

О частично $\mathcal{K}$ -упорядоченных кольцах

Е. Е. ШИРШОВА

Московский педагогический
государственный университет
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

УДК 512.545

Ключевые слова: частично упорядоченное кольцо, частично упорядоченная группа, линейно упорядоченная группа, выпуклая подгруппа.

Аннотация

Рассматриваются новые возможности задания частичных порядков на кольцах. Исследуются свойства произвольных частично $\mathcal{K}$ -упорядоченных справа колец. Получены некоторые результаты о линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченных справа кольцах. Доказываются теоремы об идеалах таких колец.

Abstract

E. E. Shirshova, On partially $\mathcal{K}$ -ordered rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 225—239.

A new notion of a partial ordering for rings is considered. Properties of arbitrary partially right $\mathcal{K}$ -ordered rings are investigated. A series of results for linearly right $\mathcal{K}$ -ordered rings is obtained. Some theorems are proved for ideals of those rings.

1. Введение

Определение частичного порядка для алгебр Ли было введено В. М. Копытовым в 1972 году (см. [4, 5]). Позднее это позволило определить понятие произвольных частично упорядоченных линейных алгебр над частично упорядоченными полями. Свойства частично упорядоченных «по Копытову» алгебр ($\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр) над частично упорядоченными полями исследовались в работах Ю. В. Кочетовой [6—9], а также Ю. В. Кочетовой и Е. Е. Ширшовой [10—12].

Пусть $R = \langle R, +, \cdot \rangle$ — кольцо. Напомним, что R называется *частично упорядоченным кольцом* (см. [3, 13]), если $\langle R, +, \leq \rangle$ — частично упорядоченная группа, удовлетворяющая следующему условию: если $a \leq b$ и $c > 0$ в $\langle R, + \rangle$, то $ac \leq bc$ и $ca \leq cb$.

Следует заметить, что произвольный частичный порядок аддитивной группы кольца не обязан быть частичным кольцевым порядком. (В [2] приведён соответствующий пример для ассоциативного кольца.)

Понятие частично $\mathcal{K}$ -упорядоченных колец определено В. Н. Бибасовой и Е. Е. Ширшовой по аналогии с понятием $\mathcal{K}$ -упорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем. Свойства частично $\mathcal{K}$ -упорядоченных колец исследуются в [2].

Определение 1 [2]. Кольцо R называется частично $\mathcal{K}$ -упорядоченным кольцом, если $\langle R, +, \leq \rangle$ — частично упорядоченная группа, удовлетворяющая следующему условию: если $0 \leq a$ в $\langle R, +, \leq \rangle$, то $ab \leq a$ и $ba \leq a$ для всех $b \in R$.

Примеры заметки [1] и примеры 4 и 5 данной статьи позволили найти новый подход к определению частичной упорядоченности на кольцах и линейных алгебрах над частично упорядоченными полями.

Определение 2 [1]. Кольцо R называется частично $\mathcal{K}$ -упорядоченным справа, если $\langle R, +, \leq \rangle$ — частично упорядоченная группа, удовлетворяющая следующему условию:

$$\text{если } 0 \leq a \text{ в } \langle R, +, \leq \rangle, \text{ то } ab \leq a \text{ для всех } b \in R. \quad (1)$$

Определение 3. Кольцо R называется частично $\mathcal{K}$ -упорядоченным слева, если $\langle R, +, \leq \rangle$ — частично упорядоченная группа, удовлетворяющая следующему условию:

$$\text{если } 0 \leq a \text{ в } \langle R, +, \leq \rangle, \text{ то } ba \leq a \text{ для всех } b \in R.$$

Если при этом порядок в группе $\langle R, + \rangle$ является линейным (решёточным, направленным), то кольцо R называется линейно (решёточно, направленно) $\mathcal{K}$ -упорядоченным справа (слева).

В данной статье рассматриваются некоторые свойства колец частично $\mathcal{K}$ -упорядоченных справа. Используются терминология и обозначения, общепринятые в теории частично упорядоченных групп и колец (см. [3, 5, 13]).

Некоторые примеры частично $\mathcal{K}$ -упорядоченных колец приводятся во втором разделе данной статьи.

В третьем разделе исследуются свойства идеалов произвольных колец частично $\mathcal{K}$ -упорядоченных справа.

Напомним, что подгруппа H частично упорядоченной группы G называется *выпуклой*, если из неравенств $a \leq g \leq b$ следует $g \in H$ для всех $a, b \in H$ и $g \in G$.

В случае колец, частично $\mathcal{K}$ -упорядоченных справа, справедлив следующий результат.

Теорема 1 [1]. Пусть кольцо $R = \langle R, +, \cdot, \leq \rangle$ является частично $\mathcal{K}$ -упорядоченным справа и двусторонний идеал I кольца R является выпуклой подгруппой группы $\langle R, +, \leq \rangle$. Тогда фактор-кольцо R/I также является частично $\mathcal{K}$ -упорядоченным справа.

Для описания расширений частично упорядоченных колец полезна следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $R = \langle R, +, \cdot \rangle$ — кольцо и I — его двусторонний идеал, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) кольца $\langle I, +, \cdot, \leq_1 \rangle$ и $\langle R/I, +, \cdot, \leq_2 \rangle$ являются частично $\mathcal{K}$ -упорядоченными справа;
- 2) если $a \in I$ и $0 <_1 a$, то для любого $r \in R$ имеет место неравенство $ar \leq_1 a$.

