UA-свойства абелевых sp-групп и их колец эндоморфизмов

Д. С. ЧИСТЯКОВ
Московский педагогический государственный университет
e-mail: chistyakovds@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: UA-модуль, UA-кольцо, sp-группа, однородное отображение, эндоморфный модуль.

Аннотация

R-модуль A называется UA-модулем, если невозможно изменить сложение на множестве A без изменения действия кольца R на A. Полугруппа $(R, \cdot)$ называется UA-кольцом, если существует единственная бинарная операция $+$, превращающая $(R, \cdot, +)$ в кольцо. В данной статье изучаются UA-свойства sp-групп и их колец эндоморфизмов.

Abstract

D. S. Chistyakov, On the UA-properties of Abelian sp-groups and their endomorphism rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 217—224.

An R-module A is said to be a UA-module if it is not possible to change the addition of A without changing the action of R on A. A semigroup $(R, \cdot)$ is said to be a UA-ring if there exists a unique binary operation $+$ making $(R, \cdot, +)$ into a ring. In this paper, the UA-properties of sp-groups and their endomorphism rings are studied.

Пусть R — ассоциативное кольцо с единицей, A, B — левые унитарные R-модули. Отображение $f\colon A \to B$, такое что $f(ra) = rf(a)$, $r \in R$, $a \in A$, называется R-однородным. Множество всех R-однородных отображений из A в B обозначим через $\mathcal{M}_R(A, B)$. Понятно, что $\mathrm{Hom}_R(A, B) \subseteq \mathcal{M}_R(A, B)$. Кроме того, полагаем $\mathcal{M}_R(A, A) = \mathcal{M}_R(A)$. Заметим, что множество $\mathcal{M}_R(A)$ является почти кольцом относительно операций поточечного сложения и композиции отображений.

Определение 1 [4, 6, 10]. R-модуль A называется модулем с однозначным сложением (UA-модулем), если каждая биекция $f \in \mathcal{M}_R(A, B)$ является изоморфизмом для всех R-модулей B.

Определение 2 [4, 6, 10]. R-модуль A называется UA-модулем, если на аддитивной группе A нельзя задать новое сложение, не изменяя при этом действия кольца R на A.

Эти определения эквивалентны. Пусть $f \in \mathcal{M}_R(A, B)$ — биекция, не являющаяся аддитивной. Новое сложение $\boxplus$ на A можно определить по следующему правилу:

$$a \boxplus a' = f^{-1}\big(f(a) + f(a')\big)$$

для всех $a, a' \in A$. Предположим, что $\boxplus$ — сложение на A. Биекция $f\colon (A, +) \to (A, \boxplus)$, определённая по правилу $a \mapsto a$, не является аддитивной.

Определение 3 [2, 3, 5]. Кольцо R называется кольцом с однозначным сложением (UA-кольцом), если любой мультипликативный изоморфизм $\alpha\colon R \to S$ является аддитивным для любого кольца S.

Определение 4 [2,3,5]. Полугруппа $(R, \cdot)$ называется UA-кольцом, если существует единственная бинарная операция $+$, превращающая $(R, \cdot, +)$ в кольцо.

Пусть $\alpha\colon (R, \cdot) \to (S, \cdot)$ — изоморфизм. Сложение $\boxplus$ на R можно задать по следующему правилу:

$$r \boxplus r' = \alpha^{-1}\big(\alpha(r) + \alpha(r')\big)$$

для всех $r, r' \in R$. Предположим, что $\boxplus$ — сложение на R. Рассмотрим отображение $\alpha\colon (R, \cdot, +) \to (R, \cdot, \boxplus)$, такое что $r \mapsto r$. Тогда, вообще говоря,

$$\alpha(r + r') = r + r' \neq r \boxplus r' = \alpha(r) \boxplus \alpha(r').$$

Таким образом, определения 3 и 4 эквивалентны.

Определение 5. R-модуль A называется n-эндоморфным (эндоморфным), если $\mathcal{M}_R(A^n) = \mathrm{End}_R(A^n)$ (равенство $\mathcal{M}_R(A^n) = \mathrm{End}_R(A^n)$ справедливо для всех $n \in \mathbb{N}$).

