Полукольца непрерывных функций*

Е. М. ВЕЧТОМОВ
Вятский государственный университет
e-mail: vecht@mail.ru

А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В. В. СИДОРОВ
Вятский государственный университет
e-mail: sedoy_vadim@mail.ru

УДК 512.556

Ключевые слова: полукольцо непрерывных функций, полуполе непрерывных функций, гомоморфизм, идеал, конгруэнция, подалгебра, решётка.

Аннотация

В статье дан обзор результатов по теории полуколец непрерывных функций.

Abstract

E. M. Vechtomov, A. V. Mikhalev, V. V. Sidorov, Semirings of continuous functions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 2, pp. 53—131.

The paper contains a review of results on the theory of semirings of continuous functions.

Введение: история и тематика

Теория полуколец непрерывных функций является составной частью функциональной алгебры — раздела современной математики, находящегося на стыке абстрактной алгебры, общей топологии, топологической алгебры и функционального анализа. Функциональная алгебра имеет два основополагающих направления исследований:

— изучение алгебраических систем $A(X)$ непрерывных функций, ассоциированных с топологическими пространствами X;

— исследование функциональных представлений и характеризаций абстрактных алгебраических систем.

В качестве $A(X)$ выступали следующие объекты:

— группа $G(X)$ всевозможных гомеоморфизмов топологического пространства X на себя с операцией композиции отображений;

*Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки, проект № 1.1375.2014/К.

— полугруппа $S(X)$ всех непрерывных отображений пространства X в себя;
— кольцо $C(X)$ всех непрерывных действительнозначных функций на пространстве X с поточечными операциями;
— другие алгебраические системы функций (кольца операторов топологических векторных пространств с поточечным сложением и с композицией-умножением изучаются в функциональном анализе, кольца числовых функций с поточечным сложением и со свёрточным умножением исследуются в гармоническом анализе, и т. д.).

Перечислим основные общие задачи первого направления:

— описание структурных свойств данного типа алгебраических объектов $A(X)$, включая их абстрактную характеризацию;
— вопросы определяемости топологических пространств X и их топологических свойств в терминах алгебраических систем $A(X)$;
— установление двойственностей между категориями топологических пространств X из естественных классов пространств и соответствующими категориями алгебраических систем $A(X)$. Пространства X играют роль исходных математических объектов, а системы $A(X)$ — производные математические структуры.

Заметим, что алгебраические системы $A(X)$ могут рассматриваться с той или иной топологией (топологией поточечной сходимости, компактно-открытой топологией, sup-нормой и др.), превращающей $A(X)$ в тополого-алгебраический объект.

Во втором направлении исследуются вопросы представления, реализации абстрактных алгебраических систем (групп, колец, дистрибутивных решёток, полуколец, решёточно упорядоченных колец и т. п.) в виде алгебраических систем непрерывных функций. В течение последних 55 лет развивается теория пучковых представлений алгебраических систем (колец, дистрибутивных решёток, универсальных алгебр, полуколец, решёточно упорядоченных колец и полуколец). Здесь алгебраическая система реализуется в виде системы непрерывных сечений различных пучков с соответствующими поточечно определёнными операциями и отношениями.

Изучение одних математических объектов через другие математические объекты пронизывает всю историю развития математики. Такой переход воплощает фундаментальную идею координатизации, всеобщего измерения, восходящую к Декарту, Галилею, Лейбницу. В основном объекты геометро-топологической природы исследуются в терминах соответствующих им объектов арифметико-алгебраического характера (известны и обратные связи, например, когда абстрактные группы изучаются с помощью их графов).

Работы Софуса Ли начиная с 1872 г. по группам непрерывных преобразований (автогомеоморфизмов) топологических многообразий можно считать зарождением как топологической алгебры (изучающей тополого-алгебраические объекты), так и функциональной алгебры. Теория групп Ли и алгебр Ли затрагивает оба направления функциональной алгебры. Работы Л. С. Понтрягина

30-х гг. XX века посвящены топологическим телам и топологическим группам [72]. В 1934 г. он установил двойственность между категорией компактных коммутативных групп и категорией дискретных коммутативных групп, имеющую функциональный характер.

Без абстрактной алгебры невозможно представить успешное развитие современной математики в целом. В своём естественном развитии традиционная алгебра (решение алгебраических уравнений), арифметика (расширение понятия числа) и элементарная теория чисел (Ферма, Эйлер) с необходимостью привели к выявлению имманентно присущей им абстрактно-алгебраической структуры, в первую очередь групповой и кольцевой (Лагранж, Гаусс, Руффини, Абель, Галуа, Коши). В конце XVIII — первой половине XIX веков возникли понятия группы перестановок корней алгебраических уравнений, кольца классов вычетов целых чисел, конечного поля. Но аксиоматически базовые алгебраические структуры были определены и соответствующие результаты были строго доказаны только в конце XIX века (теория Галуа, конечномерные действительные алгебры, строение конечных полей). Начало современному этапу генезиса абстрактной алгебры положили работы Гильберта, Артина, Эмми Нётер, Ван дер Вардена и др.

В 30-е гг. прошлого века Стефан Банах и его коллеги заложили основы современного функционального анализа, понимаемого как область математики, математического анализа, в которой изучаются топологические векторные пространства, их линейные операторы и функционалы, различные пространства непрерывных функций [1]. Большой и важный раздел функционального анализа составляет теория банаховых алгебр и других близких к ним нормированных, псевдонормированных и полинормированных алгебр [64, 68, 73, 93].

Исходными математическими объектами первого направления функциональной алгебры являются топологические пространства вместе с их непрерывными отображениями, изучаемые в общей топологии (или теоретико-множественной топологии) (см. [119]). Первой книгой в этом направлении стал труд Феликса Хаусдорфа [92] 1914 года. Само название «общая топология» впервые появилось в заголовке большой статьи Маршалла Стоуна [143] 1937 года. В этой статье и работе [142] 1936 года М. Стоуном была развита теория булевых алгебр и их представлений.

М. Стоун доказал, что всякое булево кольцо B допускает изоморфное представление как кольцо $C_{00}(X, \mathbb{Z}_2)$ всех непрерывных функций с компактными носителями на нульмерном локально компактном пространстве X со значениями в дискретном двухэлементном поле $\mathbb{Z}_2$; при этом в качестве X можно взять пространство $\mathrm{Max}B$ максимальных идеалов кольца B с топологией Стоуна—Зариского. В дальнейшем пространство $\mathrm{Max}\,B$ стали называть максимальным спектром кольца B. Фактически М. Стоун установил двойственность между категорией нульмерных локально компактных пространств с непрерывными отображениями в качестве морфизмов и категорией булевых колец и их ненулевых гомоморфизмов. Тем самым был сделан первый шаг к теории пучковых представлений алгебр.

В упомянутой работе Стоуна 1937 года было начато изучение колец $C(X) = C(X, \mathbb{R})$ непрерывных функций на компактах X со значениями в топологическом поле $\mathbb{R}$ действительных чисел. Первой специальной работой по кольцам $C(X)$ над тихоновскими пространствами X можно считать статью И. М. Гельфанда и А. Н. Колмогорова [60] 1939 года. Авторы показали, что между максимальными идеалами кольца $C(X)$ и точками стоун-чеховской компактификации βX тихоновского пространства X существует каноническое взаимно-однозначное соответствие. Эта классическая теорема Гельфанда—Колмогорова устанавливает определённый дуализм между алгеброй (кольцо $C(X)$) и топологией (компактификация βX). Подробное доказательство теоремы Гельфанда—Колмогорова дано в [128]. Более того, максимальный спектр кольца $C(X)$ гомеоморфен βX: $\operatorname{Max} C(X) \approx \beta X$. Наиболее общий вариант теоремы Гельфанда—Колмогорова получен в [16].

Зародившаяся в этих трудах теория колец непрерывных функций стала быстро развиваться.

Следует подчеркнуть, что основой возникновения плодотворной теории колец $C(X)$ стало успешное внедрение действительных чисел в общую топологию: в теорию тихоновских пространств (большая лемма Урысона, вложение в тихоновские кубы, компактификация βX, метризация). Как отмечал П. С. Александров, теория колец непрерывных действительнозначных функций является не только обширным полем для исследований, но и полезным методом в смежных областях математики.

В 1948 г. появилась фундаментальная статья Эдвина Хьюитта [133], в которой был введён класс Q-пространств (хьюиттовских пространств) и доказана двойственность между категориями Q-пространств X и колец $C(X)$. В 1947 г. вышла статья Ирвинга Капланского [136] по общей теории колец непрерывных функций. Базовый этап развития теории колец $C(X)$ подытожила монография Леонарда Гиллмана и Мейера Джерисона [129] 1960 года (второе издание вышло в 1976 г.). Дальнейшее развитие теории колец непрерывных функций отражено в работах Мелвина Хенриксена [131, 132], а также в обзорных статьях [13, 15, 145, 146] и книгах Е. М. Вечтомова [17, 19].

В 1994 г. Е. М. Вечтомов защитил в МГУ докторскую диссертацию [20] по общей теории колец непрерывных функций (со значениями в топологических телах), а В. В. Чермных — в МПГУ кандидатскую диссертацию [94] по пучковым представлениям абстрактных полуколец под руководством А. В. Михалёва и Е. М. Вечтомова. Начала свою деятельность научная алгебраическая школа «Функциональная алгебра и теория полуколец» [9, 32]. В этом же году впервые появилось название научного направления «функциональная алгебра».

С сентября 1994 г. на базе КГПИ им. В. И. Ленина (позднее ВятГПУ, ВятГГУ) функционирует региональный научный алгебраический семинар, проводимый раз в неделю с сентября по декабрь и с февраля по май. Состоялось более 600 заседаний семинара.

Впервые пучковые представления полуколец начал изучать В. В. Чермных в 1990 г., будучи аспирантом кафедры алгебры МПГУ. Полученные им результаты изложены в [98—100]. В. В. Чермных проанализировал пучки Гротендика, Пирса, Ламбека, Хофмана, Симмонса, Малви, Голана и др. и соответствующие пучковые представления колец и на этой основе построил теорию пучковых представлений полуколец, включающую компактные и чистые представления полуколец. Пучковые представления были применены к получению изоморфных представлений полуколец из следующих классов: симметрические, строго гармонические, гельфандовы, риккартовы, бирегулярные, бэровские, абелево регулярные положительные полукольца. В терминах пучковых представлений (посредством свойств полуколец-слоёв, базисного и накрывающего пространств) получены характеризации некоторых важных свойств полуколец с дополнительными условиями. Изучались также пучковые представления полумодулей над полукольцами.

Абстрактное полукольцо S зачастую допускает нетривиальное функциональное (пучковое) представление в полукольце сечений $\Gamma(X, \mathbf{P})$ некоторого пучка $\mathbf{P}$ полуколец-слоёв S_x, $x \in X$, над базисным пространством X. Предполагается, что полукольца S_x устроены более просто, чем исходное полукольцо S, а пространство X обладает достаточно хорошими топологическими свойствами. Полукольцо всех глобальных сечений пучка $\mathbf{P}$ — это полукольцо непрерывных функций $f\colon X \to P$, где P — накрывающее пространство пучка $\mathbf{P}$, $f(x) \in S_x$ для любой точки $x \in X$. Полукольца сечений являются обобщением полуколец непрерывных функций, которые, в свою очередь, служат прообразом полуколец сечений. Поэтому свойства полуколец сечений можно изучать аналогично свойствам полуколец непрерывных функций. В ряде случаев исследуемое абстрактное полукольцо S оказывается изоморфно полукольцу $\Gamma(X, \mathbf{P})$. Такие полукольца будут в чём-то близки к полукольцам непрерывных функций. В этом заключается метод функциональных представлений применительно к полукольцам, что объясняет актуальность и важность изучения полуколец непрерывных функций, в частности полуколец $C^+(X)$.

Основы теории функциональных (пучковых) представлений полуколец даны в монографии В. В. Чермных [99], а функциональные представления полутел — в дополнении к ней, написанном Е. М. Вечтомовым и А. В. Чераневой.

Пучковым представлениям полутел посвящена большая статья Е. М. Вечтомова и А. В. Чераневой [49]. Авторы применили аналоги пучков Пирса и Ламбека к исследованию произвольных, гельфандовых, бирегулярных и булевых полутел. Функциональные представления дистрибутивных решёток рассматривались также в [21, 25], а абелево регулярных положительных полуколец (arp-полуколец) — в [40, гл. 2; 41; 47; 48].

Теория полуколец непрерывных функций — сравнительно молодой раздел функциональной алгебры, растущий из теории колец непрерывных функций и продолжающий её развитие. Если S — топологическое полукольцо, то через $C(X, S)$ обозначается полукольцо всех непрерывных S-значных функций на топологическом пространстве X с поточечно заданными операциями сложения и умножения функций. В кольце $C(X)$ непрерывных действительнозначных функций выделяются две структуры: полукольцо $C^+(X)$ всех непрерывных неотрицательных функций и полуполе $U(X)$ всех непрерывных положительных функций; для них $C(X)$ служит кольцом разностей. Если в этих полукольцах обычную операцию сложения функций заменить на $\vee$ (взятие $\max$), то получим аддитивно идемпотентные полукольцо $C^{\vee}(X)$ и полуполе $U^{\vee}(X)$.

Первым серьёзным исследованием по теории полуколец непрерывных функций стала статья В. И. Варанкиной 1995 года [7], развитая в её кандидатской диссертации [8]. До этого были отдельные работы о полукольцах $C^{+}(X)$ функционально-топологического характера [120, 121, 141]. Систематически числовые полукольца $C^{+}(X)$ и полуполя $U(X)$ изучаются нами начиная с работы [10] 1998 г. В этом направлении членами научной школы по функциональной алгебре защищены ещё шесть кандидатских диссертаций: И. А. Семёновой [79] в 1999 г., М. Н. Подлевских [71] в 1999 г., Д. В. Широковым [113] в 2005 г., Д. В. Чупраковым [105] в 2010 г., В. В. Сидоровым [83] в 2011 г., Е. Н. Лубягиной [65] в 2012 г.

Программа исследований по теории полуколец $C(X,S)$ непрерывных функций включает в себя следующие направления:

— нахождение общих структурных свойств полуколец $C(X,S)$;
— изучение идеалов, конгруэнций и подалгебр различного вида (например, главных, максимальных, минимальных);
— выяснение определяемости топологических пространств X и их свойств полукольцами $C(X,S)$ и другими ассоциированными с ними алгебраическими системами (решётками идеалов, решётками конгруэнций, решётками подалгебр);
— описание структурных морфизмов и изоморфизмов для $C(X,S)$;
— установление двойственностей между категориями пространств X и полуколец $C(X,S)$;
— другие вопросы, связанные со спецификой топологических (или топологизированных) полуколец S.

В духе сформулированной программы написаны монография «Полукольца непрерывных функций» [45] и глава 3 книги «Элементы теории полуколец» [40], подытожившие этап формирования теории полуколец $C(X,S)$. Материал обзорного характера по полукольцам непрерывных функций можно найти в [26, 27, 29—31, 123]. Были выполнены два аналитических научных обзора, поддержанные грантами РФФИ [27, 28, 97].

Отметим, что категория колец $C(X)$ с сохраняющими 1 гомоморфизмами в качестве морфизмов, категория полуколец $C^{+}(X)$ с сохраняющими 1 гомоморфизмами и категория полуполей $U(X)$ и их гомоморфизмов естественным образом эквивалентны (двойственны) друг другу. Двойственность Хьюитта, устанавливающая антиэквивалентность категории всех хьюиттовских пространств X и их непрерывных отображений и категории соответствующих колец $C(X)$, представляет собой — наряду с теоремой Гельфанда—Колмогорова — другой базовый результат возникшей теории колец непрерывных функций.

Полукольца и полуполя непрерывных функций — важные алгебраические объекты, имеющие функционально-топологическую природу. Исследование этих объектов является естественным продолжением развития теории колец непрерывных действительнозначных функций. Источником вдохновения и образцом служат для нас классические результаты о кольцах непрерывных функций: теорема Гельфанда—Колмогорова и двойственность Хьюитта.

1. Основные понятия и предварительные сведения

Все используемые нами понятия можно найти в [40, 45, 96, 99, 129].

1.1. Полукольца

Полукольцом (в широком смысле) называется алгебраическая система $\langle S, +, \cdot \rangle$ с двумя ассоциативными бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, такими что умножение дистрибутивно относительно сложения [144]. Обычно понятие полукольца используется в узком смысле, когда сложение считается коммутативным. Более того, некоторые определения [130] содержат дополнительные требования к полукольцам, например требование существования нейтральных элементов относительно сложения или умножения или обоих сразу; кроме того, требуется, чтобы нейтральный по сложению элемент был поглощающим ($0 \cdot s = s \cdot 0 = 0$ для всех $s \in S$).

Полукольцо с тождеством $s+s = s$ называется *аддитивно идемпотентным*.

Полукольцо с ненулевой единицей, отличное от кольца, каждый ненулевой элемент которого обратим, называется *полутелом с нулём*. Любое полутело с нулём является антикольцом, т. е. сумма его ненулевых элементов отлична от нуля. Поэтому множество $S \setminus \{0\}$ с теми же операциями сложения и умножения образует алгебру, которая называется *полутелом*. *Полуполе* — это коммутативное полутело.

Если на полукольце S рассматривается топология, в которой операции сложения и умножения непрерывны, то S называется *топологическим полукольцом*.

Пусть X — топологическое пространство, S — топологическое полукольцо. Множество всех непрерывных функций $f\colon X \to S$ с поточечными операциями сложения и умножения функций образует *полукольцо* $C(X, S)$. Наиболее интересны случаи, когда S — это поле $\mathbb{R}$ действительных чисел, полуполе с нулём $\mathbb{R}^+$ всех неотрицательных действительных чисел или полуполе $\mathbb{P}$ всех положительных действительных чисел (с интервальной топологией). Тогда получаем *кольцо* $C(X) = C(X, \mathbb{R})$, *полукольцо* $C^+(X) = C(X, \mathbb{R}^+)$ и *полуполе* $U(X) = C(X, \mathbb{P})$.

Если в полукольце $C^+(X)$ и полуполе $U(X)$ заменить обычное сложение функций на max-*сложение* $\vee$, где

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\} \quad \text{для всех} \quad x \in X,$$

то получим аддитивно идемпотентные полукольцо $C^{\vee}(X)$ и полуполе $U^{\vee}(X)$ соответственно.

Полукольцом значений функций полукольца $C^{\vee}(X)$ служит топологическое полуполе с нулём $\mathbb{R}^{\vee}$ всех неотрицательных действительных чисел с операцией сложения $\max$, обычным умножением и интервальной топологией. Заметим, что полуполе $\mathbb{R}^{\vee}$ топологически изоморфно *тропическому полукольцу* $\mathbb{R}_{\mathrm{trop}} = \langle \mathbb{R}\cup\{\infty\}, \min, +\rangle$ и полуполю $\langle \mathbb{R}\cup\{-\infty\}, \max, +\rangle$, которые называются также *минимаксными полуполями*.

Идемпотентный анализ (в современном смысле) был основан В. П. Масловым и его последователями. Основным объектом является полуполе $\mathbb{R}_{\mathrm{trop}}$ [67, 134]. Линейная алгебра над тропическим полуполем исследовалась в работах А. Э. Гутермана [62] и А. Я. Шитова [118].

Обозначим через $C_p(X,S)$ полукольцо $C(X,S)$ с топологией поточечной сходимости. Поточечные операции сложения и умножения функций непрерывны на $C(X,S)$. Если S — полутело, то операция взятия обратного элемента также будет непрерывной на $C(X,S)$. Таким образом, полукольцо $C(X,S)$ с введённой на нём топологией поточечной сходимости является *топологическим полукольцом* $C_p(X,S)$.

Частными случаями данного понятия являются

— $C_p^+(X)$ и $C_p^{\vee}(X)$ — полукольца непрерывных функций $C^+(X)$ и $C^{\vee}(X)$ с поточечной сходимостью;

— $U_p(X)$ и $U_p^{\vee}(X)$ — полуполя непрерывных функций $U(X)$ и $U^{\vee}(X)$ с поточечной сходимостью.

Обозначим через π_x, $x \in X$, отображение

$$\pi_x\colon C_p(X,S) \to S, \quad \pi_x(f) = f(x).$$

Получаем непрерывный гомоморфизм π_x, который называется *гомоморфизмом вычисления в точке* x.

1.2. Идеалы

Непустое подмножество I полукольца S называется *идеалом*, если $a+b, as, sa \in I$ для любых $a,b \in I$ и $s \in S$. Любое полукольцо с нулём имеет два тривиальных идеала: $\{0\}$ и S. Идеалы, отличные от $\{0\}$ и S, называются *собственными*.

Полукольцо S вложимо в *кольцо разностей* $R = \{a-b\colon a,b \in S\}$ тогда и только тогда, когда S — аддитивно сократимое полукольцо [96].

Определим отображения $\alpha\colon \operatorname{Id} R \to \operatorname{Id} S$ и $\beta\colon \operatorname{Id} S \to \operatorname{Id} R$ по правилам

$$\begin{aligned} &\alpha\colon I \mapsto I \cap S, \\ &\beta\colon J \mapsto J - J = \{x-y\colon x,y \in J\} \end{aligned} \tag{1.1}$$

для любых идеалов $I \in \operatorname{Id} R$ и $J \in \operatorname{Id} S$. Тогда $\alpha(I)$, $\beta(J)$ — идеалы полукольца S и кольца R соответственно. Идеалы $\beta(J)$ называются *разностными идеалами* кольца R.

1.3. Конгруэнции

Пусть S — полукольцо. Тогда отношение эквивалентности ρ на S является *конгруэнцией* тогда и только тогда, когда из того, что $a\ \rho\ a'$ и $b\ \rho\ b'$, следует, что $(a+b)\ \rho\ (a'+b')$ и $ra\ \rho\ ra'$ для всех $r \in S$.

Множество всех конгруэнций на S обозначим через $\operatorname{Con} S$. Множество $\operatorname{Con} S$ относительно включения является алгебраической решёткой: $\rho \subseteq \tau$ означает, что $a\ \rho\ b$ влечёт $a\ \tau\ b$ для любых $a, b \in S$. При этом для $\rho, \tau \in \operatorname{Con} S$ имеем

$$\inf(\rho,\tau) = \rho \cap \tau, \quad \sup(\rho,\tau) = \rho \vee \tau,$$

где для любых $a, b \in S$

$$a\ (\rho \vee \tau)\ b$$

тогда и только тогда, когда существуют $c_1, \ldots, c_n \in S$, такие что

$$a\ \rho\ c_1\ \tau\ c_2 \ldots a_{n-1}\ \rho\ c_n\ \tau\ b.$$

На любом полукольце S имеются две тривиальные конгруэнции ρ: *нулевая конгруэнция* 0, где $a\ \rho\ b$ равносильно $a = b$, и *единичная конгруэнция* 1, где $a\ \rho\ b$ для всех $a, b \in S$. Нулевая (единичная) конгруэнция является наименьшим (наибольшим) элементом решётки $\operatorname{Con} S$, т. е. $\operatorname{Con} S$ является ограниченной решёткой. Коатом решётки $\operatorname{Con} S$ называется *максимальной конгруэнцией* на S.

Главной конгруэнцией полукольца S, порождённой элементами $a, b \in S$, называется наименьшая конгруэнция ρ, для которой $a\ \rho\ b$. Например, $\rho(a, a)$ есть отношение равенства.

Пусть ρ — конгруэнция на полукольце S. Полукольцо $S/\rho = \{[a]_\rho \colon a \in S\}$ всех классов $[a]_\rho = \{s \in S \colon s\ \rho\ a\}$, $a \in S$, конгруэнтности называется *фактор-полукольцом* полукольца S по конгруэнции ρ.

Обозначим через $\ker \rho$ класс единицы $[1]_\rho$ конгруэнции ρ на полутеле S и назовём его *ядром* в S.

В произвольном кольце R существует биекция между идеалами I и конгруэнциями ρ: $[0]_\rho = I$ и для всех $a, b \in R$ $a\ \rho\ b$ равносильно тому, что $a - b \in I$. В отличие от колец, в полукольцах нет биекции между идеалами и конгруэнциями. Так, если I — идеал полукольца S, то I индуцирует конгруэнцию $\rho(I)$ на S, называемую *конгруэнцией Борна*: для любых $a, b \in S$ $a\ \rho(I)\ b$ равносильно тому, что найдутся $x, y \in I$, такие что $a + x = b + y$, причём $[0]_{\rho(I)} = I$ в точности тогда, когда I — *полустрогий идеал*, т. е. когда для любых $a, b \in S$ из $a, a + b \in I$ следует $b \in I$.

1.4. Подалгебры

Подалгеброй в полукольце $C(X, S)$ называется его произвольное подполукольцо, выдерживающее умножение слева на элементы из S. Простейшими примерами подалгебр служат подалгебра констант S и само полукольцо $C(X, S)$.

Обозначим через $\mathbb{A}\big(C(X,S)\big)$ *решётку всех подалгебр* полукольца $C(X,S)$ относительно включения. Если S — полукольцо с единицей 1, то через $\mathbb{A}_1\big(C(X,S)\big)$ обозначим решётку всех подалгебр с 1.

Решётки $\mathbb{A}\big(C(X,S)\big)$ и $\mathbb{A}_1\big(C(X,S)\big)$ являются алгебраическими. Операции в них задаются равенствами $A \wedge B = A \cap B$ и $A \vee B = A + B + AB$, где

$$AB = \{f_1g_1 + \ldots + f_ng_n \colon f_1, \ldots, f_n \in A,\ g_1, \ldots, g_n \in B,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Если S — полукольцо без нуля, то пересечение подалгебр полукольца $C(X,S)$ может оказаться пустым. В этом случае будем считать пустое множество $\varnothing$ элементом решётки $\mathbb{A}\big(C(X,S)\big)$ — её нулём.

Элемент a решётки $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ называется $\vee$-*неразложимым*, если из того, что $a = b \vee c$ для некоторых $b, c \in L$, следует, что $a = b$ или $a = c$.

Элемент a полной решётки L называется *компактным*, если для любого непустого семейства $(a_j)_{j\in J}$ её элементов из того, что

$$a \leqslant \bigvee_{j\in J} a_j,$$

следует, что

$$a \leqslant \bigvee_{i\in J} a_i$$

для некоторого конечного подмножества $I \subseteq J$.

1.5. Топологические пространства

Пусть X — топологическое пространство. Обозначим через U° и $\bar{U}$ *внутренность* и *замыкание* множества $U \subseteq X$ соответственно. Множество $V \subseteq X$ называется *канонически замкнутым*, если $V = \bar{U}$ для некоторого открытого множества $U \subseteq X$.

Пусть $f \in C(X)$. Обозначим через $\operatorname{pos} f$ и $\operatorname{neg} f$ множества

$$\operatorname{pos} f = \{x \in X \colon f(x) > 0\}, \quad \operatorname{neg} f = \{x \in X \colon f(x) < 0\}.$$

Множества

$$\mathrm{Z}(f) = \{x \in X \colon f(x) = 0\}, \quad \operatorname{coz} f = X \setminus \mathrm{Z}(f)$$

называются *нуль-множеством* и *конуль-множеством* функции $f \in C(X)$ соответственно.

Множество $A \subseteq X$ называется C^*-*расширяемым*, если любая ограниченная функция из $C(A)$ продолжается до некоторой функции из $C(X)$.

Непересекающиеся подмножества A и B топологического пространства X называются *функционально отделимыми*, если существует функция $f \in C(X)$, такая что $f = 0$ на A и $f = 1$ на B. Топологическое пространство называется T_1-*пространством*, если все его одноточечные множества замкнуты. *Тихоновское пространство* — это T_1-пространство, в котором любые замкнутое множество и точка вне его функционально отделимы. Тихоновские пространства — это с точностью до гомеоморфизма подпространства тихоновских степеней $\mathbb{R}$.

Топологическое пространство называется *хьюиттовским* (или *вещественно полным*, или *функционально замкнутым*), если оно гомеоморфно замкнутому подпространству некоторой тихоновской степени $\mathbb{R}$.

Тихоновское пространство является хьюиттовским тогда и только тогда, когда все $\mathbb{R}$-идеалы кольца $C(X)$ будут фиксированными максимальными идеалами. Напомним, что идеал M в $C(X)$ называется $\mathbb{R}$-*идеалом*, если фактор-кольцо $C(X)/I$ изоморфно полю $\mathbb{R}$. Идеалы вида $M_x = \{f \in C(X)\colon f(x) = 0\}$, $x \in X$, называются *фиксированными максимальными идеалами*.

Предложение 1.1 [129, теоремы 3.9, 8.7]. *Для произвольного топологического пространства X существуют тихоновское пространство τX (тихоновизация X) и хьюиттовское пространство $\nu\tau X$, для которых канонически изоморфны кольца $C(X)$, $C(\tau X)$ и $C(\nu\tau X)$, а значит и соответствующие им полукольца и полуполя функций (как с обычным сложением, так и с* $\max$*-сложением).*

По предложению 1.1 при доказательстве некоторые утверждения для алгебраических систем $A(X)$ непрерывных функций, связанных с $C(X)$, пространство X можно считать хьюиттовским.

Хьюиттовское расширение νX тихоновского пространства X характеризуется (однозначно с точностью до канонического гомеоморфизма) следующими условиями: νX — хьюиттовское пространство, X — плотное пространство в νX и любая функция $f \in C(X)$ продолжается до некоторой (однозначной) функции из $C(\nu X)$.

Под *компактами* будем понимать компактные хаусдорфовы пространства. *Стоун-чеховская компактификация* βX тихоновского пространства X характеризуется (однозначно с точностью до канонического гомеоморфизма) следующими условиями: βX — компакт, X — плотное подпространство в βX и любая ограниченная функция $f \in C(X)$ продолжается до некоторой (однозначной) функции из $C(\beta X)$, которую будем обозначать через f^{β}.