Тогда на кольце R можно определить частичный $\mathcal{K}$ -порядок справа $\leq$, который индуцирует порядок $\leq_1$ в кольце I и порядок $\leq_2$ в кольце R/I ; при этом $\langle I, + \rangle$ окажется выпуклой подгруппой группы $\langle R, + \rangle$ относительно порядка $\leq$.

Важным является следующее свойство выпуклых направленных подгрупп аддитивных групп частично $\mathcal{K}$ -упорядоченных справа колец.

Теорема 3 [1]. Пусть кольцо $R = \langle R, +, \cdot, \leq \rangle$ является частично $\mathcal{K}$ -упорядоченным справа, M — выпуклая направленная подгруппа в группе $\langle R, +, \leq \rangle$. Тогда M — правый идеал кольца R .

Применяя теоремы 1 и 3 можно получить следующее свойство гомоморфизмов частично $\mathcal{K}$ -упорядоченных колец.

Теорема 4. Пусть кольцо $R = \langle R, +, \cdot, \leq \rangle$ является частично $\mathcal{K}$ -упорядоченным, I — выпуклая направленная подгруппа в группе $G = \langle R, +, \leq \rangle$, ε — естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/I . Тогда существует частично $\mathcal{K}$ -упорядоченное кольцо R/I и ε является o -гомоморфизмом (см. раздел 3) кольца R на кольцо R/I .

Пусть G — аддитивная частично упорядоченная группа.

Определение 4. Пусть $a \in G$ и $a > 0$. Говорят, что элемент b бесконечно мал по сравнению с элементом a в группе G ($b \ll a$), если неравенство $nb \leq a$ верно для всех $n \in \mathbb{Z}$.

В четвёртом разделе статьи рассматриваются свойства отношения «бесконечно мал» в линейно упорядоченных группах.

Теперь дадим следующее определение.

Определение 5. Назовём кольцо $R = \langle R, +, \cdot, \leq \rangle$ частично $\mathcal{K}$ -упорядоченным справа, если $\langle R, +, \leq \rangle$ — частично упорядоченная группа, удовлетворяющая следующему условию:

$$\text{если } a > 0 \text{ в } \langle R, +, \leq \rangle, \text{ то } ab \ll a \text{ для всех } b \in R. \quad (2)$$

В четвёртом разделе доказывается эквивалентность двух определений частичной $\mathcal{K}$ -упорядоченности справа.

Пусть $\mathcal{U}$ — система подгрупп группы G , включающая $\{0\}$ и G , или система правых идеалов кольца R , содержащая $\{0\}$ и R . Система $\mathcal{U}$ называется *полной*, если для любой её подсистемы $\mathcal{V}$ подгрупп (правых идеалов) выполняется следующее условие: объединение и пересечение подгрупп (правых идеалов), составляющих подсистему $\mathcal{V}$, принадлежат системе $\mathcal{U}$. Включение подгрупп (правых идеалов) $A \subset C$ называется *скачком*, если из включений $A \subseteq B \subseteq C$ следует $A = B$ или $B = C$ для каждой подгруппы (каждого правого идеала) B группы G (кольца R).

Определение 6. Правый идеал I частично $\mathcal{K}$ -упорядоченного справа кольца R называется выпуклым идеалом кольца R , если $\langle I, + \rangle$ — выпуклая подгруппа группы $\langle R, + \rangle$.

В пятом разделе приводятся доказательства следующих утверждений об идеалах линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченных справа колец.

Теорема 5. Если $R = \langle R, +, \cdot, \leq \rangle$ — линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченное справа кольцо, то в нём существует полная система правых идеалов, в которой любой скачок правых идеалов $I \subset J$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $JR \subseteq I$ (см. [1]);
- 2) I — выпуклый двусторонний идеал в J ;
- 3) если $a \in I$, то $a \ll b$ для всех $b \in J \setminus I$, где $b > 0$.

Теорема 6. Пусть R — кольцо без единицы и существует полная система $\mathcal{U}$ подгрупп в $\langle R, + \rangle$, удовлетворяющая следующему условию: если $H \subset K$ — скачок подгрупп данной системы, то $ar \in H$ для всех $a \in K$ и $r \in R$ и фактор-группа $\langle K/H, + \rangle$ является группой без кручения. Тогда на кольце R можно определить линейный $\mathcal{K}$ -порядок справа.

2. Новое частичное упорядочение колец

Начнём с примеров.

Пусть $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел с естественной упорядоченностью, $A = \overline{\mathbb{Z}} \times \overline{\mathbb{Z}}$ — прямое произведение линейно упорядоченных групп. Тогда A — решёточно упорядоченная группа (см. [13, ч. I, гл. II, § 6]).

Пример 1. Рассмотрим лексикографическое произведение $B = \overline{\mathbb{Z}} \times \overrightarrow{A}$ линейно упорядоченной группы $\mathbb{Z}$ и решёточно упорядоченной группы A и лексикографическое произведение $G = \overline{\mathbb{Z}} \times \overrightarrow{B}$ линейно упорядоченной группы $\mathbb{Z}$ и решёточно упорядоченной группы B . Тогда G — решёточно упорядоченная группа, не являющаяся линейно упорядоченной (см. [13, ч. I, гл. II, § 7]).

Будем считать элемент $g = (a, (b, (c, d))) \in G$ положительным, если выполняется одно из следующих условий:

- 1) $0 < a$;
- 2) $a = 0$ и $0 < b$;
- 3) $a = b = 0$, а $0 \leq c$ и $0 \leq d$.

