Специфические свойства одномерных псевдопредставлений групп*

А. И. ШТЕРН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН
e-mail: aishtern@mtu-net.ru

УДК 512.546+517.986.6+512.815.1

Ключевые слова: псевдопредставление, квазипредставление, характер, дефект.

Аннотация

Получен ряд утверждений о свойствах одномерных (не обязательно ограниченных) псевдопредставлений групп. В частности, получено количественное условие на дефект псевдопредставления, достаточное для того, чтобы псевдопредставление было чистым, т. е. чтобы ограничение данного псевдопредставления на любую аменабельную подгруппу было обычным характером этой подгруппы.

Abstract

A. I. Shtern, Specific properties of one-dimensional pseudorepresentations of groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 1, pp. 247—255.

We obtain assertions concerning general properties of one-dimensional (not necessarily bounded) pseudorepresentations of groups. In particular, we obtain a quantitative condition on the numerical defect of a given pseudorepresentation which is sufficient for the pseudorepresentation to be pure, i.e., for the restriction of the given pseudorepresentation to every amenable subgroup be an ordinary character of this subgroup.

Дорогому Александру Васильевичу Михалёву
с поздравлениями с 75-летием

1. Введение

Пусть $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, $\mathbb{Z}$ — группа целых чисел, $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.

Пусть G — группа, $e \in G$ — единичный элемент G. Напомним, что вещественная функция f на G называется (*вещественным*) *квазихарактером*

*Исследование поддержано грантом РФФИ 14-01-00007.

на G [1], если числовое множество $\{f(gh) - f(g) - f(h) \mid g, h \in G\}$ является ограниченным, и квазихарактер f называется *псевдохарактером* на G, если $f(g^n) = nf(g)$ для любых $g \in G$ и $n \in \mathbb{Z}$. Если E — нормированное векторное пространство, то отображение π группы G в алгебру $L(E)$ непрерывных линейных операторов в E называется *квазипредставлением* (точнее, *ε-квазипредставлением*, где $\varepsilon \geqslant 0$) группы G в E, если $\pi(e) = 1_E$ (1_E — единичный оператор в E) и семейство $U(\pi)$, определяемое равенством

$$U(\pi) = \{\pi(g_1 g_2) - \pi(g_1)\pi(g_2) \mid g_1, g_2 \in G\},$$

лежит в шаре радиуса ε с центром в нуле. Назовём ε-квазипредставление π в банаховом пространстве E *ε-псевдопредставлением*, если $\pi(e) = 1_E$, $\pi(g)^{-1} = \pi(g^{-1})$ для всех $g \in G$ и для всех $g \in G$ и всех $n \in \mathbb{Z}$ существует такой линейный оператор $A(n, g)$ в $L(E^*)$ (E^* — пространство, сопряжённое к E), что

$$\|A(n,g) - \mathbf{1}_{E^*}\| \leqslant \varepsilon, \quad \pi(g^n)^* = A(n,g)(\pi(g)^*)^n A(n,g)^{-1}, \quad g \in G, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\|\cdot\|$ — операторная норма в $L(E^*)$, а $\mathbf{1}_{E^*}$ — единичный оператор в E^* (см. [2]). Псевдопредставление называется *чистым*, если его ограничение на любую аменабельную подгруппу является обычным представлением этой подгруппы (см. [4, 5, 9]).

Квазихарактеры и псевдохарактеры интенсивно изучаются (иногда под названием квазиморфизмов и однородных квазиморфизмов) и имеют многочисленные приложения (см., например, [4] и указанную там литературу), а родственные им одномерные квазипредставления и псевдопредставления менее изучены (если не считать выяснения в [4, 5, 9] существенной роли квазихарактеров, псевдохарактеров и родственных им одномерных квазипредставлений и псевдопредставлений связных групп Ли (если f — квазихарактер группы G, то для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ отображение $g \mapsto \exp\bigl(i\alpha f(g)\bigr)$, $g \in G$, является одномерным квазипредставлением группы G) в описании конечномерных псевдопредставлений связных групп Ли).