Более подробную информацию об эндоморфных модулях можно найти в [7—9].

В этой статье будут показаны связи между UA-свойствами абелевых групп, их колец эндоморфизмов и однородных отображений. Мы исследуем эндоморфные модули в классе sp-групп. Этот класс смешанных групп имеет много хороших свойств, которые зависят от свойств p-компонент. Данный класс групп был изучен в [1]. Первоначально sp-группы появились при исследовании абелевых групп с регулярными кольцами эндоморфизмов.

Определение 6. sp-группа — это редуцированная смешанная абелева группа A с бесконечным числом ненулевых p-компонент, такая что естественное вложение

$$\bigoplus_p t_p(A) \to A$$

продолжается до сервантного вложения

$$A \to \prod_p t_p(A).$$

Данное определение позволяет считать, что

$$\bigoplus_p t_p(A) \subset A \subseteq \prod_p t_p(A),$$

причём группа A сервантна в $\prod_p t_p(A)$. Всюду мы предполагаем, что p пробегает некоторое бесконечное множество простых чисел.

sp-кольцо определяется схожим образом. Если R — sp-кольцо, то справедливы сервантные вложения колец

$$\bigoplus_p R_p \subset R \subseteq \prod_p R_p,$$

где R_p — p-адическая алгебра для каждого p, относящегося к R. Кольцо эндоморфизмов sp-группы и его центр являются sp-кольцами. Более подробную информацию об sp-группах можно найти в [1].

Таким образом, мы опишем sp-группы, которые являются UA-модулями над своим кольцом эндоморфизмов, а также sp-группы, которые имеют UA-кольцо эндоморфизмов. Кроме того, будет решён ряд близких вопросов.

Теорема 7. *Для sp-группы A, такой что $t_2(A) \ncong Z(2)$, $t_3(A) \ncong Z(3)$, следующие условия эквивалентны*:

1) *A — эндоморфный модуль над кольцом* $\mathrm{End}(A)$;
2) $\mathrm{End}(A)$ — *UA-кольцо*;
3) *$t_p(A)$ — эндоморфный модуль над кольцом $\mathrm{End}\big(t_p(A)\big)$ для всех p*;
4) $\mathrm{End}\big(t_p(A)\big)$ — *UA-кольцо для всех p*;
5) *$t_p(A) \cong Z(p^k) \oplus Z(p^k) \oplus B(p)$, $p^k = \exp t_p(A)$, или $t_p(A)$ имеет неограниченную базисную подгруппу.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3). Так как $A \cong t_p(A) \oplus B_p$ для всех простых p, где $pB_p = B_p$, $\mathrm{End}(A) \cong \mathrm{End}\big(t_p(A)\big) \times \mathrm{End}(B_p)$, мы получаем, что

$$\mathcal{M}_{\mathrm{End}(A)}(A^n) \cong \mathcal{M}_{\mathrm{End}(t_p(A))}(t_p(A)^n) \times \mathcal{M}_{\mathrm{End}(B_p)}(B_p^n)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Если $\mathrm{End}(A)$ — UA-кольцо, то $\mathrm{End}\big(t_p(A)\big)$ и $\mathrm{End}(B_p)$ — UA-кольца, т. е. справедлива импликация 2) $\Longrightarrow$ 4).

Эквивалентность 3) $\Longleftrightarrow$ 5) доказана в [8]. Эквивалентность 4) $\Longleftrightarrow$ 5) доказана в [3].

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $x, y \in A^n$, $f \in \mathcal{M}_{\mathrm{End}(A)}(A^n)$. Рассмотрим элемент

$$z = f(x+y) - f(x) - f(y).$$

Для каждой проекции $e_p\colon A \to t_p(A)$ на основании [8, доказательство теоремы 40] имеем $e_p z = 0$, поэтому $z = 0$.

Для доказательства импликации 5) $\Longrightarrow$ 2) мы используем следующую лемму.