Определим на группе G операцию умножения. Если

$$g_1 = (a, (b, (c, d))), \quad g_2 = (u, (v, (s, t))),$$

положим

$$g_1 g_2 = (0, (0, (0, av - ub))).$$

Тогда $R_1 = \langle G, +, \cdot \rangle$ — кольцо Ли.

Если $0 < g_1$, то $g_1 g_2 \leq g_1$ и $g_2 g_1 \leq g_1$ для всех $g_2 \in R_1$. Поэтому R_1 — решёточно $\mathcal{K}$ -упорядоченное кольцо Ли.

Пример 2. Рассмотрим лексикографическое произведение $F = \overrightarrow{A \times A}$ решёточно упорядоченных групп. Тогда F — pl -группа (см. [14] или [15, теорема 6]), не являющаяся решёточно упорядоченной (см. [13, ч. I, гл. II, § 7]).

Будем считать элемент $g = ((a, b), (c, d))$ положительным, если выполняется одно из следующих условий:

- 1) $0 < a$ и $0 \leq b$;
- 2) $0 \leq a$ и $0 < b$;
- 3) $a = b = 0$, а $0 \leq c$ и $0 \leq d$.

Определим на группе F операцию умножения. Если $g_1 = ((a, b), (c, d))$ и $g_2 = ((u, v), (s, t))$, положим $g_1 g_2 = ((0, 0), (0, av - ub))$. Тогда $R_2 = \langle F, +, \cdot \rangle$ — кольцо Ли.

Если $0 < g_1$, то $g_1 g_2 \leq g_1$ и $g_2 g_1 \leq g_1$ для всех $g_2 \in R_2$. Поэтому R_2 — направленное $\mathcal{K}$ -упорядоченное кольцо Ли, не являющееся решёточно упорядоченным.

Пусть $\mathcal{R}$ — кольцо верхнетреугольных матриц третьего порядка над кольцом $\mathbb{Z}$. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в $\mathcal{R}$.

Пример 3 [2]. Будем считать матрицу A положительной, если выполняется одно из следующих условий:

- 1) $a > 0$;
- 2) $a = 0$ и $c > 0$;
- 3) $a = c = 0$ и $b \geq 0$.

Тогда аддитивная группа кольца $\mathcal{R}$ является линейно упорядоченной.

Если матрица $A \neq 0$ положительная, то для любой матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

в $\mathcal{R}$ матрицы

$$A - AB = \begin{pmatrix} 0 & a & b - aw \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - BA = \begin{pmatrix} 0 & a & b - uc \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

положительные. Значит, кольцо $\mathcal{R}$ — ассоциативное линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченное кольцо.

Пример 4. Будем считать матрицу A в $\mathcal{R}$ положительной, если выполняется одно из следующих условий:

- 1) $a > 0$;
- 2) $a = 0$ и $b > 0$;
- 3) $a = b = 0$ и $c \geq 0$.

Тогда аддитивная группа кольца $\mathcal{R}$ является линейно упорядоченной.

Если матрица $A \neq 0$ положительная, то для любой матрицы B в кольце $\mathcal{R}$ матрица $A - AB$ положительна.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица A положительная. Но матрица

$$A - BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

отрицательная, например, при $u = 1$. Значит, кольцо $\mathcal{R}$ является ассоциативным кольцом, линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченным справа, но не слева.

Пример 5. Будем считать матрицу A в $\mathcal{R}$ положительной, если выполняется одно из следующих условий:

- 1) $c > 0$;
- 2) $c = 0$ и $b > 0$;
- 3) $c = b = 0$ и $a \geq 0$.

Тогда аддитивная группа кольца $\mathcal{R}$ является линейно упорядоченной.

Если матрица $A \neq 0$ положительная, то для любой матрицы B в кольце $\mathcal{R}$ матрица $A - BA$ положительна.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица A положительная. Но матрица

$$A - AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -w \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

отрицательная, например, при $w = 1$. Значит, кольцо $\mathcal{R}$ — ассоциативное кольцо, линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченное слева, но не справа.

Из определения 2 легко выводятся следующие утверждения.

Предложение 7 [1].

1. Частично $\mathcal{K}$ -упорядоченные кольца являются одновременно кольцами, $\mathcal{K}$ -упорядоченными как справа, так и слева.

2. Частично $\mathcal{K}$ -упорядоченное справа (слева) кольцо не может содержать единицу.
3. Пусть R — частично $\mathcal{K}$ -упорядоченное справа (слева) кольцо. Тогда кольцо R не содержит идемпотентов, сравнимых с нулём.

Доказательство. Докажем справедливость третьего утверждения.

Допустим, от противного, что в частично $\mathcal{K}$ -упорядоченном справа кольце R существует сравнимый с нулём элемент $a \neq 0$, для которого $a^2 = a$.

Если $0 < a$, то по определению 2 $ab \leq a$ для элемента $b = a + a$. Из этого следует, что $a^2 + a^2 \leq a$. Последнее влечёт неравенство $a \leq 0$. Но это противоречит выбору элемента a .

Если $a < 0$, то $-a > 0$. Рассуждая аналогично предыдущему случаю, получим неравенство $0 \leq a$. Но оно также противоречит выбору элемента a . $\square$

Пусть G — частично упорядоченная аддитивная абелева группа. Будем обозначать через $P(G)$ положительный конус группы G . Доказательство следующего утверждения можно найти, например, в [5, 13].

Предложение 8. Пусть M — подмножество группы G . Тогда M совпадает с $P(G)$ относительно некоторого частичного порядка $\leq$ в том и только в том случае, если M удовлетворяет следующим условиям:

- а) $M + M \subseteq M$;
- б) $-M \cap M = \{0\}$, где $-M = \{g \in G \mid -g \in M\}$.

