Примитивные и почти примитивные элементы свободных алгебр шрайеровых многообразий*

В. А. АРТАМОНОВ, А. В. КЛИМАКОВ
А. А. МИХАЛЁВ, А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: aamikhalev@mail.ru

УДК 512.554+512.554.33+512.554.34+
512.554.37+512.554.38+512.572,512.573+
510.53+512.543+512.544.42+512.544.43

Ключевые слова: шрайерово многообразие линейных алгебр, ПБВ-пара многообразий, свободная алгебра многообразия, автоморфизмы свободных алгебр, свободное дифференциальное исчисление в свободных алгебрах, теорема о свободе, примитивные элементы свободных алгебр, почти примитивные элементы, ранг примитивности элемента свободной алгебры.

Аннотация

Многообразие линейных алгебр называется шрайеровым, если любая подалгебра свободной алгебры этого многообразия является свободной. Система элементов свободной алгебры называется примитивной, если её можно дополнить до множества свободных образующих этой алгебры. Элемент свободной алгебры шрайерова многообразия алгебр называется почти примитивным, если он не является примитивным во всей свободной алгебре, но примитивен в любой собственной подалгебре, его содержащей. Обзорная статья посвящена изучению примитивных и почти примитивных элементов свободных алгебр шрайеровых многообразий.

Abstract

V. A. Artamonov, A. V. Klimakov, A. A. Mikhalev, A. V. Mikhalev, Primitive and almost primitive elements of Schreier varieties, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 2, pp. 3—35.

A variety of linear algebras is said to be Schreier if any subalgebra of a free algebra of this variety is free. A system of elements of a free algebra is primitive if there is a complement of this system with respect to a free generating set of the free algebra. An element of a free algebra of a Schreier variety is said to be almost primitive if it is not primitive in the free algebra, but it is a primitive element of any subalgebra that contains it. This survey article is devoted to the study of primitive and almost primitive elements of Schreier varieties.

---

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда, проект № 16-11-10013.

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 2, с. 3—35.

1. Основные типы шрайеровых многообразий алгебр

Многообразие $\mathfrak{M}$ алгебр над полем F определяется как класс алгебр, замкнутых относительно взятия подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений. Пусть X — непустое множество. Алгебра $F_{\mathfrak{M}}(X)$ многообразия $\mathfrak{M}$ называется свободной алгеброй многообразия $\mathfrak{M}$ с множеством X свободных образующих, если алгебра $F_{\mathfrak{M}}(X)$ порождена множеством X и если f — произвольное отображение множества X в алгебру A многообразия $\mathfrak{M}$, то отображение f может быть расширено до гомоморфизма $F_{\mathfrak{M}}(X) \to A$ (ясно, что такое расширение единственно). Алгебра $F_{\mathfrak{M}}(X)$ однозначно определяется множеством X и многообразием $\mathfrak{M}$ (с точностью до изоморфизма). Для любого нетривиального многообразия $\mathfrak{M}$ и множества X существует свободная алгебра $F_{\mathfrak{M}}(X)$. Если $A \in \mathfrak{M}$, то существует такое множество X, что алгебра A является гомоморфным образом свободной алгебры $F_{\mathfrak{M}}(X)$, например, можно положить $X = A$. Мощность множества X называется рангом свободной алгебры $F_{\mathfrak{M}}(X)$.

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Пара (u, v) элементов алгебры $F_{\mathfrak{M}}(X)$ называется тождеством алгебры A многообразия $\mathfrak{M}$, если $u(a_1, \ldots, a_n) = v(a_1, \ldots, a_n)$ для всех элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$. Следующий результат принадлежит Г. Биркгофу. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие всех алгебр. Подкласс $\mathfrak{N}$ класса $\mathfrak{M}$ является многообразием алгебр в том и только в том случае, когда существует такое множество тождеств (u_i, v_i), $i \in I$, что класс $\mathfrak{N}$ состоит из всех алгебр многообразия $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих этим тождествам (здесь u_i, v_i $(i \in I)$ — элементы алгебры $F_{\mathfrak{M}}(X)$ со счётным множеством X свободных образующих). Многообразие алгебр называется однородным, если оно определено с помощью однородных (по X-степени) тождеств. Дополнительную информацию о многообразиях алгебр можно найти в [30, 78, 113, 125].

Многообразие алгебр называется шрайеровым, если любая подалгебра свободной алгебры этого многообразия является свободной (в том же многообразии алгебр). Понятие шрайерова многообразия возникло в теории групп: в 1920-х годах Я. Нильсен [162] и О. Шрайер [179] доказали, что любая подгруппа свободной группы свободна. А. Г. Курош [34] доказал, что подалгебры свободных неассоциативных алгебр свободны. А. И. Ширшов [71] показал, что многообразие всех алгебр Ли является шрайеровым (этот результат был получен и Э. Виттом в [196], где также было доказано, что многообразие всех p-алгебр Ли является шрайеровым). А. Г. Курош обобщил этот результат для многообразий Ω-алгебр (Ω-алгебра — это линейное пространство с семейством Ω полилинейных умножений арности не менее 2) в [36]; в этой статье были классифицированы подалгебры свободных произведений Ω-алгебр (ранее для многообразий всех неассоциативных алгебр такое описание было получено в [35], а для многообразий всех коммутативных алгебр и всех антикоммутативных алгебр — в [16]). Ю. А. Бахтурин [10, 11] и М. В. Зайцев [21] доказали, что шрайеровыми многообразиями алгебр Ли являются только многообразие всех алгебр Ли и многообразие всех абелевых алгебр Ли. А. И. Ширшов доказал в [72], что подалгебры свободных неассоциативных коммутативных и свободных неассоциативных антикоммутативных алгебр свободны (см. также [16]). Таким образом, многообразие всех коммутативных алгебр (всех антикоммутативных алгебр) является шрайеровым. А. А. Михалёв [40] и А. С. Штерн [76] показали, что многообразие суперsucceeding алгебр Ли является шрайеровым. А. А. Михалёв [42] получил этот результат для цветных p-супералгебр Ли. А. И. Корепанов [32] доказал, что подалгебры свободных суперкоммутативных неассоциативных алгебр свободны. В. К. Харченко [123, 124] получил обобщение теоремы Ширшова—Витта для алгебр Хопфа над полем нулевой характеристики.

Алгебра A над полем F с билинейной антикоммутативной операцией $[x,y]$ (коммутатор) и трилинейной операцией $\mathcal{A}(x,y,z)$ (ассоциатор), удовлетворяющими тождеству

$$\begin{aligned}&\big[[x,y],z\big]+\big[[y,z],x\big]+\big[[z,x],y\big]=\\&\qquad=\mathcal{A}(x,y,z)+\mathcal{A}(y,z,x)+\mathcal{A}(z,x,y)-\mathcal{A}(y,x,z)-\mathcal{A}(x,z,y)-\mathcal{A}(z,y,x),\end{aligned}$$

называется алгеброй Акивиса. У. У. Умирбаев и И. П. Шестаков [180] доказали, что подалгебры свободных алгебр Акивиса свободны.

Естественно рассмотреть следующую проблему.

Проблема 1.1. Классифицировать все шрайеровы многообразия алгебр.

У. У. Умирбаев в [62, 191] получил необходимые и достаточные условия для того, чтобы многообразие алгебр было шрайеровым, и построил новые примеры шрайеровых многообразий. Подалгебры свободных алгебр многообразий линейных Ω-алгебр рассматривались в [9, 14, 15], шрайеровы многообразия n-лиевых алгебр описаны в [67].

Пусть $A=F(X)$ — свободная неассоциативная алгебра над полем F с множеством X свободных образующих. Для элемента $u\in A$ через $\ell(u)=\ell_X(u)$ мы обозначим степень (длину) элемента u. Рассмотрим произвольное отображение $\mu\colon X\to\mathbb{N}$ (обобщённая функция степени). Пусть $\Gamma(X)$ — свободный группоид неассоциативных одночленов в алфавите X, $S(X)$ — свободная полугруппа ассоциативных слов на множестве X, $\tilde{}\colon\Gamma(X)\to S(X)$ — гомоморфизм забывания скобок. Положим

$$\mu(y_1\dots y_m)=\sum_{i=1}^{m}\mu(y_i)$$

для всех $y_i\in X$. Если $\mu(x)=1$ для всех $x\in X$, то μ — обычная степень, $\mu=\ell$. Если $a\in A$,

$$a=\sum\alpha_i a_i,$$

$0\neq\alpha_i\in F$, a_i — базисные одночлены, $a_j\neq a_s$ при $j\neq s$, то положим

$$\mu(a)=\max_i\{\mu(\tilde{a}_i)\}.$$

Через a° обозначим старшую часть элемента a:

$$a^\circ = \sum_{j,\ \mu(a_j)=\mu(a)} \alpha_j a_j.$$

Подмножество M алгебры A называется независимым, если M — множество свободных образующих подалгебры алгебры A, порождённой множеством M. Подмножество $M = \{a_i \mid i \in I\}$ ненулевых элементов алгебры A называется приведённым, если для любого i старшая часть a_i° элемента a_i не принадлежит подалгебре алгебры A, порождённой множеством $\{a_j^\circ \mid j \neq i\}$.

Пусть $S = \{s_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — подмножество алгебры A. Отображение $\omega\colon S \to S' \subseteq A$ называется элементарным преобразованием множества S, если либо ω — невырожденное линейное преобразование множества S, либо для фиксированного $\beta \in I$ имеем $\omega(s_\alpha) = s_\alpha$ для всех $\alpha \in I$, $\alpha \neq \beta$, и $\omega(s_\beta) = s_\beta + f(\{s_\alpha \mid \alpha \neq \beta\})$, где f — элемент свободной алгебры многообразия $\mathfrak{M}$. Ясно, что элементарные преобразования свободных порождающих множеств индуцируют автоморфизмы алгебры A; такие автоморфизмы называются элементарными.

Пусть теперь A — свободная алгебра однородного (заданного однородными тождествами) шрайерова многообразия алгебр. Любое конечное подмножество элементов алгебры A может быть приведено к приведённому подмножеству с помощью конечного числа элементарных преобразований и удаления нулевых элементов, при этом любое приведённое подмножество элементов алгебры A является независимым подмножеством (это свойство называется свойством Нильсена). Более того, используя метод А. Г. Куроша, можно построить приведённое множество порождающих для любой подалгебры алгебры A. Действительно, пусть B — подалгебра алгебры A. Будем строить множество M порождающих алгебры B следующим образом:

$$M = \bigcup_{j=0}^{\infty} M_j,$$

где M_j состоит из элементов степени j или пусто, $M_0 = \varnothing$. По индукции, предполагая, что подмножества $M_0, \ldots, M_i$ уже построены, рассматриваем подалгебру B_i алгебры B, порождённую подмножеством $\bigcup\limits_{j=0}^{i} M_j$. Пусть $S_i = \{b \in B_i \mid \ell(b) \leqslant i+1\}$. Рассмотрим подмножества множества $\{b \in B \mid \ell(b) = i+1\}$, линейно независимые по модулю подпространства S_i, и пусть M_i — максимальное такое подмножество. Ясно, что множество M порождает алгебру A. Более того, M — приведённое подмножество.

Следовательно, любая подалгебра алгебры A свободна в том же многообразии алгебр (это свойство называется свойством Шрайера). Ж. Левин [132] доказал, что свойства Нильсена и Шрайера эквивалентны для однородных многообразий алгебр. Используя эту эквивалентность, нетрудно заметить, что группы автоморфизмов конечного ранга соответствующих свободных алгебр порождены элементарными автоморфизмами (для алгебр Ли этот результат был получен П. Коном [102], а для свободных алгебр конечного ранга любых однородных шрайеровых многообразий — Ж. Левином [132]). Аналогичный результат для однородных шрайеровых многообразий Ω-алгебр доказан в [15]. В [102] П. Кон поставил проблему: будет ли группа автоморфизмов свободной ассоциативной алгебры конечного ранга n над полем порождаться элементарными автоморфизмами. Для $n = 2$ положительное решение этой проблемы было получено Л. Макар-Лимановым [39] и А. Чернякевич [105]. У. У. Умирбаев [193] доказал, что при $n = 3$ элементарные автоморфизмы не порождают группу автоморфизмов свободной ассоциативной алгебры.