Лемма 8 [2]. *Предположим, что кольцо K обладает такой системой идемпотентов $F = \{e_i \mid i \in I\}$, что*

1) *для любого $0 \neq k \in K$ найдётся идемпотент $e_i \in F$, для которого $ke_i \neq 0$;*

2) *для всякого идемпотента* $e_i \in F$ *существует ортогональный ему идемпотент* $e_j \in F$, *такой что для* $x \in K$ *из* $e_i x e_i K e_j = 0 = e_j K e_i x e_i$ *следует, что* $e_i x e_i = 0$.

Тогда K — *UA-кольцо.*

Продолжим доказательство теоремы 7. Пусть каждая ненулевая p-компонента группы A имеет вид $t_p(A) = Z(p^k) \oplus Z(p^k) \oplus B(p)$ для некоторой p-группы $B(p)$, не содержащей элементы, порядок которых превосходит p^k, или группа $t_p(A)$ имеет неограниченную базисную подгруппу. Пусть F — множество всех примитивных идемпотентов кольца $\mathrm{End}(A)$. Для любого $0 \neq f \in \mathrm{End}(A)$ выполнено условие 1) леммы 8. Если эндоморфизм f аннулирует периодическую часть $t(A)$ группы A, то найдётся ненулевой гомоморфизм из $A/t(A)$ в A. Однако группа A редуцированная, а группа $A/t(A)$ делимая. Для любого идемпотента $e \in F$ группа $e(A)$ является циклической, и её порядок равен p^t для некоторых p и t. Имеем прямое разложение $A \cong e(A) \oplus A'$. Согласно условию группа A' содержит циклическое прямое слагаемое $e'(A)$ порядка $p^l \geqslant p^t$. Отсюда следует, что левый $\mathrm{End}\bigl(e(A)\bigr)$-модуль $\mathrm{Hom}\bigl(e'(A), e(A)\bigr)$ точен. Замечая, что $e\,\mathrm{End}(A)e' \cong \mathrm{Hom}\bigl(e'(A), e(A)\bigr)$ и $e\,\mathrm{End}(A)e \cong \mathrm{End}\bigl(e(A)\bigr)$, получаем, что условие 2) леммы 8 выполнено. Таким образом, $\mathrm{End}(A)$ — UA-кольцо. □

Пусть A — левый 2-эндоморфный модуль над кольцом R. Предположим, что $+$ и $\boxplus$ — два различных сложения на A. Определим отображение $f\colon A^2 \to A^2$ по правилу $f(x, y) = (x, x \boxplus y)$. Легко убедиться, что f не является аддитивной биекцией. По определению UA-модуля заключаем, что A — UA-модуль. Более того, каждый эндоморфный модуль является UA-модулем.

Теорема 9. *Пусть* A — sp*-группа. Тогда группа* A *является UA-модулем над кольцом* $\mathrm{End}(A)$.

Доказательство. Пусть B — $\mathrm{End}(A)$-модуль, $f\colon A \to B$ — $\mathrm{End}(A)$-однородная биекция, $x, y \in A$. Тогда $z = f^{-1}\bigl(f(x+y) - f(x) - f(y)\bigr)$ для некоторого $z \in A$. Для каждой проекции $\varepsilon_p\colon A \to t_p(A)$ имеем

$$\varepsilon_p z = \varepsilon_p f^{-1}\bigl(f(x+y) - f(x) - f(y)\bigr) = f^{-1}\bigl(f(\varepsilon_p x + \varepsilon_p y) - f(\varepsilon_p x) - f(\varepsilon_p y)\bigr).$$