При этом если $a, b \in G$, то $a \leq b$ в группе G тогда и только тогда, когда $b - a \in M$.

Теорема 9. Пусть $R = \langle R, +, \cdot \rangle$ — кольцо и M — подмножество в R . Тогда M является множеством всех положительных элементов кольца R относительно некоторого частичного правого $\mathcal{K}$ -порядка $\leq$ в том и только в том случае, когда M является положительным конусом группы $\langle R, +, \leq \rangle$, удовлетворяющим следующему условию:

- в) $0 \leq a + ar$ для всех $a \in M$ и $r \in R$.

Доказательство. Пусть кольцо R является частично $\mathcal{K}$ -упорядоченным справа и $M = P(\langle R, + \rangle)$. Рассмотрим $a \in M$ и $r \in R$. Если $a = 0$, то $a + ar = 0 + 0r = 0 \leq 0 = a$. Если $0 < a$, то по определению 2 $a(-r) \leq a$ для всех $r \in R$. Из этого следует, что $0 \leq a + ar$ для всех $r \in R$, т. е. условие в) выполняется.

Обратно, допустим, что $M = P(\langle R, + \rangle)$ и выполняется условие в). Если $0 < a$ в кольце R , то $a \in M$. Согласно условию в) из этого следует, что $0 \leq a + a(-r)$ для всех $r \in R$. Последнее влечёт неравенство $ar \leq a$ для всех $r \in R$. Следовательно, по определению 2 R — частично $\mathcal{K}$ -упорядоченное справа кольцо. $\square$

Далее везде в работе будем обозначать через R^+ множество всех положительных элементов частично $\mathcal{K}$ -упорядоченного кольца R .

3. Идеалы колец, частично $\mathcal{K}$ -упорядоченных справа

В данном разделе приводятся доказательства первых четырех теорем.

На протяжении всего раздела R — произвольное частично $\mathcal{K}$ -упорядоченное справа кольцо.

Доказательство теоремы 1. Так как $\langle I, +, \leq \rangle$ — выпуклая подгруппа группы $\langle R, +, \leq \rangle$, то существует частично упорядоченная группа $\langle R/I, +, \leq_1 \rangle$ с положительным конусом $P = P(\langle R/I, + \rangle)$.

Смежный класс K принадлежит P в том и только в том случае, когда существует элемент $a \in P(\langle R, +, \leq \rangle)$, для которого $K = a + I$.

Так как I — двусторонний идеал кольца R , то существует фактор-кольцо $\langle R/I, +, \cdot \rangle$, где $(a + I)(b + I) = ab + I$.

Докажем, что конус P удовлетворяет условию в) теоремы 9.

Допустим, что $a + I \in P$.

Если $a + I = I$, то $a \in I$, откуда следует, что $(a + I) + (a + I)(r + I) = I + (ar + I) = I \geq_1 I$ для всех $r + I \in R/I$.

Если $I <_1 a + I$, существует элемент $b \in a + I \cap P(\langle R, + \rangle)$, где $b \notin I$. По условию теоремы $-br = b(-r) \leq b$ для всех $r \in R$. Отсюда следует верность соотношений

$$-(a + I)(r + I) = (a + I)(-r + I) = (b + I)(-r + I) = -br + I \leq_1 b + I = a + I$$

для всех $r + I \in R/I$. Значит, $I \leq_1 (a + I) + (a + I)(r + I)$ для всех $r + I \in R/I$.

Конус P удовлетворяет условию в) теоремы 9. Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим в кольце R подмножество

$$M = \{a \in R \mid a \in I^+ \text{ или } a \notin I \text{ и } a + I \in (R/I)^+\}.$$

Покажем, что M удовлетворяет условиям предложения 8. Пусть $a, b \in M$.

Если $a, b \in I^+$, то $a, b \in P(\langle I, +, \leq_1 \rangle)$. Значит, по пункту а) предложения 8 $a + b \in P(\langle I, +, \leq_1 \rangle)$, т. е. $a + b \in I^+$. Поэтому, $a + b \in M$.

Если $a \notin I$ или $b \notin I$, то выполняется одно из следующих условий:

- 1) $I <_2 a + I \leq_2 a + b + I$ и $a + b \notin I$;
- 2) $I <_2 b + I \leq_2 a + b + I$ и $a + b \notin I$.

Следовательно, $a + b + I \in (R/I)^+$, т. е. $a + b \in M$.

Таким образом, M удовлетворяет пункту а) предложения 8.

Пусть $a \in -M \cap M$, т. е. $a \in -M$ и $a \in M$. Допустим, что $a \notin I$. Это влечёт справедливость соотношений $I <_2 -(a + I) = -a + I$ и $I <_2 a + I$. Отсюда следует, что $a + I <_2 I$ и $I <_2 a + I$, что противоречит свойствам частичного порядка. Значит, $a \in I$, т. е. $a \in P(\langle I, +, \leq_1 \rangle)$ и $-a \in P(\langle I, +, \leq_1 \rangle)$. Следовательно, по пункту б) предложения 8 $a = 0$.

Таким образом, M удовлетворяет пункту б) предложения 8, т. е. M совпадает с $P(\langle R, + \rangle)$ относительно некоторого частичного порядка $\leq$.

Пусть далее $a \neq 0$ и $a \in M$. Если $a \in I^+$, то по условию теоремы $ar \leq_1 a$ для всех $r \in R$, т. е. $a - ar \in I^+$. Значит, $a - ar \in M$, т. е. $ar \leq a$ для всех $r \in R$.