В настоящей статье приведён ряд результатов о свойствах одномерных квазипредставлений и псевдопредставлений групп. Пусть $f\colon G \to \mathbb{T}$ — одномерное ε-квазипредставление. Один из основных результатов представляет собой оценку величины ε, обеспечивающую существование такого одномерного псевдопредставления F, что $|f(g) - F(g)| \leqslant q < 1$ для всех $g \in G$.

2. Предварительные сведения

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение, являющееся частным случаем более общего утверждения [3].

Лемма 2.1. *Пусть G — группа, π и ρ — неограниченные одномерные представления группы G, удовлетворяющие условию $\|\pi(g) - \rho(g)\| \leqslant q$ для некоторого q и всех $g \in G$. Тогда $\pi = \rho$. Пусть G — аменабельная группа, π и ρ —*

одномерные ограниченные представления группы G, удовлетворяющие условию $\|\pi(g)-\rho(g)\| \leqslant q$ для некоторого $q<\sqrt{3}$ и всех $g \in G$. Тогда $\pi=\rho$.

Доказательство. Если одно из представлений π и ρ не является ограниченным, то и другое не является ограниченным. Пусть $\pi(g_\alpha)$ — такая сеть, что $\pi(g_\alpha) \to \infty$. Тогда $\pi(g_\alpha)\rho(g_\alpha)^{-1} \to 1$ и $\|\pi(gg_\alpha)-\rho(gg_\alpha)\| \leqslant q$, откуда следует, что

$$\|\pi(g)p(g_\alpha)\rho(g_\alpha)^{-1}-\rho(g)\| \to 0$$

и в пределе $\|\pi(g)-\rho(g)\|=0$ для любого $g \in G$. Если же представления π и ρ ограниченные, то они унитарные, и отображение $g \mapsto \pi(g)\bigl(\rho(g)\bigr)^{-1}$, $g \in G$, тоже унитарный характер группы G, удовлетворяющий условию $\bigl|\pi(g)\bigl(\rho(g)\bigr)^{-1}-1\bigr| \leqslant q$, $q<\sqrt{3}$. Такой характер единичен, потому что множество $\{t\colon t \in \mathbb{T},\ |t-1|<\sqrt{3}\,\}$ не содержит нееденичных подгрупп группы $\mathbb{T}$. □

Лемма 2.2. *Пусть G — группа, f — одномерное ε-квазипредставление на G с комплексными значениями ($\varepsilon>0$), удовлетворяющее условию $f(e)=1$. Тогда*

1) *если f не является ограниченным, то f — обычное представление*;
2) *если f ограниченное, то $|f(g)| \leqslant (1+\sqrt{1+4\varepsilon}\,)/2$ для всех $g \in G$.*

Доказательство. Утверждение 1) хорошо известно [9] (и допускает существенное усиление, см. [9, 11—13]). Пусть f ограниченное. Тогда отображение $F\colon G \to \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+=\{x \in \mathbb{R},\ x>0\}$), определённое формулой $F(g)=|f(g)|$, $g \in G$, является ограниченным одномерным ε-квазипредставлением со значениями в $\mathbb{R}^+$. Из условия $F(g)F(g^{-1})=1$ легко следует, что

$$\sup\{|F(g)-1|,\ g \in G\}=\sup\{|F(g)-1|,\ F(g)>1,\ g \in G\}.$$

Пусть $\delta=\sup\{|F(g)-1|,\ g \in G\}$. Из условия $|F(g)F(h)-F(gh)| \leqslant \varepsilon$ следует, что $(1+\delta)^2-1-\delta \leqslant \varepsilon$, $\delta+\delta^2 \leqslant \varepsilon$, и $\delta \leqslant (\sqrt{1+4\varepsilon}-1)/2$, что завершает доказательство утверждения 2). □

Следствие 2.3. *Пусть G — группа, f — одномерное псевдопредставление группы G.*

1. *Ограничение псевдопредставления f на каждую циклическую подгруппу в G является гомоморфизмом.*
2. *При достаточно малом дефекте ($\varepsilon<0{,}65289$) псевдопредставление f инвариантно относительно внутренних автоморфизмов группы G.*

