U-проекторы и поля U-инвариантов*

К. А. ВЯТКИНА
Самарский университет
e-mail: vjatkina.k@gmail.com

А. Н. ПАНОВ
Самарский университет
e-mail: apanov@list.ru

УДК 512.745

Ключевые слова: поле инвариантов, редуктивная группа, теория инвариантов, нильпотентная алгебра Ли.

Аннотация

В работе предлагается общая конструкция U-проектора (гомоморфизма алгебры в поле U-инвариантов, тождественного на подалгебре U-инвариантов). Показывается, как использование U-проектора позволяет находить системы свободных образующих полей U-инвариантов для представлений редуктивных групп.

Abstract

K. A. Vyatkina, A. N. Panov, U-projectors and fields of U-invariants, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 2, pp. 133—144.

We present the general construction of the U-projector (the homomorphism of an algebra into its field of U-invariants identical on the subalgebra of U-invariants). It is shown how to apply the U-projector to find the systems of free generators of the fields of U-invariants for representations of reductive groups.

1. Введение

Известно, что поля инвариантов групп треугольных преобразований аффинных алгебраических многообразий рациональны (см. [1, 6, 7]). Цель этой работы — построить для конкретных примеров системы функций, свободно порождающих поля инвариантов. Для этого вводится понятие U-проектора (гомоморфизма алгебры $K[X]$ на поле инвариантов $K(X)^U$, тождественного на $K[X]^U$). В разделе 2 мы доказываем существование U-проектора и предлагаем его общую конструкцию. Кроме этого, мы показываем, что, применяя U-проектор к подходящей системе функций $b_1, \ldots, b_m$, можно получить систему функций $P(b_1), \ldots, P(b_m)$, свободно порождающих поле U-инвариантов.

Отметим, что предложенный общий метод построения U-проектора реализуется индукцией по длине цепочки идеалов и, поскольку длина цепочки может

*Работа поддержана грантами РФФИ 16-01-00154 и 14-01-97017-регион-Поволжье-а.

быть достаточно длинной, не даёт конкретных формул для U-проектора. Однако априори U-проектор не является единственным. В разделах 3—5 мы возвращаемся к задаче построения U-проектора в конкретных примерах. При этом мы стремимся усовершенствовать предложенную выше конструкцию U-проектора, сделать её как можно более явной. Также мы хотим в примерах указать явный вид системы функций $b_1, \ldots, b_m$, для которой $P(b_1), \ldots, P(b_m)$ свободно порождает поле U-инвариантов. Основные результаты сформулированы в теоремах 2.2, 2.3, 3.2, 4.2, 5.1. Отметим, что в [3] предлагается другой подход к описанию образующих элементов поля U-инвариантов присоединённого представления.

2. Общая конструкция U-проектора

Пусть $\mathfrak{u}$ — нильпотентная алгебра Ли над полем K нулевой характеристики, $U = \exp(\mathfrak{u})$ — соответствующая группа, $\mathcal{A}$ — коммутативная ассоциативная конечно порождённая алгебра, определённая над полем K, без делителей нуля, $\mathcal{F}$ — поле частных $\mathrm{Frac}(\mathcal{A})$. Пусть D — гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{u}$ в алгебру Ли локально нильпотентных дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$. Тогда группа U действует в A по формуле $g(a) = \exp D_x(a)$, $g = \exp(x)$. Кольцо (поле) U-инвариантов совпадает с кольцом (полем) $\mathfrak{u}$-инвариантов. Поле U-инвариантов $\mathcal{F}^U$ является полем частных кольца U-инвариантов $\mathcal{A}^U$ [2, теорема 3.3]. Известно, что поле $\mathcal{F}^U$ является чисто трансцендентным расширением основного поля K (см. [1, 6, 7]).

Будем называть *U-проектором* произвольный гомоморфизм $P\colon \mathcal{A} \to \mathcal{F}^U$, тождественный на $\mathcal{A}^U$. Ниже мы предложим общую конструкцию U-проектора. В терминах U-проектора можно построить систему свободных образующих поля инвариантов $\mathcal{F}^U$.