Если $a \notin I$, то $I <_2 a + I$. Тогда по условию теоремы $(a + I)(r + I) \leq_2 a + I$ для всех $r + I \in R/I$. Из равенства $(a + I)(r + I) = a + I$ следуют соотношения

$$(a + I) + (a + I) = (a + I)(2r + I) \leq_2 a + I.$$

Тогда $a + I \leq_2 I$, что противоречит выбору класса $a + I$. Таким образом, $ar + I = (a + I)(r + I) <_2 a + I$. Значит, $I <_2 a - ar + I$ и $a - ar \notin I$. Следовательно, $a - ar \in M$, т. е. $ar \leq a$ для всех $r \in R$, т. е. по определению $2 \leq$ — частичный $\mathcal{K}$ -порядок справа на кольце R .

Рассмотрим неравенства $a \leq r \leq b$, где $a, b \in I$ и $r \in R$. Если $r \notin I$, то в кольце R/I справедливы соотношения $I <_2 r + I <_2 I$, что противоречит свойствам частичного порядка. Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Предложение 10. Для частично упорядоченной группы $G = \langle G, + \rangle$ следующие условия равносильны:

- 1) G является направленной группой;
- 2) каждый элемент $g \in G$ представим в виде $g = a - b$, где $a, b \in P(G)$.

Доказательство данного утверждения можно найти, например, в [13, ч. I, гл. II, § 1, предложение 1].

Доказательство теоремы 3. Пусть $a \in M$ и $r \in R$. Если $0 < a$, то по условию теоремы $ar, -ar = a(-r) \leq a$. Из неравенств $-a \leq ar \leq a$ и выпуклости подгруппы M следует, что $ar \in M$.

Допустим, что a — произвольный элемент из M . Так как M — направленная подгруппа, то согласно предложению 10 $a = b - c$ для некоторых $b, c \in P(M)$. Тогда $ar = br - cr$ в кольце R для любого $r \in R$, где $br, cr \in M$ по доказанному выше. Окончание доказательства тривиально. $\square$

Следствие 11 [2]. Пусть кольцо $R = \langle R, +, \cdot, \leq \rangle$ является частично $\mathcal{K}$ -упорядоченным, M — выпуклая направленная подгруппа в группе $\langle R, +, \leq \rangle$. Тогда M — двусторонний идеал кольца R .

Доказательство. Согласно утверждению 1 предложения 7 R — частично $\mathcal{K}$ -упорядоченное справа кольцо. По теореме 3 подгруппа M является правым идеалом кольца R .

Пусть $a \in M$ и $r \in R$. Если $a > 0$, то по условию теоремы согласно определению 1 $ra, -ra = (-r)a \leq a$ для любого элемента $r \in R$. Из неравенств $-a \leq ra \leq a$ и выпуклости подгруппы M следует, что $ra \in M$.

Если u — произвольный элемент подгруппы M , то по предложению 10 $u = b - c$ для некоторых положительных элементов $b, c \in M$. Тогда $ru = rb - rc \in R$ для любого $r \in R$, где $rb, rc \in M$ по доказанному выше. Таким образом, M — двусторонний идеал кольца R . $\square$

Следствие 12. Если R — частично $\mathcal{K}$ -упорядоченное справа кольцо, то для любого элемента $a > 0$ в R существует выпуклый направленный правый идеал I_a , в котором каждый элемент $u \in I_a$ представим в виде $u = b - c$, где $0 \leq b \leq ka$ и $0 \leq c \leq la$ для некоторых целых чисел $k > 0$ и $l > 0$.

Доказательство. В частично упорядоченной группе $G = \langle R, + \rangle$ для каждого элемента $a \in P(G)$ ($a \neq e$) существует выпуклая направленная подгруппа $[a]$, положительный конус которой $P([a])$ состоит из элементов $x \in P(G)$, удовлетворяющих неравенству $x \leq ka$ для некоторого целого числа $k > 0$ (подробнее см. [16, 17]). Согласно теореме 3 подгруппа $[a]$ частично упорядоченной группы $\langle R, + \rangle$ является правым идеалом кольца R . $\square$

Определение 7. Кольцевой гомоморфизм f частично $\mathcal{K}$ -упорядоченного кольца R в частично $\mathcal{K}$ -упорядоченное кольцо S называется o -гомоморфизмом, если для всех элементов $r, s \in R$ из того, что $r \leq s$, следует, что $f(r) \leq f(s)$.

Доказательство теоремы 4. По условию теоремы существует частично упорядоченная группа $\langle G/I, +, \leq_1 \rangle$ с положительным конусом $P = P(\langle G/I, + \rangle)$.

Смежный класс K принадлежит P в том и только в том случае, когда существует элемент $a \in P(\langle R, +, \leq \rangle)$, для которого $K = a + I$. Согласно следствию 11 существует фактор-кольцо $R/I = \langle R/I, +, \cdot \rangle$. По теореме 1 $\langle R/I, +, \leq_1 \rangle$ является частично $\mathcal{K}$ -упорядоченным справа кольцом. Если $I <_1 a + I$ в частично упорядоченной группе $\langle R/I, +, \leq_1 \rangle$, то существует элемент $b \in a + I \cap P(\langle R, + \rangle)$, где $b \notin I$.