Доказательство. По определению для любого элемента $g \in G$ соотношение $f(g^n)=f(g)^n$ выполняется для всех $n \in \mathbb{Z}$. Это доказывает утверждение 1. Если f не является ограниченным, то f — обычное представление [9], поэтому утверждение очевидно. Если f ограниченное и ε — дефект f, то

$$|f(ghg^{-1})-f(g)f(hg^{-1})| \leqslant \varepsilon$$

и

$$|f(g)f(hg^{-1})-f(g)f(h)f(g^{-1})| \leqslant |f(g)|\varepsilon \quad \text{для всех} \quad h,g \in G,$$

где $|f(g)| \leqslant (1+\sqrt{1+4\varepsilon})/2$ по лемме 2.2. Если $\varepsilon(1+(1+\sqrt{1+4\varepsilon})/2) < \sqrt{3}$, то для любой циклической подгруппы $\{h^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ характеры $h^n \mapsto f(h^n)$ и $h^n \mapsto f(g)f(h^n)\big(f(g)\big)^{-1}$ этой подгруппы отличаются по модулю меньше чем на $\sqrt{3}$ и, следовательно, совпадают. □

Лемма 2.4. *Сохраним обозначения леммы 2.2. Пусть f ограниченное и отображение $F\colon G \to \mathbb{R}^+$ определено формулой $F(g) = |f(g)|$, $g \in G$. Пусть $\varphi(g) = f(g)\big(F(g)\big)^{-1}$, $g \in G$. Тогда φ — одномерное унитарное (т. е. принимающее значения в $\mathbb{T}$) ε_1-квазипредставление группы G, где $\varepsilon_1 = \varepsilon(1+\varepsilon+\sqrt{1+4\varepsilon})$.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&|\varphi(g_1)\varphi(g_2) - \varphi(g_1g_2)| = \\
&\quad = \big|f(g_1)\big(F(g_1)\big)^{-1} f(g_2)\big(F(g_2)\big)^{-1} - f(g_1g_2)\big(F(g_1g_2)\big)^{-1}\big| \leqslant \\
&\quad \leqslant \big|\big(f(g_1)f(g_2) - f(g_1g_2)\big)\big(F(g_1)\big)^{-1}\big(F(g_2)\big)^{-1}\big| + \\
&\quad + |f(g_1g_2)|\,\big|\big(F(g_1)\big)^{-1}\big(F(g_2)\big)^{-1} - \big(F(g_1g_2)\big)^{-1}\big| \leqslant \\
&\quad \leqslant \varepsilon\left(\frac{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}{2}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{\sqrt{1+4\varepsilon}+1}{2}\right),
\end{aligned}$$

что и требовалось. □

3. Основные результаты

Лемма 3.1. *Пусть G — аменабельная группа (например, коммутативная), f — одномерное ограниченное ε-квазипредставление группы G ($\varepsilon > 0$), удовлетворяющее условию $f(e) = 1$. Если $\varepsilon < 1/3$, то существует обычный унитарный характер ψ группы G, удовлетворяющий условию*

$$|f(g) - \psi(g)| < \frac{\varepsilon}{1-3\varepsilon} \quad \text{для всех} \quad g \in G.$$

Если $\varepsilon < \sqrt{3}/(2+3\sqrt{3})$ (например, если $\varepsilon < 0{,}24$), то существует обычный унитарный характер ψ группы G, удовлетворяющий условию $|f(g) - \psi(g)| < \sqrt{3}/2$ для всех $g \in G$.

Доказательство. Пусть I — левоинвариантное среднее на G. Тогда

$$\begin{aligned}
\Phi(g) &\stackrel{\text{def}}{=} I_h\big(f(gh)f(h^{-1})\big) = I_h\Big(f(gkh)f\big((kh)^{-1}\big)\Big) = I_h\big(f(gkh)f(h^{-1}k^{-1})\big) = \\
&= I_h\Big(\big(f(gkh) - f(gk)f(h)\big)\big(f(h^{-1}k^{-1}) - f(h^{-1})f(k^{-1})\big) + \\
&+ f(gk)f(h)\big(f(h^{-1}k^{-1}) - f(h^{-1})f(k^{-1})\big) + f(gkh)f(h^{-1})f(k^{-1})\Big) = \\
&= \Delta_1 + f(gk)I_h\Big(f(h)\big(f(h^{-1}k^{-1}) - f(h^{-1})f(k^{-1})\big)\Big) + \Phi(gk)f(k^{-1}) \qquad (1)
\end{aligned}$$