Теорема 1.2 [34, 40—42, 71, 72, 76, 102, 132, 196]. *Пусть F — поле, $\operatorname{char} F \neq 2$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $A = F(X)$ — свободная алгебра без единицы с множеством X свободных образующих одного из следующих многообразий алгебр над полем F: многообразие всех алгебр; многообразие всех коммутативных алгебр; многообразие всех антикоммутативных алгебр; многообразие всех алгебр Ли; многообразие всех цветных супералгебр Ли; многообразие p-алгебр Ли; многообразие (цветных) p-супералгебр Ли. Тогда*

1) *любое конечное подмножество алгебры A с помощью элементарных преобразований (с удалением нулевых элементов) может быть приведено к приведённому подмножеству;*
2) *любое приведённое подмножество элементов алгебры A является независимым подмножеством;*
3) *старшая часть многочлена от элементов приведённого множества является многочленом от старших частей элементов этого множества;*
4) *любая подалгебра алгебры A свободна;*
5) *подмножество M алгебры A независимо тогда и только тогда, когда элементы множества M линейно независимы по модулю квадрата подалгебры алгебры A, порождённой подмножеством M (для свободных (цветных) p-(супер)алгебр Ли необходимо добавить к квадрату идеала все p-степени элементов множества M);*
6) *группа автоморфизмов алгебры A порождена элементарными автоморфизмами;*
7) *алгебра A хопфова (если элементы $u_1, \ldots, u_n$ порождают алгебру A ($n = |X|$), то $\{u_1, \ldots, u_n\}$ — свободное порождающее подмножество свободной алгебры A).*

Пусть $\mathfrak{M}$ — шрайерово многообразие алгебр над полем F, $A = F_{\mathfrak{M}}(x_1, \ldots, x_n)$ — свободная алгебра многообразия $\mathfrak{M}$ с множеством $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ свободных образующих, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — автоморфизм алгебры A, заданный условием $\varphi(x_i) = \varphi_i$. Элементарные автоморфизмы алгебры A имеют вид

$$\sigma(i, \alpha, f) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha x_i + f, x_{i+1}, \ldots, x_n), \tag{1.1}$$

где $0 \neq \alpha \in F$, $f \in F_{\mathfrak{M}}(X \setminus \{x_i\})$. Ясно, что $\sigma(i,1,0)$ — тождественный автоморфизм для всех i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Отметим следующие легко проверяемые соотношения, выполненные для элементарных автоморфизмов:

$$\sigma(i,\alpha,f)\sigma(i,\beta,g) = \sigma(i,\alpha\beta,\beta f + g). \tag{1.2}$$

Если $i \neq j$, $f \in F_{\mathfrak{M}}(X \setminus \{x_i, x_j\})$, то

$$\sigma(i,\alpha,f)^{-1}\sigma(i,\beta,g)\sigma(i,\alpha,f) = \sigma\big(i,\beta,\sigma(i,\alpha,f)^{-1}(g)\big). \tag{1.3}$$

Пусть $1 \leqslant k,s \leqslant n$, $k \neq s$, (ks) — автоморфизм алгебры A, переставляющий переменные x_k и x_s. Тогда

$$(ks) = \sigma(s,-1,x_k)\sigma(k,1,-x_s)\sigma(s,1,x_k).$$

Непосредственно проверяется, что

$$\sigma(i,\alpha,f)^{(ks)} = \sigma\big(j,\alpha,(ks)(f)\big), \tag{1.4}$$

где $x_j = (ks)(x_i)$.

У. У. Умирбаев получил описание группы автоморфизмов свободной алгебры конечного ранга шрайерова многообразия алгебр в терминах образующих и определяющих соотношений.

Теорема 1.3 [192]. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *— однородное шрайерово многообразие алгебр над полем,* $A = F_{\mathfrak{M}}(x_1,\ldots,x_n)$ *— свободная алгебра многообразия* $\mathfrak{M}$. *Тогда группа* $\mathrm{Aut}(A)$ *может быть задана образующими* (1.1) *и определяющими соотношениями* (1.2)—(1.4).

В [54] показано, что группы автоморфизмов свободной неассоциативной алгебры и свободной алгебры Ли ранга не менее 4 над полем нулевой характеристики не допускают точного представления матрицами (над любым полем). Это свойство может не выполняться при меньшем числе образующих. Например, если L — свободная алгебра Ли ранга 2 над полем F, то $\mathrm{Aut}(L) \cong \mathrm{GL}_2(F)$.

Свободные алгебры шрайеровых многообразий алгебр изучаются в [12, 81, 87, 148, 158, 173].

2. Свободное дифференциальное исчисление и шрайеровы многообразия алгебр

Пусть $\mathfrak{M}$ — однородное многообразие алгебр над полем F, $C \in \mathfrak{M}$, $\langle y\rangle$ — свободная алгебра ранга 1 многообразия $\mathfrak{M}$. Рассмотрим свободное произведение $B = \langle y\rangle * C \in \mathfrak{M}$. Через B_1 обозначим подпространство элементов алгебры B степени 1 относительно переменной y. Тогда B_1 — свободный однопорождённый C-бимодуль. Рассмотрим пространство $C \oplus B_1$ с умножением

$$(a_1 + m_1)(a_2 + m_2) = a_1a_2 + a_1m_2 + m_1a_2,$$

где $a_1, a_2 \in C$, $m_1, m_2 \in B_1$. Тогда алгебра $C \oplus B_1$ принадлежит многообразию $\mathfrak{M}$. Для элемента a алгебры C через l_a и r_a обозначим операторы соответственно левого и правого умножений:

$$b \cdot l_a = ab, \quad b \cdot r_a = ba, \qquad b \in B_1.$$

Пусть $U(C) = U_{\mathfrak{M}}(C)$ — подалгебра алгебры $\mathrm{End}(B_1)$ эндоморфизмов модуля B_1, порождённая множеством $\{1, l_a, r_a \mid a \in C\}$. Если алгебра C обладает единичным элементом, то полагаем $r_1 = l_1 = 1$ в $U(C)$. Алгебра $U(C)$ является универсальной мультипликативной обёртывающей алгеброй алгебры C. Понятие C-бимодуля в многообразии $\mathfrak{M}$ эквивалентно понятию правого $U(C)$-модуля (см. [19, 121]). Если C — (супер)алгебра Ли, то $U(C)$ — универсальная обёртывающая алгебра (супер)алгебры Ли C (см. [81, 148, 158]).

Аналогом свободного дифференциального исчисления Фокса в групповых кольцах свободных групп [111] для многообразий алгебр служит следующая конструкция.

Пусть $A = F_{\mathfrak{M}}(X)$ — свободная алгебра многообразия $\mathfrak{M}$ с множеством $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ свободных образующих, I_A — свободный правый $U(A)$-модуль с базисом $y_1, \ldots, y_n$,

$$I_A = y_1 U(A) \oplus \ldots \oplus y_n U(A).$$

Линейное отображение $\mathcal{D}\colon A \to I_A$, заданное условиями

$$\mathcal{D}(x_i) = y_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$
$$\mathcal{D}(ab) = \mathcal{D}(a) \cdot r_b + \mathcal{D}(b) \cdot l_a,$$

где $a, b \in A$, называется универсальным дифференцированием алгебры A в многообразии $\mathfrak{M}$. Частные производные $\partial f / \partial x_i$ элемента f алгебры A однозначно определяются равенством

$$\mathcal{D}(f) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Положим

$$\partial(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^{\mathrm{T}},$$

где Т — оператор транспонирования. Из определения следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta_{ij}$$

(символ Кронекера),

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_i} r_u + \frac{\partial v}{\partial x_i} l_v, \quad u, v \in A.$$

Для подалгебры H алгебры A через J_H обозначим $U(A)$-подмодуль модуля I_A, порождённый элементами $D(h)$, $h \in H$. Говорят, что многообразие $\mathfrak{M}$ обладает свойством дифференциальной отделимости подалгебр, если для любой подалгебры H алгебры A и элемента $a \in A$ $\mathcal{D}(a) \in J_H$ в том и только в том случае, когда $a \in H$.

Следующие многообразия алгебр обладают свойством дифференциальной отделимости подалгебр: многообразие всех алгебр; многообразие всех коммутативных алгебр ($\operatorname{char} F \neq 2$); многообразие всех антикоммутативных алгебр; многообразия всех (супер)алгебр Ли и p-(супер)алгебр Ли.

Впервые свойство дифференциальной отделимости подалгебр алгебр Ли было упомянуто в [60] (см. также [172,181] для алгебр Ли и [44] для суперале́гебр Ли), это свойство следует из теорем Пуанкаре—Биркгофа—Витта (см. [81,158]). В общей форме для указанных многообразий алгебр свойство дифференциальной отделимости подалгебр было установлено У. У. Умирбаевым [62].

Следующий результат У. У. Умирбаева даёт необходимые условия для того, чтобы многообразие являлось шрайеровым.

Теорема 2.1 [62]. *Если $\mathfrak{M}$ — однородное шрайерово многообразие алгебр, то*

1) *для любой свободной алгебры A многообразия $\mathfrak{M}$ универсальная мультипликативная обёртывающая алгебра $U(A)$ — свободная ассоциативная алгебра*;
2) *для любой однородной подалгебры H свободной алгебры A многообразия $\mathfrak{M}$ алгебра $U(A)$ является свободным правым $U(H)$-модулем.*

Если $\operatorname{char} F = 0$, то многообразие $\mathfrak{M}$, удовлетворяющее условиям 1) и 2), является шрайеровым.

Отметим, что утверждение 1) теоремы 2.1 для свободных неассоциативных алгебр и для свободных (анти)коммутативных неассоциативных алгебр было доказано А. Т. Гайновым [18].

Один из методов определения шрайеровости многообразия даёт следующий результат.

Теорема 2.2 [62]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — такое однородное многообразие алгебр, что*

1) *для любой свободной алгебры A многообразия $\mathfrak{M}$ универсальная мультипликативная обёртывающая алгебра $U(A)$ — свободная ассоциативная алгебра*;
2) *многообразие $\mathfrak{M}$ обладает свойством дифференциальной отделимости подалгебр.*

Тогда $\mathfrak{M}$ — шрайерово многообразие алгебр.

Из теоремы 2.2 следует, что многообразие алгебр, заданное тождеством $x \cdot x^2 = 0$, является шрайеровым [62].

Отметим, что если $A = F_{\mathfrak{M}}(X)$ — свободная алгебра шрайерова многообразия алгебр над полем F с множеством X свободных образующих, то универсальная мультипликативная обёртывающая алгебра $U(A)$ — свободная ассоциативная алгебра над полем F. Однако не обязательно множество X является множеством свободных образующих свободной алгебры A. Например, если

$A = F(X)$ — свободная неассоциативная алгебра, то алгебра $U(A)$ — свободная ассоциативная F-алгебра со следующим множеством свободных образующих:

$$\{r_w,\, l_w \mid w \text{ пробегает все неассоциативные одночлены от } X\}$$

(более подробную информацию можно найти в [18, 62, 72, 148]).

Если же $L(X)$ — свободная (супер)алгебра Ли, то $U\big(L(X)\big)$ — свободная ассоциативная алгебра с тем же множеством свободных образующих; если $\operatorname{char} F = p > 2$, $L_p(X)$ — свободная p-(супер)алгебра Ли, то ограниченная универсальная обёртывающая алгебра $u\big(L_p(X)\big)$ — свободная ассоциативная алгебра с множеством X свободных образующих (см. [81, 82, 148, 158]).

Более подробная информация о шрайеровых многообразиях алгебр изложена в [62, 132, 144, 191] (о многообразиях линейных Ω-алгебр см. [9, 14, 15, 36]), см. также [67, 68].

Свободное дифференциальное исчисление может быть применено к изучению свободных абелевых расширений многообразия $\mathfrak{V}$. Пусть A — алгебра многообразия $\mathfrak{V}$ с множеством образующих X. Скажем, что алгебра B многообразия $\mathfrak{V}$ — свободное абелево расширение алгебры A в $\mathfrak{V}$, если

1) алгебра B порождена тем же множеством X;
2) существует такой сюръективный гомоморфизм $\gamma\colon B \to A$, что γ — тождественное отображение на X;
3) если $C \in \mathfrak{V}$, алгебра C порождена множеством X, $\eta\colon C \to A$ — такой сюръективный гомоморфизм, что η — тождественное отображение на X, то существует такой гомоморфизм $\xi\colon B \to C$, что $\eta\xi = \gamma$.

Пусть теперь D — свободная алгебра многообразия $\mathfrak{V}$ с множеством X свободных образующих. Так как алгебра A порождена множеством X, то существует сюръективный гомоморфизм алгебр $\rho\colon D \to A$, тождественный на множестве X. Пусть $I = \operatorname{Ker}\rho$. Несложно показать, что свободное абелево расширение B алгебры A — это в точности алгебра F/I^2, где I^2 — идеал алгебры D, порождённый всеми произведениями ab, $a, b \in I$. Следовательно, свободные абелевы расширения являются аналогом сплетений в теории групп. Свободные абелевы расширения для конгруэнц-модулярных многообразий универсальных алгебр изучаются в [6], там же развивается обобщённое свободное дифференциальное исчисление.

Другие приложения свободного дифференциального исчисления можно найти в [90, 91, 124].

3. Автоморфные орбиты элементов и примитивные системы элементов

3.1. Теоремы о ранге

Пусть A — свободная алгебра над полем F с множеством $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ свободных образующих одного из следующих многообразий алгебр:

$$\begin{aligned}
&\text{многообразие всех алгебр;}\\
&\text{многообразие всех коммутативных алгебр, } \operatorname{char} F \neq 2;\\
&\text{многообразие всех антикоммутативных алгебр;}\\
&\text{многообразие всех (цветных) (супер)алгебр Ли, } \operatorname{char} F = 0;\\
&\text{многообразие всех (цветных) } p\text{-(супер)алгебр Ли, } \operatorname{char} F = p > 2.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Следуя [182, 183], определим ранг $\operatorname{rank}(a)$ элемента $a \in A$ как минимальное число элементов множества X, от которых может зависеть элемент $\varphi(a)$, где $\varphi \in \operatorname{Aut}(A)$. Ранг системы элементов $a_1, \ldots, a_k \in A$ определяется аналогично (обозначение: $\operatorname{rank}(a_1, \ldots, a_k)$).

Для элемента a алгебры A через M_a обозначим левый $U(A)$-подмодуль в $U(A)$, порождённый элементами $\partial a/\partial x_1, \ldots, \partial a/\partial x_n$. Алгебра $U(A)$ — свободная ассоциативная алгебра.