Рассмотрим произвольный класс $r + I \in R/I$. По условию теоремы имеет место неравенство $rb \leq b$ для всех элементов $r \in R$. Следовательно,

$$(r + I)(a + I) = (r + I)(b + I) = rb + I \leq_1 b + I = a + I$$

для всех $r + I \in R/I$. Значит, по определению 3 R/I — частично $\mathcal{K}$ -упорядоченное слева кольцо и по утверждению 1 предложения 7 R/I — частично $\mathcal{K}$ -упорядоченное кольцо. Окончание доказательства тривиально. $\square$

4. Отношение «бесконечно мал» в частично упорядоченных группах

Пусть G — аддитивная частично упорядоченная группа.

Замечание А [2]. При $a > 0$ в G соотношение $a \ll a$ выполняться не может.

Для элемента $0 < a \in G$ рассмотрим множество

$$M_a = \{x \in G \mid x \ll a\}.$$

Множество M_a непустое, так как $0 \in M_a$.

Лемма 13. Если группа G линейно упорядоченная, то M_a — выпуклая подгруппа группы G , отличная от самой группы.

Доказательство. Пусть $u, v \in M_a$ и $n \in \mathbb{Z}$. Так как группа G линейно упорядоченная, то $u \leq v$ или $v \leq u$.

Рассмотрим первый случай. Так как $u \leq v$ и $v \leq v$, то $u+v \leq 2v$. Неравенство $0 < n$ влечёт справедливость соотношений $n(u+v) \leq 2nv \leq a$.

Допустим, что $n < 0$. Из неравенств $-v \leq -u$, $-u \leq -u$ и $-n > 0$ следует справедливость соотношений

$$n(u+v) = (-n)[- (u+v)] = (-n)[(-v) + (-u)] \leq (-n)(-2u) = 2nu \leq a.$$

Значит, $n(u+v) \leq a$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Кроме того, формула $n(-u) = (-n)u \leq a$ верна для всех $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $u+v, -u \ll a$ и $u+v, -u \in M_a$. Так как $0 \in M_a$, то M_a является подгруппой группы G .

Предположим, что $u \leq g \leq v$ для некоторых элементов $u, v \in M_a$ и $g \in G$.

Если $n > 0$, то $ng \leq nv \leq a$.

Если $n < 0$, то $ng = (-n)(-g) \leq (-n)(-u) = nu \leq a$.

Следовательно, $g \ll a$ и $g \in M_a$. Из замечания А следует, что $a \notin M_a$. $\square$

Следствие 14. Пусть кольцо R является линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченным справа и $0 < a \in R^+$. Тогда M_a — выпуклый правый идеал кольца, отличный от R .

Доказательство. Согласно лемме 13 множество M_a является выпуклой подгруппой группы $\langle R, + \rangle$. Так как группа $\langle R, + \rangle$ линейно упорядоченная, то и группа M_a также линейно упорядоченная. Остальное следует из теоремы 3. $\square$

Пример 6. Пусть $\mathcal{R}$ — ассоциативное линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченное кольцо из примера 3.

Рассмотрим соответствующие кольцо Ли

$$\mathcal{R}^- = \langle \mathcal{R}, +, \circ \rangle, \text{ где } A \circ B = AB - BA \text{ для всех } A, B \in \mathcal{R}.$$

По определению 5 из неравенства $A > 0$ следует справедливость соотношений $AB \ll A$ и $BA \ll A$. Тогда по лемме 13 $A \circ B \ll A$ и $B \circ A \ll A$ для всех матриц $B \in \mathcal{R}^-$. Следовательно, по определению 5 кольцо Ли $\mathcal{R}^-$ является линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченным кольцом.

Далее рассмотрим соответствующие йорданово кольцо

$$\mathcal{R}^+ = \langle \mathcal{R}, +, * \rangle, \text{ где } A * B = AB + BA \text{ для всех } A, B \in \mathcal{R}.$$

По определению 5 из неравенства $A > 0$ следуют справедливость соотношений $AB \ll A$ и $BA \ll A$. Тогда по лемме 13 $A * B \ll A$ и $B * A \ll A$ для всех матриц $B \in \mathcal{R}^+$. Значит, по определению 5 йорданово кольцо $\mathcal{R}^+$ также является линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченным кольцом.

Лемма 15. Пусть G — линейно упорядоченная группа и $H \subset L$ — скачок выпуклых подгрупп группы G . Тогда $H = M_b$ для всех $b \in P(L) \setminus H$.

Доказательство. Допустим, что $x \in P(M_b)$. Тогда $0 \leq x = 1 \cdot x \leq b$. Отсюда следует, что $x \in L$, так как подгруппа L выпукла в группе G . Значит, $P(M_b) \subseteq L$. Так как группа L является линейно упорядоченной, согласно предложению 10 имеет место включение $M_b \subseteq L$. Из него следует, что $M_b \subset L$,

так как согласно замечанию А $b \notin M_b$. По условию леммы отсюда следует, что $M_b \subseteq H$.

Теперь допустим, что $a \in P(H) \setminus M_b$. Значит, существует число $n \in \mathbb{Z}$, такое что $0 < b < na$, где $na \in H$. Так как H — выпуклая подгруппа в G , то $b \in H$. Это противоречит выбору элемента b . Следовательно, $H = M_b$. $\square$

Теорема 16. Пусть R — кольцо и $\langle R, +, \leq \rangle$ — частично упорядоченная группа. Тогда условие (1) определения 2 равносильно условию (2) определения 5.