Зафиксируем цепочку идеалов

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_n \supset \mathfrak{u}_{n-1} \supset \ldots \supset \mathfrak{u}_1 \supset \mathfrak{u}_0 = 0,$$

где $\mathrm{codim}(\mathfrak{u}_i, \mathfrak{u}_{i+1}) = 1$. Для каждой пары $\mathfrak{u}_i \supset \mathfrak{u}_{i-1}$ подалгебра инвариантов $\mathcal{A}^{\mathfrak{u}_i}$ содержится в $\mathcal{A}^{\mathfrak{u}_{i-1}}$ и $\mathcal{A}^{\mathfrak{u}_0} = \mathcal{A}$. Пусть i_1 — наименьший номер, для которого $\mathcal{A}^{\mathfrak{u}_{i_1}} \neq \mathcal{A}$. Зафиксируем $x_{i_1} \in \mathfrak{u}_{i_1} \setminus \mathfrak{u}_{i_1-1}$.

Лемма 2.1. *Существуют элементы $a_{1,1} \in \mathcal{A}$, $a_{1,0} \in \mathcal{A}^{\mathfrak{u}}$, $a_{1,0} \neq 0$, такие что*

$$D_{x_{i_1}}(a_{1,1}) = a_{1,0}. \tag{1}$$

Доказательство. Поскольку $D_{x_{i_1}}$ — локально нильпотентное дифференцирование, то существуют $a_{1,1} \in \mathcal{A}$, $a_{1,0} \in \mathcal{A}^{\mathfrak{u}_{i_1}}$, $a_{1,0} \neq 0$. Осталось показать, что можно выбрать $a_{1,0} \in \mathcal{A}^{\mathfrak{u}}$. Действительно, для любого $y \in \mathfrak{u}$ элемент $[y, x_{i_1}]$ содержится в $\mathfrak{u}_{i_1-1}$. Поэтому $D_{[y,x_{i_1}]}(a) = 0$ для любого $a \in \mathcal{A}$. Тогда

$$D_y(a_{1,0}) = D_y D_{x_{i_1}}(a_{1,1}) = D_{x_{i_1}} D_y(a_{1,1}) + D_{[y,x_{i_1}]}(a_{1,1}) = D_{x_{i_1}} D_y(a_{1,1}). \tag{2}$$

Из (2) вытекает, что наименьшее инвариантное относительно $D_{\mathfrak{u}}$ подпространство $\langle a_{1,0}\rangle$, содержащее $a_{1,0}$, содержится в $\operatorname{Im} D_{x_{i_1}}$. Подпространство $\langle a_{1,0}\rangle$ конечномерно, поскольку $\mathfrak{u}$ — конечномерная нильпотентная алгебра Ли и каждое дифференцирование D_y локально нильпотентно. Представление $D_{\mathfrak{u}}$ приводится в $\langle a_{1,0}\rangle$ к треугольному виду. Существует ненулевой вектор, аннулируемый всеми D_y, $y \in \mathfrak{u}$. Можно считать, что это вектор $a_{1,0}$. $\square$

Рассмотрим $a_{1,0}$ и $a_{1,0}$ из леммы 2.1. Элемент $Q_1 = a_{1,1}a_{1,0}^{-1}$ содержится в локализации $\mathcal{A}_1$ алгебры $\mathcal{A}$ по системе знаменателей, порождённой $a_{1,0}$, и удовлетворяет $D_{x_{i_1}}(Q_1) = 1$. Рассмотрим линейное отображение $S_1\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}_1^{\mathfrak{u}_{i_1}}$, определённое формулой

$$S_1(a) = a - D_{x_{i_1}}(a)Q_1 + D_{x_{i_1}}^2(a)\frac{Q_1^2}{2!} + \ldots + D_{x_{i_1}}^k(a)\frac{Q_1^k}{k!} + \ldots . \tag{3}$$

Отображение S_1 является гомоморфизмом алгебр, тождественным на $\mathcal{A}^{\mathfrak{u}_{i_1}}$. Представление D алгебры Ли $\mathfrak{u}$ продолжается на $\mathcal{A}_1$, каждое дифференцирование D_y остаётся локально нильпотентным на $\mathcal{A}_1$. Отображение S_1 продолжается до гомоморфизма $\mathcal{A}_1$ на $\mathcal{A}_1^{\mathfrak{u}_{i_1}}$, тождественного на $\mathcal{A}_1^{\mathfrak{u}_{i_1}}$.

