О разложении матричных функций в тригонометрические ряды

В. Д. ШМАТКОВ
Рязанский государственный радиотехнический университет
e-mail: shmatkov-vadim@yandex.ru

УДК 512.64

Ключевые слова: матрица, ряд Фурье.

Аннотация

В данной работе установлены условия, при которых матричные функции разлагаются в матричные тригонометрические ряды.

Abstract

V. D. Shmatkov, Expansion of matrix functions into trigonometric series, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 241—245.

In this scientific work, we set the conditions under which matrix functions are expanded into matrix trigonometric series.

Введение

Хорошо известно, что функции действительного переменного можно представлять тригонометрическими рядами Фурье. В данной работе показано, что для матричных функций существует аналог данного факта: матричные функции при определённых условиях разлагаются в тригонометрические матричные ряды Фурье.

Основная конструкция

Пусть $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел. Обозначим через $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ множество всех матриц размера $n \times n$ над полем $\mathbb{C}$.

По теореме Шура существует унитарная матрица $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, такая что $T^{-1}AT = B$ — верхнетреугольная матрица.

Пусть $q_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, — множество многочленов над полем $\mathbb{R}$, каждый из которых имеет корень 0. Рассмотрим поле рациональных дробей $\mathbb{C}(x)$. Будем считать, что $B \in \mathrm{M}_n\bigl(\mathbb{C}(x)\bigr)$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 1, с. 241—245.

Рассмотрим диагональную матрицу

$$d\big(q_i(x)\big) = \begin{pmatrix} q_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_n(x) \end{pmatrix}.$$

Пусть $B\big(q_i(x)\big) = B + d\big(q_i(x)\big)$. Ясно, что $B\big(q_i(x)\big) \in \mathrm{M}_n\big(\mathbb{C}(x)\big)$.

Рассмотрим $q_i(x)$, такие что все элементы $B(i,i) + q_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, попарно различны. Тогда у матрицы $B\big(q_i(x)\big)$ все собственные значения попарно различны и её можно диагонализировать в поле рациональных дробей, т. е. существует обратимая матрица $S \in \mathrm{M}_n\big(\mathbb{C}(x)\big)$, такая что

$$S^{-1} B\big(g_i(x)\big) S = \begin{pmatrix} B(1,1) + q_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(n,n) + q_n(x) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Если $x = 0$, то правая часть равенства (1) равна

$$\begin{pmatrix} B(1,1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(n,n) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, после сопряжения в левой части (1) и подстановки $x = 0$ левая часть станет равна

$$\begin{pmatrix} B(1,1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(n,n) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$B = B\big(q_i(x)\big)\Big|_{x=0} = S \begin{pmatrix} B(1,1) + q_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(n,n) + q_n(x) \end{pmatrix} S^{-1}\Bigg|_{x=0}. \tag{2}$$

Здесь $|_{x=0}$ означает, что делается подстановка $x = 0$.

Вспоминая, что $A = TBT^{-1}$, и считая, что $T_1 = TS$, имеем

$$A = T_1 \begin{pmatrix} B(1,1) + q_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(n,n) + q_n(x) \end{pmatrix} T_1^{-1}\Bigg|_{x=0}. \tag{3}$$

Считая, что переменная x принимает значения в поле $\mathbb{R}$, получаем

$$A = \lim_{x \to 0} T_1 \begin{pmatrix} B(1,1) + q_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(n,n) + q_n(x) \end{pmatrix} T_1^{-1}. \tag{4}$$

Пусть $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} \dots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$ — минимальный многочлен матрицы A. Здесь $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ — все собственные значения матрицы A.

Рассмотрим скалярную функцию f, которая имеет производные до порядка $m_k - 1$ включительно в окрестностях λ_k, $k = 1, \dots, s$. Тогда определена матричная функция $f(A)$ (см. [1, гл. 5, § 1]) и для фиксированного x, такого что $B(i,i) + q_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, попадают в эти окрестности, для матричной функции f выполнено равенство

$$f\left(T_1 \begin{pmatrix} B(1,1)+q_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(n,n)+q_n(x) \end{pmatrix} T_1^{-1}\right) = \\ = T_1 \begin{pmatrix} f\big(B(1,1)+q_1(x)\big) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f\big(B(n,n)+q_n(x)\big) \end{pmatrix} T_1^{-1}.$$

Последнее равенство следует из утверждения 3 в [1, гл. 5, § 1].

Из (4) следует, что

$$f(A) = \lim_{x\to 0} T_1 \begin{pmatrix} f\big(B(1,1)+q_1(x)\big) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f\big(B(n,n)+q_n(x)\big) \end{pmatrix} T_1^{-1}. \tag{5}$$

Обозначим через E единичную матрицу.

Теорема. *Пусть f — скалярная функция действительного переменного, которая разлагается в окрестности собственных значений матрицы A в тригонометрический ряд, т. е. для всех x из этих окрестностей*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Тогда

$$f(A) = \frac{a_0}{2}E + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kA + b_k \sin kA.$$

Доказательство. Так как по формуле (5)

$$\sin kA = \lim_{x\to 0} T_1 \begin{pmatrix} \sin\Big(k\big(B(1,1)+q_1(x)\big)\Big) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sin\Big(k\big(B(n,n)+q_n(x)\big)\Big) \end{pmatrix} T_1^{-1},$$

$$\cos kA = \lim_{x\to 0} T_1 \begin{pmatrix} \cos\Big(k\big(B(1,1)+q_1(x)\big)\Big) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \cos\Big(k\big(B(n,n)+q_n(x)\big)\Big) \end{pmatrix} T_1^{-1},$$

то по этой же формуле (5) получаем, что

$$f(A) = \frac{a_0}{2}E + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kA + b_k \sin kA,$$

при условии, что $f(A)$ определена. □

Пример 1. Из теории скалярных рядов Фурье известно, что для скалярной функции $f(x) = x$, $x \in (-\pi, \pi)$, имеет место разложение

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \sin kx.$$

Поэтому если все собственные значения матрицы A лежат в интервале $(-\pi, \pi)$, то

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}(-1)^{k+1} \sin kA.$$

Если собственные значения матрицы лежат в интервале $(-l, l)$, то, используя разложение скалярной функции в ряд Фурье, получаем, что

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi k} l \sin kA.$$

Пусть все собственные значения матрицы A лежат в интервале $(-\pi, \pi)$. Тогда, используя разложение скалярной функции $f(x) = x^2$ в ряд Фурье, получаем, что

$$A^2 = \frac{1}{3}\pi^2 E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 4}{k^2} \cos kA.$$

Пример 2. Рассмотрим действительный интервал (a, b) и $c = (a + b)/2$.

Пусть скалярная функция действительного переменного разлагается в тригонометрический ряд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k(x - c) + b_k \sin k(x - c).$$

Тогда если собственные значения матрицы A лежат в интервале (a, b), то по формуле (5)

$$f(A) = \frac{a_0}{2}E + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k(A - cE) + b_k \sin k(A - cE).$$

Скалярные функции $f(x) = 1/x$, $f(x) = \sqrt{x}$ разлагаются в ряд Фурье на интервале (a, b), если $a, b > 0$. Поэтому существует разложение в тригонометрический ряд для $\sqrt{A}$, A^{-1}, если, например, собственные значения матрицы A положительны.

Литература

[1] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967.

[2] Жук В. В., Натансон Г. И. Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации. — Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1983.

[3] Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука, 1970.

[4] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.