для всех $g, k \in G$, где $\Delta_1 = \Delta_1(gk, k^{-1})$ — числовая функция

$$I_h\Big(\big(f(gkh) - f(gk)f(h)\big)\big(f(h^{-1}k^{-1}) - f(h^{-1})f(k^{-1})\big)\Big)$$

модуль которой не превосходит ε^2. Так как $I_{h\in G}\big(f(h)f(h^{-1})\big) = \Phi(e)$, то

$$I_h\Big(f(h)\big(f(h^{-1}k^{-1}) - f(h^{-1})f(k^{-1})\big)\Big) = I_h\big(f(h)f(h^{-1}k^{-1})\big) - \Phi(e)f(k^{-1})$$

и

$$I_h\big(f(h)f(h^{-1}k^{-1})\big) - \Phi(e)f(k^{-1}) = I_l\big(f(k^{-1}l)f(l)\big) - \Phi(e)f(k^{-1})$$

(это получается заменой переменных $h \mapsto kl$ и переходом к значению I по переменному l), причём правая часть равна $\Phi(k^{-1}) - \Phi(e)f(k^{-1})$. Отсюда следует, что

$$\Phi(g) = \Delta_1 + f(gk)\big(\Phi(k^{-1}) - \Phi(e)f(k^{-1})\big) + \Phi(gk)f(k^{-1})$$

или, в другой форме,

$$f(gk)\Phi(e)f(k^{-1}) - f(gk)\Phi(k^{-1}) - \Phi(gk)f(k^{-1}) + \Phi(g) = \Delta_1 \tag{2}$$

для всех $g, k \in G$. С другой стороны, произведение величин $\Phi(gk) - f(gk)$ и $\Phi(k^{-1}) - f(k^{-1})$ равно

$$\Phi(gk)\Phi(k^{-1}) - f(gk)\Phi(k^{-1}) - \Phi(gk)f(k^{-1}) + f(gk)f(k^{-1}) \tag{3}$$

для всех $g, k \in G$. Вычитая (3) из (2), получаем

$$\begin{aligned}
&\Phi(g) - \Phi(gk)\Phi(k^{-1}) = \\
&\quad = \Delta_1 - \big(\Phi(gk) - f(gk)\big)\big(\Phi(k^{-1}) - f(k^{-1})\big) + f(gk)\big(1 - \Phi(e)\big)f(k^{-1}) = \\
&\quad = \Delta_1(gk, k^{-1}) + \Delta_2(gk, k^{-1}) + f(gk)\big(1 - \Phi(e)\big)f(k^{-1}),
\end{aligned}$$

где

$$\Delta_2 = \Delta_2(gk, k^{-1}) = -\big(\Phi(gk) - f(gk)\big)\big(\Phi(k^{-1}) - f(k^{-1})\big)$$

(заметим, что $\|\Delta_2\| \leqslant \varepsilon^2$). Наконец,

$$\Phi(gh) - \Phi(g)\Phi(h) = \Delta_1(g, h) + \Delta_2(g, h) + f(g)\big(1 - \Phi(e)\big)f(h), \quad g, h \in G. \tag{4}$$

Таким образом, Φ тоже квазихарактер группы G.

Напомним, что

$$\begin{aligned}
&\big(f(ghk) - f(gh)f(k)\big) + \big(f(gh) - f(g)f(h)\big)f(k) + \\
&\qquad + f(g)\big(f(h)f(k) - f(hk)\big) + \big(f(g)f(hk) - f(ghk)\big) = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

для всех $g, h, k \in G$, где модули первого и последнего слагаемых не превосходят ε, так что

$$\Big\|\big(f(gh) - f(g)f(h)\big)f(k) + f(g)\big(f(h)f(k) - f(hk)\big)\Big\| \leqslant 2\varepsilon$$

для всех $g, h, k \in G$.