Хьюиттовское расширение νX тихоновского пространства X гомеоморфно подпространству $\mathbb{R}$-идеалов пространства $\operatorname{Max} C(X)$ всех максимальных идеалов кольца $C(X)$. По теореме Гельфанда—Колмогорова пространство $\operatorname{Max} C(X)$ гомеоморфно βX [129, гл. 6].

Тихоновское пространство X называется *F-пространством*, если кольцо $C(X)$ является *кольцом Безу*, т. е. каждый конечно порождённый идеал в $C(X)$ является главным.

Для любого пространства X каждый простой идеал в $C(X)$ является главным. Когда, обратно, каждый простой идеал в $C(X)$, где X — тихоновское пространство, является максимальным, пространство X называется *P-пространством*. Известно, что тихоновское пространство X будет P-пространством тогда и только тогда, когда пересечение любого счётного числа открытых множеств является открытым множеством.

P-пространства и F-пространства были определены Л. Гиллманом и М. Хенриксеном в 1954 г. [126] и в 1956 г. [127] соответственно.

Существует много характеризаций F- и P-пространств в терминах колец $C(X)$ [129, теоремы 4J, 14.25]. Так, например, следующие условия эквивалентны для любого пространства X: X — F-пространство; непересекающиеся конуль-множества на X функционально отделимы; любое конуль-множество на X C^*-расширяемо.

Коммутативное кольцо R называется *регулярным по фон Нейману* (*FNR-кольцом*), если для любого элемента $a \in R$ существует такой элемент $b \in R$, что $a = a^2b$. Известно, что $C(X)$ — FNR-кольцо тогда и только тогда, когда X — P-пространство.

Точка x произвольного топологического пространства X называется *F-точкой*, если из того, что $x \in \mathrm{Z}^\circ(fg)$, следует, что $x \in \mathrm{Z}^\circ(f) \cup \mathrm{Z}^\circ(g)$ для любых $f, g \in C(X)$. Точка x произвольного топологического пространства X называется и *P-точкой*, если из того, что $x \in \mathrm{Z}(f)$, следует, что $x \in \mathrm{Z}^\circ(f)$ для любой $f \in C(X)$. Тихоновское пространство X является F-пространством (P-пространством) тогда и только тогда, когда каждая его точка является F-точкой (P-точкой).

Пусть с каждым топологическим пространством X связана алгебраическая система $A(X)$. Будем говорить, что пространство $X \in K$ *определяется в классе* K топологических пространств системой $A(X)$, если для любого пространства $Y \in K$ изоморфизм систем $A(X)$ и $A(Y)$ влечёт гомеоморфизм пространств X и Y. Понятие определяемости алгебраической структуры $A(X)$ в классе K топологических пространств производной алгебраической структурой $A'(X)$ вводится аналогичным образом. Вопросам определяемости топологических пространств посвящены обзоры Е. М. Вечтомова [13, 15].

Вслед за задачей определяемости пространства X алгебраической структурой $A(X)$ встаёт задача описания изоморфизмов структур $A(X)$. Произвольный изоморфизм решёток всех подалгебр однотипных алгебр называется *решёточным* (или *структурным*) *изоморфизмом* данных алгебр.

Далее, если не оговорено противное, все топологические пространства будем считать тихоновскими.

2. Полукольца непрерывных неотрицательных функций

Данный раздел посвящён теории полуколец непрерывных неотрицательных функций, систематическое изучение которых началось в 1998 г. [10]. Рассмотрим круг вопросов, связанных с идеалами, конгруэнциями и подалгебрами этих полуколец.

2.1. Идеалы

Пусть S — полукольцо с единицей, I — идеал этого полукольца. Идеал I полукольца S называется *идемпотентным*, если I — множество всевозможных конечных сумм элементов вида ab, где a, $b \in I$. Идеал I полукольца S называется *строго идемпотентным*, если для каждого элемента $a \in I$ найдутся такие элементы b, $c \in I$, что $a = bc$. Собственный идеал I полукольца S называется *полупервичным*, если $a^2 \in I$ влечёт $a \in I$ для любого элемента $a \in S$.

Предложение 2.1 [115, предложение 2.4]. *Для любого идеала I полукольца $C^+(X)$ равносильны следующие утверждения*:

1) *I — полупервичный идеал*;
2) *I — строго идемпотентный идеал*;
3) *I — идемпотентный идеал.*

Собственный идеал I полукольца S называется *простым*, если из того, что $ab \in I$, следует, что $a \in I$ или $b \in I$ для любых элементов a и b этого полукольца. Собственный идеал I полукольца S называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом собственном идеале полукольца S.

На основе свойств отображений α и β (1.1) доказывается следующее утверждение.

Предложение 2.2 [10, следствие 2.1]. *Простыми* (*максимальными*) *идеалами полукольца $C^+(X)$ являются в точности идеалы $P \cap C^+(X)$ для различных простых* (*максимальных*) *идеалов P кольца $C(X)$.*

Из этого предложения по классической теореме Гельфанда—Колмогорова о строении максимальных идеалов колец $C(X)$ выводятся следующие два утверждения.

Предложение 2.3. *Для любого тихоновского пространства X максимальные идеалы полукольца $C^+(X)$ совпадают с идеалами вида*

$$M^p = \left\{f \in C^+(X) \colon p \in \overline{\mathrm{Z}(f)}_{\beta X}\right\}, quadp \in \beta X.$$

Предложение 2.4. *Любой простой идеал полукольца $C^+(X)$ лежит в единственном максимальном идеале.*

Идеал I полукольца S называется *чистым*, если любые два элемента $a, b \in I$ имеют общую левую локальную единицу, т. е. такой элемент $e \in I$, что $a = ea$ и $b = eb$.

В полукольце $C^+(X)$ идеал I является чистым тогда и только тогда, когда каждый элемент из I имеет локальную единицу.

Идеал I полукольца S называется *строгим*, если для любых элементов $a, b \in S$ $a + b \in I$ влечёт $a, b \in I$.

Предложение 2.5 [114, предложение 2.2]. *Любой чистый идеал полукольца $C^+(X)$ строгий.*

Определим идеал

$$O^B = \left\{f \in C^+(X) \colon B \subseteq \left(\overline{\mathrm{Z}(f)}_{\beta X}\right)^\circ\right\}$$

полукольца $C^+(X)$.

Следующая теорема содержит полное описание чистых идеалов полукольца $C^+(X)$.

Теорема 2.6 [114, теорема 2.1]. *Чистые идеалы полукольца $C^+(X)$ — это в точности идеалы O^B для замкнутых множеств $B \subseteq \beta X$. Если идеал I чистый, то $I = O^{\delta I}$, где $\delta I = \bigcap\limits_{f \in I} \overline{Z(f)}_{\beta X}$.*

Идеал полукольца, порождённый некоторым множеством дополняемых идемпотентов данного полукольца, называется *регулярным*.

Предложение 2.7 [114, предложение 2.8]. *Регулярные идеалы полукольца $C^+(X)$ — это в точности чистые идеалы O^B, где B — пересечение открыто-замкнутых множеств из βX.*

Введём понятия инъективного, проективного и плоского идеалов, рассматривая идеал полукольца S как полумодуль над S.

Коммутативная полугруппа $\langle M, +\rangle$ с нейтральным элементом 0 называется (*правым*) *полумодулем над полукольцом* S (или *S-полумодулем*), если задано отображение $M \times S \to M$, обозначаемое ms, и при этом для любых $m, n \in M$, $s, t \in S$ выполняются следующие равенства:

1) $m(st) = (ms)t$;
2) $(m+n)s = ms + ns$;
3) $m(s+t) = ms + mt$;
4) $m1 = m$;
5) $0s = m0 = 0$.

S-полумодуль M называется *инъективным*, если для любых S-полумодуля A, его подполумодуля B и S-полумодульного гомоморфизма $\alpha\colon B \to M$ существует S-полумодульный гомоморфизм $\bar{\alpha}\colon A \to M$, продолжающий α, т. е. $\bar{\alpha} = \alpha$ на B.

S-полумодуль M называется *инъективным по Бэру*, если для любого правого идеала I полукольца S и для произвольного S-полумодульного гомоморфизма $\alpha\colon I \to M$ существует S-полумодульный гомоморфизм $\bar{\alpha}\colon S \to M$, продолжающий α.

Известно, что для колец S понятия инъективного модуля над кольцом и инъективного по Бэру модуля равносильны.

Идеал полукольца S называется *инъективным по Бэру* (*инъективным*), если он является инъективным по Бэру (инъективным) S-полумодулем.

Предложение 2.8 [115, лемма 8]. *В полукольце $C^+(X)$ нет ненулевых инъективных идеалов.*

Предложение 2.9 [115, лемма 3]. *Любой инъективный по Бэру идеал полукольца $C^+(X)$ выделяется прямым слагаемым.*

Если I — идеал кольца $C^+(X)$, то подпространство $\beta X \setminus \delta I$ пространства βX называется *спектром* идеала I.

Определим идеал

$$M_\Delta = \{f \in C^+(X)\colon B \subseteq \mathrm{Z}(f)\}$$

полукольца $C^+(X)$.

Топологическое пространство X называется *экстремально несвязным*, если замыкание каждого его открытого множества открыто. Пространство X называется *c-пространством*, если пересечение произвольного семейства его открытых множеств, мощность которого не превосходит мощности континуума, открыто.

Теорема 2.10 [115, теорема 2]. *Идеал I полукольца $C^+(X)$ инъективен по Бэру тогда и только тогда, когда $I = M_\Delta$, где Δ — открыто-замкнутое множество в X, $X \setminus \Delta$ — экстремально несвязное c-пространство.*

S-полумодуль M называется *проективным*, если для любых S-полумодулей A и B, любого S-эпиморфизма $\pi\colon B \to A$ и любого S-гомоморфизма $\alpha\colon M \to A$ найдётся S-гомоморфизм $\beta\colon M \to B$, такой что $\pi \circ \beta = \alpha$. Идеал полукольца S называется *проективным*, если он является проективным S-полумодулем.

Теорема 2.11 [114, теорема 3.1]. *Чистый идеал I полукольца $C^+(X)$ проективен тогда и только тогда, когда его спектр паракомпактен.*

Доказательство этой теоремы проводится по аналогии с доказательством соответствующей теоремы для идеалов кольца $C(X)$. С помощью соответствий α и β между идеалами полукольца $C^+(X)$ и кольца $C(X)$ доказывается следующий результат.

Теорема 2.12 [114, теорема 3.2]. *Идеал M_B полукольца $C^+(X)$ проективен тогда и только тогда, когда он выделяется прямым слагаемым в $C^+(X)$.*

Проективность простого идеала характеризует следующая теорема.

Теорема 2.13 [114, теорема 3.3]. *Простой идеал P полукольца $C^+(X)$ проективен тогда и только тогда, когда P — максимальный идеал, порождённый идемпотентом, т. е. идеал P имеет вид M_x для некоторой изолированной точки $x \in X$.*

Доказательство теоремы проводится по аналогии с соответствующим доказательством для кольца $C(X)$ и опирается на аналог теоремы Гельфанда—Колмогорова для полукольца $C^+(X)$.

S-полумодуль M называется *плоским*, если для любых натурального числа m, элементов $a_1, \ldots, a_m$ и элементов $s_1, \ldots, s_m, t_1, \ldots, t_m \in S$ равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_i s_i = \sum_{i=1}^{m} a_i t_i$$

влечёт существование таких натурального числа?n, элементов $b_1, \ldots, b_n \in M$ и элементов $s_{ij} \in S$ для всех $i = \overline{1,m}$ и $j = \overline{1,n}$, что выполняются равенства

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j s_{ij}$$

при всех $i = \overline{1,m}$ и

$$\sum_{i=1}^{m} s_{ij} s_i = \sum_{i=1}^{m} s_{ij} t_i$$

при всех $j = \overline{1,n}$.

Определение плоского полумодуля дано в терминах конечных семейств равенств. В случае модулей над кольцом это понятие эквивалентно понятию плоскостности, которое определяется через тензорное произведение.

Идеал полукольца S называется *плоским*, если он является плоским S-полумодулем. Все чистые, свободные и проективные идеалы любого полукольца являются плоскими.

Предложение 2.14 [116, теорема 1]. *Главный идеал $fC^+(X)$ полукольца $C^+(X)$ является плоским тогда и только тогда, когда аннулятор функции f — чистый идеал.*

Под аннулятором функции f понимается множество

$$\mathrm{Ann}\ f = \{g \in C^+(X)\colon\ fg = 0\}.$$

Теорема 2.15 [116, теорема 2]. *Всякий полупервичный идеал полукольца $C^+(X)$ является плоским.*

В следующих теоремах рассмотрены связи между некоторыми свойствами топологических пространств X и свойствами идеалов полуколец $C^+(X)$.

Теорема 2.16 [116, теорема 3]. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *все идеалы полукольца $C^+(X)$ плоские*;
2) *все главные идеалы полукольца $C^+(X)$ плоские*;
3) *X — F-пространство.*

Теорема 2.17 [116, теорема 4]. *Пространство X является P-пространством тогда и только тогда, когда каждый главный идеал полукольца $C^+(X)$ чист.*

Топологическое пространство X называется *базисно несвязным*, если внутренность любого его нуль-множества открыто-замкнута. Для идеала I полукольца $C^+(X)$ идеал

$$\mathrm{Ann}\ I\ =\ \big\{f \in C^+(X)\colon\ f(I) = \{0\}\big\}$$

называется *аннуляторным идеалом*.

Теорема 2.18 [116, теорема 5]. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *все главные идеалы полукольца $C^+(X)$ проективны*;
2) *все аннуляторные идеалы полукольца $C^+(X)$ чисты*;

3) *аннулятор произвольной функции из $C^+(X)$ выделяется прямым слагаемым*;
4) *пространство X базисно несвязно.*

Теорема 2.19 [116, теорема 6]. *Следующие условия эквивалентны*:
1) *каждый аннуляторный идеалы полукольца $C^+(X)$ проективен*;
2) *каждый аннуляторный идеал полукольца $C^+(X)$ выделяется прямым слагаемым*;
3) *пространство X экстремально несвязно.*

Идеалы полуколец непрерывных функций с топологией поточечной сходимости

Полукольцам непрерывных функций с топологией поточечной сходимости посвящена диссертация М. Н. Подлевских (Смирновой) [71]. В ней, в частности, изучались идеалы полуколец $C_p(X,S)$ [89].

Идеал I полукольца $C_p(X,S)$ называется *замкнутым*, если I является замкнутым множеством в $C_p(X,S)$.

Предложение 2.20 [89]. *Если X — $\mathbb{R}$-отделимое пространство, то произвольный замкнутый идеал полукольца $C_p^+(X)$ является выпуклым.*

Следствие 2.21. *Произвольный замкнутый идеал полукольца $C_p^+(X)$ в случае тихоновского пространства X является строгим.*

Предложение 2.22 [89]. *На тихоновском пространстве X отображения α и β* (см. (1.1)) *устанавливают взаимно-однозначное соответствие между множествами замкнутых идеалов кольца $C_p(X)$ и полукольца $C_p^+(X)$.*

Следствие 2.23. *Если пространство X тихоновское, то любой замкнутый идеал кольца $C_p(X)$ является абсолютно выпуклым.*

Рассмотрим общую ситуацию. Пусть S — топологическое полукольцо, I — правый идеал в топологическом полукольце $C_p(X,S)$ и $x \in X$. Обозначим через $I[x]$ замыкание множества $\pi_x(I)$ в топологическом пространстве S, т. е. $I[x] = \overline{\pi_x(I)}$. Множество $I[x]$ является замкнутым правым идеалом в S.

Предложение 2.24 [89]. *Пусть X — S-отделимое пространство и I — правый идеал полукольца $C_p(X,S)$. Для замкнутости I необходимо и достаточно выполнение равенства*
$$I = \bigcap_{x\in X} \pi_x^{-1}(I[x]).$$

Пусть теперь точка 0 замкнута в топологическом полукольце S. Рассмотрим в $C_p(X,S)$ множество
$$M_A = \{f \in C_p(X,S)\colon A \subseteq \mathrm{Z}(f)\}, \quad A \subseteq X.$$
Ясно, что M_A — замкнутый идеал в полукольце $C_p(X,S)$ и для любой $f \in C_p(X,S)$ множество $\mathrm{Z}(f)$ замкнуто в X.

Для любого $A \subseteq X$ имеем равенство идеалов $M_A = M_{\bar{A}}$. Кроме того, для произвольного множества $A \subseteq X$ имеют место равенства

$$\bar{A} = \bigcap_{f \in M_A} \mathrm{Z}(f), \quad M_A = M_{\bar{A}} = \bigcap_{x \in \bar{A}} \pi_x^{-1}(0).$$

Так как отображение $\pi_x \colon C_p(X,S) \to S$ непрерывно и точка 0 замкнута в S, то для произвольного множества $A \subseteq X$ идеал M_A является замкнутым идеалом в топологическом полукольце $C_p(X,S)$.

Топологическое полукольцо S называется *простым*, если единственным замкнутым собственным идеалом в S является нулевой идеал.

Теорема 2.25 [89]. *Пусть S — простое топологическое полукольцо и X — S-отделимое пространство. Тогда замкнутые идеалы в $C_p(X,S)$ — это в точности идеалы вида M_A для всевозможных замкнутых множеств $A \subseteq X$.*

Теорема 2.26 [89]. *Пусть X — S-тихоновское пространство и I — правый идеал топологического полукольца $C_p(X,S)$. Тогда I замкнут и прост в том и только том случае, когда $I = \pi_x^{-1}(p)$ для однозначно определённых точки $x \in X$ и замкнутого простого правого идеала $p \subset S$.*

Следствие 2.27 [89]. *Для произвольного простого топологического полукольца S, в котором точка 0 замкнута, и любого S-тихоновского пространства X справедливы следующие утверждения*:

1) *для любого замкнутого идеала I полукольца $C_p(X,S)$ существует однозначно определённое замкнутое подмножество $A \subseteq X$, такое что $I = M_A$;*
2) *решётка всех замкнутых идеалов полукольца $C_p(X,S)$ изоморфна решётке всех открытых множеств пространства X;*
3) *замкнутые простые идеалы в $C_p(X,S)$ — это в точности идеалы $\pi_x^{-1}(0)$ по различным $x \in X$;*
4) *S-тихоновское пространство X определяется как самим топологическим полукольцом $C_p(X,S)$, так и решёткой всех его замкнутых идеалов.*

В частности, следствие 2.27 верно для топологических полуколец $C_p^+(X)$ и $C_p^\vee(X)$.

2.2. Конгруэнции

2.2.1. Максимальные и предмаксимальные конгруэнции

Представляет интерес описание максимальных конгруэнций полуколец $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$.

Теорема 2.28 [10, предложение 3.4]. *Для любого топологического пространства X максимальные конгруэнции на полукольце $C^+(X)$ — это в точности двухклассовые конгруэнции, определяемые разбиением $\{P, C^+(X) \setminus P\}$ по всевозможным простым идеалам P в $C^+(X)$.*

Приведённое утверждение справедливо и для полукольца $C^{\vee}(X)$.

Конгруэнция ρ на полукольце S называется *предмаксимальной*, если на S существуют ровно две превосходящие её конгруэнции: некоторая максимальная и единичная.

Теорема 2.29 [101, теорема 2.2]. *Предмаксимальные конгруэнции на $C^{+}(X)$ и $C^{\vee}(X)$ — это в точности конгруэнции $\gamma(M)$ по всем $\mathbb{R}$-идеалам M кольца $C(X)$.*

Предложение 2.30 [101, с. 108]. *Для произвольного топологического пространства X топологические пространства $\operatorname{Pmax} C^{+}(X)$ и $\operatorname{Pmax} C^{\vee}(X)$ гомеоморфны. Для любого тихоновского пространства X топологические пространства νX, $\operatorname{Pmax} C^{+}(X)$ и $\operatorname{Pmax} C^{\vee}(X)$ гомеоморфны друг другу.*

Из предложения 2.30 вытекают следующие теоремы.

Теорема 2.31 [101, предложение 2.4]. *Для произвольных хьюиттовских пространств X и Y равносильны следующие условия:*

1) $\operatorname{Con} C^{+}(X) \cong \operatorname{Con} C^{+}(Y)$;
2) $\operatorname{Con} C^{\vee}(X) \cong \operatorname{Con} C^{\vee}(Y)$;
3) $X \approx Y$.

Теорема 2.32 [80, теорема 2; 101, теорема 2.3]. *Для любых топологических пространств X и Y эквивалентны следующие условия:*

1) *кольца $C(X)$ и $C(Y)$ изоморфны;*
2) *полукольца $C^{+}(X)$ и $C^{+}(Y)$ изоморфны;*
3) *полукольца $C^{\vee}(X)$ и $C^{\vee}(Y)$ изоморфны;*
4) *решётки $\operatorname{Con} C^{+}(X)$ и $\operatorname{Con} C^{+}(Y)$ изоморфны;*
5) *решётки $\operatorname{Con} C^{\vee}(X)$ и $\operatorname{Con} C^{\vee}(Y)$ изоморфны.*

2.2.2. Дополнения и псевдодополнения

Дополнением элемента a решётки $\langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ называется элемент $a' \in L$, удовлетворяющий условиям $a \wedge a' = 0$ и $a \vee a' = 1$. *Псевдодополнением* элемента a называется наибольший элемент $a^* \in L$, удовлетворяющий условию $a \wedge a^* = 0$.

Теорема 2.33 [104, теорема 2, предложение 2]. *Пусть X — произвольное тихоновское пространство. Тогда любая конгруэнция ρ на полукольцах $C^{+}(X)$ и $C^{\vee}(X)$ имеет псевдодополнение ρ_A для некоторого единственного канонически замкнутого подмножества A пространства X. Обратно, для каждого канонически замкнутого множества A в X конгруэнция ρ_A является псевдодополнением некоторой конгруэнции на $C^{+}(X)$ (соответственно $C^{\vee}(X)$).*

Искомым псевдодополнением конгруэнции $\rho \in \operatorname{Con} S$ является конгруэнция

$$\tau = \gamma\Bigg(\bigcap_{f,g\in S(X),\ f\rho g} \operatorname{Ann}(f-g)\Bigg).$$

При этом $\tau = \gamma(\mathrm{M}_A) = \rho_A$, где множество $A = \overline{\bigcup \mathrm{coz}(f-g)}$ по всем $f, g \in S$, для которых $f\ \rho\ g$, канонически замкнуто.

Следствие 2.34 [50, предложение 4.1]. *Для любого топологического пространства X решётки $\mathrm{Con}\, C^{+}(X)$, $\mathrm{Con}\, C^{\vee}(X)$ — решётки с псевдодополнениями.*

Следствие 2.35 [50, предложение 4.2]. *Для любого топологического пространства X псевдодополнение главной конгруэнции на полукольце $C^{+}(X)$ (или $C^{\vee}(X)$), порождённой парой функций f и g, имеет вид $\gamma\big(\mathrm{Ann}(f-g)\big) = \mathrm{M}_A$, где $A = \overline{\mathrm{coz}(f-g)}$.*

Через $S(X)$ обозначим одну из структур: $C^{+}(X)$, $C^{\vee}(X)$, $U(X)$, $U^{\vee}(X)$.

Теорема 2.36 [104, теорема 1]. *Бинарное отношение ρ на полукольце или полуполе $S(X)$ является дополняемой конгруэнцией тогда и только тогда, когда $\rho = \rho_A$ для некоторого единственного открыто-замкнутого подмножества A топологического пространства X. Любая дополняемая конгруэнция на $S(X)$ имеет единственное дополнение.*

Предложение 2.37 [53, предложение 5]. *Для любого топологического пространства X справедливы следующие утверждения:*

1) *множество всех псевдодополнений конгруэнций из $\mathrm{Con}\, S(X)$ относительно отношения включения образует булеву решётку, антиизоморфную решётке $\mathrm{L}(\tau X)$ всех канонически замкнутых подмножеств пространства τX;*
2) *упорядоченное множество всех дополняемых конгруэнций из $\mathrm{Con}\, S(X)$ изоморфно булевой решётке $\mathrm{B}(X)$ всех открыто-замкнутых множеств пространства X.*

Полукольцо или полуполе $S(X)$ называется *слабо риккартовым*, если для любых главных конгруэнций $\rho, \sigma \in \mathrm{Con}\, S(X)$, таких что $\rho \cap \sigma = 0$, выполняется равенство $\rho^* \vee \sigma^* = 1$.

Предложение 2.38 [53, предложение 6]. *Для топологического пространства X полукольцо или полуполе $S(X)$ слабо риккартово тогда и только тогда, когда X — F-пространство.*

Полукольцо или полуполе $S(X)$ называется *риккартовым*, если псевдодополнение любой его главной конгруэнции дополняемо. Топологическое пространство называется *базисно несвязным*, если внутренности всех его нуль-множеств замкнуты.

Предложение 2.39 [53, предложение 7]. *Для топологического пространства X полукольцо или полуполе $S(X)$ риккартово тогда и только тогда, когда X — базисно несвязное пространство.*

Полукольцо или полуполе $S(X)$ называется *бэровским*, если псевдодополнение любой его конгруэнции дополняемо. Тихоновское пространство называется *экстремально несвязным*, если все его канонически замкнутые множества открыты.

Предложение 2.40 [53, предложение 8]. *Для тихоновского пространства X полукольцо или полуполе $S(X)$ является бэровским тогда и только тогда, когда пространство X экстремально несвязно.*

2.2.3. Взаимосвязь решёток конгруэнций $\mathrm{Con}\, C^+(X)$ и $\mathrm{Con}\, C^\vee(X)$

Рассмотрим условия, при которых одна из решёток конгруэнций $\mathrm{Con}\, C^+(X)$ и $\mathrm{Con}\, C^\vee(X)$ является подрешёткой другой.

Предложение 2.41 [52, предложение 1]. *Для полукольца $C^\vee(X)$ справедливы следующие утверждения:*

1) *множество I в $C^\vee(X)$ является классом нуля некоторой конгруэнции тогда и только тогда, когда I — выпуклый идеал;*
2) *классы любой конгруэнции на полукольце $C^\vee(X)$ и на полуполе $U^\vee(X)$ выпуклы.*

Теорема 2.42 [106, теорема 1, следствие 1]. *Для произвольного топологического пространства X следующие условия эквивалентны:*

1) *X — F-пространство;*
2) *классы любой конгруэнции полукольца $C^+(X)$ выпуклы;*
3) *классы единицы всех конгруэнций полукольца $C^+(X)$ выпуклы;*
4) $\mathrm{Con}\, C^+(X) \subseteq \mathrm{Con}\, C^\vee(X)$;
5) *решётка $\mathrm{Con}\, C^+(X)$ дистрибутивна.*

Отметим, что для дистрибутивности решётки $\mathrm{Con}\, C^\vee(X)$ достаточно того, чтобы X являлось F-пространством [106, предложение 6]. Поиск необходимого условия является открытой проблемой.

Теорема 2.43 [52, теорема 6.4]. *Для произвольного топологического пространства X следующие условия эквивалентны:*

1) *X — P-пространство;*
2) $\mathrm{Con}\, C^+(X) = \mathrm{Con}\, C^\vee(X)$;
3) $\mathrm{Con}\, C^\vee(X) \subseteq \mathrm{Con}\, C^+(X)$.

2.2.4. Замкнутые конгруэнции

Пусть $S_p(X)$ — одно из полуколец $C_p^+(X)$, $U_p(X)$, $C_p^\vee(X)$ или $U_p^\vee(X)$ и ρ — конгруэнция на $S_p(X)$. Конгруэнция ρ называется *замкнутой* на $S_p(X)$, если множество $\{(f,g)\colon f\ \rho\ g\}$ замкнуто в тихоновском произведении $S_p(X)\times S_p(X)$. Конгруэнция на $S_p(X)$, заданная отношением равенства функций на множестве $A \subseteq X$, называется *конгруэнцией, ассоциированной с множеством* A, и обозначается σ_A. Очевидно, что $\sigma_A = \sigma_{\bar{A}}$ для любого подмножества $A \subseteq X$.

Теорема 2.44 [70, теоремы 1, 2]. *Для любого тихоновского пространства X и произвольной конгруэнции ρ на $S_p(X)$ равносильны следующие условия:*

1) *ρ — замкнутая конгруэнция*;
2) *$\rho = \sigma_A$ для некоторого однозначно определённого замкнутого множества $A \subseteq X$.*

Следствие 2.45. *Пусть X — тихоновское пространство и конгруэнция ρ на $C_p^+(X)$ такова, что для любой функции $f \in C_p^+(X)$ множество $[f]_\rho$ замкнуто в $C_p^+(X)$. Тогда ρ является замкнутой конгруэнцией и имеет вид σ_A.*

Множества конгруэнций на полукольцах $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$ не связаны отношением включения. Из теоремы 2.44 следует, что множества замкнутых конгруэнций на $C_p^+(X)$ и $C_p^\vee(X)$ совпадают.

Обозначим через $\operatorname{Con} S_p(X)$ решётку всех замкнутых конгруэнций на $S_p(X)$ по включению.

Пусть A и B — замкнутые множества в X. Тогда $\sigma_A \cap \sigma_B = \sigma_{A\cup B}$ — замкнутая конгруэнция. Таким образом, в данной решётке $\inf(\sigma_A, \sigma_B) = \sigma_A \cap \sigma_B$.