Известно, что каждая периодическая группа является дистрибутивным модулем над своим кольцом эндоморфизмов. Поэтому для $\varepsilon_p x, \varepsilon_p y \in t_p(A)$ найдутся эндоморфизмы $a, b, c, d \in \mathrm{End}\bigl(t_p(A)\bigr)$, такие что $1 = a+b$, $a\varepsilon_p x = c\varepsilon_p y$, $b\varepsilon_p y = d\varepsilon_p x$. Тогда

$$\begin{aligned} a\varepsilon_p z &= f^{-1}\bigl(f(a\varepsilon_p x + a\varepsilon_p y) - f(a\varepsilon_p x) - f(a\varepsilon_p y)\bigr) = \\ &= f^{-1}\bigl(f(c\varepsilon_p y + a\varepsilon_p y) - f(c\varepsilon_p y) - f(a\varepsilon_p y)\bigr) = \\ &= f^{-1}\bigl((c+a)f(\varepsilon_p y) - cf(\varepsilon_p y) - af(\varepsilon_p y)\bigr) = 0. \end{aligned}$$

Те же рассуждения дают равенство $b\varepsilon_p z = 0$. Следовательно,

$$a\varepsilon_p z + b\varepsilon_p z = (a+b)\varepsilon_p z = \varepsilon_p z = 0.$$

Поскольку $\varepsilon_p z = 0$ для всех p, то $z = 0$. □

Пусть $\chi = (k_p)$ — последовательность неотрицательных целых чисел и символов ∞, пронумерованных простыми числами. Считаем, что $k_p \neq 0$ для бесконечного множества простых чисел p. Каждому k_p поставим в соответствие кольцо R_p по следующему правилу:

1) $R_p = 0$, если $k_p = 0$;
2) $R_p = \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, если $0 < k_p < \infty$;
3) $R_p = \hat{Z}_p$, если $k_p = \infty$.

Кольцо $K(\chi)$ — это подкольцо в $\prod\limits_p R_p$, содержащее $\bigoplus\limits_p R_p$ и $\prod\limits_p R_p / \bigoplus\limits_p R_p \cong \mathbb{Q}$.

Пусть $K(\chi) \ni e$ — нетривиальный идемпотент. Тогда либо e, либо $1-e$ является суммой единичных элементов каких-то колец R_p. Если $0 \neq r \in K(\chi)$, то $r = u + v$, где $u = (n/m)e$ для некоторого идемпотента $e \in K(\chi)$ и $0 \neq n, m \in \mathbb{Z}$, $v \in \bigoplus\limits_p R_p$. Отметим, что каждый конечно порождённый идеал кольца $K(\chi)$ является главным.

Пусть A — sp-группа. Составим $\chi = (k_p)$ следующим образом:

1) $k_p = 0$, если $t_p(A) = 0$;
2) $k_p = \infty$, если $t_p(A)$ — неограниченная группа;
3) $k_p = p^{k_p}$, если $\exp t_p(A) = p^{k_p}$.

Зададим на группе A структуру $K(\chi)$-модуля. Заметим, что произведение $\prod\limits_p t_p(A)$ является модулем как над кольцом $\prod\limits_p R_p$, так и над кольцом $K(\chi)$. На самом деле группа A является подмодулем $K(\chi)$-модуля $\prod\limits_p t_p(A)$. Запишем $K(\chi) = U \times V$, где V — конечное произведение каких-то колец R_p, $r = u + v$, $u = (n/m)e$ для некоторого идемпотента $e \in K(\chi)$. Рассмотрим разложение $A = A_U \oplus A_V$, где $mA_U = A_U$ и A_V — прямая сумма p-компонент для всех p, относящихся к V. Если $a = a_U + a_V$, то $ra = ua_U + va_V$, где $ua_U = (n/m)a_U \in A_U$, $va_V \in A_V$. В этой ситуации группа A является точным модулем над кольцом $K(\chi)$.

