 = 0$, $\varphi(z_1 z_2 z_1) = z_1 b_3 z_1 \subseteq \subseteq \{0, b_9\} z_1$. Последнее множество не равно нулю только при $\varphi(z_1) = b_{12}$. При этом $\varphi(z_1 z_2 z_1) = b_{12} b_3 b_{12} = 0$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 3.1. Прежде всего заметим, что множества тождеств $I(\mathbf{V}')$ и $I(\mathbf{V}_{22})$ обладают свойством 2) леммы 2.1, а $I(\mathbf{V}_8)$ этим свойством не обладает. Следовательно, заведомо неверны импликации (3.4) $\Rightarrow$ (3.8) и (3.21) $\Rightarrow$ (3.8), т. е. вложения $\mathbf{V}' \subseteq \mathbf{V}_8$ и $\mathbf{V}_{22} \subseteq \mathbf{V}_8$ ложны. Согласно лемме 3.10 вложения $\mathbf{V}' \subseteq \mathbf{V}_{22}$ и $\mathbf{V}_8 \subseteq \mathbf{V}_{22}$ ложны. Согласно лемме 3.11 вложения $\mathbf{V}_8 \subseteq \mathbf{V}'$ и $\mathbf{V}_{22} \subseteq \mathbf{V}'$ ложны. Таким образом, получаем, что все три многообразия попарно не сравнимы относительно вложения. Следовательно, это три различных максимальных подмногообразия. □

4. Следствия из основной теоремы

В качестве первого примера использования результатов предыдущего раздела вычислим решёточное объединение наибольшего подмногообразия $\mathbf{L}_{2,3}$ в подрешётке L' и многообразия полурешёток $\mathbf{Sl}$. Для нахождения базиса тождеств многообразия $\mathbf{L}_{2,3} \vee \mathbf{Sl}$ обратимся к описанию тождеств этих многообразий. Напомним, что $\mathbf{L}_{2,3} = \operatorname{var}(z_1 z_2 y \approx z_1 z_2 x)$ и $\mathbf{Sl} = \operatorname{var}(yx \approx xy,\, x^2 \approx x)$. Тогда нетрудно убедиться, что соответствующие множества тождеств имеют следующее описание:

$$I(\mathbf{L}_{2,3}) = \{u \approx v \mid \text{тождество тривиальное или } |u|, |v| \geqslant 3;\ h_2(u) = h_2(v)\},$$
$$I(\mathbf{Sl}) = \{u \approx v \mid c(u) = c(v)\}.$$

С учётом сказанного в разделе 2 можно заметить, что

$$\begin{aligned} &I(\mathbf{L}_{2,3} \vee \mathbf{Sl}) \subseteq I(\mathbf{L}_{2,3}) \cap I(\mathbf{Sl}) = \\ &\quad = \{u \approx v \mid 1) \text{ тождество тривиальное или } |u|, |v| \geqslant 3; \\ &\quad 2)\ h_2(u) = h_2(v);\ 3')\ c(u) = c(v)\}. \end{aligned}$$

Теорема 4.1. *Решёточное объединение* $\mathbf{L}_{2,3} \vee \mathbf{Sl}$ *подмногообразий в* $\mathbf{W}$ *совпадает с многообразием* $\mathbf{V}_{27}$.

Доказательство. Наименьшим замкнутым множеством тождеств, обладающим свойствами 1), 2) и 3′), является замыкание объединения базисов всевозможных соответствующих многообразий относительно цепочек вывода. А это соответствует пересечению всевозможных 1-подмногообразий, множества тождеств которых обладают свойствами 1), 2), 3′). Всего таких 1-подмногообразий не более восьми, они изображены на рис. 1. Согласно сказанному выше

$$\mathbf{L}_{2,3} \vee \mathbf{Sl} = \mathbf{V}' \cap \left(\bigcap_{i=1}^{7} \mathbf{V}_{2i} \right) = \mathbf{V}_{21} \cap \mathbf{V}_{23} \cap \mathbf{V}_{25} \cap \mathbf{V}_{27}.$$

Из лемм 3.8 и 3.9 следует, что последнее пересечение совпадает с многообразием $\mathbf{V}_{27}$. □

Замечание 4.1. Подмножество L_1 в L'' подмногообразий многообразия $\mathbf{W}$, обладающих свойствами 1) и 2), но не обладающих свойством 3), изображённое на рис. 1, содержит не более восьми различных подмногообразий.