Доказательство. Допустим, что порядок $\leq$ удовлетворяет условию (1). Рассмотрим элементы $a > 0$ и b в кольце R и $n \in \mathbb{Z}$. Если $n > 0$, то, используя правило дистрибутивности, получаем верные соотношения $n(ab) = a(nb) \leq a$. Если $n = 0$, то $n(ab) = 0 < a$. Если $n < 0$, то по доказанному получаем верные соотношения

$$n(ab) = (-n)(-ab) = (-n)(a(-b)) \leq a.$$

Значит, $n(ab) \leq a$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Таким образом, порядок $\leq$ удовлетворяет условию (2).

В обратном случае нетрудно заметить, что формула $ab \leq a$ является следствием формулы $ab \ll a$ для некоторого $a > 0$ и всех b в кольце R . $\square$

5. Скачки идеалов в линейно упорядоченных кольцах

Из леммы 15 вытекает следующее утверждение.

Следствие 17. Пусть кольцо R является линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченным справа. Если $I \subset J$ — скачок выпуклых правых идеалов в кольце R , то $JR \subseteq I$.

Доказательство. Если $v \in I$, то $vr \in I$ для всех $r \in R$.

Рассмотрим $v \in J \setminus I$. Если $0 < v$, то по определению 5 $vr \ll v$ для всех $r \in R$. Значит, $vr \in M_v$. По лемме 15 заключаем, что $vr \in I$. Если $v < 0$, то $0 < -v$. Это влечёт верность соотношений $vr = (-v)(-r) \ll (-v)$. Таким образом, $vr \in M_{-v}$. Согласно лемме 15 $vr \in I$. Следовательно, $vr \in I$ для всех элементов $r \in R$ и $v \in J$. $\square$

Доказательство теоремы 5. По условию теоремы группа $\langle R, +, \leq \rangle$ линейно упорядоченная. Известно, что выпуклые подгруппы в такой группе образуют полную систему $\mathcal{U}$ (см., например, [13, ч. I, гл. IV, § 3]).

По теореме 3 каждая выпуклая подгруппа группы $\langle R, +, \leq \rangle$ является правым идеалом кольца R . Следовательно, $\mathcal{U}$ — полная система выпуклых правых идеалов кольца R . Если $I \subset J$ — скачок правых идеалов в системе $\mathcal{U}$, то согласно следствию 17 $JR \subseteq I$, т. е. утверждение 1) справедливо.

Согласно утверждению 1) для любых элементов $b \in J$ и $a \in I \subset R$ элемент ba содержится в идеале I . Значит, имеет место включение $JI \subseteq I$. Таким образом, I — двусторонний идеал в J , т. е. справедливо утверждение 2).

Третье утверждение теоремы является следствием леммы 15, так как включение $I \subset J$ является скачком выпуклых подгрупп в системе $\mathcal{U}$. Теорема доказана полностью. $\square$

Замечание В. Пусть $\mathcal{U}$ — полная система подгрупп группы $\langle G, + \rangle$. Тогда существует скачок $I_g \subset I^g$ подгрупп $I_g, I^g \in \mathcal{U}$ для каждого элемента $g \neq 0 \in G$, где I_g — теоретико-множественное объединение подгрупп $H \in \mathcal{U}$, для которых $g \notin H$, а I^g — теоретико-множественное пересечение подгрупп $K \in \mathcal{U}$, для которых $g \in K$. Кроме того, $g \in I^g \setminus I_g$.

Замечание С. Пусть $\mathcal{U}$ — полная система подгрупп группы $\langle G, + \rangle$, $H \subset K$ — скачок подгрупп и $g \in K \setminus H$. Тогда $I_g = H$ и $I^g = K$.

Лемма 18. Пусть G — аддитивная абелева группа и в ней существует полная система $\mathcal{U}$ подгрупп, в которой каждый скачок $H \subset K$ удовлетворяет следующему условию: фактор-группа $\langle K/H, + \rangle$ является группой без кручения. Тогда на группе G можно определить линейный порядок с положительным конусом

$$P(G) = \{g \in G \mid g + I_g > I_g \text{ в группе } \langle I^g/I_g, + \rangle\} \cup \{0\}.$$

Доказательство. Согласно замечанию В для каждого элемента $g \neq 0 \in G$ существует скачок $I_g \subset I^g$. По условию леммы фактор-группа $\langle I^g/I_g, + \rangle$ является абелевой группой без кручения. Следовательно, группу $I_g \subset I^g$ можно линейно упорядочить (см., например, [5, гл. II, § 3, предложение 8; 3, гл. XIII, § 7, теорема 11]).

Покажем, что множество $P(G)$ удовлетворяет условиям предложения 8.

Допустим, что $u, v \in P(G)$. Если $u = 0$ или $v = 0$, то $u + v \in P(G)$. Предположим, что $u \neq 0$ и $v \neq 0$. Согласно замечанию В существует скачок $I_u \subset I^u$ в полной системе подгрупп $\mathcal{U}$, и по определению множества $P(G)$ $u + I_u > I_u$ в группе $\langle I^u/I_u, + \rangle$.

Если $v \in I_u$, то по замечанию С $I_{u+v} = I_u$, так как по замечанию В $u + v \in I^u \setminus I_u$. Отсюда следуют соотношения $u + v + I_{u+v} = u + v + I_u = u + I_u > I_u = I_{u+v}$. Следовательно, $u + v \in P(G)$.

Если $v \in I^u \setminus I_u$, то согласно замечанию С справедливо равенство $I_v = I_u$. Из определения множества $P(G)$ следует верность соотношений $v + I_u = v + I_v > I_v = I_u$. Из последних вытекает справедливость соотношений $u + v + I_u = (u + I_u) + (v + I_v) > I_u$ в группе $\langle I^u/I_u, + \rangle$. Это означает, что $u + v \in I^u \setminus I_u$, и согласно замечанию С $I_{u+v} = I_u$. Следовательно, $u + v + I_{u+v} = u + v + I_u > I_u = I_{u+v}$. Значит, $u + v \in P(G)$.