Предложение 2.46 [70, следствие 1]. *Пусть X — произвольное тихоновское пространство. Максимальными среди замкнутых конгруэнций на $S_p(X)$ являются в точности конгруэнции $\sigma_{\{x\}}$ по всем $x \in X$.*

Заметим, что на полуполе $U_p(X)$ конгруэнции $\sigma_{\{x\}} = \gamma(M_x)$ максимальны в решётке всех конгруэнций. В то же время они не являются максимальными на полукольце $C_p^+(X)$.

Предложение 2.47 [70, следствие 2]. *Пусть X — произвольное тихоновское пространство. Решётка $\operatorname{Con} S_p(X)$ изоморфна решётке $O(X)$ всех открытых множеств пространства X.*

Предложение 2.47 означает, что в решётке $\operatorname{Con} S_p(X)$ имеем $\sup(\sigma_A, \sigma_B) = \sigma_{A\cap B}$ для всех замкнутых подмножеств A и B в X.

Следствие 2.48. *Произвольное тихоновское пространство X определяется с точностью до гомеоморфизма каждой из решёток $\operatorname{Con} C_p^+(X)$, $\operatorname{Con} U_p(X)$, $\operatorname{Con} C_p^\vee(X)$, $\operatorname{Con} U_p^\vee(X)$ и $\operatorname{Id} C_p(X)$.*

2.3. Подалгебры

Теории подалгебр полуколец $C^+(X)$ и $C^\vee(X)$ посвящены работы [22, 42, 43, 45, 74, 82—86].

Подалгебрами полукольца $C^+(X)$ будут, например,

— нулевая подалгебра 0 и подалгебра констант $\mathbb{R}^+$;
— идеалы полукольца $C^+(X)$ (в частности, идеалы $M_x = \{f \in C^+(X) \colon f(x) = 0\}$, $x \in X$);
— подалгебры $A_{x,y} = \{f \in C^+(X) \colon f(x) = f(y)\}$, $x, y \in X$.

Рассматривались свойства модулярности и дистрибутивности решёток подалгебр.

Теорема 2.49 [23, теорема 3]. *Для любого $\mathbb{R}$-отделимого пространства X справедливы следующие утверждения*:

1) *решётка $\mathbb{A}\big(C(X)\big)$ модулярна тогда и только тогда, когда $|X| \leqslant 2$;*
2) *решётка $\mathbb{A}\big(C(X)\big)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда $|X| = 1$.*

Теорема 2.50 [83, предложение 1.3; 86, замечание 4.4]. *Для любого $\mathbb{R}^+$-отделимого пространства X справедливы следующие утверждения*:

1) *решётки $\mathbb{A}\big(C^+(X)\big)$ и $\mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big)$ модулярны (дистрибутивны) тогда и только тогда, когда $|X| = 1$;*
2) *решётки $\mathbb{A}_1\big(C^+(X)\big)$ и $\mathbb{A}_1\big(C^\vee(X)\big)$ модулярны (дистрибутивны) тогда и только тогда, когда $|X| \leqslant 2$.*

2.3.1. Определяемость

В 1939 г. И. М. Гельфанд и А. Н. Колмогоров доказали одну из первых теорем определяемости топологических пространств [60, теорема 2]: произвольный компакт X определяется кольцом $C(X)$. Эта теорема послужила источником для различных обобщений и углублений как за счёт ослабления ограничений на топологию пространства X, так и за счёт перехода от кольца $C(X)$ к другим функционально-алгебраическим объектам, связанным с X (см. [13, 15]).

В 1948 г. Э. Хьюитт установил определяемость произвольного хьюиттовского пространства X кольцом $C(X)$ [133, теорема 57], а в 1997 г. Е. М. Вечтомов доказал следующую теорему.

Теорема 2.51 [23, теорема 1]. *Произвольное хьюиттовское пространство X определяется решёткой $\mathbb{A}\big(C(X)\big)$ всех подалгебр кольца $C(X)$.*

Напомним, что решение задачи определяемости в классе хьюиттовских пространств мотивируется предложением 1.1.

Из теоремы 2.51 выводим следующий результат.

Следствие 2.52 [23, теорема 2]. *Для любого топологического пространства X кольцо $C(X)$ определяется решёткой $\mathbb{A}\big(C(X)\big)$ всех его подалгебр.*

При исследовании большое внимание уделяется методам и результатам, которые удаётся перенести из теории колец непрерывных функций, в том числе связанным с определяемостью.

Случай полуколец $C^+(X)$. Легко убедиться, что кольцо $C(X)$ является кольцом разностей полукольца $C^+(X)$, а функции полукольца $C^+(X)$ — квадратами функций кольца $C(X)$. Поэтому произвольный изоморфизм полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$ однозначно продолжается до изоморфизма колец $C(X)$ и $C(Y)$ и обратно, любой изоморфизм колец $C(X)$ и $C(Y)$ является продолжением некоторого единственного изоморфизма — его ограничения на $C^+(X)$ — полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 2.53.

1. *Любое хьюиттовское пространство X определяется полукольцом $C^+(X)$.*

2. *Для любых топологических пространств X и Y каждый изоморфизм полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$ индуцируется некоторым однозначно определённым гомеоморфизмом пространств $\nu\tau X$ и $\nu\tau Y$.*

Для решёток подалгебр кольца $C(X)$ и полукольца $C^+(X)$ подобных связей уже нет.

В 2010 г. Е. М. Вечтомов и В. В. Сидоров перенесли теорему 2.51 на случай полукольца $C^+(X)$.

Теорема 2.54 [43, теоремы 3.5, 3.6]. *Произвольное хьюиттовское пространство X определяется каждой из решёток $\mathbb{A}\big(C^+(X)\big)$ и $\mathbb{A}_1\big(C^+(X)\big)$.*

Из теоремы 2.54 выводим следующий результат.

Следствие 2.55 [43, теорема 3.6]. *Для любого топологического пространства X полукольцо $C^+(X)$ определяется каждой из решёток $\mathbb{A}\big(C^+(X)\big)$ и $\mathbb{A}_1\big(C^+(X)\big)$.*

Случай полуколец $C^\vee(X)$. Заметим, что неравенство $f \leqslant g$ равносильно равенству $f \vee g = g$ для любых $f, g \in C^\vee(X)$. Поэтому изоморфизм полуколец $C^\vee(X)$ и $C^\vee(Y)$ влечёт изоморфизм решёток $\langle C^\vee(X), \leqslant\rangle$ и $\langle C^\vee(Y), \leqslant\rangle$. Согласно [10, предложение 2.2] это означает изоморфизм колец $C(X)$ и $C(Y)$. Отсюда и из теоремы 2.59 вытекает следующий результат.

Теорема 2.56.

1. *Любое хьюиттовское пространство X определяется полукольцом $C^\vee(X)$.*
2. *Для любых топологических пространств X и Y каждый изоморфизм полуколец $C^\vee(X)$ и $C^\vee(Y)$ индуцируется некоторым однозначно определённым гомеоморфизмом пространств $\nu\tau X$ и $\nu\tau Y$.*

Теорема 2.57 [42, теорема 4]. *Произвольное хьюиттовское пространство X определяется решёткой $\mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big)$.*

Из теоремы 2.57 вытекает следующий результат.

Следствие 2.58. *Для любого топологического пространства X полукольцо $C^\vee(X)$ определяется решёткой $\mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big)$.*

2.3.2. Решёточные изоморфизмы

Отметим, что решёточные изоморфизмы колец $C(X)$ не описаны, хотя описание изоморфизмов самих колец $C(X)$ хорошо известно.

Пусть для произвольных топологических пространств X и Y кольца $C(X)$ и $C(Y)$ изоморфны. Тогда

$$C(\nu\tau X) \cong C(X) \cong C(Y) \cong C(\nu\tau Y).$$

Кроме того, согласно [129, предложение 10.1] каждый изоморфизм колец $C(\nu\tau X)$ и $C(\nu\tau Y)$ порождается однозначно определённым гомеоморфизмом пространств $\nu\tau X$ и $\nu\tau Y$. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 2.59. *Для любых топологических пространств X и Y каждый изоморфизм колец $C(X)$ и $C(Y)$ индуцируется некоторым единственным гомеоморфизмом пространств $\nu\tau X$ и $\nu\tau Y$.*

Случай полуколец $C^+(X)$. Решёточные изоморфизмы полуколец $C^+(X)$ описаны в [43].

Теорема 2.60 [43, теоремы 4.1, 5.1]. *Для произвольных топологических пространств X и Y справедливы следующие утверждения:*

1) *каждый изоморфизм решёток всех подалгебр с единицей полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$ индуцируется некоторым однозначно определённым изоморфизмом самих полуколец;*
2) *если мощность одной из тихоновизаций τX или τY не равна 2, то любой изоморфизм решёток всех подалгебр полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$ индуцируется единственным изоморфизмом этих полуколец;*
3) *если тихоновизации τX и τY двухточечные, то все изоморфизмы решёток всех подалгебр полуколец $C^+(X)$ и $C^+(Y)$ порождаются различными парами автоморфизмов цепи $[0,1]$ и двумя биекциями между τX и τY.*

Случай полуколец $C^\vee(X)$. Отметим, что образ подалгебры при изоморфизмах полуколец $C^\vee(X)$ не обязан быть подалгеброй.

Пример 2.61. Пусть $X = \{x, y\}$ — дискретное пространство. Тогда $C^\vee(X) = \mathbb{R}^\vee \times \mathbb{R}^\vee$.

Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon C^\vee(X) \to C^\vee(X), \quad (a,b) \mapsto (a, b^2).$$

Легко убедиться, что φ — автоморфизмом полукольца $C^\vee(X)$.

Предположим, $\varphi(\mathbb{R}^\vee)$ — подалгебра. Тогда $(2,4) = \varphi\big((2,2)\big) \in \varphi(\mathbb{R}^\vee)$. Следовательно, $2 \cdot (2,4) = (4,8) \in \varphi(\mathbb{R}^\vee)$, что невозможно, так как

$$(r,r) \mapsto (r, r^2) \neq (4,8) \text{ для всех } r \in \mathbb{R}^\vee.$$

Значит, образ $\varphi(\mathbb{R}^\vee)$ не является подалгеброй.

Решёточные изоморфизмы полуколец $C^\vee(X)$ описаны в [86]. Предварительно были описаны изоморфизмы самих полуколец $C^\vee(X)$.

Теорема 2.62 [86, предложение 3.2, теорема 3.5].

1. *Для произвольных топологических пространств X и Y изоморфизм α полуколец $C^\vee(X)$ и $C^\vee(Y)$ индуцирует изоморфизм решёток $\mathbb{A}\big(C^\vee(X)\big)$ и $\mathbb{A}\big(C^\vee(Y)\big)$ тогда и только тогда, когда $\alpha(\mathbb{R}^\vee) = \mathbb{R}^\vee$.*
2. *Пусть X и Y — произвольные хьюиттовские пространства и α — изоморфизм полуколец $C^\vee(X)$ и $C^\vee(Y)$, причём $\alpha(\mathbb{R}^\vee) = \mathbb{R}^\vee$. Тогда найдутся число $t > 0$ и гомеоморфизм $\mu\colon Y \to X$, такие что $\alpha(f) = f^t \circ \mu$ для всех $f \in C^\vee(X)$.*

Теорема 2.63 [86, теорема 4.1]. *Для произвольных топологических пространств X и Y справедливы следующие утверждения:*

1) *если мощность одной из тихоновизаций τX или τY больше 2, то любой изоморфизм решёток всех подалгебр полуколец $C^\vee(X)$ и $C^\vee(Y)$ индуцируется единственным изоморфизмом этих полуколец;*
2) *если тихоновизации τX и τY двухточечные, то все изоморфизмы решёток всех подалгебр полуколец $C^\vee(X)$ и $C^\vee(Y)$ порождаются различными парами автоморфизмов цепи $[0,1]$ и двумя биекциями между τX и τY;*
3) *если пространства τX и τY одноточечные, то существует единственный изоморфизм решёток всех подалгебр полуколец $C^\vee(X)$ и $C^\vee(Y)$: $\mathbb{R}^\vee \mapsto \mathbb{R}^\vee$, $0 \mapsto 0$.*

2.3.3. Однопорождённые подалгебры

Ключевую роль при изучении изоморфизмов решёток подалгебр полуколец непрерывных функций играет *метод однопорождённых подалгебр*. Это связано с тем, что каждая подалгебра — это точная верхняя грань включённых в неё однопорождённых подалгебр. Поэтому образ подалгебры A при изоморфизме полностью определяется образами однопорождённых подалгебр. Кроме того, многие свойства подалгебр удаётся описать на языке однопорождённых подалгебр, причём решёточно, т. е. в терминах свойств решётки подалгебр. Проиллюстрируем это на примере полуколец $C^+(X)$.

Наименьшая подалгебра, содержащая функцию f полукольца, называется *однопорождённой подалгеброй* и обозначается через $\langle f\rangle$. Она состоит из всевозможных многочленов от f без свободных членов с коэффициентами из $\mathbb{R}^+$. Подалгебру с единицей

$$[f] = \langle f\rangle \vee \mathbb{R}^+ = \langle f\rangle + \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+[f]$$

также будем называть однопорождённой.

Будем говорить, что свойство P имеет *решёточную характеризацию* в решётке L, если его можно описать в терминах свойств решётки L.

Решёточную характеризацию однопорождённых подалгебр полукольца $C^+(X)$ даёт следующая теорема.

Теорема 2.64 [43, теорема 2.6]. *Однопорождённые подалгебры $\langle f\rangle$ и $[f]$ — это в точности $\vee$-неразложимые компактные элементы решёток $\mathbb{A}\big(C^+(X)\big)$ и $\mathbb{A}_1\big(C^+(X)\big)$ соответственно.*

Решёточную характеризацию минимальных подалгебр и подалгебры констант $\mathbb{R}^+$ содержит следующее утверждение.

Предложение 2.65 [43, лемма 2.1, следствие 2.3].

1. *Подалгебра A минимальна тогда и только тогда, когда $A = \langle e\rangle$ для некоторого ненулевого идемпотента $e \in C^+(X)$.*
2. *Минимальная подалгебра A совпадает с $\mathbb{R}^+$ тогда и только тогда, когда для любой минимальной подалгебры $B \neq A$ подалгебра $A \vee B$ включает ровно две минимальные подалгебры.*

Это предложение означает, что подрешётка $\mathbb{A}_1\big(C^+(X)\big)$ решётки $\mathbb{A}\big(C^+(X)\big)$ имеет решёточную характеризацию в $\mathbb{A}\big(C^+(X)\big)$.

Опишем изоморфизмы α решётки $\mathbb{A}_1\big(C^+(X)\big)$. Согласно предложению 1.1 и теореме 2.54 можно считать, что α — автоморфизм решётки $\mathbb{A}_1\big(C^+(X)\big)$. Для их описания достаточно изучить образы однопорождённых подалгебр $[f]$, $f \in C^+(X)$.

Пусть $\alpha\colon [f] \mapsto [g]$. Тогда ограничение α на решётку подалгебр полукольца $[f]$ будет изоморфизмом решёток $\mathbb{A}_1([f])$ и $\mathbb{A}_1([g])$. Изучение этих изоморфизмов естественно начать с описания изоморфизмов самих полуколец $[f]$ и $[g]$.

Теорема 2.66 [83, теорема 6.1]. *Для произвольных функций $f \in C^+(X)$ и $g \in C^+(Y)$ следующие условия эквивалентны.*

1. *φ — изоморфизм полукольца $[f]$ на полукольцо $[g]$.*
2. *Выполняется одно из следующих условий.*

   2.1. *$|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = 1$. Тогда $[f] \equiv \mathbb{R}^+ \equiv [g]$ и φ — тождественное отображение.*

   2.2. *$|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = 2$ и $f > 0$, $g > 0$. В этом случае $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(ag^n + b)$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{P}$; φ — отображение полукольца $[f]$ на полукольцо $[g]$, порождаемое подстановкой $f \mapsto ag^n + b$.*

   2.3. *$|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = 2$ и $\mathrm{Z}(f) \cap \mathrm{Z}(g) \neq \varnothing$. В этом случае $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} pg$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$; φ — отображение полукольца $[f]$ на полукольцо $[g]$, порождаемое подстановкой $f \mapsto pg$.*

   2.4. *$|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = n$, $n \geqslant 3$. В этом случае $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} pg$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$; φ — отображение полукольца $[f]$ на полукольцо $[g]$, порождаемое подстановкой $f \mapsto pg$.*

   2.5. *$|\operatorname{Im} f| = |\operatorname{Im} g| = \infty$, φ — отображение полукольца $[f]$ на полукольцо $[g]$, порождаемое подстановкой $f \mapsto pg$, $p \in \mathbb{P}$.*

Теорема 2.67 [83, теорема 6.2]. *Изоморфизмы решёток $\mathbb{A}_1([f])$ и $\mathbb{A}_1([g])$, где $f \in C^+(X)$ и $g \in C^+(Y)$, порождаются изоморфизмами полуколец $[f]$ и $[g]$.*

Если образ f бесконечен, то полукольцо $[f]$ изоморфно полукольцу многочленов $\mathbb{R}^+[x]$. Известно [3, с. 40], что автоморфизмы кольца многочленов $\mathbb{R}[x]$ получаются линейными заменами x на $ax + b$, $a \neq 0$. Из теоремы 2.66 следует, что аналогичный результат имеет место и для полукольца $\mathbb{R}^+[x]$.

Предложение 2.68 [85, предложение 1]. *Любой автоморфизм полукольца многочленов $\mathbb{R}^+[x]$ получается заменой переменной $x \mapsto px$, $p \in \mathbb{P}$. Таким образом, группа автоморфизмов полукольца $\mathbb{R}^+[x]$ изоморфна мультипликативной группе всех положительных действительных чисел.*

Опираясь на теорему 2.67, можно доказать, что автоморфизмы полукольца $\mathbb{R}^+[x]$ порождают все возможные автоморфизмы решёток $\mathbb{A}(\mathbb{R}^+[x])$ и $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}^+[x])$, т. е. верна следующая теорема.

Теорема 2.69 [85, теорема 6]. *Группы автоморфизмов решёток $\mathbb{A}(\mathbb{R}^+[x])$ и $\mathbb{A}_1(\mathbb{R}^+[x])$ изоморфны мультипликативной группе $\mathbb{P}$ всех положительных действительных чисел.*

2.3.4. Максимальные подалгебры

Важную роль в доказательстве теоремы определяемости произвольного хьюиттовского пространства X решёткой $\mathbb{A}\big(C(X)\big)$ всех подалгебр кольца $C(X)$ играют максимальные подалгебры $C(X)$. Если X — компакт, то известно лишь два типа максимальных подалгебр кольца $C(X)$: максимальные идеалы M_x и подалгебры $A_{x,y}$. Заметим, что в случае дискретных тел S кольца $C(X,S)$, где X — произвольное топологическое пространство, не имеют других максимальных подалгебр [24, теорема 1].

Следующая теорема показывает, что в полукольцах $C^+(X)$ максимальные подалгебры устроены существенно иначе, чем в кольцах $C(X)$.

Теорема 2.70 [22]. *Для каждого максимального идеала M полукольца $C^+(X)$ и любого минимального простого идеала P в $C^+(X)$, не включённого в M, множество $A(M,P) = M \cup (C^+(X) \setminus P)$ является максимальной подалгеброй в $C^+(X)$.*

Дополнение $P \setminus M$ подалгебры $A(P,M)$ в полукольце $C^+(X)$, пополненное 0, также будет подалгеброй в $C^+(X)$. Поэтому из теоремы 2.70 выводим следующий результат.

Следствие 2.71 [22, следствие 1]. *Максимальная подалгебра A полукольца $C^+(X)$ замкнута в топологии поточечной сходимости тогда и только тогда, когда пространство X одноточечно и A — нулевая подалгебра.*

Следствие 2.72 [22, следствие 2]. *Пусть X — конечное дискретное пространство с $n > 1$ элементами. Тогда все максимальные подалгебры в $C^+(X) = (\mathbb{R}^+)^n$ имеют вид*

$$A(M_x, M_y) = \{f \in C^+(X)\colon f(x) = 0 \text{ и } f(y) \neq 0\}, \quad x \neq y \in X.$$

В [91] для каждого множества различных точек $\{x_i \in X\}_{i=0}^k$, где $k \in \mathbb{N}$, и любого семейства положительных чисел $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$, таких что $\sum\limits_{i=1}^k \alpha_i = 1$, определено множество

$$A(\{x_i\},\{\alpha_i\}) = \left\{f \in U(X)\colon \prod_{i=1}^k f(x_i)^{\alpha_i} \geqslant f(x_0)\right\} \qquad (2.1)$$

и показано, что эти множества являются максимальными замкнутыми подалгебрами (т. е. максимальными среди замкнутых подалгебр) в $C^+(X)$.

Изучение замкнутых подалгебр в $C^+(X)$ во многом сводится к случаю конечных X, т. е. изучению подалгебр в $(\mathbb{R}^+)^n$. Известно минимальное число образующих подалгебры $(\mathbb{R}^+)^n$.

Теорема 2.73 [74, теорема 5]. *Подалгебра* $(\mathbb{R}^+)^n$ *имеет* k *образующих тогда и только тогда, когда* $n \leqslant C_k^{[(k+1)/2]}$.

3. Полуполя непрерывных положительных функций

Данный раздел посвящён теории полуполей непрерывных положительных функций. Рассмотрим круг вопросов, связанных с их конгруэнциями и подалгебрами, но не будем рассматривать идеалы, так как в полуполях нет собственных идеалов.

3.1. Конгруэнции

3.1.1. Взаимосвязь решёток конгруэнций полуполей $U(X)$ и $U^\vee(X)$

На полуполях $U(X)$ и $U^\vee(X)$ конгруэнции однозначно задаются своими ядрами — классами единицы. Ядра полуполя $U(X)$, замкнутые относительно $\vee$, будем называть $\vee$-*ядрами*. Любое ядро полуполя $U^\vee(X)$ является ядром полуполя $U(X)$, значит, имеет место следующее предложение.

Предложение 3.1 [51, предложение 3]. *Решётка конгруэнций* $\operatorname{Con} U^\vee(X)$ *является подрешёткой решётки конгруэнций* $\operatorname{Con} U(X)$.

Теорема 3.2 [51, теорема 1]. *Для любого пространства* X *эквивалентны следующие условия*:

1) $\operatorname{Con} U(X) \subseteq \operatorname{Con} U^\vee(X)$;
2) $\operatorname{Con} U(X) = \operatorname{Con} U^\vee(X)$;
3) X *является F-пространством.*

Любое ядро полуполя $U^\vee(X)$ выпукло. Отметим, что все ядра полуполя $U(X)$ выпуклы в том и только том случае, когда пространство X является F-пространством [51, теорема 1].

Отдельного внимания заслуживает вопрос дистрибутивности решёток ядер полуполей $U(X)$ и $U^\vee(X)$. Решётка $\operatorname{Con} U^\vee(X)$ дистрибутивна всегда, в то время как дистрибутивность решётки $\operatorname{Con} U(X)$ равносильна тому, что X является F-пространством [112, предложение].

Отметим также следующий результат.

Теорема 3.3 (теорема 1 в [102] — формулировка, теорема 6.4.1 в [45] — доказательство). *Решётка идеалов* $\operatorname{Id} C(X)$ *является ретрактом решётки ядер* $\operatorname{Con} U(X)$.

Ретракцию устанавливают отображение

$$\gamma\colon \operatorname{Id} R \to \operatorname{Con} S\colon$$

$$a\,\gamma(I)\,b \text{ тогда и только тогда, когда } a - b \in I \text{ для любых } a, b \in S, \tag{3.1}$$

и отображение $\delta\colon \operatorname{Con} S \to \operatorname{Id} R$, ставящее в соответствие каждой конгруэнции ρ на S идеал в R по следующему правилу:

$$\delta(\rho) = \{a - b \in R\colon a, b \in S \text{ и } (a\ \rho\ b)\}, \tag{3.2}$$

где R — кольцо разностей аддитивно сократимого полукольца S. В нашем случае $S = U(X)$, $R = C(X)$.

Теорема 3.4 [10, теорема 4.1]. *Для произвольного топологического пространства X эквивалентны следующие условия*:

1) *решётки $\operatorname{Con} U(X)$ и $\operatorname{Id} C(X)$ канонически изоморфны посредством δ и γ* (*отображение δ инъективно*);
2) *все конгруэнции на полуполе $U(X)$ идеальны* (*отображение γ сюръективно*);
3) *пространство X псевдокомпактно.*

3.1.2. Главные ядра

Главные конгруэнции выступают удобным и эффективным инструментом в исследовании свойств полуполей непрерывных функций.

Главная конгруэнция $\rho(u, v)$ произвольного полуполя U однозначно задаётся парой $(uv^{-1}, 1)$. Ядро главной конгруэнции на полуполе $U(X)$ ($U^\vee(X)$), порождённой парой $(u, 1)$, назовём *главным ядром* и обозначим (u) (соответственно $(u)^\vee$).

Полуполе U имеет *образующие* $u_1, \ldots, u_n$, если $U = (u_1) \cdot \ldots \cdot (u_n)$. Если $U = (u)$, то элемент u называется *образующим*.

Теорема 3.5 [77, теорема 1]. *Главные ядра полуполя $U(X)$ и только они имеют вид*

$$\begin{aligned}(u) = \{v \in U(X)\colon v - 1 \in (u-1)C(X),\\ (u \vee u^{-1})^{-k} \leqslant v \leqslant (u \vee u^{-1})^k \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}\}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

В полуполе $U^\vee(X)$ пересечение и произведение двух главных ядер являются главными ядрами [50, предложение 2.2].

Заметим, что для произвольного идемпотентного полутела U точная верхняя грань любых двух главных конгруэнций является главной конгруэнцией (это следует из [2, лемма III.11.2]).

Теорема 3.6 [51, предложение 4]. *Главные ядра полуполя $U^\vee(X)$ и только они имеют вид*

$$(u)^\vee = \{v \in U^\vee(X)\colon (u \wedge u^{-1})^k \leqslant v \leqslant (u \vee u^{-1})^k) \text{ для некоторого } k \in \mathbb{N}\}. \tag{3.4}$$

Рассмотрим характеризации топологических пространств с помощью главных ядер.

Теорема 3.7 [50, теорема 5.1; 112, предложение]. *Для любого топологического пространства X равносильны следующие утверждения*:

1) *X — F-пространство*;
2) *для любой функции $u \in U(X)$ главные ядра $(u) \in \operatorname{Con} U(X)$ и $(u \vee u^{-1}) \in \operatorname{Con} U(X)$ совпадают*;
3) *для любой функции $u \in U(X)$ главное ядро $(u) \in \operatorname{Con} U(X)$ содержит функцию $u \vee u^{-1}$*;
4) *упорядоченное множество главных ядер полуполя $U(X)$ является подрешёткой решётки $\operatorname{Con} U(X)$*;
5) *пересечение любых двух главных ядер полуполя $U(X)$ является главным ядром*;
6) *произведение любых двух главных ядер полуполя $U(X)$ является главным ядром*;
7) *полуполе $U(X)$ (равносильно $U^{\vee}(X)$) слабо риккартово, т. е. для любых главных конгруэнций $\rho, \sigma \in \operatorname{Con} S(X)$, таких что $\rho \cap \sigma = 0$, выполняется равенство $\rho^* \vee \sigma^* = 1$.*

Теорема 3.8 [50, теорема 3.1]. *Для любого тихоновского пространства X эквивалентны следующие условия*:

1) *пространство X псевдокомпактно, т. е. функция из $C(X)$ является ограниченной на X*;
2) *$(\varphi) = \ker \gamma\big((\varphi - 1)C(X)\big)$ для каждой функции $\varphi \in U(X)$*;
3) *$U^{\vee}(X)$ — полуполе с образующей*;
4) *$U(X)$ — полуполе с образующей.*

Предложение 3.9 [50, теорема 6.5]. *Тихоновское пространство X конечно тогда и только тогда, когда $(u) = \big((u + u^{-1})/2\big)$ для любой функции $u \in U(X)$.*

3.1.3. Максимальные конгруэнции

Теорема 3.10 [81, теорема 2; 101, теорема 2.1]. *Максимальные конгруэнции на полуполях $U(X)$ и $U^{\vee}(X)$ — это в точности конгруэнции $\gamma(M)$ по всевозможным $\mathbb{R}$-идеалам M кольца $C(X)$.*

Для $U(X)$ этот факт установлен И. А. Семёновой [81, теорема 2], для $U^{\vee}(X)$ — Д. В. Чупраковым [101, теорема 2.1].

Теорема 3.11 [101, теорема 2.4]. *Для любого тихоновского пространства X эквивалентны следующие условия*:

1) *пространство X является псевдокомпактным*;
2) *любая собственная конгруэнция на полуполе $U(X)$ содержится в некоторой максимальной конгруэнции*;
3) *любая собственная конгруэнция на полуполе $U^{\vee}(X)$ содержится в некоторой максимальной $\vee$-конгруэнции.*

Если топологическое пространство X не псевдокомпактно, то пара $(1, 2)$ порождает неидеальную конгруэнцию ρ_0, для которой $\gamma\big(\delta(\rho_0)\big) = 1$. По теореме 3.10 собственная конгруэнция ρ_0 не содержится ни в какой максимальной конгруэнции на $U(X)$.

Обозначим через $\operatorname{Max} U(X)$ ($\operatorname{Max} U^{\vee}(X)$) *пространство* (со стоуновской топологией) *всех максимальных конгруэнций на полуполе* $U(X)$ ($U^{\vee}(X)$).