Напомним, что модуль M над коммутативным кольцом K называется $E(K)$-модулем, если

$$\mathrm{Hom}_K(K, M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, M).$$

Если K — $E(K)$-модуль, то кольцо K называется E-кольцом. Кольцо $K(\chi)$ является E-кольцом; sp-группа, являющаяся $K(\chi)$-модулем, будет $E\big(K(\chi)\big)$-модулем. Отметим полезное свойство $E(K)$-модулей: если A и B — K-модули, B — $E(K)$-модуль, то

$$\mathrm{Hom}_K(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B).$$

Теорема 10. *Для sp-группы A следующие условия эквивалентны*:

1) *группа A является UA-модулем как модуль над кольцом $K(\chi)$*;
2) *группы $t_p(A)$ являются UA-модулями как модули над R_p для всех p;*
3) *$t_p(A)$ — циклическая группа для всех p или $t_2(A) = Z(2) \oplus Z(2)$ и каждая группа $t_p(A)$, $p \neq 2$, циклическая.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Предположим, что $t_p(A)$ не является UA-модулем над кольцом R_p для некоторого p. Тогда найдётся не являющаяся аддитивной R_p-однородная биекция $f_p\colon t_p(A) \to B_p$ для некоторого R_p-модуля B_p. Запишем $K(\chi) = U \times R_p$, $A = A_U \oplus t_p(A)$. Отображение

$$f\colon A_U \oplus t_p(A) \to A_U \oplus B_p, \quad (a_U, a_p) \mapsto \big(a_U, f_p(a_p)\big) \text{ —}$$

$K(\chi)$-однородная биекция, которая, очевидно, не является аддитивной.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Предположим, что группа $t_p(A)$ не является циклической. Существует разложение $t_p(A) \cong B \oplus C$, где B — циклическая группа, изоморфная некоторой подгруппе C^* группы C. Рассмотрим разложения (конечные или бесконечные)

$$t_p(A) = \langle a_1 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle a_k \rangle \oplus A_k \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

такие что $A_k = \langle a_{k+1} \rangle \oplus A_{k+1}$ и $o(a_k) = p^{n_k}$, где $1 \leqslant n_1 < \ldots < n_k < \ldots$. В качестве B мы берём циклическое прямое слагаемое наименьшего порядка.

Пусть $B \ncong Z(2)$. Рассмотрим множество

$$D = \{(b, c) \mid b \in B,\ c \in C,\ o(b) = o(c)\}.$$

Так как $B \cong C^*$, то b пробегает все элементы из группы B.

Заметим, что кольца $\mathbb{Z}(p^k)$ и $\hat{Z}_p$ являются сильно однородными. Предположим, что $r(a, b) \in D$ для некоторого элемента $(a, b) \in t_p(A)$, $r = p^n e$, где e — обратимый элемент кольца R_p. Если $o(a) = p^s$ и $o(b) = p^t$, то $o(ra) = p^{s-n}$ и $o(rb) = p^{t-n}$. Тогда $p^{s-n} = p^{t-n}$ и $s = t$. Следовательно, $(a, b) \in D$. Ясно, что из $(b, c) \in D$ следует $r(b, c) \in D$.

Определим биекцию $f\colon t_p(A) \to t_p(A)$ по следующему правилу:

$$f(b, c) = \begin{cases} f^*(b, c), & (b, c) \in D, \\ (b, c), & (b, c) \notin D, \end{cases}$$

где $f^*\colon D \to D$, $f^*(b, c) = (\varphi(b), c)$, $\mathrm{id} \neq \varphi \in \operatorname{Aut} C$.

Если $(b, c) \in D$, то

$$f\big(r(b, c)\big) = f(rb, rc) = (\varphi(rb), rc) = (r\varphi(b), rc) = r(\varphi(b), c) = rf(b, c).$$

Если $(b, c) \notin D$, то

$$f\big(r(b, c)\big) = f(rb, rc) = (rb, rc) = r(b, c) = rf(b, c).$$

Таким образом, $f \in \mathcal{M}_{R_p}\big(t_p(A)\big)$.

Найдётся элемент $(x, y) \in t_p(A)$, такой что $\varphi(x) \neq x$ и $o(x) = o(y)$. Тогда

$$f\big((x, 0) + (0, y)\big) = f(x, y) = f^*(x, y) = (\varphi(x), y) \neq (x, y) = f(x, 0) + f(0, y).$$

Следовательно, $t_p(A)$ не является UA-модулем.