Подалгебра $\mathcal{A}_1^{\mathfrak{u}_{i_1}}$ инвариантна относительно всех D_x, $x \in \mathfrak{u}$. Заменим $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}_1^{\mathfrak{u}_{i_1}}$ и будем рассуждать аналогично вышеизложенному. Пусть i_2 — наименьший номер, для которого $\mathcal{A}_1^{\mathfrak{u}_{i_2}} \neq \mathcal{A}_1^{\mathfrak{u}_{i_1}}$. Выберем $x_2 \in \mathfrak{u}_{i_2} \setminus \mathfrak{u}_{i_2-1}$. Как и выше, существуют элементы $a_{2,1} \in \mathcal{A}_1^{\mathfrak{u}_{i_1}}$ и $a_{2,0} \in \mathcal{A}_1^{\mathfrak{u}}$, $a_{2,0} \neq 0$, такие что

$$D_{x_{i_2}}(a_{2,1}) = a_{2,0}.$$

Обозначим через $\mathcal{A}_2$ локализацию алгебры $\mathcal{A}$ по системе знаменателей, порождённой $a_{1,0}$, $a_{2,0}$. Рассмотрим элемент $Q_2 = a_{2,1}a_{2,0}^{-1}$ из алгебры $\mathcal{A}_2$. Построим гомоморфизм $S_2\colon \mathcal{A}_1^{\mathfrak{u}_{i_1}} \to \mathcal{A}_2^{\mathfrak{u}_{i_2}}$ аналогично (3).

Продолжая процесс, получаем цепочку $n \geqslant i_m > \ldots > i_2 > i_1 \geqslant 1$, наборы элементов $a_{k,0} \in \mathcal{A}^{\mathfrak{u}}$ и $a_{k,1} \in \mathcal{A}$, удовлетворяющие (1), и отображения $S_1, S_2, \ldots S_m$, где каждое S_k — гомоморфизм $\mathcal{A}_{k-1}^{\mathfrak{u}_{k-1}} \to \mathcal{A}_k^{\mathfrak{u}_k}$, тождественный на $\mathcal{A}_{k-1}^{\mathfrak{u}_k}$. Обозначим через $\mathcal{A}_*$ локализацию алгебры $\mathcal{A}$ по системе знаменателей, порождённой $a_{1,0}, a_{2,0}, \ldots, a_{m,0}$. Рассмотрим отображение

$$P = S_m \circ \cdots \circ S_2 \circ S_1.$$

Из сказанного ранее вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Отображение P — гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}_*^{\mathfrak{u}}$, тождественный на $\mathcal{A}^{\mathfrak{u}}$, т. е. P — U-проектор.*

Замечание. Поскольку $\{a_{k,0}\} \subset \mathcal{A}^{\mathfrak{u}}$, то проектор P продолжается до проектора $\mathcal{A}_* \to \mathcal{A}_*^{\mathfrak{u}}$, тождественного на $\mathcal{A}_*^{\mathfrak{u}}$.