Свободная ассоциативная алгебра $F\langle Y\rangle$ над полем F является кольцом свободных идеалов, т. е. левые (правые) идеалы алгебры $F\langle Y\rangle$ являются свободными левыми (соответственно правыми) модулями единственного ранга. Следовательно, любой подмодуль свободного левого (правого) $F\langle Y\rangle$-модуля свободен [31, 100—102, 133]. Это свойство, в совокупности с обобщённым алгоритмом Евклида, даёт возможность производить эффективные вычисления в левых (правых) идеалах алгебры $F\langle Y\rangle$, применяя технику стандартных базисов идеалов свободных алгебр.

Для элемента $a \in A$ через $\operatorname{rank}(M_a)$ обозначим ранг левого $U(A)$-модуля M_a.

Теорема 3.1 [23, 149, 156]. *Пусть $a \in A$. Тогда $\operatorname{rank}(a)$ совпадает с рангом $\operatorname{rank}(M_a)$ левого идеала M_a алгебры $U(A)$, порождённого элементами*

$$\frac{\partial a}{\partial x_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Пусть e_i $(i = 1, \ldots, r)$ — строка длины r, i-я координата которой равна 1, а остальные координаты равны 0.

Теорема 3.2 [23, 149, 156]. *Ранг системы элементов $a_1, \ldots, a_r$ алгебры A равен рангу левого $U(A)$-подмодуля $M = M_{(a_1, \ldots, a_r)}$ модуля $U(A)^r$, порождённого элементами*

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} e_i, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Аналог теорем 3.1 и 3.2 для свободных групп доказан в [64].

Теоремы 3.1 и 3.2 дают эффективный алгоритм вычисления ранга систем элементов свободной алгебры A, основанный на построении стандартного базиса левого идеала свободной ассоциативной алгебры; этот алгоритм использует слабый алгоритм левого деления в свободной ассоциативной алгебре (см. [25, 148, 149, 155, 156, 158, 159]). Для однородного элемента свободной алгебры Ли алгоритм вычисления ранга был построен В. Шпильрайном [183]. Более того, в [25, 47, 70, 148, 156, 158] получены алгоритмы реализации ранга системы элементов свободной алгебры A, т. е. алгоритмы построения таких конкретных автоморфизмов алгебры A, что образы элементов данного множества зависят от минимально возможного числа свободных образующих.

3.2. Примитивные системы элементов

Система элементов свободной алгебры A называется примитивной, если она является подмножеством некоторого множества свободных образующих алгебры A.

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathfrak{M}$ — одно из многообразий (3.1), $A = F_{\mathfrak{M}}(X)$ — свободная алгебра многообразия $\mathfrak{M}$.

Теорема 3.3 [23, 149, 156]. *Система* $a_1, \ldots, a_r$ *элементов алгебры* A *является примитивной тогда и только тогда, когда матрица* $\big(\partial(a_1), \ldots, \partial(a_r)\big)$ *обратима слева над* $U(A)$. *В частности, элемент* a *алгебры* A *примитивен в том и только в том случае, когда существуют такие элементы* $m_1, \ldots, m_n \in U(A)$, *что*

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial a}{\partial x_i} = 1$$

(*т. е. градиент* $\partial(a)$ *элемента* a *унимодулярен*).

Теорема 3.3 даёт алгоритм распознавания примитивности систем элементов свободных алгебр основных типов шрайеровых многообразий алгебр (см. [24, 25, 46, 47, 70, 148, 149, 155, 156, 158, 159], в этих работах также построены алгоритмы дополнения примитивных систем элементов до свободных порождающих множеств).

При $r = n$ теорема 3.3 даёт положительное решение гипотезы о якобиане для основных типов шрайеровых многообразий алгебр.

В связи с этим отметим, что квадратная матрица над свободной ассоциативной алгеброй над полем обратима слева тогда и только тогда, когда она обратима справа (это свойство следует из того, что свободная ассоциативная алгебра вложима в тело, см. [31, 103, 178]). Гипотеза о якобиане для алгебр Ли была доказана У. У. Умирбаевым [60,61], К. Ройтенауером [172] и В. Шпильрайном [181], для (p-)супералгебр Ли — А. А. Михалёвым [44]. Гипотеза о якобиане для свободных неассоциативных алгебр и для свободных (анти)коммутативных неассоциативных алгебр была доказана А. В. Ягжевым [77] и для остальных типов свободных алгебр шрайеровых многообразий алгебр — У. У. Умирбаевым [62]. Гипотеза о якобиане для алгебр Ли над кольцами доказана А. А. Золотых и А. А. Михалёвым [157]. Гипотеза о якобиане для свободных групп была доказана Дж. Бирман [86]. Аналог теоремы 3.3 для свободных групп был доказан У. У. Умирбаевым [63], для одного элемента свободной группы этот результат был получен У. Диксом и М. Данвуди [106, следствие IV.5.3]. Алгоритм решения проблемы автоморфной сопряжённости элементов свободной группы был построен Дж. Уайтхедом [194] (см. также [112, 117, 122, 138, 140, 161, 171, 195]).

В частности, это даёт алгоритм распознавания примитивных элементов свободной группы (для решения этой задачи можно также использовать результаты работ [63, 106, 168, 195]).

Отметим следующие интересные работы [48, 83, 88, 89, 94, 97—99, 107, 116, 118, 161, 164, 165, 167, 168, 170, 174, 185, 195] о свойствах примитивных элементов свободных групп, а также работы В. А. Романькова о примитивных элементах относительно свободных групп [51—53].

В [187] показано, что задача о том, содержит ли данная конечно порождённая подгруппа группы F_2 какой-либо примитивный элемент группы F_2, алгоритмически разрешима в свободной группе F_2 ранга 2. Алгоритм решения этой задачи в свободной группе F_n для любого n построен в [97].

Д. Пудер и О. Парзанчевски показали в [169], что в свободной группе конечного ранга слова, обладающие свойством «сохранения меры», — это в точности примитивные элементы этой свободной группы. (для случая свободных разрешимых групп см. работу Е. И. Тимошенко [58]). Было бы интересно установить, справедливы ли возможные аналоги результатов перечисленных работ для примитивных элементов свободных алгебр шрайеровых многообразий.

Проблема автоморфной сопряжённости двух элементов свободной алгебры шрайерова многообразия является открытой.

Проблема 3.4. Пусть $a, b \in A$. Необходимо построить алгоритм, распознающий, существует ли такой автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$, что $\varphi(a) = b$.

Утверждение теоремы 3.3 не имеет места для алгебр Ли над полем положительной характеристики. А. А. Золотых, А. А. Михалёв и У. У. Умирбаев построили серии соответствующих контрпримеров в [26, 151]. Например, пусть $\mathrm{char}\, F = p > 2$, $X = \{x, y, z\}$, $L(X)$ — свободная алгебра Ли, $h = x + [y, z] + (\mathrm{ad}\, x)^p(z) \in L(X)$, здесь $(\mathrm{ad}\, x)(a) = [x, a]$ для всех элементов $a \in L(X)$. Тогда h не является примитивным элементом алгебры $L(X)$, но ранг левого идеала свободной ассоциативной алгебры $F\langle X\rangle$, порождённого элементами $\partial h/\partial x$, $\partial h/\partial y$, $\partial h/\partial z$, равен 1 (h — примитивный элемент свободной p-алгебры Ли $L_p(X)$, но не свободной алгебры Ли $L(X)$). Пусть I — идеал алгебры Ли $L(X)$, порождённый элементом h, $L = L(X)/I$. Так как элемент h не является примитивным элементом свободной алгебры Ли $L(X)$, то алгебра Ли L не является свободной алгеброй Ли [33]. При этом универсальная обёртывающая алгебра $U(L)$ — свободная ассоциативная алгебра ранга 2. В частности, когомологическая размерность алгебры Ли L равна 1 (см. [26, 151, 158]). Следовательно, аналог теоремы Столлингса—Суона (о том, что группы когомологической размерности 1 свободны [188, 189]) не имеет места для алгебр Ли над полем положительной характеристики.

Проблема 3.5. Пусть $\mathrm{char}\, F = 0$, L — алгебра Ли над полем F. Верно ли, что алгебра Ли L свободна тогда и только тогда, когда универсальная обёртывающая алгебра $U(L)$ — свободная ассоциативная F-алгебра.

Проблема 3.6. Пусть $\operatorname{char} F = 0$, L — алгебра Ли над полем F. Верно ли, что алгебра Ли L свободна в том и только в том случае, когда её когомологическая размерность равна 1.

Проблема 3.6 решена положительно для двупорождённых алгебр Ли [65]. Некоторые необходимые и достаточные условия для того, чтобы алгебра Ли с одним определяющим соотношением имела когомологическую размерность 1, получены в [55].

В. Магнус [134] доказал в 1930 г. знаменитую теорему о свободе для свободных групп, играющую важную роль в комбинаторной теории групп (см., например, [38, 95, 108]). Теорема о свободе для свободных разрешимых и нильпотентных групп была доказана Н. С. Романовским [49]. Обобщённые теоремы о свободе (условие Линдона) для многообразий всех групп (алгебр Ли) и разрешимых групп (алгебр Ли) были доказаны Н. С. Романовским [50] и О. Г. Харлампович [66] соответственно. Для свободных неассоциативных алгебр теорема о свободе была доказана А. И. Жуковым [20], для свободных (анти)коммутативных неассоциативных алгебр и для свободных алгебр Ли — А. И. Ширшовым [73, 74]. Для этих многообразий алгебр теорема о свободе имеет следующий вид.

Теорема 3.7 (Freiheitssatz [20, 73, 74]). *Пусть F — поле, $\mathfrak{M}$ — одно из следующих многообразий над полем F: многообразие всех алгебр; многообразие всех коммутативных алгебр ($\operatorname{char} F \neq 2$); многообразие всех антикоммутативных алгебр; многообразие всех алгебр Ли. Пусть $A = F_{\mathfrak{M}}(X)$ — свободная алгебра многообразия $\mathfrak{M}$ с множеством X свободных образующих, $a \in A$, $a \neq 0$, (a) — идеал алгебры A, порождённый элементом a. Пусть элемент a зависит от элемента x множества свободных образующих X (это означает, что $a \notin F_{\mathfrak{M}}(X \setminus x)$). Тогда*

$$F_{\mathfrak{M}}(X \setminus x) \cap (a) = 0.$$

Проблема 3.8. Верна ли теорема о свободе для p-алгебр Ли и для супералгебр Ли над полем положительной характеристики?

Некоторые примеры положительного решения проблемы 3.8 в частных случаях приведены в [43,45,81,141,158] (для Ω-алгебр см. [13]). Для разрешимых и полинильпотентных алгебр Ли теорема о свободе была доказана В. В. Талаповым [56,57]. Для ассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики теорема о свободе доказана Л. Макар-Лимановым [135] и над полем положительной характеристики для однородного элемента a — М. Хеджесом [115]. Теорема о свободе для алгебр Пуассона над полем нулевой характеристики доказана Л. Макар-Лимановым и У. Умирбаевым [137], для свободных алгебр в многообразии общих алгебр Пуассона — П. С. Колесниковым, Л. Г. Макар-Лимановым и И. П. Шестаковым [127], для право-симметричных алгебр — Д. Козыбаевым, Л. Макар-Лимановым и У. Умирбаевым [129], для алгебр Новикова над полем нулевой характеристики — Л. Макар-Лимановым и У. Умирбаевым [136]. В то же время теорема о свободе не имеет места для любого собственного промежуточного многообразия между многообразиями всех ассоциативных и всех коммутативных алгебр, для многообразий альтернативных, йордановых, бинарно-лиевых алгебр, для многообразий алгебр Мальцева, алгебр Лейбница, $(-1,1)$-алгебр (подробнее см. [144]). Более подробные сведения о применениях теорем о свободе изложены в [108, 125].

С помощью теоремы о свободе несложно доказывается следующий (неалгоритмический) критерий примитивности элемента.

Теорема 3.9 [33, 149]. *Пусть F — поле, $\mathfrak{M}$ — одно из следующих многообразий над полем F: многообразие всех коммутативных алгебр* ($\operatorname{char} F \neq 2$); *многообразие всех антикоммутативных алгебр; многообразие всех алгебр Ли. Пусть $A = F_{\mathfrak{M}}(X)$ — свободная алгебра многообразия $\mathfrak{M}$ с множеством X свободных образующих, $a \in A$, $a \neq 0$, (a) — идеал алгебры A, порождённый элементом a. Тогда a — примитивный элемент свободной алгебры A тогда и только тогда, когда фактор-алгебра $A/(a)$ — свободная алгебра многообразия $\mathfrak{M}$.*

Теорема 3.9 для свободных групп была доказана Дж. Уайтхедом [194], для свободных алгебр Ли – Г. П. Кукиным [33]. Утверждение теоремы 3.9 не имеет места для свободных ассоциативных алгебр [186]. Для свободной алгебры $F(X)$ шрайерова многообразия всех алгебр над бесконечным полем F К. Ауст [80] получила следующий критерий: для ненулевого элемента a алгебры $F(X)$ фактор-алгебра $F(X)/(a)$ является свободной неассоциативной алгеброй в том и только в том случае, когда идеал (a) порождается некоторым примитивным элементом алгебры $F(X)$.