Наш последний результат позволяет уточнить число новых подмногообразий многообразия $\mathbf{W}$, которые появились в этой статье, по отношению к работе [11].

Для такой оценки рассмотрим ещё две подполугруппы в полугруппе $T_0 = U_2 \,\mathrm{w}\, N$.

Пример 4.1. Четвёртая полугруппа — это трёхэлементная подполугруппа S_3 полугруппы T_0, заданная своей таблицей умножения (табл. 4).

Таблица 4

S_3	0	b_9	b_{12}
0	0	0	0
b_9	0	0	b_9
b_{12}	0	0	b_{12}

Пример 4.2. Пятая полугруппа — это пятиэлементная подполугруппа S_4 полугруппы T_0, заданная своей таблицей умножения (табл. 5).

Таблица 5

S_4	0	b_2	b_9	b_{10}	b_{12}
0	0	0	0	0	0
b_2	0	0	0	b_9	b_{10}
b_9	0	0	0	0	b_9
b_{10}	0	0	0	0	b_{10}
b_{12}	0	0	0	0	b_{12}

Лемма 4.1. *В полугруппе S_2 истинно тождество* (3.21), *но ложно тождество* (3.20). *Следовательно, $S_2 \in \mathbf{V}_{22} - \mathbf{V}_{21}$.*

Доказательство. Истинность тождества (3.21) в S_2 следует из леммы 3.11. Для доказательства ложности тождества (3.20) положим в нём $\varphi(z_1) = b_9$, $\varphi(z_2) = b_{12}$. Тогда $\varphi(z_1z_2z_1) = b_9b_{12}b_9 = 0$ и $\varphi(z_1z_2^2) = b_9b_{12}^2 = b_9$, т. е. (3.20) ложно в S_2. □

Следствие 4.1. $\mathbf{V}_{22} \neq \mathbf{V}_{21}$.

Лемма 4.2. *В полугруппе S_1 истинно тождество* (3.4), *но ложно тождество* (3.22). *Следовательно, $S_1 \in \mathbf{V}' - \mathbf{V}_{23}$.*

Доказательство. Истинность тождества (3.4) в S_1 следует из леммы 3.10. Для доказательства ложности тождества (3.22) положим в нём $\varphi(z_1) = b_9$, $\varphi(z_2) = b_{15}$. Тогда $\varphi(z_1z_2^2z_1) = b_9b_{15}^2b_9 = 0$ и $\varphi(z_1z_2^2) = b_9b_{15}^2 = b_9$, т. е. (3.22) ложно. □

Следствие 4.2. $\mathbf{V}' \neq \mathbf{V}_{23}$.

Согласно теореме 3.1 подмногообразия $\mathbf{V}'$ и $\mathbf{V}_{22}$ являются различными максимальными подмногообразиями в $\mathbf{W}$. Поэтому их пересечение $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}' \cap \mathbf{V}_{22}$ — подмногообразие, отличное от $\mathbf{V}'$ и от $\mathbf{V}_{22}$.