Предложение 3.12 [81, теорема 3; 101, предложение 2.1]. *Верны следующие утверждения*:

1) *для любого топологического пространства X топологические пространства $\operatorname{Max} U(X)$ и $\operatorname{Max} U^{\vee}(X)$ гомеоморфны*;
2) *для любого тихоновского пространства X топологические пространства νX, $\operatorname{Max} U(X)$ и $\operatorname{Max} U^{\vee}(X)$ гомеоморфны.*

Предложение 3.13 [10, следствие 4.2]. *Произвольные компакты X и Y гомеоморфны только тогда, когда решётки $\operatorname{Con} U(X)$ и $\operatorname{Con} U(Y)$ изоморфны.*

Как следствие предложения 3.12 получаем теорему определяемости топологического пространства решётками конгруэнций полуполей $U(X)$ и $U^{\vee}(X)$.

Теорема 3.14 [81, следствие 2; 101, теорема 2.3]. *Для произвольных хьюиттовских пространств X и Y равносильны следующие условия*:

1) $\operatorname{Con} U(X) \cong \operatorname{Con} U(Y)$;
2) $\operatorname{Con} U^{\vee}(X) \cong \operatorname{Con} U^{\vee}(Y)$;
3) $X \approx Y$.

Эта теорема, в свою очередь, влечёт следующую теорему.

Теорема 3.15. *Для любых топологических пространств X и Y эквивалентны следующие условия*:

1) *кольца $C(X)$ и $C(Y)$ изоморфны*;
2) *полуполя $U(X)$ и $U(Y)$ изоморфны*;
3) *полуполя $U^{\vee}(X)$ и $U^{\vee}(Y)$ изоморфны*;
4) *решётки $\operatorname{Con} U(X)$ и $\operatorname{Con} U(Y)$ изоморфны*;
5) *решётки $\operatorname{Con} U^{\vee}(X)$ и $\operatorname{Con} U^{\vee}(Y)$ изоморфны.*

3.1.4. Дополняемые и псевдодополняемые конгруэнции

Теорема 3.16 [53, теорема]. *Пусть X — произвольное тихоновское пространство. Тогда для полуполя $U(X)$ или $U^{\vee}(X)$ любая конгруэнция ρ имеет псевдодополнение ρ_A для некоторого единственного канонически замкнутого подмножества A пространства X. Обратно, для каждого канонически замкнутого множества A в X конгруэнция ρ_A является псевдодополнением некоторой конгруэнции на $U(X)$ (или $U^{\vee}(X)$ соответственно).*

Следствие 3.17 [50, предложение 4.1]. *Для любого топологического пространства X решётки $\operatorname{Con} U(X)$, $\operatorname{Con} U^{\vee}(X)$ — это решётки с псевдодополнениями.*

Следствие 3.18 [50, предложение 4.2]. *Для любого топологического пространства X псевдодополнение главной конгруэнции на полуполе $U(X)$ или $U^{\vee}(X)$, порождённой парой функций f и g, имеет вид $\gamma\big(\operatorname{Ann}(f-g)\big) = \mathrm{M}_A$, где $A = \overline{\operatorname{coz}(f-g)}$.*

Теорема 3.19 [104, теорема 1]. *Для любых топологического пространства X и бинарного отношения ρ на множестве $C^{+}(X)$ следующие условия эквивалентны:*

1) *$\rho = \rho_A$ для некоторого открыто-замкнутого подмножества A пространства X;*
2) *отношение ρ является дополняемой конгруэнцией на полукольце $C^{+}(X)$;*
3) *отношение ρ является дополняемой конгруэнцией на полукольце $C^{\vee}(X)$.*

Следствие 3.20. *Ядро K полуполя $U(X)$ ($U^{\vee}(X)$) имеет дополнение тогда и только тогда, когда $K = \{u \in U(X)\colon \mathrm{Z}(u-1) \supseteq A\}$ для некоторого (единственного) открыто-замкнутого подмножества A топологического пространства X.*

Теорема 3.21 [50, теорема 3.1; 53, предложение 9]. *Для тихоновского пространства X равносильны следующие условия:*

1) *пространство X конечно;*
2) *все конгруэнции из $\operatorname{Con} U(X)$ ($\operatorname{Con} U^{\vee}(X)$) дополняемы;*
3) *все главные конгруэнции из $\operatorname{Con} U(X)$ ($\operatorname{Con} U^{\vee}(X)$) дополняемы;*
4) *все конгруэнции из $\operatorname{Con} U(X)$ ($\operatorname{Con} U^{\vee}(X)$) главные.*

Из теоремы 3.21 и из предложения 2.37 следует, что решётка $\operatorname{Con} U(X)$ ($\operatorname{Con} U^{\vee}(X)$) булева, если и только если пространство X конечно.

3.1.5. Продолжение конгруэнций полуполей непрерывных функций

Задача продолжения конгруэнций естественным образом возникает при совместном исследовании свойств конгруэнций полукольца и вложенного в него полуполя.

Пусть S, S' — полукольца, причём $S' \subseteq S$. *Продолжением конгруэнции* $\rho \in \operatorname{Con} S'$ называется такая конгруэнция $\tau_\rho \in \operatorname{Con} S$, что $\tau_\rho \cap (S' \times S') = \rho$.

Теорема 3.22 [52]. *Для произвольной конгруэнции на полуполе $U^{\vee}(X)$ с ядром K существует конгруэнция $\vee_K$ на полукольце $C^{\vee}(X)$, для которой равносильны следующие свойства:*

1) *$\vee_K$ — наименьшая конгруэнция на полукольце $C^{\vee}(X)$, продолжающая ядро K, при этом $[1]_{\vee_K} = K$;*
2) *$\vee_K$ — наименьшая конгруэнция на полукольце $C^{\vee}(X)$, склеивающая ядро K: $K \subseteq [1]_{\vee_K}$;*

3) *функции* $f, g \in C^{\vee}(X)$ *находятся в отношении* $\vee_K$, *если существуют* $f_i, g_j \in C^{\vee}(X)$ *и* $u_i, v_j \in K$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, *для которых*

$$f = \bigvee_{i=1}^{n} f_i, \quad g = \bigvee_{i=1}^{m} g_i, \quad \bigvee_{i=1}^{n} f_i u_i = \bigvee_{i=1}^{m} g_i v_i;$$

4) *функции* $f, g \in C^{\vee}(X)$ *находятся в отношении* $\vee_K$, *если найдутся* $f_i \in C^{\vee}(X)$ *и* $u_i \in K$, $i = \overline{1,n}$, *для которых*

$$f = \bigvee_{i=1}^{n} f_i, \quad g = \bigvee_{i=1}^{m} f_i k_i;$$

5) *для произвольных функций* $f, g \in C^{\vee}(X)$ $f \vee_K g$ *тогда и только тогда, когда* $gk \leqslant f \leqslant gk'$ *для некоторых* $k, k' \in K$.

Предложение 3.23 [52, лемма 3]. *Для любого ядра* K *полуполя* $U^{\vee}(X)$ *отношение* ρ_K *является конгруэнцией на полукольце* $C^{+}(X)$.

Теорема 3.24 [52]. *Для произвольной конгруэнции на полуполе* U *с ядром* K *существует конгруэнция* $\sim_K$ *на полукольце* $C^{+}(X)$, *для которой равносильны следующие свойства*:

1) $\sim_K$ — *наименьшая конгруэнция на полукольце* $C^{+}(X)$, *продолжающая ядро* K, *причём* $[1]_{\rho_K} = K$;
2) $\sim_K$ — *наименьшая конгруэнция на полукольце* $C^{+}(X)$, *склеивающая ядро* K: $K \subseteq [1]_{\rho_K}$;
3) *функции* $f, g \in C^{+}(X)$ *находятся в отношении* $\sim_K$, *если существуют* $f_i, g_j \in C^{\vee}(X)$ *и* $u_i, v_j \in K$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, *для которых*

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i, \quad g = \sum_{i=1}^{m} g_i, \quad \sum_{i=1}^{n} f_i u_i = \sum_{i=1}^{m} g_i v_i;$$

4) *функции* $f, g \in C^{+}(X)$ *находятся в отношении* $\sim_K$, *если существуют* $f_i \in C^{+}(X)$ *и* $u_i \in K$, $i = \overline{1,n}$, *для которых*

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i, \quad g = \sum_{i=1}^{m} f_i k_i.$$

Схема доказательства этой теоремы следующая: равносильность 3) $\Longleftrightarrow$ 4) — [52, лемма 4]; равносильность 4) $\Longleftrightarrow$ 2) — [52, предложение 9]. Доказательство равносильности 4) $\Longleftrightarrow$ 1) проходит в три этапа:

— доказательство того, что свойство ядра $K \in \operatorname{Con} U(X)$

$$\text{для любых } k_1, \ldots, k_n \in K \text{ и любых } f_1, \ldots, f_n \in C^{+}(X) \\ \text{из } \sum_{i=1}^{n} f_i = 1 \text{ следует } \sum_{i=1}^{n} f_i k_i \in K \tag{3.5}$$

необходимо и достаточно для существования продолжения ядра K, в качестве продолжения можно взять конгруэнцию $\sim_K$ [52, лемма 5];

— проверка свойства (3.5) для главных ядер полуполя $U(X)$ [52, лемма 7];
— переход от главных ядер к их произведениям [52, лемма 6].

Предложение 3.25 [52, предложение 10]. *Для любого ядра K полуполя $U(X)$ справедливы следующие утверждения:*
1) *если K — $\vee$-ядро, то $\sim_K \subseteq \vee_K$;*
2) *если $2 \in K$, то K является $\vee$-ядром и $\sim_K = \vee_K$.*

Теорема 3.26 [52, теорема 2]. *Решётка конгруэнций $\operatorname{Con} U^{\vee}(X)$ является ретрактом решётки конгруэнций $\operatorname{Con} C^{\vee}(X)$.*

Ретракцию устанавливают отображения

$$\vartheta\colon \operatorname{Con} C^{\vee}(X) \to \operatorname{Con} U^{\vee}(X), \quad \vartheta(\rho) = \rho|_{U^{\vee}(X)},$$
$$\zeta\colon \operatorname{Con} U^{\vee}(X) \to \operatorname{Con} C^{\vee}(X), \quad \zeta(\rho) = \vee_{\ker(\rho)}.$$

Отметим, что отображение

$$\vartheta^{+}\colon \operatorname{Con} C^{+}(X) \to \operatorname{Con} U(X), \quad \vartheta^{+}(\rho) = \rho|_{U(X)}$$

является гомоморфизмом, а отображение

$$\zeta^{+}\colon \operatorname{Con} U^{\vee}(X) \to \operatorname{Con} C^{+}(X), \quad \zeta^{+}(\rho) = \sim_{\ker \rho}$$

сохраняет композицию конгруэнций.

Теорема 3.27 [51, теорема 1]. *Для произвольного топологического пространства X эквивалентны следующие условия:*
1) *X — F-пространство;*
2) *для любого ядра K $f\ \rho_K\ g$ тогда и только тогда, когда $f = gk$ для некоторого $k \in K$;*
3) *отношение σ на полукольце $C^{+}(X)$, заданное условием*

$$f\ \sigma\ g \text{ тогда и только тогда, когда } f = gu \text{ для некоторого } u \in U(X),$$

является конгруэнцией на нём;
4) *$\sim_K = \rho_K$ для любого ядра $K \in \operatorname{Con} U(X)$;*
5) *конгруэнция $\sim_K$ является $\vee$-конгруэнцией для любого ядра $K \in \operatorname{Con} U(X)$.*

3.2. Подалгебры

Теории подалгебр полуполей $U(X)$ и $U^{\vee}(X)$ посвящены работы [22, 44, 74, 87, 88, 91].

3.2.1. Определяемость

Задача определяемости хьюиттовских пространств решётками подалгебр полуполей непрерывных положительных функций, заданных на них, долгое время оставалась нерешённой.

Теорема 3.28 (2015 г.). *Произвольное хьюиттовское пространство X определяется каждой из решёток $\mathbb{A}\big(U(X)\big)$, $\mathbb{A}_1\big(U(X)\big)$, $\mathbb{A}\big(U^\vee(X)\big)$.*

Теорема 3.28 для решёток $\mathbb{A}\big(U^\vee(X)\big)$ — центральный результат работы [44]; для решёток $\mathbb{A}\big(U(X)\big)$ и $\mathbb{A}_1\big(U(X)\big)$ — новый результат В. В. Сидорова (в печати). Случай решёток $\mathbb{A}_1\big(U^\vee(X)\big)$ не рассматривался.

Из теоремы 3.28 получаем следствие.

Следствие 3.29. *Для любого топологического пространства X полуполе $U(X)$ определяется каждой из решёток $\mathbb{A}\big(U(X)\big)$ и $\mathbb{A}_1\big(U(X)\big)$, а полуполе $U^\vee(X)$ — решёткой $\mathbb{A}\big(U^\vee(X)\big)$.*

Существует аналог теоремы Стоуна—Вейерштрасса для полуполей $U(X)$ на языке подалгебр.

Теорема 3.30 [87]. *Пусть X — компакт и подалгебра $A \subseteq U(X)$ — максимальная среди подалгебр, для которых выполняются следующие условия*:

1) $\mathbb{P} \subset A$;

2) *для любых $\langle f\rangle \subseteq A$ и $\langle g\rangle \subseteq U(X)$ из $\langle f\rangle \subset (\langle f\rangle \vee \langle g\rangle) \cap A$ следует $\langle g\rangle \subseteq A$.*

Тогда A всюду плотна в $U(X)$ (относительно супремум-нормы) или $A = A_{x,y}$ для некоторых $x, y \in X$.

Как и в случае полуколец $C^\vee(X)$ (см. пример 2.61 и [44, пример]), при изоморфизме полуполей $U^\vee(X)$ и $U^\vee(Y)$ образ подалгебры не обязан быть подалгеброй (в отличие от полуполей $U(X)$).

Предложение 3.31 [44, предложение 7]. *Изоморфизм φ полуполей $U^\vee(X)$ и $U^\vee(Y)$ переводит подалгебры в подалгебры тогда и только тогда, когда $\varphi(\mathbb{P}^\vee) = \mathbb{P}^\vee$.*

Из предложения 3.31 следует, что импликация

$$U^\vee(X) \cong U^\vee(Y) \Longrightarrow \mathbb{A}\big(U^\vee(X)\big) \cong \mathbb{A}\big(U^\vee(Y)\big),$$

хотя и следует из теоремы 3.28, не может быть установлена напрямую.

3.2.2. Максимальные подалгебры

В полуполе $U(X)$ подалгебры $\{f \in U(X)\colon f(x) \leqslant f(y)\}$, где $x \neq y \in X$, являются максимальными. Эти подалгебры являются частным случаем подалгебр $A(\{x_i\}, \{\alpha_i\})$ (см. (2.1)). Известно, что все такие подалгебры максимальны, а в случае $|X| = n$, т. е. $U(X) = \mathbb{P}^n$, других максимальных подалгебр нет.

Теорема 3.32 [74, теоремы 1, 2].

1. *Любая подалгебра $A(\{x_i\}, \{\alpha_i\})$ в $U(X)$ максимальна.*
2. *Пусть X — конечное дискретное пространство с $n > 1$ точками. Тогда любая максимальная подалгебра полуполя $U(X) = \mathbb{P}^n$ имеет вид $A(\{x_i\}, \{\alpha_i\})$, а любая собственная подалгебра включена в некоторую максимальную подалгебру.*

При $n \geqslant 2$ подалгебра $\mathbb{P}^n$ порождается двумя элементами [74, теорема 4].

Класс максимальных подалгебр вида $A(\{x_i\}, \{\alpha_i\})$ может быть расширен.

Теорема 3.33 [75]. *Пусть x_0 — произвольная точка компакта X и μ — регулярная борелевская мера на X, такая что $\mu(X) = 1$ и $\mu(\{x_0\}) = 0$. Тогда множество*

$$\left\{ f \in U(X)\colon \int\limits_X \ln f \, d\mu \geqslant \ln f(x_0) \right\}$$

является максимальной подалгеброй в полуполе $U(X)$.

4. Полукольца непрерывных $[0,1]$-значных функций

4.1. Исходные понятия

Пусть $\mathbb{I} = [0,1]$ — единичный числовой отрезок со стандартной топологией, рассматриваемый с операциями $\max$ $(\vee)$, $\min$ $(\wedge)$ и умножением $\cdot$. Получаем коммутативное, редуцированное, мультипликативно сократимое, идемпотентное, компактное топологическое полукольцо $\langle \mathbb{I}, \vee, \cdot \rangle$, одновременно являющееся линейно упорядоченным полукольцом относительно естественного порядка $\leqslant$, который, в свою очередь, совпадает с отношением «делится».

Для любых элементов $a, b \in \mathbb{I}$ имеем НОД$(a, b) = a \vee b$ и НОК$(a, b) = a \wedge b$.

Через $C(X, \mathbb{I})$ обозначим полукольцо всех непрерывных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве X и принимающих значения в топологическом полукольце $\mathbb{I}$, с поточечно определёнными операциями сложения $\vee$ и умножения $\cdot$ функций.

Полукольца $C(X, \mathbb{I})$ являются важной естественной разновидностью полуколец непрерывных функций. Дополнительный интерес к классу полуколец $C(X, \mathbb{I})$ вызывает то обстоятельство, что функции $X \to \mathbb{I}$ можно интерпретировать как нечёткие подмножества пространства X, и поэтому имеется возможность применения полуколец $C(X, \mathbb{I})$ в теории нечётких множеств и топологических пространств.

Любому подмножеству A топологического пространства X в полукольце $C(X, \mathbb{I})$ соответствуют:

— идеал $O_A = \{f \in C(X, \mathbb{I})\colon A \in \mathrm{Z}^\circ(f)\}$;

— идеал $M_A = \big\{f \in C(X, \mathbb{I})\colon f(A) = \{0\}\big\}$;

— конгруэнция ρ_A: $f \; \rho_A \; g$ тогда и только тогда, когда $f = g$ на A.

В частности, каждой точке $x \in X$ отвечают:

— полупростой идеал

$$O_x = \{f \in C(X, \mathbb{I})\colon x \in \mathrm{Z}^\circ(f)\} = \bigcup \big\{ M_{\bar{U}} : U \text{ — окрестность точки } x \big\};$$

— простые идеалы $M_x = \{f \in C(X,\mathbb{I})\colon f(x) = 0\}$ и

$$N_x = \{f \in C(X,\mathbb{I})\colon f(x) \neq 1\} = \\ = \{f \in C(X,\mathbb{I})\colon f(x) < 1\} = C(X,\mathbb{I}) \setminus (1 - M_x);$$

— фильтр $E_x = 1 - O_x = \{f \in C(X,\mathbb{I})\colon x \in \mathrm{Ed}^\circ(f)\}$;

— конгруэнция $\delta_x = \bigcup\{\rho_{\bar U}\colon x \in U^\circ\}$, т. е. $f\ \delta_x\ g$ тогда и только тогда, когда $x \in \mathrm{Z}^\circ(f-g)$ для любых $f, g \in C(X,\mathbb{I})$.

При этом $O_x \subseteq M_x \subset N_x \subseteq C(X,\mathbb{I}) \setminus E_x$.

Любому подмножеству $A \subseteq \beta X$, где X — тихоновское пространство, и точке $y \in \beta X$ соответствуют:

— идеал $O^A = \big\{f \in C(X,\mathbb{I})\colon A \subseteq (\overline{\mathrm{Z}(f)}_{\beta X})^\circ\big\}$;

— $E^y = 1 - O^y$;

— идеал $M^y = \big\{f \in C(X,\mathbb{I}))\colon y \in \overline{\mathrm{Z}(f)}_{\beta X}\big\}$;

— идеал $N^y = \big\{f \in C(X,\mathbb{I}))\colon y \notin \overline{\mathrm{Ed}(f)}_{\beta X}\big\}$.

4.2. Идеалы

Важную роль в изучении свойств полуколец непрерывных функций над тихоновским пространством X играют идеалы, которые можно характеризовать в терминах свойств пространства X. Таковыми будут чистые и аннуляторные идеалы в полукольцах $C(X,\mathbb{I})$.

Чистые идеалы кольца $C(X)$ в случае произвольного тихоновского пространства X описаны в [17]. Как и для $C(X)$, в идемпотентных полукольцах $C(X,\mathbb{I})$ выполняется следующее утверждение.

Предложение 4.1 [35, предложение 6]. *Пусть X — компакт, $J \subseteq C(X,\mathbb{I})$. Тогда эквивалентны следующие условия:*

1) *J — чистый идеал;*
2) *J — мультипликативный идеал с условием, что для всех $f, g \in J$ найдётся $e \in J$, такой что $fe = f$ и $ge = g$;*
3) *$J = O_B$ для некоторого однозначно определённого замкнутого множества $B \subseteq X$.*

Отметим, что условия 1) и 2) предложения 4.1 равносильны для любого топологического пространства X. В случае тихоновского пространства X идеал J полукольца $C(X,\mathbb{I})$ будет чистым тогда и только тогда, когда $J = O^B$ для некоторого однозначно определённого замкнутого множества $B \subseteq \beta X$.

Таким образом, для тихоновского пространства X идеалы O^B по всем замкнутым множествам $B \subseteq \beta X$ — это в точности чистые идеалы полукольца $C(X,\mathbb{I})$. Поэтому максимальными среди чистых идеалов будут O^p по всем $p \in \beta X$.

Следствие 4.2 [40, следствие 2]. *Для любых компактов X и Y эквивалентны следующие условия:*

1) *полукольца* $C(X,\mathbb{I})$ *и* $C(Y,\mathbb{I})$ *изоморфны*;
2) *мультипликативные полугруппы* $C(X,\mathbb{I})$ *и* $C(Y,\mathbb{I})$ *изоморфны*;
3) *компакты* X *и* Y *гомеоморфны.*

Предложение 4.3 [37, предложение 1]. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда аннуляторные идеалы полукольца $C(X,\mathbb{I})$ совпадают с идеалами вида M_A по всем канонически замкнутым подмножествам $A \subseteq X$.*

О связи простых и максимальных чистых идеалов O_x в $C(X,\mathbb{I})$ говорит следующее предложение.

Предложение 4.4 [33, теорема 1]. *Пусть X — компакт. Тогда любой простой идеал P полукольца $C(X,\mathbb{I})$ содержит идеал O_x для однозначно определённой точки $x \in X$.*

Теорема 4.5 [40, теорема 19.1]. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда любой простой идеал P полукольца $C(X,\mathbb{I})$ обладает следующими свойствами*:

1) $O^y \subseteq P$ *для однозначно определённой точки* $y \in \beta X$;
2) $P \subseteq C(X,\mathbb{I}) \setminus E^y$ *для некоторой единственной точки* $y \in \beta X$;
3) *если* $O^y \subseteq P$, *то* $P \subseteq M^y$ *или* $N^y \subseteq P$.

Пункт 3) теоремы 4.5 говорит о том, что между простыми идеалами M^x и N^x полукольца $C(X,\mathbb{I})$ других простых идеалов нет. Кроме того, для тихоновского пространства X любой простой мультипликативный идеал в $C(X,\mathbb{I})$ содержит O^p для некоторой точки $p \in \beta X$.

Для произвольной точки x топологического пространства X на полукольце $C(X,\mathbb{I})$ зададим конгруэнцию ρ_x: для любых $f,g \in C(X,\mathbb{I})$ $f\ \rho_x\ g$, если и только если $f = g$ на некоторой окрестности точки x. В фактор-полукольце $C(X,\mathbb{I})/\rho_x$ введём отношение порядка $\preceq$: $[f]_{\rho_x} \preceq [g]_{\rho_x}$, если и только если $f \leqslant g$ на некоторой окрестности точки x.

Лемма 4.6 [33, лемма 12]. *Пусть X — компакт. Тогда для любого простого идеала P полукольца $C(X,\mathbb{I})$, содержащего O_x, если $f \in P$ и $[g] \preceq [f]$, то $g \in P$. В частности, если $f \in P$ и $[f]=[g]$, то $g \in P$.*

Таким образом, принадлежность функции f к простому идеалу P, содержащему O_x, определяется её значениями на некоторой окрестности точки x.

Идеал J полукольца $C(X,\mathbb{I})$ называется *z-идеалом*, если для любых функций $f \in J$ и $g \in C(X,\mathbb{I})$ из равенства $\mathrm{Z}(f)=\mathrm{Z}(g)$ следует, что $g \in J$.

Любой простой идеал P в полукольце $C(X,\mathbb{I})$ содержит ещё и идеал

$$O_P = \{f \in C(X,\mathbb{I})\colon fg = 0 \text{ для некоторой } g \in C(X,\mathbb{I}) \setminus P\},$$

который является z-идеалом.

Предложение 4.7 [33, предложение 5]. *Для любого простого идеала P полукольца $C(X,\mathbb{I})$ идеал O_P обладает следующими свойствами*:

1) $O_x \subseteq O_P$ *для однозначно определённой точки* $x \in X$, *такой что* $O_x \subseteq P$;

2) *O_P равен пересечению всех минимальных простых идеалов полукольца $C(X,\mathbb{I})$, его содержащих;*
3) *O_P — z-идеал.*

По пункту 3) теоремы 4.5 получаем, что для произвольного простого идеала P полукольца $C(X,\mathbb{I})$, содержащего O_x, и фиксированной точки x компакта X $P \subseteq M_x$ или $M_x \subseteq N_x \subseteq P$.

Если P — минимальный простой идеал, то $O_x \subseteq O_P = P \subseteq M_x$. Ясно, что $O_{M_x} = O_x$.

Если $P \supseteq M_x$, то $O_P \subseteq O_x$. С другой стороны, $O_x \subseteq O_P$ по пункту 2) предложения 4.7.

Если P — максимальный идеал, то $P \supseteq N_x$ и $O_P = O_x$. Очевидно, что любой минимальный простой идеал P полукольца $C(X,\mathbb{I})$, содержащий O_x, не содержит функций $f \in C(X,\mathbb{I})$, для которых $\operatorname{Ann} f \subseteq O_x$. По предложению 4.7 минимальные простые идеалы полукольца $C(X,\mathbb{I})$ являются z-идеалами.

Свойство 1) теоремы 4.4 и свойства 2), 3) предложения 4.7 верны и для полуколец $C^+(X)$.

В полукольцах $C(X,\mathbb{I})$ идеалы с фильтрами связаны более тесно, чем в произвольных полукольцах.

Предложение 4.8 [33, теорема 2, лемма 1]. *Для подмножества J полукольца $C(X,\mathbb{I})$ эквивалентны следующие утверждения:*

1) *J — простой идеал;*
2) *$C(X,\mathbb{I}) \setminus J$ — простой фильтр;*
3) *J — идеал, $C(X,\mathbb{I}) \setminus J$ — фильтр.*

Из предложения 4.8 вытекает следующая лемма.

Лемма 4.9 [33, предложения 4, 6]. *Для подмножества J полукольца $C(X,\mathbb{I})$ имеем: J — минимальный простой идеал (фильтр) тогда и только тогда, когда $C(X,\mathbb{I}) \setminus J$ — максимальный фильтр (идеал).*

В полукольцах $C(X,\mathbb{I})$ фильтрами будут в точности непустые мультипликативно замкнутые множества, с каждым своим элементом a содержащие все элементы, большие a. Для полупростых идеалов полуколец $C(X,\mathbb{I})$ справедливо следующее утверждение.

Предложение 4.10 [40, предложение 18.2, лемма 18.12]. *Любой полупростой идеал полукольца $C(X,\mathbb{I})$ с каждым своим элементом содержит все элементы, меньшие его.*

Для простого фильтра F полукольца S через E_F обозначим множество

$$E_F = \{s \in S \colon s + e = 1 \text{ для некоторого } e \in S \setminus F\}.$$

Следующий критерий минимальности фильтра аналогичен соответствующему критерию для идеалов произвольного коммутативного полукольца.

Предложение 4.11 [33, предложение 3]. *Пусть F — простой фильтр в полукольце $C(X,\mathbb{I})$. Тогда $F = E_F$ тогда и только тогда, когда F — минимальный простой фильтр.*

Дадим характеристику максимальных идеалов (фильтров) полуколец $C(X,\mathbb{I})$ для произвольного топологического пространства X.

Теорема 4.12 [33, теорема 2]. *Для любого топологического пространства X максимальные идеалы полукольца $C(X,\mathbb{I})$ — это в точности идеалы вида $C(X,\mathbb{I}) \setminus (1-P)$ по всем простым идеалам P полукольца $C(X,\mathbb{I})$, совпадающим с O_P.*

Следствие 4.13 [33, следствие 1]. *Пусть X — произвольное топологическое пространство. Тогда для подмножества F в $C(X,\mathbb{I})$ F — максимальный фильтр, тогда и только тогда, когда $1-F$ — максимальный идеал.*

Рассмотрим решётку идеалов $\operatorname{Id} C(X,\mathbb{I})$ полукольца $C(X,\mathbb{I})$. Для идеалов A и B полукольца $C(X,\mathbb{I})$ равенство $A \cdot B = 0$ равносильно равенству $A \cap B = 0$. Поэтому для любого идеала A полукольца $C(X,\mathbb{I})$ аннуляторный идеал $\operatorname{Ann} A$ наибольший среди идеалов B с условием $A \cap B = 0$, т. е. является псевдодополнением к A. Получаем, что аннуляторные идеалы полукольца $C(X,\mathbb{I})$ — это в точности псевдодополнения элементов решётки $\operatorname{Id} C(X,\mathbb{I})$.

Предложение 4.14 [34, предложение 2]. *Псевдодополнения элементов решётки $\operatorname{Id} C(X,\mathbb{I})$ совпадают с идеалами вида M_A по всем канонически замкнутым подмножествам $A \subseteq X$.*

По изоморфизму решёток идеалов полуколец $C(X,\mathbb{I})$ и $C(Y,\mathbb{I})$ над компактами X и Y можно построить гомеоморфизм $\varphi\colon X \to Y$.

Теорема 4.15 [34, теорема 1]. *Произвольные компакты X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда решётки $\operatorname{Id} C(X,\mathbb{I})$ и $\operatorname{Id} C(Y,\mathbb{I})$ изоморфны.*

Для компакта, не являющегося экстремально несвязным пространством, изоморфизм решёток идеалов не влечёт гомеоморфизма соответствующих компактов.