Проблема 3.10. Справедливо ли утверждение теоремы 3.9 для свободных p-алгебр Ли и для свободных p-суперралгебр Ли?

Теорема 3.9 показывает, в частности, что если u, v — такие ненулевые элементы свободной алгебры Ли $L(X)$, что фактор-алгебры $L/(u)$ и $L/(v)$ — свободные алгебры Ли (при этом $L/(u) \cong L/(v)$), то u, v — примитивные элементы свободной алгебры Ли, следовательно, существует такой автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut}\bigl(L(X)\bigr)$, что $\varphi(u) = v$. В общем случае (для непримитивных элементов u и v) это утверждение неверно, как показывают следующие результаты.

Теорема 3.11 [145]. *Пусть F — поле, $L = L(x,y,z)$ — свободная F-алгебра Ли с множеством $\{x,y,z\}$ свободных образующих,*

$$u = x - \bigl[[x,y],[y,z]\bigr], \quad v = x + \Bigl[\bigl[[y,z],x\bigr],y\Bigr],$$

(u) и (v) — идеалы алгебры L, порождённые соответственно элементами u и v. Тогда $L/(u) \cong L/(v)$, но не существует такого автоморфизма φ алгебры L, что $\varphi(u) = v$.

Теорема 3.12 [145]. *Пусть F — поле, $L = L(x,y)$ — свободная F-алгебра Ли с множеством $\{x,y\}$ свободных образующих,*

$$u = x - \Bigl[\bigl[[x,y],y\bigr],[x,y]\Bigr], \quad v = x - \Bigl[\bigl[[x,y],x\bigr],y\Bigr],$$

(u) и (v) — идеалы алгебры Ли L, порождённые элементами u и v соответственно. Тогда $L/(u) \cong L/(v)$, но не существует такого автоморфизма φ алгебры Ли L, что $\varphi(u) = v$.

Для свободных групп примеры такого рода были построены Дж. Мак-Кулом и А. Пиетровским [139] и А. М. Бруннером [92].

Рассмотрим теперь действие эндоморфизмов свободных алгебр на автоморфных орбитах элементов.

Теорема 3.13 [22, 149, 152, 160]. *Пусть F — поле, $\mathfrak{M}$ — одно из следующих многообразий алгебр над полем F: многообразие всех алгебр; многообразие всех коммутативных алгебр $(\operatorname{char} F \neq 2)$; многообразие всех антикоммутативных алгебр; многообразие всех алгебр Ли $(\operatorname{char} F = 0)$; многообразие всех p-алгебр Ли $(\operatorname{char} F = p > 2)$. $A = F_{\mathfrak{M}}(X)$ — свободная алгебра многообразия $\mathfrak{M}$, φ — такой эндоморфизм алгебры A, что для любого примитивного элемента $a \in A$ элемент $\varphi(a)$ — примитивный элемент свободной алгебры A. Тогда φ — автоморфизм алгебры A.*

Пусть u — ненулевой элемент алгебры A, $\operatorname{Orb}(a)$ — автоморфная орбита элемента a, φ — такой эндоморфизм алгебры A, что $\varphi(\operatorname{Orb}(u)) \subseteq \operatorname{Orb}(u)$. Тогда φ — автоморфизм алгебры A.

Для свободных алгебр Ли новое доказательство теоремы 3.13 предложено в [163]. Для свободных групп ранга 2 аналог утверждения теоремы 3.13 был доказан В. Шпильрайном [184] и С. Ивановым [120], в общем случае этот результат доказан Д. Ли [130, 131]. И. В. Чирков и М. А. Шевелин показали в [69], что эндоморфизм свободной метабелевой алгебры Ли ранга 2 над бесконечным полем, сохраняющий автоморфную орбиту ненулевого элемента, является автоморфизмом (над конечными полями построены контрпримеры). Для свободной метабелевой группы ранга 2 см. [114]. Е. И. Тимошенко доказал в [59], что эндоморфизм свободной метабелевой группы любого конечного ранга, сохраняющий примитивность систем элементов, является автоморфизмом.

Проблема 3.14. Пусть φ — такой эндоморфизм свободной алгебры Ли $L(X)$ над полем положительной характеристики, что для любого примитивного элемента h алгебры $L(X)$ элемент $\varphi(h)$ также примитивный элемент свободной алгебры Ли $L(X)$. Верно ли, что φ — автоморфизм алгебры $L(X)$?

Следующий результат описывает прообразы примитивных систем элементов относительно действия эндоморфизмов.

Теорема 3.15 [146]. *Пусть $u_1, \ldots, u_k$ — элементы свободной алгебры A ранга n, $k \leqslant n$, $\{z_1, \ldots, z_k\}$ — примитивная система алгебры A, φ — такой инъективный эндоморфизм алгебры A, что $\varphi(u_i) = z_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Тогда $\{u_1, \ldots, u_k\}$ — примитивная система алгебры A. Более того, если $k = n$, то φ — автоморфизм алгебры A.*

Подалгебра H алгебры A называется ретрактом алгебры A, если существует такой идеал I алгебры A, что $A = H \oplus I$ (это условие эквивалентно тому, что существует такой гомоморфизм $\varphi\colon A \to H$ (ретракция), что φ — тождественное отображение на H).

Теорема 3.16 [146]. *Пусть A — свободная алгебра ранга n, $l \leqslant n$, $\{z_1, \ldots, z_l\}$ — примитивная система элементов алгебры A, $u_1, \ldots, u_l \in A$, H — подалгебра алгебры A, порождённая элементами $u_1, \ldots, u_l$, φ — такой эндоморфизм алгебры A, что $\varphi(u_i) = z_i$, $1 \leqslant i \leqslant l$. Тогда H — ретракт алгебры A. Если $l = n$, то φ — автоморфизм алгебры A, $\{u_1, \ldots, u_l\}$ — множество свободных образующих свободной алгебры A.*

Комбинаторное описание ретрактов свободных алгебр основных типов шрайеровых многообразий алгебр даёт следующая теорема.

Теорема 3.17 [87, 152]. *Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, A — свободная алгебра с множеством X свободных образующих. Тогда подалгебра H является собственным ретрактом алгебры A в том и только в том случае, когда существуют такие множество свободных образующих $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, натуральное число r, $1 \leqslant r \leqslant n$, и множество $U = \{u_1, \ldots, u_r\}$ свободных образующих подалгебры H, что*

$$u_i = y_i + u_i^*, \quad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

где элементы u_i^* принадлежат идеалу алгебры A, порождённому элементами $y_{r+1}, \ldots, y_n$.

Проблема 3.18. Верно ли, что пересечение двух ретрактов свободной алгебры A является ретрактом этой алгебры?

Для свободных групп проблема 3.18 была положительно решена Дж. Бергманом [85].

Изучение ретрактов свободных алгебр многообразий алгебр эквивалентно изучению проективных объектов многообразий. Напомним, что алгебра P многообразия $\mathfrak{V}$ является проективным объектом, если для любого сюръективного гомоморфизма $\mathfrak{V}$-алгебр $\lambda\colon A \to B$ и гомоморфизма $\beta\colon P \to B$ существует такой гомоморфизм $\alpha\colon P \to A$, что $\lambda\alpha = \beta$. Поскольку любая свободная алгебра является проективным объектом, естественно рассмотреть следующую проблему.

Проблема 3.19. Пусть P — проективный объект в многообразии $\mathfrak{V}$ (не)ассоциативных алгебр. Верно ли, что P — свободная алгебра многообразия $\mathfrak{V}$?

В [2] В. А. Артамонов показал, что проективные объекты нильпотентного многообразия — свободные алгебры. С использованием свободного дифференциального исчисления Фокса и решения гипотезы Серра в [3] доказано, что любая конечно порождённая проективная метабелева алгебра Ли свободна и любая конечно порождённая проективная метабелева группа свободна. Аналогичный результат для метабелевых ограниченных p-алгебр Ли, метабелевых суперәлгебр Ли, метабелевых D-групп доказан в [5]. Похоже, что эти результаты не могут быть обобщены на разрешимые алгебры Ли и группы степени 3 по причинам, рассмотренным в [7].

4. ПБВ-пары многообразий линейных алгебр

Пусть $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ — многообразия алгебр над полем F. Допустим, что существует функтор $\mathcal{K}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, ставящий в соответствие каждой алгебре $A \in \mathcal{V}$ алгебру $\mathcal{K}(A) \in \mathcal{W}$ с помощью изменения умножения в алгебре A: как линейные пространства $\mathcal{K}(A)$ и A совпадают; существуют такие неассоциативные многочлены $f_1, \ldots, f_n$, что полилинейные операции умножения в алгебре $\mathcal{K}(A)$ задаются многочленами $f_1, \ldots, f_n$, вычисленными в A. Функтор $\mathcal{K}$ будем называть функтором замены умножений.

Например, $\mathcal{V} = \mathrm{As}$ — многообразие всех ассоциативных алгебр, $\mathcal{W} = \mathrm{Lie}$ — многообразие всех алгебр Ли, $\mathcal{K}(A) = A^{(-)}$ — алгебра с новой операцией, заданной коммутатором $[x, y] = xy - yx$.

Рассмотрим также $\mathcal{V} = \mathrm{As}$, $\mathcal{W} = \mathrm{Jord}$ — многообразие всех йордановых алгебр, заданное тождествами

$$xy = yx, \quad (x^2y)x = x^2(xy),$$

$\mathcal{K}(A) = A^{(+)}$ — алгебра, заданная на том же линейном пространстве с помощью йорданова умножения $x \circ y = 1/2(xy + yx)$ [19, 121].

Если $\mathcal{V} = \mathrm{Alg}$ — многообразие всех алгебр, $\mathcal{W} = \mathrm{Com}$ — многообразие всех коммутативных алгебр, то рассмотрим $\mathcal{K}(A) = A^{(+)}$.

Если $\mathcal{V} = \mathrm{Alg}$, $\mathcal{W} = \mathrm{ACom}$ — многообразие всех антикоммутативных алгебр, то положим $\mathcal{K}(A) = A^{(-)}$.

Для $\mathcal{V} = \mathrm{Alg}$ и $\mathcal{W} = \mathrm{Ak}$ (многообразия всех алгебр Акивиса) рассмотрим операции $[x, y]$ (коммутатор) и $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ (ассоциатор) и соответствующий функтор $\mathcal{K}(A) = \mathrm{Ak}\,A$ [1, 119].

Предложение 4.1. *Пусть $\mathcal{K}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ — функтор замены умножений. Тогда для $\mathcal{K}$ существует такой левый сопряжённый функтор $\mathcal{U}\colon \mathcal{W} \to \mathcal{V}$, что*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{W}}\bigl(A, \mathcal{K}(B)\bigr) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{V}}(\mathcal{U}(A), B)$$

для всех $A \in \mathcal{W}$ и $B \in \mathcal{V}$. Более того, существует канонический $\mathcal{W}$-гомоморфизм $i\colon A \to \mathcal{K}\bigl(\mathcal{U}(A)\bigr)$, такой что для любых алгебры $B \in \mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$-гомоморфизма $\varphi\colon A \to \mathcal{K}(B)$ существует единственный $\mathcal{V}$-гомоморфизм $\tilde{\varphi}\colon \mathcal{U}(A) \to B$, удовлетворяющий условию $\tilde{\varphi} \circ i = \varphi$.

Алгебра $\mathcal{U}(A)$ называется $\mathcal{V}$-универсальной обёртывающей алгеброй $\mathcal{W}$-алгебры A. Отметим, что канонический гомоморфизм $i\colon A \to \mathcal{K}(\mathcal{U}(A))$ не всегда инъективен. Например, существуют йордановы алгебры, не вложимые в алгебру $A^{(+)}$ ни для какой ассоциативной алгебры A (см. [19, 121]). Ряд примеров универсальных обёртывающих алгебр собран в обзорной статье [190].

Пара многообразий $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ с функтором замены умножений $\mathcal{K}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ называется ПБВ-парой [144], если выполнены следующие условия:

(i) каноническое отображение $i\colon A \to \mathcal{U}(A)$ инъективно для всех алгебр $A \in \mathcal{W}$;

(ii) если алгебра $A \in \mathcal{W}$ обладает линейным базисом $\{e_i,\ i \in I\}$, то алгебра $\mathcal{U}(A)$ обладает линейным базисом, состоящим из одночленов от e_i специального вида (нормальные одночлены), при этом определение нормальных одночленов зависит от пары $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ и не зависит от конкретной алгебры A.

Например, $(\mathrm{As}, \mathrm{Lie})$, $(\mathrm{Alg}, \mathrm{Com})$, $(\mathrm{Alg}, \mathrm{Alg}_n)$, $(\mathrm{Alg}, \mathrm{ACom})$, $(\mathrm{Alg}, \mathrm{Ak})$ — ПБВ-пары многообразий (здесь Alg_n — многообразие всех линейных n-арных систем). Пара многообразий $(\mathrm{Alg}, \mathrm{Sab})$, где Sab — многообразие всех алгебр Сабинина, также является ПБВ-парой многообразий (см. [144, 180]).

Предложение 4.2 [144]. *Пусть* $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *— ПБВ-пара многообразий,* $\mathcal{V}[X]$ *и* $\mathcal{W}[X]$ *— свободные алгебры с множеством* X *свободных образующих многообразий* $\mathcal{V}$ *и* $\mathcal{W}$ *соответственно. Тогда* $\mathcal{U}(\mathcal{W}[X]) \cong \mathcal{V}[X]$.