Пусть группа U рационально действует на неприводимом аффинном алгебраическом многообразии X, определённом над полем K. Тогда группа U естественно действует в алгебре функций $K[X]$ по формуле

$$T_g f(x) = f(g^{-1}x).$$

Любая регулярная функция на X содержится в некотором конечномерном инвариантом подпространстве [2, лемма 1.4]. Представление $D = d_e T$ алгебры Ли $\mathfrak{u}$ в этом подпространстве нильпотентно. Поэтому для любого $x \in \mathfrak{u}$ оператор D_x является локально нильпотентным дифференцированием алгебры $\mathcal{A} = K[X]$. Как и выше, определены рациональные функции $a_{k,0}(x)$, $a_{k,1}(x)$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Отметим, что $\{a_{k,0}(x)\}$ являются U-инвариантами, причём $a_{1,0}$ и $a_{1,1}$ регулярны, и $a_{k,0}(x)$, $a_{k,1}(x)$ принадлежат локализации алгебры регулярных функций по множеству знаменателей, порождённому $a_{i,0}(x)$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Рассмотрим U-инвариантное открытое подмножество

$$X_0 = \{x \in X_0 \colon a_{k,0}(x) \neq 0,\ 1 \leqslant k \leqslant m\}$$

и подмножество в нём

$$\mathfrak{S} = \{x \in X_0 \colon a_{k,1}(x) = 0,\ 1 \leqslant k \leqslant m\}.$$

Определено отображение ограничения $\mathrm{Res} \colon K[X_0] \to K[\mathfrak{S}]$.

Теорема 2.3. *Предположим, что элементы $\{a_{k,1} \colon 1 \leqslant k \leqslant m\}$ порождают определяющий идеал для подмножества $\mathfrak{S}$ в алгебре $K[X_0]$. Пусть $b_1, \ldots, b_s \in \mathcal{A}$ — система элементов, такая что*

$$\mathrm{Res}(b_1), \ldots, \mathrm{Res}(b_s), \mathrm{Res}(a_{0,0})^{\pm 1}, \ldots, \mathrm{Res}(a_{m,0})^{\pm 1}$$

порождают алгебру $K[\mathfrak{S}]$. Тогда $P(b_1), \ldots, P(b_s), a_{0,0}^{\pm 1}, \ldots, a_{m,0}^{\pm 1}$ порождают алгебру инвариантов $K[X_0]^U$. В частности, $P(b_1), \ldots, P(b_s), a_{0,0}^{\pm 1}, \ldots, a_{m,0}^{\pm 1}$ порождают поле инвариантов $K(X)^U$.

Доказательство. Ограничение Res на подалгебру U-инвариантов будем обозначать Res_U. Поскольку все $\mathrm{Res}(Q_i)$ равны нулю на $\mathfrak{S}$, то

$$\mathrm{Res} = \mathrm{Res}_U \circ P.$$

По условию

$$\mathrm{Res}_U P(b_1), \ldots, \mathrm{Res}_U P(b_s), \mathrm{Res}_U(a_{0,0})^{\pm 1}, \ldots, \mathrm{Res}_U(a_{m,0})^{\pm 1}$$

порождают алгебру $K[\mathfrak{S}]$. Для доказательства утверждения достаточно показать, что Res_U — изоморфизм алгебры $K[X_0]^U$ на $K[\mathfrak{S}]$. Действительно, образ $\mathrm{Im}(\mathrm{Res}_U)$ совпадает с $K[\mathfrak{S}]$. Покажем, что $\mathrm{Ker}(\mathrm{Res}_U) = 0$. Если f — U-инвариант и $\mathrm{Res}_U(f) = 0$, то $\mathrm{Res}(f) = 0$. Тогда

$$f = \varphi_1 a_{1,1} + \ldots + \varphi_m a_{m,1}$$

для некоторых $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in K[X_0]$, и

$$f = P(f) = P(\varphi_1)P(a_{1,1}) + \ldots + P(\varphi_m)P(a_{m,1}). \tag{4}$$

Покажем, что $P(a_{k,1}) = 0$ для любого $1 \leqslant k \leqslant m$.