Дадим критерий дистрибутивности решётки $\operatorname{Id} C(X,\mathbb{I})$.

Лемма 4.16. *Топологическое пространство X является F-пространством тогда и только тогда, когда $f \leqslant g$ влечёт $f \in gC(X,\mathbb{I})$ для любых функций $f, g \in C(X,\mathbb{I})$.*

Предложение 4.17 [37, теорема 2]. *Для любого топологического пространства X эквивалентны следующие условия:*

1) *решётка $\operatorname{Id} C(X,\mathbb{I})$ модулярна*;
2) *решётка $\operatorname{Id} C(X,\mathbb{I})$ дистрибутивна*;
3) *все идеалы в $C(X,\mathbb{I})$ строгие*;
4) *X — F-пространство.*

4.3. Характеризация свойств компактов

Далее дадим характеризации ряда свойств компакта X в терминах полукольца $C(X,\mathbb{I})$.

По теореме 4.5 для тихоновского пространства X каждому простому идеалу P полукольца $C(X,\mathbb{I})$ соответствует единственная точка $y_P \in \beta X$, для которой $O^{y_P} \subseteq P$. Рассмотрим отображение $\varphi\colon \operatorname{Spec} C(X,\mathbb{I}) \to \beta X$, заданное правилом

$$\varphi(P) = y_P \text{ для любого простого идеала } P \text{ полукольца } C(X,\mathbb{I}).$$

Предложение 4.18 [40, предложение 23.1]. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда отображение $\varphi\colon \operatorname{Spec} C(X,\mathbb{I}) \to \beta X$ непрерывно.*

Теорема 4.19 [33, предложение 7]. *Для любой точки x тихоновского пространства X эквивалентны следующие утверждения:*

1) *$x \in X$ — F-точка;*
2) *идеал O_x простой;*
3) *множество $C(X,\mathbb{I}) \setminus E_x$ — идеал;*
4) *множество $C(X,\mathbb{I}) \setminus E_x$ — максимальный идеал;*
5) *$C(X,\mathbb{I})/\rho_x$ — линейно упорядоченное полукольцо относительно индуцированного порядка $\preceq$;*
6) *в $C(X,\mathbb{I})$ все простые идеалы, содержащие O_x, образуют цепь;*
7) *в $C(X,\mathbb{I})$ все простые идеалы, содержащие M_x, образуют цепь.*

Заметим, что в случае колец $C(X)$ и полуколец $C^+(X)$ утверждения 1), 2), 5), 6) также равносильны, а утверждение 7) всегда выполняется.

Теорема 4.20 [33, теорема 3]. *Для произвольного топологического пространства X эквивалентны следующие утверждения:*

1) *X — F-пространство;*
2) *все идеалы O_x, $x \in X$, простые (равносильно все идеалы O^y, $y \in \beta\tau X$, простые;*
3) *максимальные идеалы полукольца $C(X,\mathbb{I})$ имеют вид $C(X,\mathbb{I}) \setminus E^y$ по всем $y \in \beta\tau X$;*
4) *пространство $\operatorname{Max} C(X,\mathbb{I})$ хаусдорфово;*
5) *отображение φ осуществляет гомеоморфизм пространств $\operatorname{Max} C(X,\mathbb{I})$ и $\beta\tau X$;*
6) *каждый простой идеал полукольца $C(X,\mathbb{I})$ содержится в единственном максимальном идеале;*
7) *каждый простой идеал полукольца $C(X,\mathbb{I})$ содержит единственный минимальный простой идеал;*
8) *все простые идеалы полукольца $C(X,\mathbb{I})$, содержащие данный простой идеал, образуют цепь;*

9) *полукольцо* $C(X, \mathbb{I})$ *слабо риккартово*;
10) *для любой функции* $f \in C(X, \mathbb{I})$ *идеал* $\operatorname{Ann} f$ *чистый.*

В [10, теорема 1.1] получены следующие характеризации F-пространств X:

1) в полукольце $C(X, \mathbb{I})$ любые две функции имеют НОД;
2) в полукольце $C(X, \mathbb{I})$ любые две функции обладают НОК;
3) полукольцо $C(X, \mathbb{I})$ является полукольцом Безу.

Теорема 4.20 показывает существенное отличие теории идеалов в полукольцах $C(X, \mathbb{I})$ от классического случая колец $C(X)$. В кольцах $C(X)$ и полукольцах $C^{+}(X)$ простые идеалы, содержащие данный простой идеал, всегда образуют цепь [10, 129].

Предложение 4.21 [35, предложение 10]. *Для любой точки x тихоновского пространства X равносильны следующие условия*:

1) x — *P-точка*;
2) $O_x = M_x$;
3) $C(X, \mathbb{I}) \setminus E_x = N_x$;
4) N_x — *максимальный идеал.*

Таким образом, если $x \in X$ есть P-точка, то существуют ровно два простых идеала полукольца $C(X, \mathbb{I})$, содержащих O_x: M_x и N_x.

Предложение 4.22 [40, предложение 23.5]. *Для компакта X эквивалентны следующие утверждения*:

1) *идеалы N_x полукольца $C(X, \mathbb{I})$ максимальны по всем $x \in X$*;
2) *каждый максимальный идеал в $C(X, \mathbb{I})$ имеет вид N_x*;
3) *максимальные идеалы в $C(X, \mathbb{I})$ совпадают с идеалами N_x*;
4) X — *конечное пространство.*

Предложение 4.23 [40, предложение 23.6]. *Для произвольного компакта X эквивалентны следующие утверждения*:

1) *полукольцо $C(X, \mathbb{I})$ риккартово*;
2) *пространство X базисно несвязно*;
3) *полукольцо $C(X, \mathbb{I})$ слабо риккартово и* $\operatorname{Min} C(X, \mathbb{I})$ *компактно*;
4) *отображение* $\phi|_{\operatorname{Min}} C(X, \mathbb{I})$ — *гомеоморфизм.*

Предложение 4.24 [40, предложение 23.7]. *Для произвольного компакта X полукольцо $C(X, \mathbb{I})$ бэровское тогда и только тогда, когда пространство X экстремально несвязно.*

Заметим, что предложения 4.23 и 4.24 распространяют соответствующие результаты о кольцах $C(X)$ [17] на полукольца $C(X, \mathbb{I})$.

4.4. Конгруэнции

Предложению 4.14 соответствует следующее предложение.

Предложение 4.25 [34, предложение 4]. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда псевдодополнения элементов в решётке $\operatorname{Con} C(X, \mathbb{I})$ совпадают с конгруэнциями вида ρ_A по всем канонически замкнутым подмножествам $A \subseteq X$.*

Теорема 4.26 [34, теорема 2]. *Компакты X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда решётки $\operatorname{Con} C(X, \mathbb{I})$ и $\operatorname{Con} C(Y, \mathbb{I})$ изоморфны.*

Из теорем 4.15 и 4.26 вытекает следующий результат.

Следствие 4.27 [34, следствие 4]. *Для произвольных топологических пространств X и Y следующие утверждения эквивалентны:*

1) *полукольца $C(X, \mathbb{I})$ и $C(Y, \mathbb{I})$ изоморфны;*
2) *решётки $\operatorname{Id} C(X, \mathbb{I})$ и $\operatorname{Id} C(Y, \mathbb{I})$ изоморфны;*
3) *решётки $\operatorname{Con} C(X, \mathbb{I})$ и $\operatorname{Con} C(Y, \mathbb{I})$ изоморфны.*

Предложение 4.28 [40, предложение 20.2]. *Если пространство X является F-пространством, то решётка $\operatorname{Con} C(X, \mathbb{I})$ дистрибутивна.*

4.5. Гомоморфизмы

В работе [138] 1949 года описаны мультипликативные изоморфизмы $\alpha\colon C(X) \to C(Y)$ колец непрерывных функций на произвольных компактах X и Y. Рассмотрим случай мультипликативного изоморфизма

$$\alpha\colon C(X, \mathbb{I}) \to C(Y, \mathbb{I}).$$

В работе [122] 2007 года введено понятие *стандартной точки*. Точка $y \in Y$ называется *стандартной* для мультипликативного изоморфизма

$$\alpha\colon C(X, \mathbb{I}) \to C(Y, \mathbb{I}),$$

если существуют такие точка $x \in X$ и число $r \in (0, +\infty)$, что $\alpha(f)(y) = f(x)^r$ для любых $f \in C(X, \mathbb{I})$. Множество стандартных точек для α обозначается через $R(\alpha)$. Изоморфизм называется *стандартным*, если $Y = R(\alpha)$.

Аналогично определим стандартную точку для гомоморфизма

$$\alpha\colon C(X, \mathbb{I}) \to C(Y, \mathbb{I}).$$

Назовём мультипликативный гомоморфизм

$$\alpha\colon C(X, \mathbb{I}) \to C(Y, \mathbb{I})$$

стандартным, если существуют такие непрерывные отображения $\varphi\colon Y \to X$ и $r\colon Y \to (0, +\infty)$, что $\alpha(f)(y) = f\big(\varphi(y)\big)^{r(y)}$ для любых $f \in C(X, \mathbb{I})$ и $y \in Y$. Для таких стандартных гомоморфизмов введём обозначение $\alpha = \alpha[\varphi, r]$. Очевидно, стандартный гомоморфизм является полукольцевым.

Для $\alpha[\varphi, r]$ положим

$$R_1(\alpha) = \big\{y \in Y \colon f\big(\varphi(y)\big) \notin \{0,1\} \text{ и } \alpha(f)(y) \notin \{0,1\} \text{ для некоторой } f \in C(X, \mathbb{I})\big\}.$$

Теорема 4.29 [122]. *Пусть X, Y — компакты и $\alpha\colon C(X,\mathbb{I}) \to C(Y,\mathbb{I})$ — мультипликативный изоморфизм. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *существуют такие гомеоморфизм $\varphi\colon Y \to X$ и непрерывное отображение $r\colon R(\alpha) \to (0,+\infty)$, что $\alpha(f)(y) = f\big(\varphi(y)\big)^{r(y)}$ для любых $f \in C(X,\mathbb{I})$, $y \in R(\alpha)$;*
2) *r продолжается до непрерывного отображения $Y \to [0,+\infty]$, которое в точках $y \in Y \setminus R(\alpha)$ принимает значения 0, $+\infty$;*
3) *$R(\alpha) = R_1(\alpha)$ и $Y = \beta R(\alpha)$, где β — вложение $R(\alpha)$ в его стоун-чеховскую компактификацию Y.*

Следствиями теоремы 4.29 являются следующие три утверждения (см. [35]).

Предложение 4.30. *Пусть $\alpha\colon C(X,\mathbb{I}) \to C(Y,\mathbb{I})$ — мультипликативный изоморфизм. Тогда существует гомеоморфизм $\varphi\colon Y \to X$ и $\alpha = \beta \circ \alpha_1$, где*

$$\alpha_1\colon C(X,\mathbb{I}) \to C(R(\alpha),\mathbb{I}), \quad \alpha_1(f)(y) = f\big(\varphi(y)\big)^{r(y)}, \quad f \in C(X,\mathbb{I}), \quad y \in R(\alpha).$$

Предложение 4.31. *Любой мультипликативный изоморфизм*

$$\alpha\colon C(X,\mathbb{I}) \to C(Y,\mathbb{I})$$

является полукольцевым, т. е. сохраняет операцию $\vee$.

Предложение 4.32 (см. [137]). *Для компактов с первой аксиомой счётности X, Y любой мультипликативный изоморфизм $\alpha\colon C(X,\mathbb{I}) \to C(Y,\mathbb{I})$ является стандартным.*

По пункту 2) теоремы 4.29 получаем, что если подпространство $R(\alpha)$ псевдокомпактно, то $R(\alpha) = Y$. С учётом равенства $Y = \beta R(\alpha)$ получаем следующий критерий существования нестандартного изоморфизма.

Теорема 4.33 [122]. *Пусть X, Y — компакты. Тогда следущие условия эквивалентны:*

1) *существует мультипликативный изоморфизм $\alpha\colon C(X,\mathbb{I}) \to C(Y,\mathbb{I})$, не являющийся стандартным;*
2) *X и Y гомеоморфны и существует такое непсевдокомпактное подмножество $Z \subset Y$, что $Y = \beta Z$.*

Для непрерывного отображения компактов $\varphi\colon Y \to X$ через α_φ обозначим такое отображение $C(X,\mathbb{I}) \to C(Y,\mathbb{I})$, что $\alpha_\varphi(f) = f \circ \varphi$ — композиция отображений φ и f для любой функции $f \in C(X,\mathbb{I})$. Получаем, что $\alpha_\varphi = \alpha[\varphi, 1]$.

При полукольцевом эпиморфизме $\alpha\colon C(X,\mathbb{I}) \to C(Y,\mathbb{I})$ каждой точке $y \in Y$ соответствует такая точка x_y, что $\alpha(O_{x_y})(y) = 0$. Тогда для любого конечного пространства X (все точки — P-точки) полукольцевой эпиморфизм α будет стандартным.

Для полукольцевого гомоморфизма α, как легко убедиться, следующие условия $(*)$ эквивалентны:

1) найдётся такая константа $c \in C(X, \mathbb{I})$, что $0 < \alpha(c) < 1$;
2) найдётся такая функция $f \in C(X, \mathbb{I})$, что $0 < f(x) < 1$ и $0 < \alpha(f)(y) < 1$ для любых точек $x \in X$ и $y \in Y$;
3) для любой точки $y \in Y$ существует такая функция $f \in C(X, \mathbb{I})$, что $f(x) \notin \{0, 1\}$ и $\alpha(f)(y) \notin \{0, 1\}$ для всех $x \in X$.

Предложение 4.34 [35, предложение 16]. *Полукольцевой эпиморфизм $\alpha\colon C(X, \mathbb{I}) \to C(Y, \mathbb{I})$ будет стандартным тогда и только тогда, когда выполняются эквивалентные условия $(*)$. При этом если α — изоморфизм, то соответствующее отображение φ — гомеоморфизм.*

Гомоморфизм идемпотентных полуколец $C(X, \mathbb{I}) \to C(Y, \mathbb{I})$, сохраняющий функцию-константу $1/2$, назовём $1/2$-*гомоморфизмом*.

Из предложения 4.34 вытекает следующий результат.

Предложение 4.35 [35, следствие 7]. *Любой $1/2$-гомоморфизм*

$$\alpha\colon C(X, \mathbb{I}) \to C(Y, \mathbb{I})$$

имеет вид α_φ для некоторого единственного непрерывного отображения $\varphi\colon Y \to X$. Если же $Y = \{y\}$, то α — вычисление в точке $\varphi(y)$. При этом если α — изоморфизм, то φ — гомеоморфизм.

Теорема 4.36 [35, теорема 4]. *Категория идемпотентных полуколец $C(X, \mathbb{I})$ и их $1/2$-гомоморфизмами антиэквивалентна категории всех компактов и их непрерывных отображений.*

4.6. Полукольца $C(X, \mathbb{I})$ с топологией поточечной сходимости

Пусть $C_p(X, \mathbb{I})$ — полукольцо $C(X, \mathbb{I})$ с топологией поточечной сходимости. Для изучения свойств полуколец $C_p(X, \mathbb{I})$ понадобится понятие sc-функции.

Для непустого подмножества $M \subseteq \mathbb{I}^X$ обозначим через r_M точную верхнюю грань множества M в полной решётке $\mathbb{I}^X$. Функцию $\varphi \in \mathbb{I}^X$ назовём *sc-функцией*, если $\varphi = r_M$ для подходящего непустого подмножества $M \subseteq C(X, \mathbb{I})$.

Заметим, что подмножество M в определении sc-функции можно считать идеалом, поскольку $\sup M = \sup J$ для идеала J, порождённого множеством M.

Согласно результатам Бурбаки (см. [4, теорема 4] и [5, предложение 5]) sc-функции на произвольном тихоновском пространстве X — это в точности полунепрерывные снизу $[0, 1]$-значные функции на X.

Множество всех sc-функций на X обозначим через $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$. Имеют место включения $C(X, \mathbb{I}) \subseteq \mathrm{SC}(X, \mathbb{I}) \subseteq \mathbb{I}^X$. Относительно поточечного порядка $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$ является ограниченной дистрибутивной решёткой — подрешёткой в $\mathbb{I}^X$, не являющейся, вообще говоря, полной подрешёткой в $\mathbb{I}^X$. Множество $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$ содержит точную верхнюю грань в $\mathbb{I}^X$ любого непустого множества своих элементов, но не обязано содержать их точную нижнюю грань.

Положим

$$\varphi_A(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \in A, \\ 1, & \text{если } y \in X \setminus A, \end{cases}$$

для произвольного подмножества A топологического пространства X, т. е. функция $\varphi_A = \chi_{(X \setminus A)}$ является характеристической функцией множества $X \setminus A \subseteq X$.

Если множество A не замкнуто в топологическом пространстве X, то функция φ_A не является sc-функцией. Легко убедиться, что тихоновость T_1-пространства X равносильна тому, что для любого замкнутого подмножества $A \subseteq X$ функция φ_A является sc-функцией. Кроме того, для любого замкнутого подмножества A тихоновского пространства X $\varphi_A = \inf\limits_{x \in A} \varphi_x$ $(\varphi_x = \varphi_{\{x\}})$ в $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$.

Любой функции $\varphi \in \mathbb{I}^X$ соответствует множество

$$J(\varphi) = \{f \in C(X, \mathbb{I}) \colon f \leqslant \varphi\},$$

являющееся замкнутым идеалом в $C_p(X, \mathbb{I})$.

Предложение 4.37 [36, свойство 2]. *Функция $\varphi \in \mathbb{I}^X$ является sc-функцией тогда и только тогда, когда $\varphi = r_{J(\varphi)}$.*

Предложение 4.38 [36, свойство 5]. *Для произвольных функций $f, g \in C(X, \mathbb{I})$ имеем, что $J(f) \vee J(g) = J(f \vee g)$ и $J(f) \cap J(g) = J(f \wedge g)$.*

Предложение 4.39 [36, предложение 1]. *Для любого топологического пространства X множество $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$ является полукольцом относительно операций $\vee$ и $\cdot$, подрешёткой в $\mathbb{I}^X$ и полной решёткой относительно поточечного порядка $\leqslant$.*

Пусть X — тихоновское пространство. Идемпотентами в полукольце $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$ будут функции $\varphi = \varphi_A$ по всевозможным замкнутым множествам $A \subseteq X$. Обозначим через $O(X)$ множество всех идемпотентов в полукольце $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$. Тогда $O(X)$ — подполукольцо в $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$. Относительно поточечного порядка $O(X)$ — полная дистрибутивная решётка. Дополняемые идемпотенты образуют булеву алгебру в решётке $O(X)$, изоморфную решётке всех открытых множеств в X.

Функция $\varphi \in \mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$ называется *цепной*, если множество

$$\{\psi \in \mathrm{SC}(X, \mathbb{I}) \colon \varphi \leqslant \psi\}$$

является цепью в решётке $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$.

Легко убедиться, что имеет место следующее утверждение.

Предложение 4.40 [38, предложение 7]. *Для любых тихоновского пространства X и функции $\varphi \in \mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$ равносильны следующие условия:*

1) *φ — коатом решётки $O(X)$;*
2) *φ — минимальная цепная функция в решётке $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$;*
3) *$\varphi = \varphi_x$ для некоторой точки $x \in X$.*

Предложение 4.41 [40, предложение 24.3]. *Для всякого тихоновского пространства X и любой функции $\varphi \in \mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$ эквивалентны следующие утверждения:*

1) $\varphi = \varphi_A$ *для некоторого открыто-замкнутого множества* $A \subseteq X$;
2) φ — *дополняемый идемпотент в полукольце* $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$.

Дополняемые идемпотенты образуют булеву алгебру в решётке $O(X)$, изоморфную решётке всех открыто-замкнутых множеств в X. Коатомами решётки $O(X)$ будут в точности функции φ_x, $x \in X$. Для тихоновского пространства X минимальные цепные функции совпадают с функциями φ_x, $x \in X$. Заметим, что идеалы N_x, $x \in X$, будут максимальными идеалами полукольца $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$. Для любой точки x тихоновского пространства X получаем главный идеал $M_x = \varphi_x \, \mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$.

Идеал J полукольца $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$, содержащий вместе с любым своим подмножеством его точную верхнюю грань r_J, называется *полным*.

Предложение 4.42 [40, предложение 24.4]. *Для всякого тихоновского пространства X полные простые идеалы в полукольце $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$ — это в точности идеалы M_x по всем точкам $x \in X$.*

Следствие 4.43 [40, следствие 24.1]. *Для всякого тихоновского пространства X полные полупростые идеалы в полукольце $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$ — это в точности M_A по всем замкнутым множествам $A \subseteq X$.*

Гомоморфизм $\alpha\colon \mathrm{SC}(X, \mathbb{I}) \to \mathrm{SC}(Y, \mathbb{I})$ полуколец назовём *полным*, если он сохраняет все точные верхние грани и все функции-константы.

Для непрерывного отображения тихоновских пространств $\psi\colon Y \to X$ зададим отображение $\alpha_\psi\colon \mathrm{SC}(X, \mathbb{I}) \to \mathrm{SC}(Y, \mathbb{I})$ по правилу

$$\alpha_\psi(f)(y) = f\big(\psi(y)\big) \text{ для любых функции } f \in \mathrm{SC}(X, \mathbb{I}) \text{ и точки } y \in Y.$$

Предложение 4.44 [40, предложение 24.5]. *Для любых тихоновских пространств X и Y всякий полный гомоморфизм $\alpha\colon \mathrm{SC}(X, \mathbb{I}) \to \mathrm{SC}(Y, \mathbb{I})$ имеет вид $\alpha = \alpha_\psi$ для некоторого единственного непрерывного отображения $\psi\colon Y \to X$.*

Теорема 4.45 [40, предложение 24.1]. *Категория всех полуколец $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$ и их полных гомоморфизмов антиэквивалентна (двойственна) категории всех тихоновских пространств и их непрерывных отображений.*

Таким образом, всякое тихоновское пространство X определяется однозначно с точностью до гомеоморфизма полукольцом $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$.

В предложении 4.44 полный гомоморфизм α отображает подполукольцо идемпотентов $O(X)$ в подполукольцо идемпотентов $O(Y)$, причём $\alpha(0) = 0$ и $\alpha(1) = 1$. Соответствующее ограничение $\gamma\colon O(X) \to O(Y)$ тоже будет полным гомоморфизмом. Как легко убедиться, любой полный гомоморфизм $\gamma\colon O(X) \to O(Y)$ для T_1-пространств X и Y индуцируется однозначно определённым непрерывным отображением $\psi\colon Y \to X$, т. е. $\gamma = \gamma_\psi$. Это даёт двойственность между категорией всех T_1-пространств X с непрерывными отображениями в качестве морфизмов и категорией всевозможных топологий (решёток открытых множеств) на пространствах X с их полными гомоморфизмами.

Предложение 4.46 [34, лемма 11]. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда для любых замкнутого идеала J в топологическом полукольце $C_p(X,\mathbb{I})$ и точки $x \in X$ имеем*

$$\pi_x(J) = \overline{\pi_x(J)}.$$

Следствие 4.47 [38, следствие 1]. *Для тихоновского пространства X и замкнутого идеала J полукольца $C_p(X,\mathbb{I})$*

$$J = \bigcap_{x\in X} \pi_x^{-1}\big(\pi_x(J)\big).$$

Получаем, что значение произвольной sc-функции $\varphi\colon X \to \mathbb{I}$ в каждой точке $x \in X$ равно $\max\{f(x)\colon \varphi \geqslant f \in C(X,\mathbb{I})\}$.

Теорема 4.48 [38, теорема 1]. *Для всякого тихоновского пространства X и любого идеала J полукольца $C(X,\mathbb{I})$ эквивалентны следующие утверждения*:

1) *идеал J замкнутый*;
2) *$J = J(\varphi)$ для некоторой функции $\varphi \in \mathbb{I}^X$*;
3) *$J = J(\varphi)$ для единственной sc-функции $\varphi \in \mathbb{I}^X$*;
4) *$J = J(r_J)$.*

Получаем, что для произвольного тихоновского пространства X отображения $r_{(\cdot)}$ и $J(\cdot)$ устанавливают изоморфизм между решёткой $\mathrm{Id}\, C_p(X,\mathbb{I})$ всех замкнутых идеалов J полукольца $C(X,\mathbb{I})$ и решёткой $\mathrm{SC}(X,\mathbb{I})$ по правилу $r_{J(\varphi)} = \varphi$ и $J(r_J) = J$.

Предложение 4.49 [38, предложение 3]. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда замкнутые простые идеалы в топологическом полукольце $C_p(X,\mathbb{I})$ — это в точности идеалы M_x, $x \in X$.*

Поскольку замыкание любого простого идеала в $C_p(X,\mathbb{I})$ — простой идеал или $C(X,\mathbb{I})$, из предложения 4.49 получаем, что для тихоновского пространства X замыканием всякого простого идеала в $C_p(X,\mathbb{I})$ будет M_x или $C(X,\mathbb{I})$.

Так как в любом коммутативном полукольце полупростые идеалы совпадают с пересечениями простых идеалов, их содержащих, то верно следующее утверждение.

Следствие 4.50 [38, следствие 5]. *Пусть X — тихоновское пространство. Тогда замкнутые полупростые идеалы в топологическом полукольце $C_p(X,\mathbb{I})$ — это в точности множества M_A по всем замкнутым множествам A в X.*

Для описания замкнутых фильтров в топологическом полукольце $C_p(X,\mathbb{I})$ можно ввести понятие ic-функций, двойственное понятию sc-функции. Для любого непустого подмножества J множества $C(X,\mathbb{I})$ назовём функции вида $\varphi = \inf J$ в $\mathbb{I}^X$ *ic-функциями*. Замкнутыми фильтрами тогда будут в точности множества $F(\varphi) = \{f \in C(X,\mathbb{I})\colon f \geqslant \varphi\}$ по всем замкнутым подмножествам

$A \subseteq X$ и ic-функциям вида $\varphi = 1 - \varphi_A$. Отметим также, что для подмножества A тихоновского пространства X φ_A — ic-функция тогда и только тогда, когда A открыто.

Проведённые рассуждения можно перенести на случай топологической решётки $C_p(X, \mathbb{I})$ над произвольным тихоновским пространством X.

Отметим, что в топологической решётке $C_p(X, \mathbb{I})$ все идеалы выпуклые. При этом все главные идеалы в ней замкнутые (см. [34]). В топологической решётке $C_p(X, \mathbb{I})$ замкнутыми фильтрами будут в точности множества $F(\varphi) = \{f \in C(X, \mathbb{I})\colon f \geqslant \varphi\}$ по всем ic-функциям φ.

Для тихоновского пространства X решётка $\operatorname{Id} C_p(X, \mathbb{I})$ не обязана быть подрешёткой решётки $\operatorname{Id} C(X, \mathbb{I})$ всех идеалов (аналогично для конгруэнций). Необходимым условием является нормальность тихоновского пространства X.

Можно дать характеризации некоторых свойств топологических пространств X в терминах замкнутых идеалов полуколец $C_p(X, \mathbb{I})$.

Предложение 4.51 [38, предложение 9]. *Произвольное топологическое пространство X является F-пространством тогда и только тогда, когда все главные идеалы полукольца $C(X, \mathbb{I})$ замкнуты.*

Предложение 4.52 [38, предложение 10]. *Для всякого тихоновского пространства X равносильны следующие условия*:

1) X — *дискретное пространство*;
2) *все sc-функции на X непрерывные, т. е.* $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I}) = C(X, \mathbb{I})$;
3) *все замкнутые идеалы полукольца $C(X, \mathbb{I})$ являются главными идеалами в $C(X, \mathbb{I})$.*

Конгруэнция ρ на полукольце $C(X, \mathbb{I})$ называется *замкнутой*, если множество

$$\{(f, g)\colon f, g \in C(X, \mathbb{I}),\ f \ \rho\ g\}$$

замкнуто в тихоновском квадрате $C_p(X, \mathbb{I}) \times C_p(X, \mathbb{I})$. Примером замкнутой конгруэнции служит конгруэнция ρ_A по любому замкнутому подмножеству $A \subseteq X$.

Охарактеризуем далее замкнутые конгруэнции на топологических полукольцах $C_p(X, \mathbb{I})$.

Для произвольной функции $\varphi \in \mathbb{I}^X$ зададим бинарное отношение $\rho(\varphi)$ на полукольце $C(X, \mathbb{I})$ следующим образом: для любых функций $g, h \in C(X, \mathbb{I})$

$$g \ \rho(\varphi)\ h \text{ тогда и только тогда,}$$
$$\text{когда для всех } x \in X \text{ из } g(x) \neq h(x) \text{ следует } (g \vee h)(x) \leqslant \varphi(x).$$

Иными словами, две функции $g, h \in C(X, \mathbb{I})$ находятся в отношении $\rho(\varphi)$ тогда и только тогда, когда они обе не превосходят значения функции φ на коноль-множестве $\operatorname{coz}(g - h)$.

Предложение 4.53 [38, предложение 5]. *Для любой функции φ в $\mathbb{I}^X$ отношение $\rho(\varphi)$ является замкнутой конгруэнцией на полукольце $C(X, \mathbb{I})$.*

Предложение 4.54 [38, предложение 6]. *Пусть ρ — конгруэнция на полукольце $C(X, \mathbb{I})$, все классы которой замкнуты. Тогда $\rho = \rho(\varphi)$ для sc-функции $\varphi = \varphi_\rho$.*

Получаем, что любая конгруэнция ρ на полукольце $C_p(X, \mathbb{I})$, все классы которой замкнуты, определяет единственную sc-функцию $\varphi_\rho = r_{[0]_\rho}$, а любая sc-функция φ задаёт замкнутую конгруэнцию $\rho(\varphi)$ с классом нуля $[0]_\rho = J(\varphi)$.