Теорема 4.3 [144]. *Пусть* $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *— ПБВ-пара многообразий. Если* $\mathcal{V}$ *— однородное шрайерово многообразие, то* $\mathcal{W}$ *также однородное шрайерово многообразие.*

Так как многообразие всех алгебр Alg является однородным шрайеровым многообразием (см. [34]), то следующие многообразия алгебр являются шрайеровыми.

Следствие 4.4 [72, 96, 166, 180]. *Многообразия* Com, ACom, Ak, Sab *являются шрайеровыми многообразиями алгебр.*

Отметим, что если $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ — ПБВ-пара многообразий, $\mathcal{W}$ — шрайерово многообразие, то многообразие $\mathcal{V}$ может не быть шрайеровым. Например, в ПБВ-паре $(\mathrm{As}, \mathrm{Lie})$ многообразие Lie шрайерово, но многообразие As не является шрайеровым.

Теорема 4.5 [144]. *Пусть* $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *— ПБВ-пара многообразий алгебр. Тогда если теорема о свободе верна в многообразии* $\mathcal{V}$*, то она верна и в многообразии* $\mathcal{W}$.

Поскольку теорема о свободе верна для свободной неассоциативной алгебры [20] (см. также [148]), имеем следующее следствие.

Следствие 4.6. *Теорема о свободе справедлива в многообразиях* Com, ACom, Ak, Sab, Alg_n.

Предложение 4.7 [144]. *Пусть* $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ *— ПБВ-пара многообразий,* $\mathcal{V}[X]$ *и* $\mathcal{W}[X]$ *— свободные алгебры с множеством* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *свободных образующих многообразий* $\mathcal{V}$ *и* $\mathcal{W}$ *соответственно,* f *— эндоморфизм алгебры* $\mathcal{W}[X]$, $\tilde{f}$ *— эндоморфизм алгебры* $\mathcal{V}[X]$*, заданный условиями* $\tilde{f}(x_i) = f(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. *Тогда* f *является автоморфизмом алгебры* $\mathcal{W}[X]$ *в том и только в том случае, когда* $\tilde{f}$ *— автоморфизм алгебры* $\mathcal{V}[X]$.

В том случае, когда $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ — ПБВ-пара, $\mathcal{V} = \mathrm{Alg}$ (многообразие всех алгебр), $\mathcal{V}[X]$ является свободной неассоциативной алгеброй, для распознавания автоморфизмов алгебры $\mathcal{W}[X]$ мы можем использовать хорошо известные алгоритмы распознавания автоморфизмов свободной неассоциативной алгебры, базирующиеся на преобразованиях Нильсена (приведение конечного подмножества элементов к редуцированному множеству) или на свободном дифференциальном исчислении (рассмотрение обратимости матрицы Якоби) (см. соответствующие алгоритмы с компьютерной реализацией в [47, 70, 77, 148, 149]).

Теорема 4.8 [144]. *Пусть теорема о свободе верна в однородном шрайеровом многообразии линейных алгебр $\mathcal{W}$, $u \in \mathcal{W}[X]$, $u \neq 0$. Тогда u является примитивным элементом алгебры $\mathcal{W}[X]$ в том и только в том случае, когда фактор-алгебра $\mathcal{W}[X]/\mathrm{id}_{\mathcal{W}[X]}(u)$ — свободная алгебра многообразия $\mathcal{W}$.*

Для основных типов шрайеровых многообразий с одной бинарной операцией см. теорему 3.9 настоящего обзора.

5. Почти примитивные элементы

Ненулевой элемент u свободной алгебры $F(X)$ называется почти примитивным элементом, если u не является примитивным элементом алгебры $F(X)$, но является примитивным элементом любой собственной подалгебры H алгебры $F(X)$, содержащей элемент u ($u \in H$, $H \subseteq F$, $0 \neq H \neq F$). Почти примитивные элементы в свободных группах изучались в [93, 104, 109, 110, 128, 175—177]. Алгоритм распознавания почти примитивных элементов свободных групп был построен Л. Комерфордом в [104].

Изучение почти примитивных элементов свободных неассоциативных алгебр было начато в работах [150, 154] и в монографии [148]. В частности, было показано, что элемент xx является почти примитивным элементом свободной неассоциативной алгебры $F(x)$, элементы xy, $xy + x$ являются почти примитивными элементами свободной неассоциативной алгебры $F(x, y)$, элемент $[x, y]$ является почти примитивным элементом свободной алгебры Ли $L(x, y)$, элемент $[x, y] + \big[[x, z], z\big]$ является почти примитивным элементом свободной алгебры Ли $L(x, y, z)$. Также было доказано, что если элемент является почти примитивным, то его ранг максимален. Кроме того, было доказано следующее утверждение, позволяющее строить серии почти примитивных элементов в свободных алгебрах любого ранга.

Теорема 5.1 [154, предложение 3.9]. *Пусть алгебра $F(X)$ является свободным произведением своих собственных подалгебр A и B, $F(X) = A * B$, a — однородный почти примитивный элемент алгебры A, b — однородный почти примитивный элемент алгебры B относительно функций веса μ_1 и μ_2 алгебры A и B соответственно. Тогда $a+b$ — почти примитивный элемент алгебры $F(X)$.*

Следовательно, перечисленные ниже элементы являются почти примитивными в свободных алгебрах ранга n:

— при $n = 2m$ элемент $x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_{2m-1}x_{2m}$ в $F(X)$;

— при $n = 2m+1$ элемент $x_1x_2+x_3x_4+\ldots+x_{2m-1}x_{2m}+x_{2m+1}x_{2m+1}$ в $F(X)$;

— при $n = 2m$ элемент $[x_1, x_2] + [x_3, x_4] + \ldots + [x_{2m-1}, x_{2m}]$ в $L(X)$;

— при $n = 2m + 1$ элемент $\big[[x_2, x_1], x_1\big] + [x_2, x_3] + \ldots + [x_{2m}, x_{2m+1}]$ в $L(X)$.

В последующих работах [27—29] основное внимание было уделено однородным почти примитивным элементам: были построены новые примеры и доказан критерий почти примитивности однородного элемента в свободных неассоциативных алгебрах, свободных (анти)коммутативных алгебрах и алгебрах Ли малых рангов. В дальнейшем под свободной алгеброй $F(X)$ будем понимать одну из перечисленных выше (в этом разделе) алгебр.

Определение 5.2 [27—29]. Пусть W — специальный базис алгебры $F(X)$ с весовой функцией длины $d(u)$.

— В случае когда $F(X)$ — свободная неассоциативная алгебра с множеством X свободных образующих, положим, что $W = \Gamma(X)$ — свободный группоид неассоциативных одночленов без единичного элемента в алфавите X, $X \subseteq \Gamma(X)$; если $u, v \in \Gamma(X)$, то $uv \in \Gamma(X)$, где uv является формальным произведением неассоциативных одночленов.

— В случае когда $F(X) = A_\pm(X)$ является свободной (анти)коммутативной алгеброй, имеем следующее: если $d(u) > d(v)$, то $u > v$, где $d(u)$ — длина элемента $u \in A_\pm(X)$; $X \subset W_\pm$; $w \in W_\pm$, если $w = uv$, $u, v \in W_\pm$ и $u \geqslant v$ для $A_-(X)$ и $u > v$ для $A_+(X)$.

— В случае когда $F(X) = L(X)$ является свободной алгеброй Ли, имеем следующее: $X \subset W$; $w \in W$, если $w = [u, v]$, $u, v \in W$ и $u > v$; если $u = [u_1, u_2]$, то $u_2 \leqslant v$. В этом случае W является базисом Холла алгебры $L(X)$.

Для базиса W введём следующие обозначения:

$$W^m = \{w \in W \mid d(w) = m\},$$

$$W_X = \{w \in W \mid w = Ax \text{ или } w = Bx \text{ для } F(X),\ w = Ax \text{ для } A_\pm(X),$$

$$w = [A, x] \text{ для } L(X);\ A, B \in W^{d(w)-1},\ x \in X\},$$

$$W_X^m = W_X \cap W^m.$$

Отметим простейшие свойства примитивных и почти примитивных элементов свободных алгебр.

Предложение 5.3 [27—29]. *Пусть $F(X)$ — свободная алгебра с конечным множеством X свободных образующих, $\{h_1, \ldots, h_k\}$ — редуцированное множество свободных образующих собственной подалгебры H алгебры $F(X)$. Если элемент является примитивным в подалгебре H, то существует свободная образующая h_i подалгебры H, входящая линейно в его представление* (см. [148]). *Если существует свободная образующая h_i подалгебры H, входящая только линейно в представление элемента, то этот элемент является примитивным в подалгебре H. Если существует свободная образующая h_i подалгебры H такого же веса, что и сам элемент, входящая линейно в представление элемента, то этот элемент является примитивным в подалгебре H. Если существует свободная образующая h_i подалгебры H, старшая часть которой входит только* *линейно в представление старшей части элемента, то этот элемент является примитивным в подалгебре H.*

Ясно, что любой однородный элемент степени больше 1 не является примитивным по предложению 5.3, тем самым остаётся вопрос о его примитивности в собственных подалгебрах. В [27, 29] был доказан следующий критерий почти примитивности однородного элемента в свободных алгебрах $F(x)$, $A_-(x)$ ранга 1.

Теорема 5.4 [27, 29]. *Однородный элемент $u \in F(X)$ веса $d(u) = m \geqslant 2$ является почти примитивным элементом тогда и только тогда, когда в каноническое разложение $u = u(x)$ входит какой-нибудь одночлен $w \in W_X^m$.*

В алгебрах $A_+(x)$ и $L(x)$ однородных почти примитивных элементов нет, так как отсутствуют элементы веса больше 1.

При рассмотрении свободных алгебр ранга 2 проявляются существенные различия между алгебрами Ли и остальными рассматриваемыми свободными алгебрами. Так, для однородных элементов свободной неассоциативной, свободной (анти)коммутативной алгебра верны следующие теоремы.

Теорема 5.5 [29]. *Однородный элемент $u \in F(x, y)$ веса $d(u) = m \geqslant 3$ является почти примитивным тогда и только тогда, когда не существует решения уравнения*

$$u|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle} = \tilde{u} = \gamma_{(x,\lambda)}\Lambda_x x + \gamma_{(y,\lambda)}\Lambda_y y + \gamma_{(\eta,x)} x N_x + \gamma_{(\eta,y)} y N_y = f_1 l + l f_2 \qquad (5.1)$$

относительно однородных переменных $f_1, f_2, l \in F(x, y)$ веса $d(f_1) = d(f_2) = m-1$, $d(l) = 1$, где $a|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle}$ — проекция элемента a на линейное пространство с базисом $W_{\{x,y\}}$.

Теорема 5.6 [27]. *Однородный элемент $u \in A_\pm(x, y)$ веса $d(u) = m \geqslant 3$ является почти примитивным тогда и только тогда, когда не существует решения уравнения*

$$u|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle} = \tilde{u} = \gamma_{(x,\lambda)}\Lambda_x x + \gamma_{(y,\lambda)}\Lambda_y y = fl \qquad (5.2)$$

относительно однородных переменных $f, l \in A_\pm(x, y)$ веса $d(f) = m-1$, $d(l) = 1$.

Ясно, что в случае разрешимости уравнений (5.1) и (5.2) элемент u не будет примитивным в собственной подалгебре $H = \mathrm{alg}\{f_1, f_2, l\}$ ($H = \mathrm{alg}\{f, l\}$) по предложению 5.3. Если приглядеться к уравнениям, то можно заключить, что однородный элемент u является почти примитивным в свободной алгебре $F(x, y)$ тогда и только тогда, когда не существует такого коэффициента пропорциональности $\theta \in F$, что $\Lambda_x \overset{\theta}{\sim} \Lambda_y$, $N_x \overset{\theta}{\sim} N_y$ ($\Lambda_x = \theta\Lambda_y$, $N_x = \theta N_y$ или $\theta\Lambda_x = \Lambda_y$, $\theta N_x = N_y$), а в случае свободной алгебры $A_\pm(x, y)$ тогда и только тогда, когда элементы Λ_x, Λ_y не пропорциональны.

Теорема 5.7 [28]. *Однородный элемент $u \in L(x, y)$ веса $d(u) = m \geqslant 3$ является почти примитивным тогда и только тогда, когда не существует решения уравнения*

$$u|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle} = \tilde{u} = \gamma_x[\Lambda_x, x] + \gamma_y[\Lambda_y, y] = [f, l]|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle} \qquad (5.3)$$

относительно однородных переменных $f, l \in L(x, y)$ *веса* $d(f) = m - 1$, $d(l) = 1$ *соответственно, где* $a|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle}$ *— проекция элемента* a *на линейное пространство с базисом* $W_{\{x,y\}}$, *т. е. линейная комбинация регулярных одночленов из* $W_{\{x,y\}}$, *входящих в регулярное представление элемента* a.

Кроме того в лиевом случае $[f, l]|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle}$ не обязательно совпадает с $[f, l]$, поэтому область значений параметров, при которых разрешимо уравнение (5.3), значительно шире. Продемонстрируем различия, которые возникают из-за этого, на примере элементов $u_{k,l}(x, y) = (\operatorname{ad} x)^k(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^l$ с $k, l \geqslant 2$, где для $u, v \in F$ положим $(\operatorname{ad} u)(v) = uv$, $(v)(\operatorname{Ad} u) = vu$. В [150] было доказано, что элемент $u_{k,l}(x, y)$ является почти примитивным в алгебре $L(x, y)$ при $k, l \geqslant 2$, $k \neq l$. В [29] аналогичным способом было доказано, что $u_{k,l}(x, y)$ является почти примитивным в алгебре $F(x, y)$ при $k, l \geqslant 2$, $k \neq l$, и, с использованием теоремы 5.5, при $k = l \geqslant 2$.