Пусть $B \cong Z(2)$ и $t_2(A) \cong Z(2) \oplus \bar{A}_2$, $\bar{A}_2 \ncong Z(2)$. Зафиксируем элемент $x \in \bar{A}_2$, $o(x) = 2$, и рассмотрим подгруппу $H = \{(0, 0), (0, x), (1, x), (1, 0)\}$.

Определим однородную биекцию $f\colon t_2(A) \to t_2(A)$, по следующему правилу:

$$f(b,c) = \begin{cases} \varphi(b,c), & (b,c) \in H, \\ (b,c), & (b,c) \notin H, \end{cases}$$

где $\varphi \in \operatorname{Aut} H$, $\varphi(0,0) = (0,0)$, $\varphi(0,x) = (0,x)$, $\varphi(1,x) = (1,0)$, $\varphi(1,0) = (1,x)$.

Для $0 \neq c \in \bar{A}_2$ и $c \neq x$ получаем

$$f\big((1,0) + (0,c)\big) = (1,c) \neq (1,c+x) = f(1,0) + f(0,c).$$

Следовательно, $\bar{A}_2 = 0$ или $\bar{A}_2 \cong Z(2)$.

Докажем справедливость импликации 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть B — $K(\chi)$-модуль и $\mathcal{M}_{K(\chi)}(A,B) \ni f$ — биекция. Рассмотрим элемент

$$z = f^{-1}\big(f(x+y) - f(x) - f(y)\big),$$

где $x, y \in A$. Для всех $\varepsilon_p = (0, 1_p)$, где 1_p — единица кольца R_p, имеем

$$f\big(t_p(A)\big) = f\big(\varepsilon_p t_p(A)\big) \subseteq \varepsilon_p f\big(t_p(A)\big) \subseteq f\big(t_p(A)\big).$$

Ясно, что каждое однородное отображение циклического модуля аддитивно. Поэтому если все R_p-модули $t_p(A)$ циклические, то $\varepsilon_p z = 0$ для всех p. Следовательно, $z = 0$.

Пусть $t_2(A) = Z(2) \oplus Z(2)$ и все R_p-модули $t_p(A)$, $p \neq 2$, циклические. Каждая $K(\chi)$-однородная биекция сохраняет порядки элементов. Это даёт разложение $B \cong Z(2) \oplus Z(2) \oplus B^*$. Векторное пространство $Z(2) \oplus Z(2)$ является UA-модулем. Теорема доказана. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке совместной программы «Михаил Ломоносов, III» Министерства образования Российской Федерации и Германской службы академических обменов.

Литература

[1] Крылов П. А. Смешанные абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 793—812.

[2] Любимцев О. В. Сепарабельные абелевы группы без кручения с UA-кольцами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. матем. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1419—1422.

[3] Любимцев О. В. Периодические абелевы группы с UA-кольцами эндоморфизмов // Матем. заметки. — 2001. — Т. 70, № 5. — С. 736—741.

[4] Любимцев О. В., Чистяков Д. С. Абелевы группы как UA-модули над кольцом $\mathbb{Z}$ // Матем. заметки. — 2010. — Т. 87, № 3. — С. 412—416.

[5] Михалёв А. В. Мультипликативная классификация ассоциативных колец // Матем. сб. — 1988. — Т. 135, № 177. — С. 210—224.

[6] Чистяков Д. С. Абелевы группы как UA-модули над своим кольцом эндоморфизмов // Матем. заметки. — 2012. — Т. 91, № 6. — С. 934—941.

[7] Чистяков Д. С. Однородные отображения абелевых групп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2014. — Т. 58, № 2. — С. 61—68.

[8] Albrecht U., Breaz S., Wickless W. Generalized endoprimal Abelian groups // J. Algebra Its Appl. — 2006. — Vol. 5, no. 1. — P. 1—17.

[9] Hausen J., Johnson J. A. Centralizer near-rings that are rings // J. Austral. Math. Soc. — 1995. — Vol. 59, no. 2. — P. 173—183.

[10] Van der Merwe A. B. Unique addition modules // Commun. Algebra. — 1999. — Vol. 27, no. 9. — P. 4103—4115.