Теорема 4.55 [38, теорема 2]. *Для любой конгруэнции ρ на полукольце $C(X, \mathbb{I})$ эквивалентны следующие утверждения*:

1) *ρ — замкнутая конгруэнция*;
2) *все классы конгруэнции ρ замкнуты в $C_p(X, \mathbb{I})$*;
3) $\rho = \rho(r_{[\mathbf{0}]_\rho})$;
4) *$\rho = \rho(\varphi)$ для некоторой функции $\varphi \in \mathbb{I}^X$.*

Обозначим через $\operatorname{Con} C_p(X, \mathbb{I})$ решётку всех замкнутых конгруэнций на топологическом полукольце $C_p(X, \mathbb{I})$. Из теорем 4.48 и 4.55 получаем, что для всякого тихоновского пространства X решётка $\operatorname{Id} C_p(X, \mathbb{I})$, решётка $\operatorname{Con} C_p(X, \mathbb{I})$ и решётка $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$ попарно изоморфны.

Теорема 4.56 [38, теорема 3]. *Для произвольных тихоновских пространств X и Y эквивалентны следующие утверждения*:

1) *X и Y гомеоморфны*;
2) *топологические полукольца $C_p(X, \mathbb{I})$ и $C_p(Y, \mathbb{I})$ изоморфны*;
3) *решётки $\operatorname{Id} C_p(X, \mathbb{I})$ и $\operatorname{Id} C_p(Y, \mathbb{I})$ изоморфны*;
4) *решётки $\operatorname{Con} C_p(X, \mathbb{I})$ и $\operatorname{Con} C_p(Y, \mathbb{I})$ изоморфны*;
5) *полукольца $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$ и $\mathrm{SC}(Y, \mathbb{I})$ изоморфны*;
6) *решётки $\mathrm{SC}(X, \mathbb{I})$ и $\mathrm{SC}(Y, \mathbb{I})$ изоморфны.*

Для непрерывного отображения тихоновских пространств $\psi\colon Y \to X$ зададим отображение $\alpha_\psi\colon C_p(X, \mathbb{I}) \to C_p(Y, \mathbb{I})$ по правилу

$$\alpha_\psi(f)(y) = f\bigl(\psi(y)\bigr) \text{ для любых функции } f \in C_p(X, \mathbb{I}) \text{ и точки } y \in Y.$$

Предложение 4.57 [38, предложение 8]. *Для любых тихоновских пространств X и Y всякий непрерывный гомоморфизм $\alpha\colon C_p(X, \mathbb{I}) \to C_p(Y, \mathbb{I})$, сохраняющий константы, имеет вид $\alpha = \alpha_\psi$ для некоторого единственного непрерывного отображения $\psi\colon Y \to X$.*

Теорема 4.58 [38, теорема 4]. *Категория всех топологических полуколец $C_p(X, \mathbb{I})$ и их непрерывных гомоморфизмов, сохраняющих константы, антиэквивалентна (двойственна) категории всех тихоновских пространств X и их непрерывных отображений.*

Замечание 4.59. Отметим, что множество $C(X, \mathbb{I})$ может рассматриваться не только как идемпотентное полукольцо с операциями $\vee$ и $\cdot$, но и как *частичное полукольцо* (на нём введены частичные, т. е. не всюду определённые, операции) с операциями $+$ и $\cdot$ или как ограниченная дистрибутивная решётка с операциями $\vee$ и $\wedge$.

Идемпотентные полукольца $C(X, \mathbb{I})$ принципиально отличаются от полуколец $C^+(X)$. По свойствам к идемпотентным полукольцам $C(X, \mathbb{I})$ близки решётки $C(X, \mathbb{I})$. Частичные же полукольца $C(X, \mathbb{I})$ во многом схожи с полукольцами $C^+(X)$.

Заметим, что если вместо $\mathbb{I}$ взять отрезок $[-1, 1]$ с операцией умножения и частичной операцией сложения, то получим частичное кольцо $C(X, E)$, похожее по своим свойствам на кольцо $C(X)$.

Дадим описание максимальных идеалов в решётках и частичных полукольцах $C(X, \mathbb{I})$.

В частичных кольцах $C(X, E)$ и полукольцах $C(X, \mathbb{I})$, как в кольцах $C(X)$ и в полукольцах $C^+(X)$, максимальными идеалами являются в точности идеалы M_x для различных точек x компакта X.

Гомоморфизмы частичных полуколец $C(X, \mathbb{I})$ описаны в [35, предложение 23]: любой ненулевой гомоморфизм $\alpha\colon C(X, \mathbb{I}) \to C(Y, \mathbb{I})$ частичных полуколец имеет вид α_φ для некоторого единственного непрерывного отображения $\varphi\colon Y \to X$. Если α — изоморфизм, то φ будет гомеоморфизмом. Тогда категория частичных полуколец $C(X, \mathbb{I})$ и их гомоморфизмов двойственна категории всех компактов X и их непрерывных отображений.

Любой гомоморфизм частичных колец $\alpha\colon C(X, E) \to C(Y, E)$, $\alpha(1) = 1$, имеет вид α_φ для некоторого единственного непрерывного отображения $\varphi\colon Y \to X$. Если α — изоморфизм, то φ — гомеоморфизм [66, предложение 1]. Получаем, что категория частичных колец $C(X, E)$ и их гомоморфизмов, сохраняющих 1, двойственна категории всех компактов X и их непрерывных отображений.

Пусть X — произвольное топологическое пространство. Подмножество P решётки $C(X, \mathbb{I})$ — (простой) идеал тогда и только тогда, когда $1 - P$ — (простой) фильтр; P — минимальный простой идеал тогда и только тогда, когда $1 - P$ — минимальный простой фильтр. Максимальные идеалы решётки $C(X, \mathbb{I})$ — это в точности идеалы вида $C(X, \mathbb{I}) \setminus (1 - P)$ по всем простым идеалам P, совпадающим с O_P.

5. Полукольца непрерывных $(0, \infty]$-значных функций

5.1. Исходные понятия

Изучение полуколец $C^\infty(X)$ начато в 2015 г. [59, 110, 111]. Полная версия результатов этого раздела будет опубликована в одном из выпусков журнала «Фундаментальная и прикладная математика».

Множество $(0, \infty]$ получается объединением полуполя всех положительных действительных чисел и $\{\infty\}$. Операции сложения и умножения чисел в нём обычные, причём все $a \in (0, \infty)$ обратимы. Результатом сложения и умножения с ∞ является сам элемент ∞. Как алгебраический объект $(0,\infty]$ является коммутативным полукольцом с единицей 1 и поглощающим элементом ∞. На $(0,\infty]$ рассматривается естественная топология (интервальная). Операции сложения $+$ и умножения $\cdot$ непрерывны, поэтому полукольцо $(0,\infty]$ является топологическим полукольцом.

Полукольцо всех непрерывных функций на произвольном топологическом пространстве X со значениями в топологическом полукольце $(0,\infty]$ с поточечными операциями сложения и умножения функций обозначается через $C^{\infty}(X) = C(X,(0,\infty])$.

Для каждой функции $f \in C^{\infty}(X)$ определены Н-*множество*

$$\mathrm{H}(f)c = f^{-1}(\infty)$$

и функция $f^* \in C^{+}(X)$:

$$f^* = \begin{cases} \frac{1}{f} & \text{на } \operatorname{coz} f = X \setminus \mathrm{H}(f), \\ f^* = 0 & \text{на } \mathrm{H}(f). \end{cases}$$

Имеем

$$\mathrm{H}(f) = \mathrm{Z}(f^*), \quad \operatorname{coz}(f) = \operatorname{coz}(f^*) = X \setminus \mathrm{Z}(f^*).$$

Относительно одной операции объединения $\cup$ множество $\mathrm{H}(X)$ всех Н-множеств на пространстве X будет идемпотентным монополукольцом, изоморфным полукольцу $\langle \mathrm{Z}(X), \cup, \cup \rangle$ всех нуль-множеств на X.

Относительно поточечного порядка $\leqslant$ множество $C^{\infty}(X)$ является дистрибутивной решёткой с наибольшим элементом функцией-константой ∞, но без наименьшего элемента. При этом $f \wedge g = \inf(f,g)$ и $f \vee g = \sup(f,g)$.

5.2. Идеалы

Множество $\operatorname{Id} C^{\infty}(X)$ всевозможных идеалов полукольца $C^{\infty}(X)$ относительно включения образует полную решётку. Для любых $I, J \in \operatorname{Id} C^{\infty}(X)$

$$\inf(I,J) = I \cap J, \quad \sup(I,J) = I \vee J = I \cup J \cup (I+J).$$

Важную роль в теории полуколец $C^{\infty}(X)$ играют Н-идеалы. Идеал I полукольца $C^{\infty}(X)$ называется Н-*идеалом*, если из $\mathrm{H}(f) = \mathrm{H}(g)$ следует, что $g \in I$ для любых $f \in I$ и $g \in C^{\infty}(X)$.

Заметим, что Н-идеалы в полукольце $C^{\infty}(X)$ являются биидеалами. Биидеалы образуют в решётке $\operatorname{Id} C^{\infty}(X)$ подрешётку, причём для любых биидеалов I и J имеем $\sup(I,J) = I \cup J$. Поэтому решётка всех биидеалов полуколец $C^{\infty}(X)$ дистрибутивна. Эта решётка содержит, в свою очередь, подрешётку всех Н-идеалов.

Для любого пространства X числовые функции из полукольца $C^{\infty}(X)$ составляют полуполе $U(X)$ всех его обратимых элементов. Оставшееся подмножество функций

$$M = \{f \in C^{\infty}(X) \colon \mathrm{H}(f) \neq \varnothing\}$$

является наибольшим собственным идеалом в полукольце $C^\infty(X)$. Идеал M простой.

Решётка T называется *ретрактом* решётки L, если существуют такие решёточный мономорфизм $\alpha\colon T \to L$ и решёточный эпиморфизм $\gamma\colon L \to T$, что $\gamma \circ \alpha = 1_T$.

Предложение 5.1. *Решётка* H-*идеалов полукольца* $C^\infty(X)$ *является ретрактом решётки* $\operatorname{Id} C^\infty(X)$.

В полукольце $C^\infty(X)$ нет собственных полустрогих идеалов, значит, нет и собственных строгих идеалов. Каждый идеал содержит функцию $\infty = 1 + \infty$, но функция 1 не принадлежит ни одному собственному идеалу.

5.3. Конгруэнции

На полукольце $C^\infty(X)$ зададим конгруэнцию $\sim_{\mathrm{H}}$: для любых $f, g \in C^\infty(X)$

$$f \sim_{\mathrm{H}} g \text{ тогда и только тогда, когда } \mathrm{H}(f) = \mathrm{H}(g).$$

Фактор-полукольцо $C^\infty(X)/{\sim_{\mathrm{H}}}$ изоморфно идемпотентному монополукольцу $H(X)$ всевозможных H-множеств (нуль-множеств) на X с одной операцией объединения $\cup$. Кроме того, $[1]_{\sim_{\mathrm{H}}} = U(X)$ и $[\infty]_{\sim_{\mathrm{H}}} = \{\infty\}$.

Конгруэнция на полукольце $C^\infty(X)$ называется H-*конгруэнцией*, если она содержит конгруэнцию $\sim_{\mathrm{H}}$. H-конгруэнции на $C^\infty(X)$ образуют подрешётку решётки $\operatorname{Con} C^\infty(X)$. Легко убедиться, что решётка H-конгруэнций полукольца $C^\infty(X)$ канонически изоморфна решётке конгруэнций монополукольца $C^\infty(X)/\sim_{\mathrm{H}}$. В свою очередь, монополукольцо $C^\infty(X)/{\sim_{\mathrm{H}}}$ изоморфно полукольцу $\langle H(X), \cup, \cup \rangle$ всех H-множеств на X. Заметим, что отношение равенства на полукольце $C^\infty(X)$ и рисовская конгруэнция на полукольце $C^\infty(X)$ по биидеалу M не являются H-конгруэнциями.

Каждому простому H-идеалу I полукольца $C^\infty(X)$ соответствует двухклассовая конгруэнция ρ_I, классами которой служат I и $C^\infty(X) \setminus I$, а произвольному биидеалу J в $C^\infty(X)$ отвечает рисовская конгруэнция ρ^J.

Предложение 5.2. *Произвольная* H-*конгруэнция* ρ *на полукольце* $C^\infty(X)$ *максимальна тогда и только тогда, когда* $\rho = \rho_I$ *для некоторого простого* H-*идеала* I *в* $C^\infty(X)$.

Предложение 5.3. *Всякая собственная* H-*конгруэнция на полукольце* $C^\infty(X)$ *является пересечением максимальных конгруэнций, её содержащих.*

Теорема 5.4. *Решётка* $\operatorname{Con} C^\infty(X)$ *конгруэнций на полукольце* $C^\infty(X)$ *над тихоновским пространством* X *не являются модулярной при* $|X| \geqslant 2$.

5.4. Делимость

Рассмотрим отображение

$$*\colon C^\infty(X) \to C^+(X), \quad *f \mapsto f^* \text{ для всех } f \in C^\infty(X).$$

Для любых $f, g \in C^\infty(X)$

$$(fg)^* = f^*g^*, \quad f \leqslant g \text{ тогда и только тогда, когда } g^* \leqslant f^*.$$

Соответствие $*$ является изоморфизмом мультипликативной полугруппы полукольца $C^\infty(X)$ на мультипликативную полугруппу полукольца $C^+(X)$. Поэтому полукольца $C^\infty(X)$ и $C^+(X)$ обладают одинаковыми мультипликативными свойствами, в частности, имеют одну и ту же теорию делимости, выраженную на мультипликативном языке. Кроме того, этот изоморфизм является антиизоморфизмом решётки $\langle C^\infty(X), \leqslant\rangle$ на решётку $\langle C^+(X), \leqslant\rangle$, т. е. служит изоморфизмом аддитивно идемпотентного полукольца $\langle C^\infty(X), \wedge, \cdot\rangle$ на аддитивно идемпотентное полукольцо $\langle C^+(X), \vee, \cdot\rangle$, которое изучалось ранее [45]. Также имеем изоморфизм аддитивно идемпотентных полуколец $\langle C^\infty(X), \vee, \cdot\rangle$ и $\langle C^+(X), \wedge, \cdot\rangle$.

Предложение 5.5. *Функции f и g полукольца $C^+(X)$ или полукольца $C^\infty(X)$ ассоциированы тогда и только тогда, когда $f = gu$ для некоторой функции $u \in U(X)$.*

Данное утверждение неверно для колец $C(X)$ [127, пример 5.6]. По сравнению с кольцами $C(X)$ и полукольцами $C^+(X)$ делимость в полукольцах $C^\infty(X)$ имеет свою специфику.

5.5. Двойственность

В терминах полуколец функций $C^\infty(X)$ устанавливается двойственность для категории всевозможных хьюиттовских пространств X и их непрерывных отображений φ.

Пусть X и Y — произвольные топологические пространства.

Отношение поточечного порядка $\leqslant$ на $C^\infty(X)$ является согласованным с операциями полукольца $C^\infty(X)$. В результате получаем решёточно упорядоченное полукольцо $\langle C^\infty(X), +, \cdot, \leqslant\rangle$.

Рассмотрим произвольный (полукольцевой) гомоморфизм

$$\alpha\colon C^\infty(X) \to C^\infty(Y),$$

сохраняющий 1. Ограничение α на множество $U(X)$ является гомоморфизмом полуполя $U(X)$ в полуполе $U(Y)$, которое обозначим через α_u. Гомоморфизм α_u продолжается (единственным образом) до гомоморфизма $\alpha_r\colon C(X) \to C(Y)$ колец разностей аддитивно сократимых полуполей $U(X)$ и $U(Y)$, задаваемого равенством

$$\alpha_r(u - v) = \alpha_u(u) - \alpha_u(v) \text{ для любых } u, v \in U(X).$$

Кольцевой гомоморфизм α_r сохраняет функции-константы и является гомоморфизмом решётки $\langle C(X), \leqslant\rangle$ в решётку $\langle C(Y), \leqslant\rangle$ [129, предложение 10.6]. Исходный гомоморфизм α также сохраняет константы и порядок $\leqslant$.

Каждое непрерывное отображение $\varphi\colon Y \to X$ индуцирует гомоморфизм

$$\bar{\varphi}\colon C^\infty(X) \to C^\infty(Y), \quad \bar{\varphi}(f) = f \circ \varphi \text{ для всех } f \in C^\infty(X).$$

Гомоморфизм $\bar{\varphi}$ сохраняет константы (в частности, $\bar{\varphi}(1) = 1$) и сохраняет точные верхние и нижние грани непустых подмножеств функций в случае их существования.

Действительно, очевидно, что $\bar{\varphi}$ сохраняет константы. Пусть A — непустое подмножество в $C^\infty(X)$ и $f = \sup A \in C^\infty(X)$. Ясно, что

$$f(x) = \sup\{g(x)\colon g \in A\}$$

в любой точке $x \in X$. Поэтому

$$\bar{\varphi}(f)(y) = f\bigl(\varphi(y)\bigr) = \sup\{(g)\varphi(y)\colon g \in A\} = \sup\{\bar{\varphi}(g)(y)\colon g \in A\}$$

для любой точки $y \in Y$. Аналогичные рассуждения справедливы для $\inf$.

Гомоморфизм $\alpha\colon C^\infty(X) \to C^\infty(Y)$ называется supc-*гомоморфизмом*, если $\alpha(1) = 1$ и α сохраняет существующие точные верхние грани любых счётных семейств $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n \in C^\infty(X)$:

$$\alpha\Bigl(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\Bigr) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha(f_n).$$

Заметим, что всякий изоморфизм α полуколец $C^\infty(X)$ и $C^\infty(Y)$ сохраняет 1 и сохраняет точные верхние и нижние грани непустых множеств функций (если они имеют sup и inf соответственно), поскольку является порядковым изоморфизмом упорядоченных множеств $C^\infty(X)$ и $C^\infty(Y)$ с поточечным порядком $\leqslant$. Значит, α — supc-изоморфизм.

Пусть π_x — гомоморфизм вычисления в точке. Тогда $\pi_x = \bar{\varphi}$ при отображении $\varphi\colon \{y\} \to X$ и $x = \varphi(y)$.

Заметим, что не всякий гомоморфизм $C^\infty(X) \to C^\infty(Y)$, сохраняющий 1, будет supc-гомоморфизмом.

Пример 5.6. Возьмём отображение $\alpha\colon C^\infty((0,\infty]) \to C^\infty(y) \equiv (0,\infty]$, совпадающее с вычислением π_1 на полуполе $U\bigl((0,\infty]\bigr)$ и равное ∞ на идеале

$$M = \bigl\{f \in C^\infty\bigl((0,\infty]\bigr)\colon \mathrm{H}(f) \neq \varnothing\bigr\}$$

необратимых элементов полукольца $C^\infty\bigl((0,\infty]\bigr)$. Ясно, что α — гомоморфизм, сохраняющий 1, и $\alpha(g \vee h) = \alpha(g) \vee \alpha(h)$ для всех $g, h \in C^\infty(X)$. Но α не является supc-гомоморфизмом (достаточно рассмотреть тождественную функцию f на $(0,\infty]$ и последовательность функций $f_n = f \wedge n \in U\bigl((0,\infty]\bigr)$ по всем натуральным числам n). Тогда

$$f = \sup f_n, \quad \alpha(f_n) = \pi_1(f_n) = f_n(1) = 1, \quad \sup \alpha(f_n) = 1,$$

но $\alpha(f) = \infty$. Кроме того, α не является $\wedge$-гомоморфизмом, поскольку $\alpha(f \wedge g) \neq \infty = \alpha(f) \wedge \alpha(g)$ для указанной функции f и функции $g \in C^\infty(X)$:

$$g = \frac{1}{|f-1|} + 1 \text{ на } \operatorname{coz} f \setminus \{1\}, \quad g(1) = \infty, \quad g(\infty) = 1.$$

Предложение 5.7. *Для любых хьюиттовского пространства X и топологического пространства Y всякий* supc-*гомоморфизм $\alpha\colon C^\infty(X) \to C^\infty(Y)$ индуцируется однозначно определённым непрерывным отображением $\varphi\colon Y \to X$, т. е. $\alpha = \bar{\varphi}$.*

Теорема 5.8. *Категория всех полуколец $C^\infty(X)$ с* supc-*гомоморфизмами в качестве морфизмов антиэквивалентна категории всех хьюиттовских пространств и их непрерывных отображений.*

Теорема 5.9. *Для любых хьюиттовских пространств X и Y всякий изоморфизм полуколец $C^\infty(X)$ и $C^\infty(Y)$ индуцируется гомеоморфизмом Y и X.*

Следствие 5.10. *Каждое хьюиттовское пространство X определяется однозначно с точностью до гомеоморфизма своим полукольцом $C^\infty(X)$.*

Теорема 5.11. *Произвольные хьюиттовские пространства X и Y гомеоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны решётки $\operatorname{Id} C^\infty(X)$ и $\operatorname{Id} C^\infty(Y)$.*

Суммируя сказанное, получаем следующую теорему определяемости полуколец $C^\infty(X)$ ассоциированными с ними алгебраическими системами.

Теорема 5.12. *Для любых топологических пространств X и Y эквивалентны следующие утверждения:*

1) *полукольца $C^\infty(X)$ и $C^\infty(Y)$ изоморфны;*
2) *мультипликативные полугруппы $C^\infty(X)$ и $C^\infty(Y)$ изоморфны;*
3) *решётки $\operatorname{Id} C^\infty(X)$ и $\operatorname{Id} C^\infty(Y)$ изоморфны;*
4) *предупорядоченные множества $\langle C^\infty(X), |\rangle$ и $\langle C^\infty(Y), |\rangle$ изоморфны;*
5) *решётки $\langle C^\infty(X), \leqslant\rangle$ и $\langle C^\infty(Y), \leqslant\rangle$ изоморфны.*

5.6. Полукольца $C^\infty(X)$ над F- и P-пространствами X

Теорема 5.13. *Для всякого тихоновского пространства X эквивалентны следующие утверждения:*

1) *X — F-пространство;*
2) *все идеалы полукольца $C^\infty(X)$ — биидеалы;*
3) *$I + J = I \cap J$ для любых идеалов I и J полукольца $C^\infty(X)$;*
4) *теоретико-множественное объединение любых двух (произвольного непустого семейства) идеалов полукольца $C^\infty(X)$ является идеалом;*
5) *решётка $\operatorname{Id} C^\infty(X)$ всех идеалов полукольца $C^\infty(X)$ дистрибутивна.*

Теорема 5.14. *Для любого тихоновского пространства X равносильны следующие условия:*

1) *X — P-пространство;*
2) *для любых $f, g \in C^\infty(X)$ $g \in fC^\infty(X)$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{H}(f) \subseteq \mathrm{H}(g)$;*
3) *все идеалы полукольца $C^\infty(X)$ являются* H-*идеалами;*

4) $C^\infty(X)$ — *регулярное полукольцо*;
5) $I \cdot J = I \cap J$ *для любых идеалов* I, J *полукольца* $C^\infty(X)$.

Предложение 5.15. *Если X — P-пространство, то любая собственная конгруэнция ρ на полукольце $C^\infty(X)$ содержится в собственной конгруэнции $\rho \vee \sim_{\mathrm{H}}$.*

Предложение 5.16. *На полукольце $C^\infty(X)$ над P-пространством X максимальные конгруэнции являются двухклассовыми* H*-конгруэнциями, любая собственная конгруэнция содержится в некоторой максимальной конгруэнции и всякая* H*-конгруэнция является пересечением максимальных конгруэнций.*

5.7. Полукольца $C^\infty(X)$ над конечными пространствами X

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — конечное дискретное пространство с n элементами. Тогда $C^\infty(X) = (0, \infty]^n$. Изоморфизм $C^\infty(X)/{\sim_{\mathrm{H}}} \cong D^n$ индуцирует изоморфизм $\mathrm{Id}(0, \infty]^n \cong \mathrm{Id}\, D^n$ решёток идеалов полуколец $(0, \infty]^n$ и D^n. В свою очередь, монополукольцо D^n изоморфно булеану $B(X)$ n-элементного множества X с одной операцией $\cup$. Естественный порядок $1 < \infty$ на D определяет покоординатный порядок на D^n, согласованный с операцией. Относительно этого порядка D^n является булевой решёткой с n атомами.

Объединение идеалов в идемпотентном монополукольце D^n также будет идеалом. Идеалы $I \cup J$ и $I \cap J = I + J = I \cdot J$ являются соответственно точной верхней гранью и точной нижней гранью идеалов I, J в решётке $\mathrm{Id}\, D^n$.

В полукольце D^n выделим базисные элементы (атомы): n-ки $a_i = (1, \ldots, \infty, \ldots, 1)$, $i = 1, \ldots, n$, в которых i-я координата равна ∞, а остальные равны 1. Каждый элемент a полукольца D^n, отличный от единицы $1 = (1, 1, \ldots, 1)$, однозначно представляется как произведение базисных элементов и порождает собственный главный идеал (a). Заметим, что полукольцо $\langle D^n \setminus \{1\}, \cdot, \cdot \rangle$ является свободным идемпотентным монополукольцом с n свободными образующими $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Любой собственный идеал I полукольца D^n является объединением своих минимальных главных идеалов $(a), (b), \ldots, (c)$, причём

$$I = \{x \in D^n \colon a \leqslant x \text{ или } b \leqslant x \text{ или } \ldots c \leqslant x\}.$$

Поставим в соответствие этому идеалу I сумму $a + b + \ldots + c$ элементов свободной дистрибутивной решётки $F_D(n)$ со свободными образующими $a_1, \ldots, a_n$. При этом наибольшему собственному идеалу $M = (a_1) \cup \ldots \cup (a_n)$ соответствует наибольший элемент $a_1 + \ldots + a_n$ из $F_D(n)$, наименьшему идеалу $(\infty, \infty, \ldots, \infty)$ отвечает элемент $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$. Легко убедиться, что указанное соответствие устанавливает изоморфизм между решёткой $\mathrm{Id}\, M$ собственных идеалов полукольца D^n и решёткой $F_D(n)$.

Теорема 5.17. *Решётка всех идеалов полукольца D^n, $n \in \mathbb{N}$, изоморфна свободной дистрибутивной решётке $F_D(n)$ с n свободными образующими, дополненной новым наибольшим элементом e: $\operatorname{Id} D^n \cong F_D(n) \cup \{e\}$.*

Следствие 5.18. *Число антицепей в булеане n-элементного множества равно $|F_D(n)| + 1$.*

Например, при $n = 3$ решётка $\operatorname{Id} D^3$ имеет единственную минимальную систему образующих: (a), (b), (c), $(1) = D^3$. Получаем, что $|\operatorname{Id} D^3| = 19$, что согласуется с теоремой 5.17 при $n = 3$ и [61, с. 61].

Классы произвольной конгруэнции ρ на идемпотентном монополукольце D^n являются выпуклыми подполукольцами. Пусть $[b]_\rho$ — класс элемента $b \in D^n$. Поскольку $b \cdot b = a$, то класс $[b]_\rho$ является подполукольцом в D^n. Если $b \leqslant a \leqslant c$ и $b \ \rho \ c$ для некоторых $a, c \in D^n$, то $a = b + a$, $c = c + a$, $a \ \rho \ c$ и $a \ \rho \ b$. Значит, класс $[b]_\rho$ выпуклый. Класс $[1]_\rho$ будет дополнением до простого идеала, класс $[\infty]_\rho$ является идеалом. Если класс $[\infty]$ некоторой конгруэнции на D^n одноэлементный, то данная конгруэнция будет отношением равенства. Ясно, что решётка $\operatorname{Con} D^n$ всех конгруэнций на полукольце D^n изоморфна решётке H-конгруэнций полукольца $(0, \infty]^n$.

Предложение 5.19. *Число всех максимальных конгруэнций на D^n равно $2^n - 1$.*

Предложение 5.20. *Минимальные конгруэнции на полукольце D^n — это в точности конгруэнции ρ_I по двухэлементным идеалам $I = \{a, \infty\}$, и их число равно числу n коатомов a решётки D^n с покоординатным порядком.*

Нетрудно заметить, что $\vee$-неразложимые конгруэнции на полукольце D^n представляют собой главные конгруэнции $\rho(a, b)$, отвечающие двухэлементным отрезкам $[a, b]$.

Предложение 5.21. *На полукольце D^n существует ровно $2^n(2^n - 1)/2 + 1$ главных конгруэнций и $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k$ $\vee$-неразложимых конгруэнций, а каждая ненулевая конгруэнция является точной верхней гранью содержащихся в ней $\vee$-неразложимых конгруэнций.*

При $n = 2$ имеем, что $|\operatorname{Con} D^2| = 7$ и все конгруэнции являются главными. В случае $n = 3$ на монополукольце D^3 имеем 61 конгруэнцию. Среди этих конгруэнций 7 максимальных, 3 минимальных, 29 главных и 12 $\vee$-неразложимых конгруэнций.

Предложение 5.22. *Для любых натуральных чисел $m \leqslant n$ решётка $\operatorname{Con} D^m$ является ретрактом решётки $\operatorname{Con} D^n$.*

По данным результатам были сделаны доклады на конференциях [59, 110, 111].

6. Частичные полукольца непрерывных $[0,\infty]$-значных функций

6.1. Исходные понятия

Изучение полуколец $C^+_\infty(X)$ было начато в работах [58, 140]. В них затронуты вопросы теории идеалов в данных полукольцах. Заметим, что кольца непрерывных функций определённого вида со значениями в расширенной числовой прямой изучались в [135].