Предложение 5.8 [28, предложения 4, 5]. *При* $k = l = 2$ *и* $k = l = 4$ *элемент* $u_{k,l}(x, y)$ *не является почти примитивным в* $L(x, y)$. *При* $k = l = 3$ *элемент* $u_{k,l}(x, y)$ *является почти примитивным в* $L(x, y)$ *тогда и только тогда, когда в поле* F, *над которым рассматривается данная алгебра, не имеет решений уравнение* $\alpha^2 + 1 = 0$.

Напротив, элементы $u_t(x, y, z) = xy + (x)(\operatorname{Ad} z)^t \in F(x, y, z)$ в свободной неассоциативной алгебре и $u_t(x, y, z) = [x, y] + (x)(\operatorname{Ad} z)^t \in L(x, y, z)$ в свободной алгебре Ли являются почти примитивными при $t \geqslant 2$ (см. [29, 150]).

Теорема 5.9 [27—29]. *Пусть* $F(X)$ *— свободная неассоциативная алгебра, или свободная (анти)коммутативная алгебра, или свободная алгебра Ли.*

а) *Если элемент* $u \in F(X)$ *не является примитивным элементом в* $F(X)$, *но старшая часть* u° *является примитивным элементом в любой собственной подалгебре* $u^\circ \in H^\circ \subsetneq F(X)$, *порождённой однородными образующими, то элемент* u *является почти примитивным элементом в* $F(X)$.

б) *В обратную сторону утверждение* а) *верно для однородных элементов.*

в) *Для элементов* $(xx)y + x \in F(x, y)$, $(xx)y + x \in A_-(x, y)$ *утверждение* а) *в обратную сторону неверно. Для элементов* $x(xy) + y \in A_+(x, y)$, $\big[[x, y], y\big] + x \in L(x, y)$ *свободных алгебр над полем* F, *в котором уравнение* $\alpha^2 + 1 = 0$ *не имеет решения, утверждение* а) *в обратную сторону также неверно.*

6. Ранг примитивности

Пусть F — поле, $\operatorname{char} F \neq 2$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathcal{F}(X)$ — свободная шрайерова алгебра. Д. Пудером [168] было дано определение ранга примитивности для элементов и конечно порождённых подгрупп свободной группы $\mathbf{F}_k$ ранга k. Аналогичное определение ранга примитивности для элементов свободной алгебры шрайерова многообразия $\mathcal{F}(X)$ было дано А. Климаковым [126].

Определение 6.1 [126]. Рангом примитивности элемента $w \in \mathcal{F}(X)$ называется

$$\pi(w) = \min\{\operatorname{rank}(H) \mid w \in H \subset \mathcal{F}(X) \text{ и } w \text{ не является примитивным в } H\}.$$

Если не существует ни одной такой подалгебры H, то $\pi(w) = \infty$ (считаем дальше, что $\infty{+}k = \infty{+}\infty = k{+}\infty = \infty$ и $k < \infty$ для любого $k \in \mathbb{N}$). Подалгебру H, на которой достигается минимум, будем называть w-критической.

Предложение 6.2 (свойства ранга примитивности $\pi(w)$ [126]).

- $\pi(w) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $w = 0$.
- $\pi(w) = 1$ *тогда и только тогда, когда* $w \in \operatorname{alg}\{v\}$ *для некоторого* $v \in \mathcal{F}(X)$ *и* $d_{\{v\}}(w) > 1$.
- $\pi(w) = \infty$ *тогда и только тогда, когда* w *является примитивным элементом в* $\mathcal{F}(X)$.
- *Если* w *не является примитивным в* $\mathcal{F}(X)$, *то* $\pi(w) \leqslant \operatorname{rank}(w) \leqslant |X|$.
- *Если* w *является почти примитивным элементом в* $\mathcal{F}(X)$, *то* $\pi(w) = |X|$; *обратное в общем случае неверно.*
- $\pi(w) \in \{0, \ldots, |X|, \infty\}$ *и все значения достигаются.*
- *Если подалгебры* $A_1, A_2 \subset \mathcal{F}(X)$ *такие, что* $w \in A_1 \subset A_2$, *то* $\pi_{A_1}(w) \geqslant \pi_{A_2}(w)$. *Более того, если подалгебра* A_1 *является* w-*критической в* $\mathcal{F}(X)$, *то* $\pi_{A_1}(w) = \pi_{A_2}(w) = \pi_{\mathcal{F}(X)}(w)$.
- *Если* $w \in \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, *то* $\pi_{\mathcal{F}_1}(w) = \pi_{\mathcal{F}_0}(w)$.

В [168] было доказано, что если w_1, w_2 принадлежат $\mathbf{F}_k$ и не имеют общих букв относительно заданного базиса, то $\pi(w_1 w_2) = \pi(w_1) + \pi(w_2)$. С использованием техники работы со свободным произведением свободных алгебр шрайеровых многообразий в [126] было доказано, что ранг примитивности суммы элементов равен сумме рангов примитивности.

Теорема 6.3 [126, теорема 2.1]. *Пусть* $\mathcal{F}(X)$ — *свободное произведение двух собственных подалгебр* A *и* B, $\mathcal{F}(X) = A * B$, $a \in A$, $b \in B$. *Тогда* $\pi_{\mathcal{F}(X)}(a + b) = \pi_A(a) + \pi_B(b)$.

С использованием техники работы с рангом примитивности в [126] была доказана теорема о почти примитивности суммы почти примитивных элементов свободного произведения свободных алгебр шрайеровых многообразий.

Теорема 6.4 [126, теорема 2.2]. *Пусть* $\mathcal{F}(X)$ — *свободное произведение двух собственных подалгебр* A *и* B, $\mathcal{F}(X) = A * B$. *Пусть также элементы* a *и* b *являются почти примитивными элементами в* A *и* B *соответственно. Тогда элемент* $a + b$ *является почти примитивным элементом алгебры* $\mathcal{F}(X)$.

Нетрудно заметить, что данная теорема является усилением теоремы 5.1 и аналогом классической теоремы для свободных групп (см. [93, 109, 110]).

Литература

[1] Акивис М. А. О локальных алгебрах многомерных три-тканей // Сиб. матем. журн. — 1976. — Т. 17, № 1. — С. 5—11.

[2] Артамонов В. А. Нильпотентность, проективность, свобода // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1971. — № 5. — С. 50—53.

[3] Артамонов В. А. Проективные метабелевы группы и алгебры Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1978. — Т. 42, № 2. — С. 226—236.

[4] Артамонов В. А. Нильпотентность, проективность, разложимость // Сиб. мат. журн. — 1991. — Т. 32, № 6. — С. 3—11.

[5] Артамонов В. А. Проективные метабелевы D-группы и супералгебры Ли // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1991. — Вып. 15. — С. 189—195.

[6] Артамонов В. А. Представление Магнуса в конгруэнц-модулярных многообразиях // Сиб. мат. журн. — 1997. — Т. 38, № 5. — С. 978—995.

[7] Артамонов В. А. Транзитивность действия на модулярных векторах // Фундамент. и прикл. матем. — 1999. — Т. 5, вып. 3. — С. 765—773.

[8] Артамонов В. А., Михалёв А. А., Михалёв А. В. Автоморфизмы свободных алгебр шрайеровых многообразий // Совр. пробл. матем. и мех. — 2009. — Т. 4, № 3. — С. 39—57.

[9] Баранович Т. М., Бургин М. С. Линейные Ω-алгебры // УМН. — 1975. — Т. 30, № 4. — С. 61—106.

[10] Бахтурин Ю. А. Два замечания о многообразиях алгебр Ли // Матем. заметки. — 1968. — № 4. — С. 387—398.

[11] Бахтурин Ю. А. О тождествах в алгебрах Ли. I // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1973. — № 1. — С. 12—18.

[12] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985.

[13] Бургин М. С. Теорема о свободе в некоторых многообразиях линейные Ω-алгебр и Ω-колец // УМН. — 1969. — Т. 24, № 1. — С. 27—38; Исправление: УМН. — 1970. — Т. 25, № 1. — С. 248.

[14] Бургин М. С. Шрайеровы многообразиях линейных Ω-алгебр // Матем. сб. — 1974. — Т. 93 (135), № 4. — С. 554—572.

[15] Бургин М. С., Артамонов В. А. Некоторые свойства подалгебр в многообразиях линейных Ω-алгебр // Матем. сб. — 1972. — Т. 87, № 1. — С. 67—82.

[16] Гайнов А. Т. Коммутативные свободные и антикоммутативные свободные произведения алгебр // ДАН СССР. — 1960. — Т. 133, № 6. — С. 1275—1278.

[17] Гайнов А. Т. Коммутативные свободные и антикоммутативные свободные произведения алгебр // Сиб. матем. журн. — 1962. — Т. 3, № 6. — С. 805—833.

[18] Гайнов А. Т. О дифференцированиях приведённых свободных алгебр // Алгебра и логика. — 1963. — Т. 1, № 6. — С. 20—25.

[19] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[20] Жуков А. И. Приведённые системы определяющих соотношений в неассоциативных алгебрах // Матем. сб. — 1950. — Т. 27, № 2. — С. 267—280.

[21] Зайцев М. В. О шрайеровых многообразиях алгебр Ли // Матем. заметки. — 1980. — Т. 28, № 1. — С. 119—126.

[22] Золотых А. А., Михалёв А. А. Эндоморфизм свободной алгебры Ли, сохраняющий свойство примитивности элементов, является автоморфизмом // УМН. — 1993. — Т. 48, № 6. — С. 149—150.

[23] Золотых А. А., Михалёв А. А. Ранг элемента свободной p-суперaлгебры Ли // ДАН СССР. — 1994. — Т. 334, № 6. — С. 690—693.

[24] Золотых А. А., Михалёв А. А. Алгоритмы дополнения примитивных систем элементов свободных алгебр Ли до свободных порождающих множеств // Интеллект. сист. — 1996. — Т. 1, вып. 1-4. — С. 173—183.

[25] Золотых А. А., Михалёв А. А. Комплекс алгоритмов для вычислений в супералгебрах Ли // Программирование. — 1997. — № 1. — С. 12—23.

[26] Золотых А. А., Михалёв А. А., Умирбаев У. У. Пример несвободной алгебры Ли когомологической размерности 1 // УМН. — 1994. — Т. 49, № 1. — С. 203—204.

[27] Климаков А. В. Почти примитивные элементы свободных неассоциативных (анти)коммутативных алгебр малых рангов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2012. — № 5. — С. 19—24.

[28] Климаков А. В. Почти примитивные элементы свободных алгебр Ли малых рангов // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 1. — С. 63—74.

[29] Климаков А. В., Михалёв А. А. Почти примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр малых рангов // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, вып. 1. — С. 127—141.

[30] Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.

[31] Кон П. Свободные кольца и их связи. — М.: Мир, 1975.

[32] Корепанов А. И. Свободные неассоциативные суперкоммутативные алгебры // Фундамент. и прикл. матем. — 2003. — Т. 9, вып. 3. — С. 103—109.

[33] Кукин Г. П. Примитивные элементы свободных алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1970. — Т. 9, № 4. — С. 458—472.

[34] Курош А. Г. Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр // Матем. сб. — 1947. — Т. 20, № 2. — С. 239—262.

[35] Курош А. Г. Неассоциативные свободные суммы алгебр // Матем. сб. — 1955. — Т. 37, № 2. — С. 251—264.

[36] Курош А. Г. Свободные суммы мультиоператорных алгебр // Сиб. матем. журн. — 1960. — Т. 1, № 1. — С. 62—70.

[37] Курош А. Г. Мультиоператорные кольца и алгебры // УМН. — 1969. — Т. 24, № 1 (145). — С. 3—15.

[38] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980.

[39] Макар-Лиманов Л. Г. Об автоморфизмах свободной алгебры с двумя образующими // Функц. анализ и его прил. — 1970. — Т. 4, № 3. — С. 107—108.

[40] Михалёв А. А. Подалгебры свободных цветных супералгебр Ли // Матем. заметки. — 1985. — Т. 37, № 5. — С. 653—661.

[41] Михалёв А. А. Свободные цветные супералгебры Ли // ДАН СССР. — 1986. — Т. 286, № 3. — С. 551—554.

[42] Михалёв А. А. Подалгебры свободных p-супералгебр Ли // Матем. заметки. — 1988. — Т. 43, № 2. — С. 178—191.

[43] Михалёв А. А. Лемма о слиянии и проблема равенства для цветных супералгебр Ли // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1989. — № 5. — С. 88—91.

[44] Михалёв А. А. О правых идеалах свободной ассоциативной алгебры, порождённых свободными цветными p-супералгебрами Ли // УМН. — 1992. — Т. 47, № 5. — С. 187—188.

[45] Михалёв А. А. Техника композиции А. И. Ширшова в супералгебрах Ли (некоммутативные базисы Грёбнера) // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1995. — Вып. 18. — С. 277—289.