Пусть $|f(g)| \leqslant M$ для всех $g \in G$. Введём операторную функцию

$$\psi(g) = \psi_f(g) \overset{\text{def}}{=} \Phi(g) - f(g)\Phi(e) + \Phi(g), \quad g \in G$$

(см. [10]). Из определения немедленно следует, что ψ — квазихарактер. Кроме того, $\psi(e) = 1_E$, где e — единичный элемент G, причём $\|\psi(g) - \Phi(g)\| \leqslant M\varepsilon$ и $\|\psi(g) - f(g)\| \leqslant (M+1)\varepsilon$ для всех $g \in G$. Найдём дефект ψ. Так как $\|f(h)f(h^{-1}) - 1_E\| \leqslant \varepsilon$, то $\|\Phi(e) - 1_E\| \leqslant \varepsilon$ и $\|\Phi(e)\| \leqslant 1+\varepsilon$. Заметим, что выражение

$$\begin{aligned} f(gkk^{-1}h) - \big(f(gk) - f(g)f(k)\big)\big(f(k^{-1}h) - f(k^{-1})f(h)\big) + \\ + f(g)f(k)f(k^{-1})f(h) - f(gk)f(k^{-1})f(h) - f(g)f(k)f(k^{-1}h) \end{aligned} \tag{6}$$

равно $f(gkk^{-1}h) - f(gk)f(k^{-1}h)$, так что модуль этого выражения не превосходит ε для всех $g, k, h \in G$. Применим инвариантное среднее по $k \in G$ к этому выражению; получим

$$\|f(gh) - \Phi(g)f(h) - f(g)\Phi(h) + f(g)\Phi(e)f(h)\| \leqslant \varepsilon.$$

Учитывая, что

$$\big\|\big(f(gk) - f(g)f(k)\big)\big(f(k^{-1}h) - f(k^{-1})f(h)\big)\big\| \leqslant \varepsilon^2$$

для всех $g, k, h \in G$, непосредственными вычислениями получаем, что $\|\Delta_3\| \leqslant \varepsilon^2$, где

$$\Delta_3 = -\big(f(gh) - \Phi(g)f(h) - f(g)\Phi(h) + f(g)\Phi(e)f(h)\big)(\Phi(e) - 1).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \psi(gh) - \psi(g)\psi(h) &= \Phi(gh) - f(gh)(\Phi(e)-1) - \Phi(g)\Phi(h) + \\ &+ \Phi(g)f(h)(\Phi(e)-1) + f(g)(\Phi(e)-1)\Phi(h) - f(g)(\Phi(e)-1)f(h)(\Phi(e)-1) = \\ &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - f(g)(\Phi(e)-1)f(h) - \\ &- \big(\Phi(g)f(h) + f(g)\Phi(h) - f(g)\Phi(e)f(h)\big)(\Phi(e)-1) + \\ &+ \Phi(g)f(h)(\Phi(e)-1) + f(g)(\Phi(e)-1)\Phi(h) - f(g)(\Phi(e)-1)f(h)(\Phi(e)-1) = \\ &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 - f(g)(\Phi(e)-1)f(h) - \\ &- \Phi(g)f(h)(\Phi(e)-1) + \Phi(g)f(h)(\Phi(e)-1) - f(g)\Phi(h)(\Phi(e)-1) + \\ &+ f(g)(\Phi(e)-1)\Phi(h) - f(g)(\Phi(e)-1)f(h)(\Phi(e)-1) = \\ &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + f(g)(\Phi(e)-1)\big(\Phi(h) - f(h)\big) - f(g)\Phi(h)(\Phi(e)-1) + \\ &+ f(g)\Phi(e)f(h)(\Phi(e)-1) - f(g)(\Phi(e)-1)f(h)(\Phi(e)-1) = \\ &= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + f(g)(\Phi(e)-1)\big(\Phi(h) - f(h)\big) - f(g)\big(\Phi(h) - f(h)\big)(\Phi(e)-1), \end{aligned}$$

где

$$\Delta_1 = I_{l\in G}\Big(\big(f(gl) - f(g)f(l)\big)\big(f(l^{-1}h^{-1}) - f(l^{-1})f(h^{-1})\big)\Big)$$