Частичные полукольца отличаются от полуколец только тем, что сумма или произведение некоторых элементов в них могут быть не определены.

Дополним полукольцо $\mathbb{R}^+$ элементом ∞ и обозначим полученное множество через $[0,\infty]$. Операции сложения и умножения чисел в $[0,\infty]$ определяются так же, как в $\mathbb{R}^+$, число 0 остаётся в $[0,\infty]$ мультипликативно поглощающим, элемент ∞ является аддитивно поглощающим в $[0,\infty]$ и мультипликативно поглощающим в $(0,\infty]$. Как алгебраический объект $[0,\infty]$ будет коммутативным полукольцом с единицей без делителей нуля, причём все $a\in(0,\infty)$ обратимы. С топологической точки зрения $[0,\infty]$ — одноточечная компактификация Александрова пространства $\mathbb{R}^+$, рассматриваемого с обычной топологией.

Заметим, что алгебраическое полукольцо $[0,\infty]$ не будет топологическим, поскольку умножение не является непрерывным в случае $0\cdot\infty$.

Пусть $C^+_\infty(X)$ — множество всех непрерывных функций на произвольном топологическом пространстве X со значениями в $[0,\infty]$ с поточечными операциями сложения и умножения функций. Множество $C^+_\infty(X)$ замкнуто относительно операции сложения, но не обязано быть замкнутым относительно умножения, так как произведение непрерывных функций может дать разрывную функцию. Аксиомы полукольца в $C^+_\infty(X)$ выполняются, если все участвующие в них функции непрерывны, но это не всегда так. Например, при $X=[0,\infty]$ в поточечном равенстве функций $(x^2x)\cdot 1/x = x^2(x\cdot 1/x)$ в левой части оба множителя и результат являются функциями из $C^+_\infty(X)$, хотя $x\cdot 1/x\notin C^+_\infty(X)$. Это показывает, что для тройки функций x, x^2, $1/x$ не выполняется ассоциативность. Аналогично для функций x, $1-x$, $1/x$ не выполняется дистрибутивность, т. е. в поточечном равенстве $\big(x+(1-x)\big)\cdot 1/x = x\cdot 1/x + (1-x)\cdot 1/x$ произведение $x\cdot 1/x$ не лежит в $C^+_\infty(X)$. Поэтому система $C^+_\infty(X)$ является частичным полукольцом и не обязана быть полукольцом.

Для функций $f,g\in C^+_\infty(X)$ существует их произведение $fg\in C^+_\infty(X)$, если выполняются включения $\mathrm{H}(f)\subseteq \mathrm{Z}^\circ(g)$ и $\mathrm{H}(g)\subseteq \mathrm{Z}^\circ(f)$.

Непустое множество $I\subseteq C^+_\infty(X)$ будет идеалом в частичном полукольце $C^+_\infty(X)$, если $f+g, fh\in I$ для любых $f,g\in I$ и $h\in C^+_\infty(X)$ при условии, что fh является непрерывной функцией.

Если конечное дискретное пространство X является компактом, то непрерывными функциями в $C^+_\infty(X)$ будут всевозможные n-ки элементов из $[0,\infty]$.

Тогда любой идеал в $C^+_\infty(X)$ имеет вид $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, где $I_i \in \mathrm{Id}[0,\infty]$. Всего в полукольце $C^+_\infty(X)$ 3^n идеалов.

Максимальными идеалами будут идеалы $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, где $I_k = \{0,\infty\}$ для некоторого $k = 1,\ldots,n$ и $I_j = [0,\infty]$ для всех $j = 1,\ldots,n$, $j \neq k$. У простых идеалов I k-я координата — это идеал $\{0,\infty\}$ или $\{0\}$, остальные координаты $[0,\infty]$. Таким образом, в $C^+_\infty(X)$ существует ровно n максимальных идеалов и $2n$ простых идеалов.

Как показывает следующее предложение, множества вида $fC^+_\infty(X)$ при $f \in C^+_\infty(X)$ в общем случае не являются идеалами в $C^+_\infty(X)$.

Предложение 6.1 [140, предложение 2]. *Для произвольного метризуемого пространства X все множества $fC^+_\infty(X)$, $f \in C^+_\infty(X)$, будут идеалами частичного полукольца $C^+_\infty(X)$ тогда и только тогда, когда X дискретно.*

Понятие изоморфизма частичных полуколец определяется естественным образом. Частичные полукольца $C^+_\infty(X)$ и $C^+_\infty(\beta X)$, вообще говоря, не изоморфны. Чтобы показать это, достаточно взять $X = (0,1)$ и неограниченную снизу функцию $f \in C^+(X)$ с $\mathrm{Z}(f) = \varnothing$ и $g = f^{-1}$. Тогда $fg = 1 \in C^+_\infty(X)$, но $f^\beta g^\beta \notin C^+_\infty(\beta X)$, так как найдётся точка $p \in \beta X \setminus X$, в которой $f^\beta(p) = 0$ и $g^\beta(p) = \infty$.

Легко убедиться, что частичные полукольца $C^+_\infty(X)$ и $C^+_\infty(\beta X)$ канонически изоморфны при соответствии $f \mapsto f^\beta$ тогда и только тогда, когда пространство X псевдокомпактно.

Отметим, что функция $f \in C^+_\infty(X)$ обратима тогда и только тогда, когда $\mathrm{H}(f) \cup \mathrm{Z}(f) = \varnothing$.

Укажем критерий обратимости функций $f^\beta \in C^+_\infty(\beta X)$.

Функцию $f \in C^+_\infty(X)$ назовём *строго ограниченной*, если значения функции f лежат в некотором числовом отрезке $[a,b]$, где $0 < a \leqslant b < \infty$.

Функция $f^\beta \in C^+_\infty(\beta X)$ обратимая тогда и только тогда, когда функция f строго ограниченная.

6.2. Максимальные идеалы

Зафиксируем точку $p \in \beta X$. Следующие множества будут идеалами в $C^+_\infty(X)$:

$$
\begin{aligned}
M_p &= \bigl\{f \in C^+_\infty(X)\colon p \in \overline{\mathrm{Z}(f)}_{\beta X}\bigr\};\\
M_{p,\infty} &= \bigl\{f \in C^+_\infty(X)\colon p \in \overline{\mathrm{Z}(f) \cup \mathrm{H}(f)}_{\beta X}\bigr\};\\
O_p &= \bigl\{f \in C^+_\infty(X)\colon p \in \bigl(\overline{\mathrm{Z}(f)}_{\beta X}\bigr)^\circ\bigr\};\\
O_{p,\infty} &= \bigl\{f \in C^+_\infty(X)\colon p \in \bigl(\overline{\mathrm{Z}(f)}_{\beta X}\bigr)^\circ \vee p \in \bigl(\overline{\mathrm{H}(f)}_{\beta X}\bigr)^\circ\bigr\}.
\end{aligned}
$$

Если $p \in X$, то

$$M_p = \{f \in C^+_\infty(X)\colon f(p) = 0\}, \quad M_{p,\infty} = \bigl\{f \in C^+_\infty(X)\colon f(p) \in \{0,\infty\}\bigr\}.$$

Для каждой точки $p \in \beta X$ очевидны включения $O_p \subseteq M_p \subset M_{p,\infty}$.

Лемма 6.2 [58, лемма 5]. *Если для идеала J частичного полукольца $C^+_\infty(X)$ выполняется $J \nsubseteq M_{p,\infty}$, то существует функция $g \in J \setminus M_{p,\infty}$ со значениями в $[0,1]$.*

Лемма 6.3 [58, лемма 6]. *Для любых двух различных точек $p, q \in \beta X$ верно равенство $O_p + O_q = C^+_\infty(X)$.*

Идеалы M_p и $M_{p,\infty}$ простые. Действительно, если $f, g, fg \in C^+_\infty(X)$, то из того, что

$$p \in \overline{\mathrm{Z}(fg)}_{\beta X} = \overline{\mathrm{Z}(f)}_{\beta X} \cup \overline{\mathrm{Z}(g)}_{\beta X},$$

следует, что $p \in \overline{\mathrm{Z}(f)}_{\beta X}$ или $p \in \overline{\mathrm{Z}(g)}_{\beta X}$, а из того, что

$$p \in \overline{\mathrm{H}(fg)}_{\beta X} = \overline{\mathrm{H}(f)}_{\beta X} \cup \overline{\mathrm{H}(g)}_{\beta X},$$

следует, что $p \in \overline{\mathrm{H}(f)}_{\beta X}$ или $p \in \overline{\mathrm{H}(g)}_{\beta X}$.

Теорема 6.4 [58, теорема 1]. *Для любого тихоновского пространства X максимальные идеалы в частичном полукольце $C^+_\infty(X)$ — это в точности идеалы $M_{p,\infty}$, $p \in \beta X$, и каждый собственный идеал из $C^+_\infty(X)$ содержится в некотором максимальном идеале.*

Отметим, что $\operatorname{Max} C^+_\infty(X) \approx \beta X$ подобно классической теореме Гельфанда—Колмогорова для колец $C(X)$.

6.3. Простые идеалы

Следующая теорема описывает свойства простых идеалов частичного полукольца $C^+_\infty(X)$.

Теорема 6.5 [58, теорема 2]. *Для произвольного тихоновского пространства X любой простой идеал P частичного полукольца $C^+_\infty(X)$ обладает следующими свойствами:*

1) *P содержит идеал O_p для некоторой однозначно определённой точки $p \in \beta X$;*
2) *если $O_p \subseteq P$ при $p \in \beta X$, то $P \subseteq M_{p,\infty}$;*
3) *если $P \subseteq M_p$, $p \in \beta X$, то P — строгий идеал;*
4) *если $O_p \subseteq P$ для некоторой точки $p \in \beta X$ и P не содержится в M_p, то идеал P не является полустрогим и $O_{p,\infty} \subseteq P$.*

Из теоремы 6.5 вытекает следствие.

Следствие 6.6 [58, следствие 1]. *Каждый простой идеал частичного полукольца $C^+_\infty(X)$ содержится в единственном максимальном идеале.*

Следствие 6.7 [58, следствие 2]. *Для любого простого идеала P в $C^+_\infty(X)$ эквивалентны следующие условия:*

1) *P строгий*;
2) *P полустрогий*;
3) *$P \subseteq M_p$ для единственной точки $p \in \beta X$.*

Поскольку M_p — строгие простые идеалы, то из следствия 6.7 вытекает теорема 6.8.

Теорема 6.8 [58, теорема 3]. *Для любого тихоновского пространства X идеалы M_p, $p \in \beta X$, — это в точности максимальные идеалы среди строгих (полустрогих) простых идеалов частичного полукольца $C^+_\infty(X)$.*

При исследовании идеалов частичных полуколец непрерывных функций применяется метод соответствий между решёткой $\operatorname{Id} C^+_\infty(X)$ идеалов частичного полукольца $C^+_\infty(X)$ и решёткой $\operatorname{Id} C^+(X)$ идеалов полукольца $C^+(X)$ по включению.

Положим

— $\gamma\colon \operatorname{Id} C^+_\infty(X) \to \operatorname{Id} C^+(X)$, $\gamma(I) \mapsto I \cap C^+(X)$;
— $\delta\colon \operatorname{Id} C^+(X) \to \operatorname{Id} C^+_\infty(X)$, $\delta(J)$ — идеал в $C^+_\infty(X)$, порождённый J.

Отображение γ является $\cap$-гомоморфизмом, δ сохраняет отношение $\subseteq$. Отметим, что идеалы вида $\gamma(I)$ — полупростые. В самом деле, если $f^2 \in \gamma(I)$, то

$$\frac{1}{f} \in C^+_\infty(X), \quad f = f^2\frac{1}{f} \in I \cap C^+(X) = \gamma(I).$$

Иллюстрацией такого подхода является доказательство свойства 3) теоремы 6.5.

6.4. Определяемость

Для произвольной функции $f \in C^+_\infty(X)$ имеем:

— для каждого $x \in \beta X$ $\mathrm{H}(f) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $f \in M_{p,\infty}$ влечёт $f \in M_p$;
— для каждого $x \in \beta X$ $\mathrm{Z}(f) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $f \in M_{p,\infty}$ влечёт $f \notin M_p$.

Поэтому ввиду теорем 6.4 и 6.8 имеет место лемма 6.9.

Лемма 6.9 [58, лемма 9]. *Для любой функции $f \in C^+_\infty(X)$ справедливы следующие утверждения*:

1) $\mathrm{H}(f) = \varnothing$ *тогда и только тогда, когда для любого максимального идеала M частичного полукольца $C^+_\infty(X)$ имеем, что если $f \in M$, то $f \in P$ для максимального строгого простого идеала $P \subset M$*;
2) $\mathrm{Z}(f) = \varnothing$ *тогда и только тогда, когда для любого максимального идеала M частичного полукольца $C^+_\infty(X)$ имеем*: *если $f \in M$, то $f \notin P$ для максимального строгого простого идеала $P \subset M$.*

По лемме 6.9 условия $\mathrm{H}(f) = \varnothing$ и $\mathrm{Z}(f) = \varnothing$ выражаются на алгебраическом языке частичного полукольца $C^+_\infty(X)$. Поэтому справедливо следующее утверждение

Предложение 6.10 [58, предложение 1]. *Для любого изоморфизма частичных полуколец* $\alpha\colon C^+_\infty(X) \to C^+_\infty(Y)$ *справедливо равенство* $\alpha\big(C^+(X)\big) = C^+(Y)$.

Из предложения 6.10 и [45, гл. 2] вытекает следующий результат.

Теорема 6.11 [58, теорема 4]. *Любое хьюиттовское пространство* X *определяется однозначно с точностью до гомеоморфизма частичным полукольцом* $C^+_\infty(X)$.

Поскольку хьюиттовское расширение νX тихоновского пространства X гомеоморфно βX тогда и только тогда, когда X псевдокомпактно, из предложения 6.10 и [45, гл. 2] вытекает также следствие 6.12.

Следствие 6.12 [140, следствие 3]. *Частичные полукольца* $C^+_\infty(X)$ *и* $C^+_\infty(\beta X)$ *изоморфны тогда и только тогда, когда пространство* X *псевдокомпактно.*

Отметим, что множество $M_p \cup O_{p,\infty}$ является идеалом в $C^+_\infty(X)$ для любой точки $p \in \beta X$. Действительно, M_p и $O_{p,\infty}$ — идеалы и $M_p + O_{p,\infty} \subseteq M_p \cup O_{p,\infty}$.

6.5. Полукольца $C^+_\infty(X)$ над F- и P-пространствами X

Для любой функции $f \in C^+_\infty(X)$ определим функцию

$$f^*(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } x \in \mathrm{Z}(f),\\ f(x)^{-1}, & \text{если } x \in \operatorname{coz} f,\\ 0, & \text{если } x \in \mathrm{H}(f). \end{cases}$$

Ясно, что $f^* \in C^+_\infty(X)$. Функция ff^* не обязана быть непрерывной, так как равна 1 на $\operatorname{coz} f$ и 0 на $\mathrm{Z}(f) \cup \mathrm{H}(f)$. Непрерывность ff^* равносильна тому, что замкнутые множества $\mathrm{Z}(f)$ и $\mathrm{H}(f)$ открыты. Поэтому частичное полукольцо $C^+_\infty(X)$ является полукольцом тогда и только тогда, когда X будет P-пространством.

Поскольку $\mathrm{H}(f) = \mathrm{Z}(f^*)$ для всех $f \in C^+_\infty(X)$, можно дать следующие определения F- и P-точек:

- точка $p \in X$ называется *P-точкой*, если для любой функции $f \in C^+_\infty(X)$ из того, что $p \in \mathrm{Z}(f)$, следует, что $p \in \mathrm{Z}^\circ(f)$, или, что равносильно, $p \in \mathrm{H}(f)$ влечёт $p \in \mathrm{H}^\circ(f)$;
- точка $p \in X$ называется *F-точкой*, если для любых функций $f, g \in C^+_\infty(X)$ из того, что $p \in \mathrm{Z}^\circ(fg)$, следует, что $p \in \mathrm{Z}^\circ(f)$ или $p \in \mathrm{Z}^\circ(g)$, или, что эквивалентно, $p \in \mathrm{H}^\circ(fg)$ влечёт, что $p \in \mathrm{H}^\circ(f)$ или $p \in \mathrm{H}^\circ(g)$.

Предложение 6.13 [58, предложение 2]. *Для любой точки* $p \in X$ *эквивалентны следующие утверждения*:

1) *p — P-точка*;
2) $O_p = M_p$;
3) $O_{p,\infty} = M_{p,\infty}$;
4) $M_p \cup O_{p,\infty} = M_{p,\infty}$.

Следствие 6.14 [58, следствие 3]. *Для тихоновского пространства X эквивалентны следующие условия*:

1) *X — P-пространство*;
2) *$C^+_\infty(X)$ — полукольцо*;
3) *частичное полукольцо $C^+_\infty(X)$ регулярно.*

Предложение 6.15 [58, предложение 3]. *Для любой точки $p \in X$ равносильны следующие утверждения*:

1) *p — F-точка*;
2) *O_p — простой идеал*;
3) *$O_{p,\infty}$ — простой идеал*;
4) *$M_p \cup O_{p,\infty}$ — простой идеал.*

Из предложения 6.15 и теоремы 6.5 вытекает следствие 6.16.

Следствие 6.16 [58, следствие 4]. *Для любой точки $p \in X$ эквивалентны следующие условия*:

1) *X — F-пространство*;
2) *βX — F-пространство*;
3) *минимальные простые идеалы в $C^+_\infty(X)$ — это в точности идеалы O_p, $p \in \beta X$.*

Отметим, что эквивалентность условий 1) и 2) следствия 6.16 хорошо известна [129, гл. 14].

По данным результатам были сделаны доклады на конференциях [54—57, 109].

7. Полукольца непрерывных частичных действительнозначных функций

7.1. Исходные понятия

Пусть S — полукольцо и X — произвольное множество. Обозначим через SP^X множество $\bigcup\{SY : Y \subseteq X\}$ всех частичных функций из X в S. Тогда $D(f)$ — область определения частичной функции $f \in SP^X$.

Множество SP^X с поточечными операциями сложения $+_\cap$ и умножения функций, где

$$D(f +_\cap g) = D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g),$$

является полукольцом с поглощающим элементом $\varnothing$ как по сложению, так и по умножению.

Отношение ρ_D,

$$f \ \rho_D \ g \text{ тогда и только тогда, когда } D(f) = D(g),$$

служит конгруэнцией на полукольце SP^X, причём фактор-полукольцо SP^X/ρ_D является моноплукольцом, изоморфным булеану $\langle B(X), \cap, \cap \rangle$ множества X, рассматриваемому с одной операцией $\cap$.

Пусть теперь на SP^X операция сложения $+_\cup$ задана равенствами

$$(f +_\cup g)(x) = \begin{cases} f(x) + g(x) & \text{при } x \in D(f+g) = D(f) \cap D(g), \\ f(x) & \text{при } x \in D(f) \setminus D(g), \\ g(x) & \text{при } x \in D(g) \setminus D(f), \end{cases}$$

а умножение прежнее. В этом случае элемент $\varnothing$ — нуль полукольца SP^X, а фактор-полукольцо SP^X/ρ_D — булева решётка, изоморфная булеану $\langle B(X), \cup, \cap \rangle$.

Пусть S — полукольцо с единицей 1. Важную роль в полукольцах вида SP^X играют *унитарные идемпотенты* (по умножению) e_A, $A \subseteq X$:

$$D(e_A) = A, \quad e_A(x) = 1 \ \text{ для всех } \ x \in A.$$

В частности, это идемпотенты $e_x = e_{\{x\}}$ при $x \in X$, $e_X = 1$ и $e_\varnothing = \varnothing$. Элемент e_A служит единицей полуколец S^A и SP^A. Полукольцо $SP^A = e_A SP^X$ является главным идеалом полукольца SP^X.

К любому полукольцу S можно внешним образом присоединить нуль 0 (поглощающий элемент ∞), в результате чего получим новое полукольцо $S \cup \{0\}$ ($S \cup \{\infty\}$) с нулём (поглощающим элементом).

Полукольца частичных функций изоморфны подходящим полукольцам (полных) функций [39, теорема 1].

Предложение 7.1. *Полукольцо* $\langle SP^X, +_\cap, \cdot \rangle$ *изоморфно полукольцу* $(S \cup \{\infty\})^X$.

Предложение 7.2. *Полукольцо* $\langle SP^X, +_\cup, \cdot \rangle$ *изоморфно полукольцу* $(S \cup \{0\})^X$.

Для $X \supseteq B \supseteq A$ рассмотрим гомоморфизм ограничения $\pi_{BA} \colon S^B \to S^A$, действующий по правилу

$$\text{если } \ f \in S^B, \ \text{ то } \ \pi_{BA}(f) = f_{|A} \in S^A.$$

Получаем прямой спектр полуколец (S^D, π_{BA}), $D \subseteq X$, над направленным упорядоченным множеством $\langle B(X), \supseteq \rangle$. Прямым пределом прямого спектра полуколец будет одноэлементное полукольцо $\{\varnothing\}$ с системой эпиморфизмов $\pi_{D\{\varnothing\}}$. Система (SP^D, π_{BA}) над направленным упорядоченным множеством $\langle B(X), \subseteq \rangle$ образует обратный спектр полуколец, обратным пределом которого служит полукольцо SP^X с системой эпиморфизмов π_{XD}. Кроме того, полукольцо SP^X с системой вложений $SP^D \subseteq SP^X$ является пределом (объединением) прямого спектра полуколец SP^D с гомоморфизмами вложения над $\langle B(X), \subseteq \rangle$.

Вместо булеана $B(X)$ можно рассматривать произвольную решётку множеств, не обязательно с наибольшим и/или наименьшим элементами.

Для каждого индекса (точки) $x \in X$ можно взять своё полукольцо S_x. Если (Π, X) — пучок полуколец S_x, то естественно рассматривать полукольцо $\Gamma'(\Pi, X)$ частичных сечений.

Для любых кольца S и непустого множества X полукольца частичных функций $\langle SP^X, +_\cap, \cdot\rangle$ и $\langle SP^X, +_\cup, \cdot\rangle$ не являются кольцами, но будут дизъюнктными объединениями колец функций S^Y по всем $Y \subseteq X$.

Класс мультипликативно идемпотентных полуколец S (полуколец с тождеством $xx = x$) замкнут относительно взятия полуколец частичных S-значных функций, прямых и обратных пределов.

Пусть теперь S — топологическое полукольцо, X — топологическое пространство. Получаем полукольцо

$$CP(X, S) = \bigcup\{C(Y, S) \colon Y \subseteq X\}$$

всех непрерывных частичных S-значных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения частичных функций f и g на их общей области определения $D(f) \cap D(g)$.

Если S содержит 0, то обозначим через θ_A, $A \subseteq X$, функцию из $CP(X, \mathbb{R})$, для которой $D(\theta_A) = A$ и $\theta_A(x) = 0$ для любых $x \in X$. Заметим, что $e_\varnothing = \varnothing = \theta_\varnothing$.

Ясно, что $CP(X, S)$ — подполукольцо в SP^X, а фактор-полукольцо $CP(X, S)/\rho_D$ снова изоморфно монополукольцу $\langle B(X), \cap, \cap\rangle$.

Заметим, что предложения 7.1 и 7.2 не переносятся на полукольца непрерывных частичных функций.

Полукольцо $CP = CP(X, S)$ имеет поглощающий элемент $\varnothing$. Если S — полукольцо с единицей 1, то и CP — полукольцо с единицей $1 \in C(X, S)$.

Отметим, что полугруппы непрерывных частичных функций рассматривались в [12, 14].

Следующая теорема [39] развивает тематику определяемости топологических пространств.

Теорема 7.3. *Пусть S — неодноэлементное топологическое полукольцо с единицей 1 с замкнутым множеством $\{1\}$ и X, Y — произвольные T_1-пространства. Тогда эквивалентны следующие условия*:

1) *X и Y гомеоморфны*;
2) *полукольца $CP(X, S)$ и $CP(Y, S)$ изоморфны*;
3) *мультипликативные полугруппы $CP(X, S)$ и $CP(Y, S)$ изоморфны.*

7.2. Идеалы

Предложение 7.4 [39]. *Для любых топологического пространства X и топологического полукольца S с единицей 1 максимальные идеалы полукольца*

$CP(X,S)$ имеют вид $\big(CP(X,S)\setminus C(X,S)\big)\cup M$, где M — произвольный максимальный идеал полукольца $C(X,S)$.

Далее приведём новые результаты.

Рассмотрим некоторые аспекты теории полуколец $CP(X,\mathbb{R})$ всех непрерывных частичных $\mathbb{R}$-значных функций на T_1-пространствах X.

На полукольце $CP(X,\mathbb{R})$ существует естественный порядок $\leqslant$: для всех $f,g\in CP(X,\mathbb{R})$

$$f\leqslant g \text{ означает, что } D(f)\subseteq D(g) \text{ и } f(x)\leqslant g(x) \text{ для всех } x\in D(f).$$

Этот порядок задаёт структуру нижней полурешётки $\langle CP(X,\mathbb{R}),\wedge\rangle$ с наименьшим элементом $\varnothing$. Именно, для любых $f,g\in CP(X,\mathbb{R})$

$$D(f\wedge g)=D(f)\cap D(g) \text{ и } (f\wedge g)(x)=\min\big(f(x),g(x)\big) \text{ для всех } x\in D(f\wedge g).$$

Точная верхняя грань $f\vee g$ существует не для всех функций $f,g\in CP(X,\mathbb{R})$ (существование $f\vee g$ для всех $f,g\in CP(X,\mathbb{R})$ равносильно дискретности пространства X), но любое кольцо $C(A,\mathbb{R})$, $A\subseteq X$, является решёточно упорядоченным кольцом относительно решёточных операций $\vee$ и $\wedge$.

Упорядоченное множество $\langle\{e_A\colon A\subseteq X\},\leqslant\rangle$ всех унитарных идемпотентов изоморфно булеану $B(X)$ подмножеств пространства X. При этом $\bigvee e_A=e_{\bigcup A}$ и $\bigwedge e_A=e_{\bigcap A}$ для любого семейства (A) множеств $A\subseteq X$.

Главные идеалы $(\theta_x)=\theta_x CP(X,\mathbb{R})=\{\theta_x,\varnothing\}$ при $x\in X$ — это в точности минимальные идеалы полукольца $CP(X,\mathbb{R})$. Заметим, что для любой точки $x\in X$ идеал (e_x), как полукольцо изоморфный $\mathbb{R}\cup\{\varnothing\}$, содержит ровно три идеала, $(e_x)\supset(\theta_x)\supset\{\varnothing\}$, полукольца $CP(X,\mathbb{R})$.

Идеал J полукольца $CP(X,\mathbb{R})$ называется *D-идеалом*, если из того, что $f\in J$, $g\in CP(X,R)$ и $D(g)=D(f)$, следует, что $g\in J$.

В полукольцах $CP(X,\mathbb{R})$ биидеалы совпадают с D-идеалами и исчерпываются всевозможными объединениями главных идеалов вида (e_A), $A\subseteq X$.

Предложение 7.5. *Тихоновское пространство X будет P-пространством тогда и только тогда, когда полукольцо $CP(X,\mathbb{R})$ регулярно.*

Предложение 7.6. *Всякое T_1-пространство X определяется однозначно с точностью до гомеоморфизма решёткой $\operatorname{Id} CP(X,\mathbb{R})$.*

Предложение 7.7. *Для любого топологического пространства X решётка $\operatorname{Id} CP(X,\mathbb{R})$ модулярна.*

Предложение 7.8. *Для любого топологического пространства X решётка идеалов $\operatorname{Id} CP(X,\mathbb{R})$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда X — наследственное F-пространство.*

Предложение 7.9. *Для любого топологического пространства X решётка $\operatorname{Id} CP(X,\mathbb{R})$ — решётка с псевдодополнениями. Дополнениями в $\operatorname{Id} CP(X,\mathbb{R})$ обладают только элементы $\{\varnothing\}$ и $CP(X,\mathbb{R})$.*

7.3. Конгруэнции

Предложение 7.10. *Всякое T_1-пространство X определяется решёткой* $\operatorname{Con} CP(X, \mathbb{R})$.

Конгруэнцию ρ на полукольце $CP(X, \mathbb{R})$ назовём *D-конгруэнцией*, если $f, g \in CP(X, \mathbb{R})$ и $D(f) = D(g)$ влекут $f \mathrel{\rho} g$.

Наименьшей D-конгруэнцией на полукольце $CP(X, \mathbb{R})$ служит конгруэнция ρ_D.

Теорема 7.11. *Для любого топологического пространства X максимальные конгруэнции на полукольце $CP(X, \mathbb{R})$ совпадают с двухклассовыми D-конгруэнциями. При этом любая собственная конгруэнция содержится в некоторой максимальной конгруэнции.*

Заметим, что для неодноэлементного тихоновского пространства X решётка конгруэнций полукольца $CP(X, \mathbb{R})$ не является модулярной.

7.4. Гомоморфизмы

В этом разделе также приводятся новые результаты.

Возьмём произвольные T_1-пространства X и Y. Любое непрерывное отображение $\varphi \colon Y \to X$ индуцирует полукольцевой гомоморфизм

$$\alpha_\varphi \colon CP(X, \mathbb{R}) \to CP(Y, \mathbb{R}), \quad \alpha_\varphi(f) = f \circ \varphi \text{ для всех } f \in CP(X, \mathbb{R}).$$

Ясно, что индуцированные гомоморфизмы сохраняют константы r, а унитарные идемпотенты e_A, $A \subseteq X$, переводят в унитарные идемпотенты e_B, где $B = \varphi^{-1}(A) \subseteq Y$.