Лемма 4.3. *В полугруппе S_4 истинны тождества* (3.21) *и* (3.4), *но ложно тождество* (3.25). *Следовательно, $S_4 \in \mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_{26}$.*

Доказательство. Если в тождестве (3.21) в S_4 положить, что $\varphi(z_2)$ — идемпотент, т. е. $\varphi(z_2) \in \{0, b_{12}\}$, то (3.21) истинно. Если же $\varphi(z_2) \in \{b_2, b_9, b_{10}\}$, то $\varphi(z_2)^2 = 0$. При этом $\varphi(z_1)\varphi(z_2)\varphi(z_1) = \varphi(z_1)\{b_2, b_9, b_{10}\}\varphi(z_1) = 0$. Для проверки истинности тождества (3.4) в S_4 достаточно заметить, что в S_4 истинно тождество (3.2), из которого (3.4) непосредственно следует. Полагая в тождестве (3.25) $\varphi(z_1) = b_2$, $\varphi(z_2) = b_{10}$ и $\varphi(x) = b_{10}$, получаем, что $\varphi(z_1z_2^2x) = b_2b_{10}^2b_{12} = 0$, но $\varphi(z_1z_2x) = b_2b_{10}b_{12} = b_9b_{12} = b_9$. Следовательно, тождество (3.25) ложно в S_4. □

Следствие 4.3. $\mathbf{V}_0 \neq \mathbf{V}_{26}$.

Лемма 4.4. *В полугруппе S_3 истинно тождество* (3.25), *но ложно тождество* (3.26). *Следовательно, $S_3 \in \mathbf{V}_{26} - \mathbf{V}_{27}$.*

Доказательство. Если в тождестве (3.25) в S_3 положить, что $\varphi(z_2)$ — идемпотент, т. е. $\varphi(z_2) \in \{0, b_{12}\}$, то (3.25) истинно. Если же $\varphi(z_2) = b_9$, то обе части тождества равны нулю, так как $S_3 b_9 = 0$. Полагая в (3.26) $\varphi(z_1) = b_9$, $\varphi(z_2) = \varphi(x) = b_{12}$, получаем, что $\varphi(z_1 z_2 x) = b_9 b_{12}^2 = b_9$, но $\varphi(z_1 z_2^2 z_1 x) = b_9 b_{12}^2 b_9 b_{12} = 0$. Следовательно, (3.25) истинно, а (3.26) ложно в S_3. $\square$

Следствие 4.4. $\mathbf{V}_{26} \neq \mathbf{V}_{27}$.

Лемма 4.5. *Из тождеств* (3.22) *и* $\beta(\mathbf{W})$ *следует тождество* (3.26). *Следовательно, $\mathbf{V}_{23} \subseteq \mathbf{V}_{27}$.*

Доказательство. Используя (2.6), (2.7) и (3.22), получаем, что

$$z_1 z_2 x \approx z_1 z_2 x^2 \overset{(3.22)}{\approx} z_1 z_2 x^2 z_1 z_2 \overset{(2.6)}{\approx} z_1 z_2 x z_1 z_2 \overset{(2.7)}{\approx} z_1 z_2^2 z_1 x.$$

Следовательно, $\mathbf{V}_{23} \subseteq \mathbf{V}_{27}$. $\square$

Следствие 4.5. $\mathbf{V}_{27} = \mathbf{V}_{21} = \mathbf{V}_{23} = \mathbf{V}_{25}$.

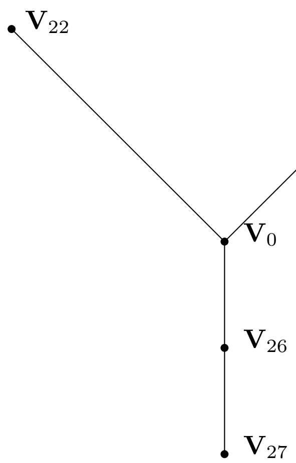

Рис. 2. Подмножество L_2 в L'' 1-подмногообразий многообразия $\mathbf{W}$, обладающих свойствами 1), 2), но не обладающих свойством 3)

Теперь можно несколько улучшить оценку снизу для числа многообразий в решётке L''.