и

$$\Delta_2(g,h) = \Delta_2 = \big(\Phi(g) - f(g)\big)\big(\Phi(h) - f(h)\big)$$

и, следовательно, $\|\Delta_1\| \leqslant \varepsilon^2$ и $\|\Delta_2\| \leqslant \varepsilon^2$. Это соотношение означает, что $\psi(gh) - \psi(g)\psi(h) = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$, следовательно,

$$\|\psi(gh) - \psi(g)\psi(h)\| \leqslant 3\varepsilon^2.$$

Так как основные свойства f наследуются квазихарактерами Φ и ψ, мы можем использовать итерацию Джонсона [8]. Заметим, что

$$|\psi(g)| \leqslant |f(g)| + |f(g)(\Phi(e) - 1)| \leqslant M + M\varepsilon$$

для всех $g \in G$ и $|\psi(g) - f(g)| \leqslant M(1+\varepsilon)$. Положим $M_0 = M$, $\varepsilon_0 = \varepsilon$, $M_1 = M(\varepsilon + 1)$, $f_0 = f$, $\varepsilon_n = 3\varepsilon_{n-1}$, $M_{n+1} = M_n(1+\varepsilon_n)$ и $f_{n+1} = \psi_{f_n}$ при $n \in \mathbb{N}$ и предположим, что $0 < \varepsilon < 1/3$. Тогда, начиная с

$$\|f_0(gh) - f_0(g)f_0(h)\| \leqslant \varepsilon = \varepsilon_0,$$

мы можем продолжать по индукции по n. Имеем

$$\|f_{n+1}(gh) - f_{n+1}(g)f_{n+1}(h)\| \leqslant \varepsilon_{n+1} = 3\varepsilon_n^2, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

где $\varepsilon_n = (1/3)(3\varepsilon)^{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$\|f_{n+1}(g) - f_n\| \leqslant (M_n + 1)\varepsilon_n$$

для всех $g \in G$ при $M_{n+1} \leqslant M_n + (M_n + 1)\varepsilon_n$. Пусть $M_n = \mu_n + m_n$, где

$$\mu_n = M \prod_{k=0}^{n} (1 + \varepsilon_k).$$

Тогда

$$M_n \leqslant (M + \varepsilon) \prod_{k=0}^{n} (1 + \varepsilon_k) \leqslant \mathcal{M}(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} (M + \varepsilon) \prod_{k=0}^{\infty} (1 + \varepsilon_k).$$

Следовательно, последовательность M_n является ограниченной при $\varepsilon < 1/3$, $M_n \leqslant \mathcal{M}(\varepsilon)$, где $\mathcal{M}(\varepsilon)$ — ограниченная монотонно возрастающая функция переменного ε. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \big(f_n(g) - f_{n-1}(g)\big)$$

абсолютно сходится для любого $g \in G$, поскольку

$$\|f_{n+1}(g) - f_n(g)\| \leqslant (\mathcal{M}(\varepsilon) + 1)\varepsilon_n$$

для всех $g \in G$. Пусть

$$R(g) = f(g) + \sum_{n=1}^{\infty} \big(f_n(g) - f_{n-1}(g)\big).$$

Переходя к пределу в соотношении (7), видим, что

$$\|R(gh)\xi - R(g)R(h)\xi\| \leqslant 0 \quad \text{при} \quad \xi \in E,$$

так что R — обычный характер группы G, причём

$$\|R(g) - f(g)\| \leqslant (\mathcal{M}(\varepsilon) + 1)\varepsilon.$$

Следовательно, характер R ограниченный. Поэтому он унитарный.

Нетрудно убедиться, что при $\varepsilon < 1/3$ выполняется неравенство

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+\varepsilon_k) \leqslant 1+\varepsilon+\sum_{k=2}^{\infty}3^{k-1}\varepsilon^k \leqslant 1+\frac{\varepsilon}{1-3\varepsilon}=\frac{1-2\varepsilon}{1-3\varepsilon}. \qquad \square$$

Замечание. В рассматриваемом здесь одномерном случае количественный результат леммы 3.1 улучшает результаты [7], также относящиеся к одномерному случаю, где рассматривалось условие $\varepsilon \leqslant 0{,}01$, и весьма общий результат [8], где получена оценка, существенно зависящая от выбора аппроксимативной диагонали [6] в групповой алгебре данной аменабельной группы и в одномерном случае заведомо требующая выполнения условия $\varepsilon < 1/12$.