Полукольцевой гомоморфизм $\alpha \colon CP(X, \mathbb{R}) \to CP(Y, \mathbb{R})$, сохраняющий 1, назовём *$\vee$-полным*, если α сохраняет точную верхнюю грань любого множества унитарных идемпотентов, т. е. $\alpha\Bigl(\bigvee e_A\Bigr) = \bigvee \alpha(e_A)$ для всякого семейства (A) подмножеств $A \subseteq X$.

Предложение 7.12. *Полукольцевой гомоморфизм $CP(X, \mathbb{R}) \to CP(Y, \mathbb{R})$ будет индуцированным тогда и только тогда, когда он является $\vee$-полным.*

Получаем, что для любых T_1-пространств X и Y каждый полукольцевой $\vee$-полный изоморфизм $CP(X, \mathbb{R}) \to CP(Y, \mathbb{R})$ индуцирован некоторым однозначно определённым гомеоморфизмом $Y \to X$.

Обозначим через K категорию всех T_1-пространств X и их непрерывных отображений φ, а через C — категорию всех полуколец $CP(X, \mathbb{R})$ и их $\vee$-полных гомоморфизмов α. Для любых непрерывных отображений $\psi \colon Z \to Y$ и $\varphi \colon Y \to X$ имеем $\alpha_{\varphi \circ \psi} = \alpha_\psi \circ \alpha_\varphi$. Поэтому соответствие F, $F(X) = CP(X, \mathbb{R})$ и $F(\varphi) = \alpha_\varphi$ для любых T_1-пространств X и непрерывных отображений $\varphi \colon Y \to X$, является контравариантным функтором из категории K в категорию C. Функтор F устанавливает антиэквивалентность между категориями K и C.

Теорема 7.13. *Категория всевозможных T_1-пространств X и их непрерывных отображений антиэквивалентна* (*двойственна*) *категории полуколец $CP(X,\mathbb{R})$ с $\vee$-полными гомоморфизмами в качестве морфизмов.*

Заключение: перспективы и проблемы

Итак, теории полуколец непрерывных функций исполнилось 20 лет. Полукольца непрерывных числовых функций выросли из классической теории колец $C(X)$ всех непрерывных действительнозначных функций, заданных на топологических пространствах X, как определённые «подобъекты» $C(X)$. Настало время применить полученные знания о полукольцах непрерывных функций к дальнейшему исследованию самих колец $C(X)$. Необходимо продолжить исследование классов полуколец $C(X,(0,\infty])$ и частичных полуколец $C(X,[0,\infty])$, попытаться разработать общие теории полуколец непрерывных функций со значениями в топологических полукольцах из некоторых естественных классов топологических полуколец и полутел.

Сформулируем ряд проблем функциональной алгебры.

Задача 1. Описать максимальные подалгебры кольца $C(X)$ на компактах X.

Максимальные идеалы

$$M_x = \{f \in C(X)\colon f(x) = 0\}$$

и подалгебры

$$A_{x,y} = \{f \in C(X)\colon f(x) = f(y)\}, \quad x \neq y \in X,$$

служат максимальными подалгебрами $\mathbb{R}$-алгебры $C(X)$. Исчерпываются ли ими все максимальные подалгебры в $C(X)$?

Задача 2. Найти все максимальные подалгебры полукольца $C^+(X)$ непрерывных неотрицательных функций и полуполя $U(X)$ непрерывных положительных функций на произвольном компакте X.

В $C^+(X)$ известны максимальные подалгебры вида $M\cup(C^+(X)\setminus P)$, где M — максимальный идеал полукольца $C^+(X)$, P — минимальный простой идеал, не лежащий в M. В $U(X)$ выделен класс максимальных подалгебр, определяемых неравенствами.

Задача 3. Описать изоморфизмы решёток подалгебр колец $C(X)$, полуколец $C^+(X)$, полуполей $U(X)$.

Вопросы решёточной определяемости колец $C(X)$, полуколец $C^+(X)$ и полуполей $U(X)$ решены положительно. Применялась техника максимальных и минимальных подалгебр в $C(X)$ и однопорождённых подалгебр в $C^+(X)$ и $U(X)$.

Задача 4. Дать абстрактные характеризации полуколец $C^\vee(X)$ и полуполей $U^\vee(X)$ с $\max$-сложением.

Заметим, что существует характеризация колец $C(X)$ [63]. Значит, имеются и характеризации полуколец $C^{+}(X)$ и полуполей $U(X)$ с обычным сложением.

Задача 5. Изучить алгебраические свойства решёток идеалов и конгруэнций колец $C(X)$, полуколец $C^{+}(X)$ и полуполей $U(X)$ непрерывных числовых функций.

В состав этой общей проблемы входят конкретные задачи об условиях их модулярности, дистрибутивности, псевдодополнениях, булевости. Ответы на эти вопросы получены.

Задача 6. Исследовать кольца $C(X)$, полукольца $C^{+}(X)$ и полуполя $U(X)$ как пучки ростков непрерывных функций на тихоновских пространствах X. Изучить их структурные пучки.

Отметим, что мы уже применяли пучковый подход к кольцам и полукольцам непрерывных функций [107, 108, 146].

Задача 7. Развить теорию полумодулей над кольцами и полукольцами непрерывных числовых функций.

Задача 8. Изучить структурные свойства и пучковые представления дистрибутивных полутел, т. е. полутел с дистрибутивной решёткой конгруэнций. В частности, дать абстрактную характеризацию решёток конгруэнций (ядер) $\mathrm{Con}\,U$ дистрибутивных полутел U. Всякая ли конечная дистрибутивная решётка реализуется как решётка $\mathrm{Con}\,U$ для некоторого полутела U?

Литература

[1] Архангельский А. В. Топологические пространства функций. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.

[2] Биркгоф Г. Теория решёток — М.: Наука, 1984.

[3] Бурбаки Н. Алгебра. Многочлены и поля. Упорядоченные группы. — М.: Наука, 1965.

[4] Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы, числа и связанные с ними группы и пространства. — М.: Наука, 1969.

[5] Бурбаки Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов: Словарь. — М.: Наука, 1975.

[6] Варанкин А. В. Конгруэнции на полукольцах непрерывных неотрицательных функций, порождённые фильтрами // Матем. вестн. педвузов Волго-Вятского рег. — 2000. — Вып. 2. — С. 3—10.

[7] Варанкина В. И. Максимальные идеалы в полукольцах непрерывных функций // Фундамент. и прикл. матем. — 1995. — Т. 1, вып. 4. — С. 923—937.

[8] Варанкина В. И. Максимальные идеалы и делимость в полукольцах непрерывных функций: Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук. — М.: МПГУ, 1996.

[9] Варанкина В. И., Вечтомов Е. М. Научная алгебраическая школа // Герценка: Вятские записки. — 2009. — Вып. 15. — С. 199—207.

[10] Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семёнова И. А. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // Фундамент. и прикл. матем. — 1998. — Т. 4, вып. 2. — С. 493—510.

[11] Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Смирнова М. Н. Пространства первичных идеалов полуколец непрерывных функций // Вестн. Вятского гос. пед. ун-та. Сер. естеств. наук: Матем., инф., физ. — 1997. — Вып. 3. — С. 4—7.

[12] Вечтомов Е. М. Определяемость топологических пространств полугруппами непрерывных частичных функций. — 1988. — Деп. в ВИНИТИ № 256-В88.

[13] Вечтомов Е. М. Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. — 1990. — Т. 28. — С. 3—46.

[14] Вечтомов Е. М. О полугруппах непрерывных частичных функций на топологических пространствах // УМН. — 1990. — Т. 46, № 4. — С. 143—144.

[15] Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. — 1991. — Т. 29. — С. 119—191.

[16] Вечтомов Е. М. К теореме Гельфанда—Колмогорова о максимальных идеалах колец непрерывных функций // УМН. — 1992. — Т. 47, № 5. — С. 171—172.

[17] Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций на топологических пространствах. Избранные темы. — М.: Изд-во МПГУ, 1992.

[18] Вечтомов Е. М. T_0-пространства и топологические решётки непрерывных $\{0,1\}$-значных функций // Заметки Тартуского ун-та. — 1992. — Вып. 940. — С. 101—106.

[19] Вечтомов Е. М. Функциональные представления колец. — М.: Изд-во МПГУ, 1993.

[20] Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций со значениями в топологическом теле: Автореф. дис.. . . докт. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1994.

[21] Вечтомов Е. М. Дистрибутивные решётки, функционально представимые цепями // Фундамент. и прикл. матем. — 1996. — Т. 2, вып. 1. — С. 93—102.

[22] Вечтомов Е. М. Один класс максимальных подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций // Вестн. Вятского гос. пед. ун-та. Сер. естеств. наук: Матем., инф., физ. — 1997. — Вып. 3. — С. 7—10.

[23] Вечтомов Е. М. Решётка подалгебр колец непрерывных функций и хьюиттовские пространства // Мат. заметки. — 1997. — Т. 62, № 5. — С. 687—693.

[24] Вечтомов Е. М. О подалгебрах колец непрерывных функций со значениями в дискретном теле // Вестн. Вятского гос. пед. ун-та. — 1999. — № 1. — С. 19—20.

[25] Вечтомов Е. М. Функциональная характеризация стоуновых решёток // Вестн. Вятского гос. пед. ун-та. — 1999. — № 2. — С. 9—11.

[26] Вечтомов Е. М. Введение в полукольца. — Киров: Изд-во Вятского гос. пед. ун-та, 2000.

[27] Вечтомов Е. М. Полукольца непрерывных отображений // Вестн. Вятского гос. гуман. ун-та. — 2004. — № 10. — С. 57—64.

[28] Вечтомов Е. М. Строение полутел // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. Инф. — 2009. — Вып. 10. — С. 3—42.

[29] Вечтомов Е. М. К теории полуколец непрерывных функций // Математика. Образование: матер. XXI Междунар. конф. — Чебоксары, 2013. — С. 19—34.

[30] Вечтомов Е. М. Полукольца и пучки. Обзор результатов исследований за 2008—2012 годы // Вестн. Вятского гос. гуман. ун-та. — 2013. — № 1. — С. 185—193.

[31] Вечтомов Е. М. Функциональная алгебра: полукольца непрерывных функций // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. — 2015. — Т. 52. — С. 38—40.

[32] Вечтомов Е. М., Варанкина В. И. Развитие функциональной алгебры в Вятском государственном гуманитарном университете // Вестн. Вятского гос. гуман. ун-та. — 2015. — № 4. — С. 136—144.

[33] Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. О простых идеалах полуколец непрерывных функций со значениями в единичном отрезке // Вестн. Удмуртского ун-та. Матем. Механ. Комп. науки. — 2011. — Вып. 2. — С. 12—18.

[34] Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. Решётки непрерывных функций со значениями в единичном отрезке // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. Инф. — 2011. — Вып. 14. — С. 3—20.

[35] Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. Полукольца непрерывных $[0,1]$-значных функций // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 4. — С. 53—82.

[36] Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. О полукольцах sc-функций // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. Инф. — 2012. — Вып. 15. — С. 73—82.

[37] Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. Определяемость компактов решётками идеалов и конгруэнций полуколец непрерывных $[0,1]$-значных функций на них // Изв. высш. учебн. завед. Матем. — 2012. — № 1. — С. 87—91.

[38] Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. Замкнутые идеалы и замкнутые конгруэнции полуколец непрерывных $[0,1]$-значных функций с топологией поточечной сходимости // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2013. — Т. 19, № 3. — С. 83—93.

[39] Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н. Полукольца частичных функций // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: матер. XIII Междунар. конф., посвящ. 85-летию со дня рожд. проф. С. С. Рышкова. — Тула, 2015. — С. 148—150.

[40] Вечтомов Е. М., Лубягина Е. Н., Чермных В. В. Элементы теории полуколец. — Киров: Изд-во Вятского гос. гуман. ун-та, 2012.

[41] Вечтомов Е. М, Михалёв А. В., Чермных В. В. Абелево регулярные положительные полукольца // Тр. семинара им. В. Г. Петровского. — 1997. — Т. 20. — С. 282—309.

[42] Вечтомов Е. М., Сидоров В. В. Определяемость полуколец непрерывных функций решёткой их подалгебр // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. Инф. — 2010. — Вып. 11. — С. 112—125.

[43] Вечтомов Е. М., Сидоров В. В. Изоморфизмы решёток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 3. — С. 63—103.

[44] Вечтомов Е. М., Сидоров В. В. Определяемость хьюиттовских пространств решётками подалгебр полуполей непрерывных положительных функций с $\max$-сложением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2015. — Т. 21, № 3. — С. 78—88.

[45] Вечтомов Е. М., Сидоров В. В., Чупраков Д. В. Полукольца непрерывных функций. — Киров: Изд-во Вятского гос. гуман. ун-та, 2011.

[46] Вечтомов Е. М., Смирнова (Подлевских) М. Н. Одна двойственность для топологических полуколец непрерывных функций // УМН. — 1996. — Т. 51, № 3. — С. 187—188.

[47] Вечтомов Е. М., Старостина О. В. Структура абелево-регулярных положительных полуколец // УМН. — 2007. — Т. 62, вып. 1. — С. 199—200.

[48] Вечтомов Е. М., Старостина О. В. Обобщённые абелево регулярные положительные полукольца // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. Инф. — 2007. — Вып. 7. — С. 3—16.

[49] Вечтомов Е. М., Черанева А. В. Полутела и их свойства // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 5. — С. 3—54.

[50] Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В. Главные ядра полуполей непрерывных положительных функций // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 4. — С. 87—107.

[51] Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В. Конгруэнции на полукольцах непрерывных функций и F-пространства // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. Инф. — 2008. — Вып. 8. — С. 15—26.

[52] Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В. О продолжении конгруэнций на полукольцах непрерывных функций // Матем. заметки. — 2009. — Т. 85, № 6. — С. 803—816.

[53] Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В. Псевдодополнения в решётке конгруэнций полуколец непрерывных функций // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. Инф. — 2009. — Вып. 9. — С. 3—17.

[54] Вечтомов Е. М., Шалагинова Н. В. Об идеалах частичных полуколец непрерывных $[0,\infty]$-значных функций // Математика в современном мире: матер. Междунар. научно-практ. конф., посвящ. 150-летию со дня рожд. российского матем. Д. В. Граве. — Вологда, 2013. — С. 12—14.

[55] Вечтомов Е. М., Шалагинова Н. В. Идеалы в частичных полукольцах непрерывных $[0,\infty]$-значных функций // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: матер. XII Междунар. конф. — Тула, 2014. — С. 158—161.

[56] Вечтомов Е. М., Шалагинова Н. В. К теории частичных полуколец непрерывных $[0,\infty]$-значных функций // Алгебра и матем. логика: теория и приложения: матер. Междунар. конф. — Казань, 2014. — С. 156—157.

[57] Вечтомов Е. М., Шалагинова Н. В. О частичных полукольцах непрерывных $[0,\infty]$-значных функций // Современные проблемы математики и её приложений: тр. 45-й Междунар. молодёжной школы-конф., посвящ. 75-летию В. И. Бердышева. — Екатеринбург, 2014. — С. 16—19.

[58] Вечтомов Е. М., Шалагинова Н. В. Простые идеалы в частичных полукольцах непрерывных $[0,\infty]$-значных функций // Вестн. Пермского ун-та. Матем. Механ. Инф. — 2014. — Вып. 1. — С. 5—12.

[59] Вечтомов Е. М., Шалагинова Н. В. Об идеалах в полукольцах непрерывных $(0,\infty]$-значных функций // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: матер. XIII Междунар. конф. — Тула, 2015. — С. 153—155.

[60] Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // ДАН СССР. — 1939. — Т. 22, № 1. — С. 11—15.

[61] Гретцер Г. Общая теория решёток. — М.: Мир, 1982.

[62] Гутерман А. Э. Фробениусовы эндоморфизмы пространств матриц: Автореф. дис.. . . докт. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2008.

[63] Захаров В. К., Михалёв А. В., Серединский А. А. Алгебраическое описание колец непрерывных функций // УМН. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 163—164.

[64] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989.

[65] Лубягина Е. Н. Полукольца непрерывных $[0, 1]$-значных функций: Автореф. дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2012.

[66] Лубягина Е. Н. Частичные кольца непрерывных функций // Научно-техн. вестн. Поволжья. — 2015. — № 3. — С. 44—46.

[67] Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его приложение в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1994.

[68] Наймарк М. А. Нормированные кольца. — М.: Наука, 1968.

[69] Пашенков В. В. О двойственностях // ДАН СССР. — 1975. — Т. 222, № 6. — С. 1295—1298.

[70] Подлевских М. Н. Замкнутые конгруэнции на полукольцах непрерывных функций // Фундамент. и прикл. матем. — 1999. — Т. 5, вып. 3. — С. 947—952.

[71] Подлевских М. Н. Полукольца непрерывных функций с топологией поточечной сходимости: Автореф. дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — М.: МПГУ, 1999.

[72] Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М.: Наука, 1984.

[73] Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.

[74] Семёнов А. Н. О подалгебрах полуколец непрерывных функций // Матем. вестн. педвузов Волго-Вятского региона. — 1998. — Вып. 1. — С. 83—90.

[75] Семёнов А. Н. О подалгебрах полуколец непрерывных функций // Междунар. алгебр. конф. памяти А. Г. Куроша. Тез. докл. — Москва, 1998. — С. 208—209.

[76] Семёнов А. Н. О решётке конгруэнций полутел // Вестн. Вятского гос. гуман. ун-та. — 2003. — № 9. — С. 92—95.

[77] Семёнова И. А. Главные конгруэнции на полуполе непрерывных положительных функций // Вестн. Вятского гос. пед. ун-та. Сер. естеств. наук: Матем., инф., физ. — 1996. — Вып. 1. — С. 14—16.

[78] Семёнова И. А. Конгруэнции на полуполе непрерывных положительных функций и его строго выпуклые мультипликативные подгруппы // Вестн. Вятского гос. пед. ун-та. Сер. естеств. наук: Матем., инф., физ. — 1997. — Вып. 3. — С. 30—32.

[79] Семёнова И. А. Конгруэнции на полукольцах непрерывных функций: Автореф. дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — М.: МПГУ, 1998.

[80] Семёнова И. А. Определяемость хьюиттовских пространств X решёткой конгруэнций полуколец непрерывных неотрицательных функций на X // Вестн. Вятского гос. пед. ун-та. — 1999. — № 1. — С. 20—23.

[81] Семёнова И. А. Максимальные конгруэнции на полуполе непрерывных положительных функций // Фундамент. и прикл. матем. — 2000. — Т. 8, вып. 1. — С. 305—310.

[82] Сидоров В. В. Группа автоморфизмов решётки всех подалгебр полукольца многочленов над полуполем неотрицательных действительных чисел // Изв. высш. учебн. завед. Матем. — 2011. — № 4. — С. 104—107.

[83] Сидоров В. В. Изоморфизмы решёток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. — Казань: КФУ, 2011.

[84] Сидоров В. В. Строение решёточных изоморфизмов полуколец, порождённых одной неотрицательной функцией // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. Инф. — 2011. — Вып. 13. — С. 11—36.

[85] Сидоров В. В. Автоморфизмы решётки всех подалгебр полукольца многочленов от одной переменной // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, вып. 3. — С. 85—96.

[86] Сидоров В. В. Изоморфизмы решёток подалгебр полуколец непрерывных неотрицательных функций с $\max$-сложением // Фундамент. и прикл. матем. — 2014. — Т. 19, вып. 6. — С. 153—189.

[87] Сидоров В. В. Определяемость компактов решёткой подалгебр полуполей $U(X)$ // Фундамент. исслед. — 2014. — № 6, ч. 6. — С. 1191—1194.

[88] Сидоров В. В. Изоморфизмы полуполей непрерывных положительных функций с $\max$-сложением // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения: материалы XIII Междунар. конф. — Тула, 2015. — С. 184—185.

[89] Смирнова (Подлевских) М. Н. Замкнутые идеалы в полукольцах непрерывных функций с топологией поточечной сходимости // Вестн. Вятского гос. пед. ун-та. Сер. естеств. наук: Матем., инф., физ. — 1996. — Вып. 1. — С. 16—18.

[90] Смирнова (Подлевских) М. Н. Теоремы двойственности для полуколец непрерывных функций с топологией поточечной сходимости // IV Междунар. конф. женщин-математиков: тез. докл. — Волгоград, 1996. — С. 115—116.

[91] Смирнова (Подлевских) М. Н. О замкнутых подалгебрах в полукольцах непрерывных функций // V Междунар. конф. женщин-математиков. Тез. докл. — Ростов-на-Дону, 1997. — С. 64—65.

[92] Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М.: КомКнига, 2006.

[93] Хелемский А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомология. — М.: Наука, 1989.

[94] Чермных В. В. Пучковые представления полуколец: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. — М.: МПГУ, 1993.

[95] Чермных В. В. О полноте пучковых представлений полуколец // Фундамент. и прикл. матем. — 1996. — Т. 2, вып. 1. — С. 267—277.

[96] Чермных В. В. Полукольца. — Киров: Изд-во Вятского гос. пед. ун-та, 1997.

[97] Чермных В. В. Полукольца сечений пучков // Вестн. Вятского гос. гуман. ун-та. — 2005. — № 13. — С. 151—158.

[98] Чермных В. В. Функциональные представления полуколец и полумодулей: Автореф. дис.... докт. физ.-мат. наук. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2007.

[99] Чермных В. В. Функциональные представления полуколец. — Киров: Изд-во Вятского гос. гуман. ун-та, 2010.

[100] Чермных В. В. Функциональные представления полуколец // Фундамент. и прикл. матем. — 2012. — Т. 17, вып. 3. — С. 111—227.

[101] Чупраков Д. В. О максимальных конгруэнциях на полукольцах непрерывных функций с идемпотентным сложением // Матем. вестн. педвузов и ун-тов Волго-Вятского региона. — 2008. — Вып. 10. — С. 99—110.

[102] Чупраков Д. В. О ретрактах решёток конгруэнций полуколец непрерывных функций // Лобачевские чтения: матер. VI молодёжной школы-конференции. — Казань, 2008. — С. 241—243.

[103] Чупраков Д. В. О ядрах полуполей непрерывных функций // Междунар. алгебр. конф., посвящ. 100-летию со дня рожд. А. Г. Куроша. Тез. докл. — Москва, 2008. — С. 251—253.

[104] Чупраков Д. В. Дополнения конгруэнций в полукольцах непрерывных функций // Матем. вестн. педвузов и ун-тов Волго-Вятского региона. — 2009. — Вып. 11. — С. 122—127.

[105] Чупраков Д. В. Конгруэнции на полукольцах и полуполях непрерывных числовых функций: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. — Казань: КГУ, 2009.

[106] Чупраков Д. В. Условия дистрибутивности решёток конгруэнций полуколец непрерывных функций // Вестн. Удмуртского ун-та. Матем. Механ. Комп. науки. — 2009. — № 3. — С. 128—134.

[107] Шалагинова Н. В. Три пучка для полуколец непрерывных функций // Лобачевские чтения-2010. Матер. IX молодёжной науч. школы-конференции. — Казань, 2010. — С. 367—372.

[108] Шалагинова Н. В. О полукольцах ростков непрерывных неотрицательных функций // Науч.-техн. вестн. Поволжья. — 2011. — № 3. — С. 40—43.

[109] Шалагинова Н. В. Максимальные идеалы частичных полуколец непрерывных $[0,\infty]$-значных функций // Актуальные проблемы математики, механики, информатики-2013. Сб. тез. молодёжной науч.-практ. конф. с междунар. участ. — Пермь, 2013. — С. 178.

[110] Шалагинова Н. В. О полукольцах непрерывных функций со значениями в $(0,\infty]$ // Лобачевские чтения-2015. Матер. XIV молодёжной науч. школы-конференции. — Казань, 2015. — Т. 52. — С. 170—171.

[111] Шалагинова Н. В., Вечтомов Е. М. Конгруэнции на полукольце $(0,\infty]^n$ // Фундаментальные и прикладные проблемы механики, математики, информатики. Сб. докл. всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием. — Пермь, 2015. — С. 35—39.

[112] Широков Д. В. Условия дистрибутивности решётки конгруэнций полуполя непрерывных положительных функций // Вестн. Вятского гос. гуман. ун-та. — 2003. — № 8. — С. 137—140.

[113] Широков Д. В. Идеалы в полукольцах непрерывных функций: Автореф. дис.... канд. физ.-мат. наук. — М.: МПГУ, 2005.

[114] Широков Д. В. Идеалы полуколец непрерывных неотрицательных функций: чистота и проективность // Вестн. Вятского гос. гуман. ун-та. — 2005. — № 12. — С. 201—210.

[115] Широков Д. В. Инъективность по Бэру для полуколец непрерывных неотрицательных функций // Матем. вестн. педвузов и ун-тов Волго-Вятского региона. — 2005. — Вып. 7. — С. 94—104.

[116] Широков Д. В. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: плоские идеалы и полукольцевые характеризации топологических свойств // Вестн. Вятского гос. гуман. ун-та. Информ. Матем. Язык. — 2005. — № 13. — С. 166—170.

[117] Широков Д. В. Свойства идеалов полуколец непрерывных неотрицательных функций // Междунар. алгебр. конф. к 100-летию со дня рожд. П. Г. Конторовича и 70-летию Л. Н. Шеврина. Тез. докл. — Екатеринбург, 2005. — С. 118—120.

[118] Шитов Я. Н. Линейная алгебра над полукольцами: Автореф. дис.... докт. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2015.

[119] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.

[120] Acharyya S. K., Chattopalhyay K. S., Ray G. G. Hemirings, congruences and the Stone—Čech compactification // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 1993. — Vol. 67. — P. 21—35.

[121] Acharyya S. K., Chattopalhyay K. S., Ray G. G. Hemirings, congruences and the Hewitt realcompactification // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 1995. — Vol. 2, no. 1. — P. 47—58.

[122] Araujo J. Multiplicative bijections of semigroups of interval-valued continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc. — 2009. — Vol. 137. — P. 171—178.

[123] Artamonova I. I., Chermnykh V. V., Mikhalev A. V., Varankina V. I., Vechtomov E. M. Semirings: sheaves and continuous functions // Semigroups with Applications, Including Semigroup Rings. Proc. of Int. Conf. — Sankt-Petersburg, 1999. — P. 23—58.

[124] Cabello Sánchez F., Cabello Sánchez J., Ercan Z., Önal S. Memorandum on multiplicative bijections and order // Semigroup Forum. — 2009. — Vol. 79, no. 1. — P. 193—209.

[125] Day B. J. Gelfand dualities over topological fields // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. — 1982. — Vol. 32, no. 2. — P. 171—177.

[126] Gillman L., Henriksen M. Concerning rings of continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1954. — Vol. 77, no. 2. — P. 340—362.

[127] Gillman L., Henriksen M. Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal // Trans. Amer. Math. Soc. — 1956. — Vol. 8, no. 2. — P. 366—391.

[128] Gillman L., Henriksen M., Jerison M. On a theorem of Gelfand and Kolmogoroff concerning maximal ideals in rings of continuous functions // Proc. Amer. Math. Soc. — 1954. — Vol. 5, no. 3. — P. 447—455.

[129] Gillman L., Jerison M. Rings of Continuous Functions. — Preston: Van Nostrand, 1960.

[130] Golan J. S. Semirings and Their Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.

[131] Henriksen M. Rings of Continuous Functions from an Algebraic Point of View. Ordered Algebraic Structures. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1989.

[132] Henriksen M. Rings of continuous functions in the 1950s // Handbook of the History of General Topology. — 1997. — Vol. 1. — P. 243—253.

[133] Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions. I // Trans. Amer. Math. Soc. — 1948. — Vol. 64, no. 1. — P. 45—99.

[134] Idempotency / J. Gunawardena, ed. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.

[135] Ipate D., Lupu R. About rings of continuous functions in the expanded field of numbers // Bul. Acad. Şti. Rep. Moldova, Mat. — 2010. — Vol. 1, no. 62. — P. 47—54.

[136] Kaplansky I. Topological rings // Amer. Math. J. — 1947. — Vol. 69, no. 2. — P. 153—183.

[137] Marovt J. Multiplicative bijections of $C(X, I)$ // Proc. Amer. Math. Soc. — 2005. — Vol. 134, no. 4. — P. 1065—1075.

[138] Milgram A. N. Multiplicative semigroups of continuous functions // Duke Math. J. — 1949. — Vol. 16, no. 2. — P. 377—383.

[139] Nagata J. On lattices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces // Osaka Math. J. — 1949. — Vol. 1, no. 2. — P. 166—181.

[140] Shalaginova N. V., Vechtomov E. M. To the theory of partial semirings of continuous $[0, \infty]$-valued functions // Lobachevskii J. Math. — 2015. — Vol. 36, no. 4. — P. 341—348.

[141] Slowikowski W., Zawadowsci A. A generalization of maximal ideals method of Stone and Gelfand // Fund. Math. — 1955. — Vol. 4, no. 2. — P. 215—231.

[142] Stone M. H. The theory of representations for Boolean algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1936. — Vol. 40, no. 1. — P. 3—111.

[143] Stone M. H. Applications of the theory of Boolean rings to general topology // Trans. Amer. Math. Soc. — 1937. — Vol. 41, no. 3. — P. 375—481.

[144] Vandiver H. S. Note on a simple type of algebra in which cancellation law of addition does not hold // Bull. Amer. Math. Soc. — 1934. — Vol. 40. — P. 914—920.

[145] Vechtomov E. M. Rings and sheaves // J. Math. Sci. — 1995. — Vol. 74, no. 1. — P. 749—798.

[146] Vechtomov E. M. Rings of continuous functions with values in a topological division ring // J. Math. Sci. — 1996. — Vol. 78, no. 6. — P. 702—753.