Предложение 4.1. *Подрешётка L'' подмногообразий в $\mathbf{W}$ содержит не менее 26 элементов.*

Доказательство. Заметим, что в [11] была найдена подрешётка $L_0 \subseteq L''$ из 20 элементов. В настоящей работе найдено подмножество $L_2 \subseteq L''$, содержащее по крайней мере пять различных подмногообразий, а именно: $\mathbf{V}_{22}$, $\mathbf{V}'$, $\mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_{26}$, $\mathbf{V}_{27}$. Это следует из теоремы 3.1 и следствий 4.1—4.4. Из них только $\mathbf{V}'$ принадлежало L_0 в [11]. Кроме того, возникли многообразия $\mathbf{U_{00}} \subseteq \mathbf{V_8}$. При этом эти подмногообразия различны между собой, так как любое тождество из множества $I(\mathbf{V}_8)$ обладает свойством $h_1(u) = h_1(v)$, а в $I(\mathbf{U}_{00})$ есть тождества, не обладающие таким свойством. Согласно теореме 3.1 $\mathbf{V}_8$ является максимальным многообразием, которое, очевидно, не входит в L_2. Многообразие $\mathbf{U}_{00}$ также не входит в L_2 из-за свойства $h_1(u) \neq h_1(v)$ одного из тождеств его базиса. Таким образом, указано ещё шесть подмногообразий, которые не появлялись в явном виде в L_0. $\square$

Следствие 4.6. *Решётка L подмногообразий в $\mathbf{W}$ содержит не менее 39 элементов.*

Доказательство. Заметим, что в [11] было доказано, что подрешётка L' имеет 13 элементов. С учётом разложения (1.1) и предложения 4.1 отсюда получаем утверждение следствия. $\square$

Литература

[1] Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп // под ред. М. Арбиба. — - М.: Статистика, 1975.

[2] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. — М.: Мир, 1972.

[3] Кошелев Ю. Г. Ассоциативность умножения многообразий полугрупп // Междунар. конф. по алгебре, посв. памяти А. И. Мальцева. Тез. докл. по теории моделей и алгебр. систем. — Новосибирск, 1989. — С. 63.

[4] Лаллеман Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения / под ред. Л. Н. Шеврина. — М.: Мир, 1985.

[5] Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.

[6] Тищенко А. В. О различных определениях сплетения полугрупповых многообразий // Фундам. и прикл. матем. — 1996. — Т. 2, вып. 1. — С. 233—249.

[7] Тищенко А. В. Сплетения многообразий и полуархимедовы многообразия полугрупп // Тр. ММО. — 1996. — Т. 51, № 2. — С. 107—132.

[8] Тищенко А. В. Сплетение атомов решётки полугрупповых многообразий // УМН. — 1998. — Т. 53, № 4. — С. 219—220.

[9] Тищенко А. В. Упорядоченный моноид полугрупповых многообразий относительно сплетения // Фундам. и прикл. матем. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 283—305.

[10] Тищенко А. В. Сплетение атомов решётки полугрупповых многообразий // Тр. ММО. — 2007. — Т.68. — С. 107—132.

[11] Тищенко А. В. О решётке подмногообразий сплетения многообразия полурешёток и многообразия полугрупп с нулевым умножением // Фундам. и прикл. матем. — 2014. — Т. 19, вып. 6. — С. 191—212.

[12] Шеврин Л. Н., Верников Б. М., Волков М. В. Решётки многообразий полугрупп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2009. — № 3. — С. 3—36.

[13] Шеврин Л. Н., Волков М. В. Тождества полугрупп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1985. — № 11. — С. 3—47.

[14] Eilenberg S. Automata, Languages and Machines. Vol. B. — New York: Academic Press, 1976.

[15] Evans T. The lattice of semigroup varieties // Semigroup Forum. — 1971. — Vol. 2. — P. 1—43.

[16] Skornjakov L. A. Regularity of the wreath product of monoids // Semigroup Forum. — 1979. — Vol. 18, no. 1. — P. 83—86.

[17] Tilson B. Categories as algebra: an essential ingredient in the theory of monoids // J. Pure Appl. Algebra. — 1987. — Vol. 48, no. 1-2. — P. 83—198.