Следствие 3.2. *Пусть G — группа, f — одномерное псевдопредставление группы G с дефектом $\varepsilon < 0{,}24$. Ограничение псевдопредставления f на каждую аменабельную подгруппу в G является гомоморфизмом этой подгруппы в $\mathbb{C}$, так что f — чистое псевдопредставление.*

Доказательство. Пусть f — одномерное псевдопредставление группы G. Согласно следствию 2.3 ограничение f на каждую циклическую подгруппу в G является гомоморфизмом. Кроме того, по лемме 3.1 ограничение f на каждую аменабельную подгруппу H в G отличается от некоторого обычного характера подгруппы H меньше чем на $\sqrt{3}/2$. Ограничение этого характера группы H на каждую циклическую подгруппу в H отличается от характера этой циклической подгруппы, определяемого ограничением псевдопредставления f на ту же циклическую подгруппу, меньше чем на $\sqrt{3}$. Следовательно, эти ограничения совпадают для любой циклической подгруппы по лемме 2.1, и тем самым ограничение отображения f на каждую аменабельную подгруппу H в G является обычным характером подгруппы H. Таким образом, f — чистое псевдопредставление. $\square$

Как известно [4, 5, 9], любое псевдопредставление вещественной полупростой эрмитово симметрической связной группы Ли является чистым и может быть описано в терминах обычных представлений, псевдохарактеров и их экспонент (которые являются чистыми одномерными псевдопредставлениями), что свидетельствует об особой роли псевдохарактеров и одномерных чистых псевдопредставлений в теории квазипредставлений связных групп Ли.

Литература

[1] Штерн А. И. Псевдохарактер, определённый символом Радемахера // УМН. — 1990. — Т. 45, № 3. — С. 197—198.

[2] Штерн А. И. Квазипредставления и псевдопредставления // Функц. анализ и его прил. — 1991. — Т. 25, № 2. — С. 87—91.

[3] Штерн А. И. Об операторах в пространствах Фреше, подобных изометриям // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1991. — № 4. — С. 94—96.

[4] Штерн А. И. Конечномерные квазипредставления связных групп Ли и гипотеза Мищенко // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, вып. 7. — С. 85—225.

[5] Штерн А. И. Вариант теоремы Ван дер Вардена и доказательство гипотезы Мищенко для гомоморфизмов локально компактных групп // Изв. РАН. Сер. матем. — 2008. — Т. 72, № 1. — С. 183—224.

[6] Johnson B. E. Approximate diagonals and cohomology of certain annihilator Banach algebras // Amer. J. Math. — 1972. — Vol. 94. — P. 685—698.

[7] Johnson B. E. Approximately multiplicative functionals // J. London Math. Soc. (2). — 1986. — Vol. 34, no. 3. — P. 489—510.

[8] Johnson B. E. Approximately multiplicative maps between Banach algebras // J. London Math. Soc. (2). — 1988. — Vol. 37, no. 2. — P. 294—316.

[9] Shtern A. I. Quasisymmetry. I // Russ. J. Math. Phys. — 1994. — Vol. 2, no. 3. — P. 353—382.

[10] Shtern A. I. Triviality and continuity of pseudocharacters and pseudorepresentations // Russ. J. Math. Phys. — 1997. — Vol. 5, no. 1. — P. 135—138.

[11] Shtern A. I. Quasisymmetry. II // Russ. J. Math. Phys. — 2007. — Vol. 14, no. 3. — P. 332—356.

[12] Shtern A. I. A nontrivial Banach space quasirepresentation whose nonzero defect operators are nondegenerate is bounded // Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyunshang). — 2015. — Vol. 25, no. 4. — P. 553—556.

[13] Shtern A. I. Exponential stability of quasihomomorphisms into Banach algebras and a Ger-Šemrl theorem // Russ. J. Math. Phys. — 2015. — Vol. 22, no. 1. — P. 141—142.