[46] Михалёв А. А., Михалёв А. В., Чеповский А. А. Примитивные элементы свободных коммутативных и антикоммутативных неассоциативных алгебр // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. — 2010. — Т. 10, вып. 4. — С. 62—81.

[47] Михалёв А. А., Михалёв А. В., Чеповский А. А., Шампаньер К. Примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2007. — Т. 13, вып. 5. — С. 171—192.

[48] Носков Г. А. О примитивных элементах в свободной группе // Матем. заметки. — 1981. — Т. 30, № 4. — С. 497—500.

[49] Романовский Н. С. Теорема о свободе для групп с одним определяющим соотношением в многообразиях разрешимых и нильпотентных групп данных ступеней // Матем. сб. — 1972. — Т. 89, № 1. — С. 93—99.

[50] Романовский Н. С. Свободные подгруппы в конечно определённых группах. Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 1. — С. 88—97.

[51] Романьков В. А. Критерии примитивности системы элементов свободной метабелевой группы // Укр. матем. журн. — 1991. — Т. 43, № 7-8. — С. 996—1002.

[52] Романьков В. А. Примитивные элементы свободной группы ранга 3 // Матем. сб. — 1991. — Т. 182, № 7. — С. 1074—1085.

[53] Романьков В. А. Краткий обзор примитивных систем элементов относительно свободных групп // Вестн. Омск. ун-та. — 2017. — № 1. — С. 15—17.

[54] Романьков В. А., Чирков И. В., Шевелин М. А. Матричная непредставимость групп автоморфизмов некоторых свободных алгебр // Сиб. матем. журн. — 2004. — Т. 45, № 5. — С. 1184—1188.

[55] Серёгин А. В. Некоторые свойства алгебр Ли когомологической размерности один // Фундамент. и прикл. матем. — 1998. — Т. 4, вып. 2. — С. 779—783.

[56] Талапов В. В. О разрешимых алгебрах Ли с одним определяющим соотношением // Сиб. матем. журн. — 1981. — Т. 22, № 4. — С. 176—181.

[57] Талапов В. В. О полинильпотентных алгебрах Ли, заданных одним определяющим соотношением // Сиб. матем. журн. — 1982. — Т. 23, № 5. — С. 192—204.

[58] Тимошенко Е. И. Системы элементов, сохраняющие меру на многообразиях групп // Матем. сб. — 2013. — Т. 204, № 12. — С. 119—126.

[59] Тимошенко Е. И. Эндоморфизмы свободных разрешимых групп, сохраняющие примитивность систем элементов // Алгебра и логика. — 2015. — Т. 54, № 4. — С. 503—519.

[60] Умирбаев У. У. Об аппроксимации свободных алгебр Ли относительно вхождения // Учёные записки Тартуского ун-та. Моноиды, кольца и алгебры. — 1990. — Вып. 878. — С. 147—152.

[61] Умирбаев У. У. Частные производные и эндоморфизмы некоторых относительно свободных алгебр Ли // Сиб. матем. журн. — 1993. — Т. 34, № 6. — С. 179—188.

[62] Умирбаев У. У. О шрайеровых многообразиях алгебр // Алгебра и логика. — 1994. — Т. 33, № 3. — С. 317—340.

[63] Умирбаев У. У. Примитивные элементы свободных групп // УМН. — 1994. — Т. 49, № 2. — С. 175—176.

[64] Умирбаев У. У. О ранге элементов свободных групп // Фундамент. и прикл. матем. — 1996. — Т. 2, вып. 1. — С. 313—315.

[65] Фельдман Г. Л. Концы алгебр Ли // УМН. — 1983. — Т. 38, № 1. — С. 199—200.

[66] Харлампович О. Г. Условие Линдона для разрешимых алгебр Ли // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1984. — № 9. — С. 50—59.

[67] Хашина Ю. А. Шрайеровы многообразия n-лиевых алгебр // Сиб. матем. журн. — 1991. — Т. 32, № 2. — С. 197—199.

[68] Хашина Ю. А. Шрайеровы многообразия обобщённых колец // Научн. тр. ИвГУ. Математика. — 1999. — Вып. 2. — С. 133—141.

[69] Чирков И. В., Шевелин М. А. Эндоморфизмы свободных метабелевых алгебр Ли, сохраняющие орбиты // Сиб. матем. журн. — 2004. — Т. 45, № 6. — С. 1391—1396.

[70] Шампаньер К. Алгоритмы реализации ранга и примитивности систем элементов свободных неассоциативных алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2000. — Т. 6, вып. 4. — С. 1229—1238.

[71] Ширшов А. И. Подалгебры свободных лиевых алгебр // Матем. сб. — 1953. — Т. 33, № 2. — С. 441—452.

[72] Ширшов А. И. Подалгебры свободных коммутативных и свободных антикоммутативных алгебр // Матем. сб. — 1954. — № 1. — С. 81—88.

[73] Ширшов А. И. Некоторые алгоритмические вопросы для ε-алгебр // Сиб. матем. журн. — 1962. — Т. 3, № 1. — С. 132—137.

[74] Ширшов А. И. Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли // Сиб. матем. журн. — 1962. — Т. 3, № 2. — С. 292—296.

[75] Ширшов А. И. Избранные труды. Кольца и алгебры. — М.: Наука, 1984.

[76] Штерн А. С. Свободные супералгебры Ли // Сиб. матем. журн. — 1986. — Т. 27, № 1. — С. 170—174.

[77] Ягжев А. В. Об эндоморфизмах свободных алгебр // Сиб. матем. журн. — 1980. — Т. 21, № 1. — С. 181—192.

[78] Artamonov V. A. Varieties of algebras // Handbook of Algebra / M. Hazenwinkel, ed. Vol. 2. — Amsterdam: Elsevier, 2000. — P. 547—575.

[79] Artamonov V. A., Mikhalev A. A., Mikhalev A. V. Combinatorial properties of free algebras of Schreier varieties // Polynomial Identities and Combinatorial Methods / A. Giambruno, A. Regev, M. Zaicev, eds. — New York: Marcel Dekker, 2003. — P. 47—99.

[80] Aust C. Primitive elements and one relation algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 193. — P. 375—387.

[81] Bahturin Yu. A., Mikhalev A. A., Petrogradsky V. M., Zaicev M. V. Infinite-Dimensional Lie Superalgebras. — Berlin: Walter de Gruyter, 1992.

[82] Bahturin Yu. A., Mikhalev A. A., Zaicev M. V. Infinite-dimensional Lie superalgebras // Handbook of Algebra. Vol. 2. — Amsterdam: Elsevier, 2000. — P. 579—614.

[83] Bardakov V., Shpilrain V., Tolstykh V. On the palindromic and primitive words of a free group // J. Algebra. — 2005. — Vol. 285. — P. 574—585.

[84] Beidar K. I., Martindale W. S., III, Mikhalev A. V. Rings with Generalized Identities. — New York: Marcel Dekker, 1996.

[85] Bergman G. Supports of derivations, free factorizations, and ranks of fixed subgroups in free groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 351. — P. 1531—1550.

[86] Birman J. S. An inverse function theorem for free groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 41. — P. 634—638.

[87] Bokut' L. A., Kukin G. P. Algorithmic and Combinatorial Algebra. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1994.

[88] Bormotov D. Y. Experimenting with primitive elements in F_2 // Computational and Experimental Group Theory: AMS—ASL Joint Special Session, Interactions Between Logic, Group Theory, and Computer Science, January 15—16, 2003, Baltimore, Maryland / A. Borovik and A. G. Myasnikov, eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 2004. — (Contemp. Math.; Vol. 349). — P. 215—224.

[89] Borovik A. V., Myasnikov A. G., Shpilrain V. Measuring sets in infinite groups // Computational and Statistical Group Theory: AMS Special Session Geometric Group Theory, April 21—22, 2001, Las Vegas, Nevada, AMS Special Session Computational Group Theory, April 28—29, 2001, Hoboken, New Jersey / R. H. Gilman, A. G. Myasnikov, and V. Shpilrain, eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 2002. — (Contemp. Math.; Vol. 298). — P. 21—42.

[90] Borowiec A., Kharchenko V., Oziewicz Z. On free differentials on associative algebras // Non-Associative Algebra and Applications. — Kluwer, 1994. — P. 43—56.

[91] Borowiec A., Kharchenko V., Oziewicz Z. First-order calculi with values in right-universal bimodules // Proc. Minisemester on Quantum Groups and Spaces. — Warszawa, 1997. — (Banach Center Publ.; Vol. 40). — P. 171—184.

[92] Brunner A. M. A group with an infinite number of Nielsen inequivalent one-relator presentations // J. Algebra. — 1976. — Vol. 42. — P. 81—84.

[93] Brunner A. M., Burns R. G., Oates-Williams S. On almost primitive elements of free groups with an application to Fuchsian groups // Can. J. Math. — 1993. — Vol. 45. — P. 225—254.

[94] Burillo J., Ventura E. Counting primitive elements in free groups // Geom. Dedicata. — 2002. — Vol. 93. — P. 143—162.

[95] Cherix P.-A., Schaeffer G. An asymptotic Freiheitssatz for finitely generated groups // Enseign. Math. (2). — 1998. — Vol. 44, no. 1-2. — P. 9—22.

[96] Chibrikov E. On free Sabinin algebras // Commun. Algebra. — 2011. — Vol. 39. — P. 4014—4035.

[97] Clifford A., Goldstein R. Z. Subgroups of free groups and primitive elements // J. Group Theory. — 2010. — Vol. 13, no. 4. — P. 601—611.

[98] Clifford A., Goldstein R. Z. Sets of primitive elements in a free group // J. Algebra. — 2012. — Vol. 357. — P. 271—278.

[99] Cohen M., Metzler W., Zimmermann A. What does a basis of $F(a, b)$ look like? // Math. Ann. — 1981. — Vol. 257. — P. 435—445.

[100] Cohn P. M. Rings with a weak algorithm // Trans. Amer. Math. Soc. — 1963. — Vol. 109. — P. 332—356.

[101] Cohn P. M. Free ideal rings // J. Algebra. — 1964. — Vol. 1. — P. 47—69.

[102] Cohn P. M. Subalgebras of free associative algebras // Proc. London Math. Soc. (3). — 1964. — Vol. 14. — P. 618—632.

[103] Cohn P. M. Skew Fields. Theory of General Division Rings. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

[104] Comerford L. P. Generic elements of free groups // Arch. Math. (Basel). — 1995. — Vol. 65, № 3. — P. 185—195.

[105] Czerniakiewicz A. J. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2. I, II // Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 160. — P. 393—401; 1972. — Vol. 171. — P. 309—315.

[106] Dicks W., Dunwoody M. J. Groups Acting on Graphs. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.

[107] Evans M. J. Primitive elements in free groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1989. — Vol. 106, no. 2. — P. 313—316.

[108] Fine B., Rosenberger G. The Freiheitssatz and its extensions // The Mathematical Legacy of Wilhelm Magnus: Groups, Geometry, and Special Functions : Conference on the Legacy of Wilhelm Magnus, May 1—3, 1992, Polytechnic Univ., Brooklyn, New York / W. Abikoff, J. S. Birman, K. Kuiken, eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 1994. — (Contemp. Math.; Vol. 169). — P. 213—252.

[109] Fine B., Rosenberger G., Spellman D., Stille M. Test, generic and almost primitive elements in free groups // Mat. Contemp. — 1998. — Vol. 14. — P. 45—59.

[110] Fine B., Rosenberger G., Spellman D., Stille M. Test words, generic elements and almost primitivity // Pacific J. Math. — 1999. — Vol. 190. — P. 277—297.

[111] Fox R. H. Free differential calculus. I. Derivations in free group rings // Ann. Math. (2). — 1953. — Vol. 57. — P. 547—560.

[112] Gersten S. M. On Whitehead's algorithm // Bull. Amer. Math. Soc. — 1984. — Vol. 10, no. 2. — P. 281—284.

[113] Grätzer G. Universal Algebra. — New York: Springer, 1979.

[114] Gupta C. K., Timoshenko E. I. Automorphic and endomorphic reducibility and primitive endomorphisms of free metabelian groups // Commun. Algebra. — 1997. — Vol. 25, no. 10. — P. 3057—3070.

[115] Hedges M. C. The Freiheitssatz for graded algebras // J. London Math. Soc. (2). — 1987. — Vol. 35. — P. 395—405.

[116] Helling H. The primitive elements of the free group of rank two // J. Algebra. — 2006. — Vol. 297. — P. 125—138.

[117] Higgins P. J., Lyndon R. C., Equivalence of elements under automorphisms of a free group // J. London Math. Soc. (2). — 1974. — Vol. 8. — P. 254—258.

[118] Hoare A. H. M. On automorphisms of the free group. I // J. London Math. Soc. (2). — 1988. — Vol. 38, no. 2. — P. 277—285.

[119] Hofmann K. H., Strambach K. Topological and analytic loops // Quasigroups and Loops Theory and Applications / O. Chein, H. O. Pflugfelder, J. D. H. Smith. — Berlin: Heldermann, 1990. — (Sigma Ser. Pure Math.; Vol. 8). — P. 205—262.

[120] Ivanov S. V. On endomorphisms of free groups that preserve primitivity // Arch. Math. (Basel). — 1999. — Vol. 72. — P. 92—100.

[121] Jacobson N. Structure and Representations of Jordan Algebras. — Providence: Amer. Math. Soc., 1968. — (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.; Vol. 39).