Предположим, что $v \notin I^u$. Рассмотрим скачок $I_v \subset I^v$ в полной системе подгрупп $\mathcal{U}$. Так как имеет место включение $I^u \subseteq I_v$, по определению множества $P(G)$ верны соотношения $u + v + I_v = v + I_v > I_v$. Это означает, что $u + v \in I^v \setminus I_v$, и согласно замечанию С $I_{u+v} = I_v$. Отсюда заключаем, что $u + v + I_{u+v} = u + v + I_v = v + I_v > I_v = I_{u+v}$. Значит, $u + v \in P(G)$.

Таким образом, $P(G) + P(G) \subseteq P(G)$.

Теперь предположим, что $u \in P(G) \cap -P(G)$. Если $u \neq 0$, то $u + I_u > I_u$ и $-(u + I_u) = -u + I_u > I_u$, так как по замечанию С $I_{-u} = I_u$. Но последнее

противоречит свойствам отношения частичного порядка. Таким образом, $u = 0$ и $P(G) \cap -P(G) = \{0\}$.

Согласно предложению 8 $P(G)$ является множеством всех положительных элементов группы G относительно некоторого частичного порядка $\leq$.

Теперь допустим, что $g \in G$. Если $g = 0$, то $g \in P(G)$. Если $g \neq 0$, то $g \in P(G)$ или $-g \in P(G)$, так как по вышесказанному $g + I_g > I_g$ или $-g + I_g = -(g + I_g) > I_g$ в группе $\langle I^g/I_g, + \rangle$. Следовательно, группа G является линейно упорядоченной относительно нового порядка. $\square$

Доказательство теоремы 6. Согласно лемме 18 существует частичный порядок $\leq$ с положительным конусом $P(G)$, относительно которого группа $G = \langle R, +, \leq \rangle$ является линейно упорядоченной.

Предположим, что $a > 0$ в группе G . Рассмотрим скачок $I_a \subset I^a$ в полной системе подгрупп $\mathcal{U}$ группы G . По определению множества $P(G)$ в лемме 18 заключаем, что $a + I_a > I_a$ в группе $\langle I^a/I_a, + \rangle$. Так как по замечанию В $a \in I^a$, то по условию теоремы $ar \in I_a$ для всех $r \in R$. Это означает, что $a + ar \in I^a \setminus I_a$ для всех $r \in R$. Значит, по замечанию С $I_{a+ar} = I_a$ для всех $r \in R$. Таким образом, справедливы соотношения

$$a + ar + I_{a+ar} = a + ar + I_a = a + I_a > I_a = I_{a+ar}$$

для всех элементов $r \in R$. По определению множества $P(G)$ в лемме 18 отсюда следует, что $0 \leq a + ar$ для всех $r \in R$. Применяя теорему 9, заключаем, что $P(G)$ — множество всех положительных элементов кольца R относительно линейного $\mathcal{K}$ -порядка справа $\leq$. Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Литература

- [1] Бервинов Д. А., Ширшова Е. Е. Частичные $\mathcal{K}$ -порядки в кольцах // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения. Материалы XIII Междунар. конф., посв. 85-летию Сергея Сергеевича Рышкова. Тула, 25–30 мая 2015 года. — Тула, 2015. — С. 60–61.
- [2] Бибаева В. Н., Ширшова Е. Е. О линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченных кольцах // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 4. — С. 13–23.
- [3] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.
- [4] Копытов В. М. Упорядочение алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 3. — С. 295–325.
- [5] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.
- [6] Кочетова Ю. В. О некоторых свойствах идеалов решёточно упорядоченных алгебр Ли // Вестн. СамГУ. Естественнауч. сер. Математика. — 2007. — Т. 57, № 7. — С. 73–83.
- [7] Кочетова Ю. В. Первичные и полупервичные решёточно упорядоченные алгебры Ли // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 7. — С. 137–143.
- [8] Кочетова Ю. В. О нижнем слабо разрешимом l -радикале решёточно упорядоченных алгебр Ли // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 8. — С. 137–149.

- [9] Кочетова Ю. В. Первичный радикал решёточно упорядоченных алгебр Ли // УМН. — 2008. — Т. 63, № 5. — С. 191—192.
- [10] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О гомоморфизмах частично упорядоченных алгебр Ли // Избранные вопросы алгебры: Сб. статей, посвящ. памяти Н. Я. Медведева. — Барнаул: Изд-во Алтайского ун-та, 2007. — С. 131—142.
- [11] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О линейно упорядоченных линейных алгебрах // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Т. 15, вып. 1. — С. 53—63.
- [12] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал решёточно $\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 1. — С. 85—158.
- [13] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.
- [14] Ширшова Е. Е. Лексикографические расширения и pl -группы // Фундамент. и прикл. матем. — 1995. — Т. 1, вып. 4. — С. 1133—1138.
- [15] Ширшова Е. Е. О первичных радикалах и сплетениях частично упорядоченных групп // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 8. — С. 245—261.
- [16] Ширшова Е. Е. Гомоморфизмы pl -групп // Фундамент. и прикл. матем. — 1997. — Т. 3, вып. 1. — С. 303—314.
- [17] Conrad P. Representation of partially ordered Abelian groups as groups of real valued functions // Acta Math. — 1966. — Vol. 116. — P. 199—221.