[122] Kapovich I., Schupp P., Shpilrain V., Generic properties of Whitehead's algorithm and isomorphism rigidity of random one-relator groups // Pacific J. Math. — 2006. — Vol. 223, no. 1. — P. 113—140.

[123] Kharchenko V. K. Braided version of Shirshov—Witt theorem // J. Algebra. — 2005. — Vol. 294, no. 1. — P. 196—225.

[124] Kharchenko V. Quantum Lie Theory. A Multilinear Approach. — (Lect. Notes Math.; Vol. 2150). — Springer, 2015.

[125] Kharlampovich O. G., Sapir M. V. Algorithmic problems in varieties // Internat. J. Algebra Comput. — 1995. — Vol. 5. — P. 379—602.

[126] Klimakov A. V., Primitivity rank of elements of free Schreier algebras // J. Algebra Its Appl. — 2016. — Vol. 15, no. 2. — 1650036.

[127] Kolesnikov P. S., Makar-Limanov L. G , Shestakov I. P. The Freiheitssatz for generic Poisson algebras // SIGMA. — 2014. — Vol. 10. — 115.

[128] Konieczny J., Rosenberger G., Wolny G. Tame almost primitive elements // Result. Math. — 2000. — Vol. 38. — P. 116—129.

[129] Kozybaev D., Makar-Limanov L., Umirbaev U. The Freiheitssatz and the automorphisms of free right-symmetric algebras // Asian-Eur. J. Math. — 2008. — Vol. 1, no. 2. — P. 243—254.

[130] Lee D. Endomorphisms of free groups that preserve automorphic orbits // J. Algebra. — 2002. — Vol. 248. — P. 230—236.

[131] Lee D. Primitivity preserving endomorphisms of free groups // Commun. Algebra. — 2002. — Vol. 30. — P. 1921—1947.

[132] Lewin J. On Schreier varieties of linear algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 132. — P. 553—562.

[133] Lewin J. Free modules over free algebras and free group algebras: The Schreier technique // Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — Vol. 145. — P. 455—465.

[134] Magnus W. Über diskontinuierliche Gruppen mit einer definierenden Relation (Der Freiheitssatz) // J. Reine Angew. Math. — 1930. — B. 163. — S. 141—165.

[135] Makar-Limanov L. G. Algebraically closed skew fields // J. Algebra. — 1985. — Vol. 93. — P. 117—135.

[136] Makar-Limanov L., Umirbaev U. The Freiheitssatz for Novikov algebras // TWMS J. Pure Appl. Math. — 2011. — Vol. 2, no. 2. — P. 228—235.

[137] Makar-Limanov L., Umirbaev U. The Freiheitssatz for Poisson algebras // J. Algebra. — 2011. — Vol. 328. — P. 495—503.

[138] McCool J., A presentation for the automorphism group of a free group of finite rank // J. London Math. Soc. (2). — 1974. — Vol. 8. — P. 259—266.

[139] McCool J., Pietrowski A. On free products with amalgamation of two infinite cyclic groups // J. Algebra. — 1971. — Vol. 18. — P. 377—383.

[140] Miasnikov A. G., Myasnikov A. D. Whitehead method and genetic algorithms // Computational and Experimental Group Theory: AMS-ASL Joint Special Session,

Interactions Between Logic, Group Theory, and Computer Science, January 15—16, 2003, Baltimore, Maryland / A. Borovik, A. G. Myasnikov, eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 2004. — (Contemp. Math.; Vol. 349). — P. 89—114.

[141] Mikhalev A. A. The composition lemma for color Lie superalgebras and for Lie p-superalgebras // Proc. of the Int. Conf. on Algebra Dedicated to the Memory of A. I. Malcev / L. A. Bokut', A. I. Mal'cev, eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 1992. — (Contemp. Math.; Vol. 131, Pt. 2). — P. 91—104.

[142] Mikhalev A. A. Combinatorial aspects of the theory of Lie superalgebras // First Int. Tainan—Moscow Algebra Workshop. — Berlin: Walter de Gruyter, 1996. — P. 37—68.

[143] Mikhalev A. A. Primitive elements and automorphisms of free algebras of Schreier varieties // J. Math. Sci. — 2000. — Vol. 102, no. 6. — P. 4627—4639.

[144] Mikhalev A. A., Shestakov I. P. PBW-pairs of varieties of linear algebras // Commun. Algebra. — 2014. — Vol. 42, no. 2. — P. 667—687.

[145] Mikhalev A. A., Shpilrain V., Umirbaev U. U. On isomorphism of Lie algebras with one defining relation // Internat. J. Algebra Comput. — 2004. — Vol. 14, no. 3. — P. 389—393.

[146] Mikhalev A. A., Shpilrain V., Yu J.-T. On endomorphisms of free algebras // Algebra Colloq. — 1999. — Vol. 6. — P. 241—248.

[147] Mikhalev A. A., Shpilrain V., Yu J.-T. Combinatorial problems about free groups and algebras // Lie Algebras, Rings and Related Topics. — Hong Kong: Springer, 2000. — P. 80—107.

[148] Mikhalev A. A., Shpilrain V., Yu J.-T. Combinatorial Methods: Free Groups, Polynomials, and Free Algebras. — New York: Springer, 2004.

[149] Mikhalev A. A., Umirbaev U. U., Yu J.-T. Automorphic orbits in free non-associative algebras // J. Algebra. — 2001. — Vol. 243. — P. 198—223.

[150] Mikhalev A. A., Umirbaev U. U., Yu J.-T. Generic, almost primitive and test elements of free Lie algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 2002. — Vol. 130, no. 5. — P. 1303—1310.

[151] Mikhalev A. A., Umirbaev U. U., Zolotykh A. A. A Lie algebra with cohomological dimension one over a field of prime characteristic is not necessarily free // First Int. Tainan—Moscow Algebra Workshop. — Berlin: Walter de Gruyter, 1996. — P. 257—264.

[152] Mikhalev A. A., Yu J.-T. Test elements, retracts and automorphic orbits of free algebras // Internat. J. Algebra Comput. — 1998. — Vol. 8. — P. 295—310.

[153] Mikhalev A. A., Yu J.-T. Automorphic orbits of elements of free algebras with the Nielsen—Schreier property // Combinatorial and Computational Algebra: Int. Conf. on Combinatorial and Computational Algebra, May 24—29, 1999, The Univ. of Hong Kong, Hong Kong SAR, China / K.-Y. Chan, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 2000. — (Contemp. Math.; Vol. 264). — P. 95—110.

[154] Mikhalev A. A., Yu J.-T. Primitive, almost primitive, test, and Δ-primitive elements of free algebras with the Nielsen—Schreier property // J. Algebra. — 2000. — Vol. 228. — P. 603—623.

[155] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Applications of Fox differential calculus to free Lie superalgebras // Non-Associative Algebra and Its Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1994. — P. 285—290.

[156] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Rank and primitivity of elements of free color Lie (p-)super-algebras // Internat. J. Algebra Comput. — 1994. — Vol. 4. — P. 617—656.

[157] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. An inverse function theorem for free Lie algebras over commutative rings // Algebra Colloq. — 1995. — Vol. 2, no. 3. — P. 213—220.

[158] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Combinatorial Aspects of Lie Superalgebras. — Boca Raton: CRC Press, 1995.

[159] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Algorithms for primitive elements of free Lie algebras and superalgebras // Proc. ISSAC-96. — New York: ACM Press, 1996. — P. 161—169.

[160] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Automorphisms and primitive elements of free Lie superalgebras // Commun. Algebra. — 2004. — Vol. 22. — P. 5889—5901.

[161] Myasnikov A. G., Shpilrain V. Automorphic orbits in free groups // J. Algebra. — 2003. — Vol. 269, no. 1. — P. 18—27.

[162] Nielsen J. Die Isomorphismengruppe der freien Gruppe // Math. Ann. — 1924. — B. 91. — S. 169—209.

[163] Öğüşlü N. Ş., Ekici N. k-primitivity and and images of primitive elements // J. Algebra Its Appl. — 2016. — Vol. 15, no. 7. — 1650126.

[164] Osborne R. P., Zieschang H. Primitives in the free group on two generators // Invent. Math. — 1981. — Vol. 63. — P. 17—24.

[165] Parzanchevski O., Puder D. Stallings graphs, algebraic extensions and primitive elements in F_2 // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 2014. — Vol. 157, no. 1. — P. 1—11.

[166] Pérez-Izquierdo J. M. Algebras, hyperalgebras, nonassociative bialgebras and loops // Adv. Math. — 2007. — Vol. 208, no. 2. — P. 834—876.

[167] Piggott A. Palindromic primitives and palindromic bases in the free group of rank two // J. Algebra. — 2006. — Vol. 304. — P. 359—366.

[168] Puder D. Primitive words, free factors and measure preservation // Israel J. Math. — 2014. — Vol. 201, no. 1. — P. 25—73.

[169] Puder D., Parzanchevski O., Measure preserving words are primitive // J. Amer. Math. Soc. — 2015. — Vol. 28. — P. 63—97.

[170] Puder D., Wu C. Growth of primitive elements in free groups // J. London Math. Soc. (2). — 2014. — Vol. 90. — P. 89—104.

[171] Rapaport E. S. On free groups and their automorphisms // Acta Math. — 1958. — Vol. 99. — P. 139—163.

[172] Reutenauer C. Applications of a noncommutative Jacobian matrix // J. Pure Appl. Algebra. — 1992. — Vol. 77. — P. 169—181.

[173] Reutenauer C. Free Lie Algebras. — Oxford: Clarendon Press, 1993.

[174] Rivin I. A remark on «Counting primitive elements in free groups», Geom. Dedicata 93 (2002), 143—162, by J. Burillo and E. Ventura // Geom. Dedicata. — 2004. — Vol. 107. — P. 99—100.

[175] Rosenberger G. Alternierende Produkte in freien Gruppen // Pacific J. Math. — 1978. — Vol. 78. — P. 243—250.

[176] Rosenberger G. Über Darstellungen von Elementen und Untergruppen in freien Produkten // Groups—Korea 1983: Proc. of a Conference on Combinatorial Group Theory held at Kyoungju, Korea, August 26—31, 1983 / A. C. Kim, B. H. Neumann, eds. — Berlin: Springer, 1984. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1098). — P. 142—160.

[177] Rosenberger G. A property of subgroups of free groups // Bull. Austral. Math. Soc. — 1991. — Vol. 43. — P. 269—272.

[178] Schofield A. H. Representations of Rings over Skew Fields. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985.

[179] Schreier O. Die Untergruppen der freien Gruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1927. — B. 5. — S. 161—183.

[180] Shestakov I. P., Umirbaev U. U. Free Akivis algebras, primitive elements, and hyperalgebras // J. Algebra. — 2002. — Vol. 250. — P. 533—548.

[181] Shpilrain V. On generators of L/R^2 Lie algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1993. — Vol. 119. — P. 1039—1043.

[182] Shpilrain V. Recognizing automorphisms of the free groups // Arch. Math. — 1994. — Vol. 62. — P. 385—392.

[183] Shpilrain V. On the rank of an element of a free Lie algebra // Proc. Amer. Math. Soc. — 1995. — Vol. 123. — P. 1303—1307.

[184] Shpilrain V. Generalized primitive elements of a free group // Arch. Math. (Basel). — 1998. — Vol. 71. — P. 270—278.

[185] Shpilrain V. Counting primitive elements of a free group // Geometric Methods in Group Theory: AMS Special Session Geometric Group Theory, October 5—6, 2002, Northeastern Univ., Boston, Massachusetts : Special Session at the First Joint Meeting of the American Mathematical Society and the Real Sociedad Matemática Española, June 18—21, 2003, Seville, Spain / J. Burillo, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 2005. — (Contemp. Math.; Vol. 372). — P. 91—98.

[186] Shpilrain V., Yu J.-T. Factor algebras of free algebras: On a problem of G. Bergman // Bull. London Math. Soc. — 2003. — Vol. 35. — P. 706—710.

[187] Silva P. V., Weil P. Automorphic orbits in free groups: words versus subgroups // Internat. J. Algebra Comput. — 2010. — Vol. 20, no. 4. — P. 561—590.

[188] Stallings J. On torsion-free groups with infinitely many ends // Ann. Math. — 1968. — Vol. 88. — P. 312—334.

[189] Swan R. G. Groups of cohomological dimension one // J. Algebra. — 1969. — Vol. 12. — P. 585—610.

[190] Tvalavadze M., Universal enveloping algebras of nonassociative structures // Serdica Math. J. — 2012. — Vol. 38. — P. 433—462.

[191] Umirbaev U. U. Universal derivations and subalgebras of free algebras // Algebra (Krasnoyarsk, 1993). — Berlin: Walter de Gruyter, 1996. — P. 255—271.

[192] Umirbaev U. U. Defining relations for automorphism groups of free algebras // J. Algebra. — 2007. — Vol. 314. — P. 209—225.

[193] Umirbaev U. U. The Anick automorphism of free associative algebras // J. Reine Angew. Math. — 2007. — B. 605. — S. 165—178.

[194] Whitehead J. H. C. On equivalent sets of elements in a free group // Ann. Math. — 1936. — Vol. 37. — P. 782—800.

[195] Whitehead J. H. C. On certain sets of elements in a free group // Proc. London Math. Soc. — 1936. — Vol. 41. — P. 48—56.

[196] Witt E. Die Unterringe der freien Lieschen Ringe // Math. Z. — 1956. — B. 64. — S. 195—216.