Поскольку функция $a_{k,1}$ инвариантна относительно $\mathfrak{u}_{i_k}$, то $S_i(a_{k,1}) = a_{k,1}$ для любого $1 \leqslant i < k$. Из формулы (3) вытекает, что $S_k(a_{k,1}) = 0$. Тогда

$$S_k S_{k-1} \cdots S_1(a_{k,1}) = S_k(a_{k,1}) = 0$$

для всех $1 \leqslant k \leqslant m$. Следовательно, $P(a_{k,1}) = 0$ для любого k. Из (4) вытекает, что $f = 0$. $\square$

3. U-проекторы для присоединённых представлений

Цель этого раздела — построить в явном виде U-проектор для присоединённого представления редуктивной расщепимой группы. Пусть G — связная расщепимая редуктивная группа над полем K нулевой характеристики, $\mathfrak{g}$ — её алгебра Ли, Δ — система корней относительно подалгебры Картана $\mathfrak{h}$ (Δ^+ — система положительных корней),

$$\mathfrak{u} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} K E_\alpha \text{ —}$$

стандартная максимальная унипотентная подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$. С помощью формы Киллинга отождествим $\mathfrak{g}$ с $\mathfrak{g}^*$ и алгебру регулярных функций $K[\mathfrak{g}]$ с симметрической алгеброй $\mathcal{S}(\mathfrak{g}) = K[\mathfrak{g}^*]$. Присоединённое представление ad_x алгебры Ли $\mathfrak{g}$ продолжается до представления $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ дифференцированиями $D_x(a) = \{x, a\}$, где $x \in \mathfrak{g}$, $a \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$ и $\{\cdot,\cdot\}$ — естественная скобка Пуассона в $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$. Если $x = E_\alpha$, будем использовать обозначение $D_\alpha = D_{x_\alpha}$.

Пусть $\xi = \xi_1$ — один из максимальных корней в Δ^+. Рассмотрим подмножество Δ_2 системы корней, состоящее из $\alpha \in \Delta$, для которых $(\alpha, \xi) = 0$. Подмножество Δ_2 является системой корней для редуктивной подалгебры

$$\mathfrak{g}_2 = \{x \in \mathfrak{g}\colon [x, E_\xi] = 0\}.$$

Подалгебра $\mathfrak{g}_2$ содержит максимальную нильпотентную подалгебру $\mathfrak{u}_2$, натянутую на E_α, где α пробегает множество положительных корней Δ_2^+ в Δ_2.

Множество Δ^+ распадается на два подмножества $\Delta^+ = \Gamma \cup \Delta_2^+$, где Γ состоит из корней, для которых $(\alpha, \xi) > 0$. Подмножество Γ содержит ξ; введём обозначение $\Gamma^0 = \Gamma \setminus \{\xi\}$. Для любого $\alpha \in \Gamma^0$ существует единственный корень $\alpha' \in \Gamma^0$, такой что $\alpha + \alpha' = \xi$ (см. [5]). Подалгебра Ли $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1$, порождённая E_α, $\alpha \in \Gamma$, изоморфна алгебре Гейзенберга и является идеалом в $\mathfrak{u}$.

Элемент E_ξ аннулируется всеми дифференцированиями D_x, $x \in \mathfrak{u}$. Дифференцирования D_x продолжаются до дифференцирований локализации $\mathcal{S}'(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ по множеству знаменателей, порождённому E_ξ. Для элемента

$$Q_\xi = -\frac{1}{2} H_\xi E_\xi^{-1} \in \mathcal{S}'(\mathfrak{g}) \tag{5}$$

выполняется равенство $D_\xi(Q_\xi) = 1$. Следуя формуле (3), построим проектор S_ξ алгебры $\mathcal{S}'(\mathfrak{g})$ на подалгебру D_ξ-инвариантов. Для каждого $\alpha \in \Gamma_0$ элемент

$$Q_\alpha = -\frac{1}{N_{\alpha,\alpha'}} E_{\alpha'} E_\xi^{-1} \in \mathcal{S}'(\mathfrak{g}) \tag{6}$$

удовлетворяет соотношению $D_\alpha(Q_\alpha) = 1$. Как и выше, для любого $\alpha \in \Gamma_0$ построим проектор S_α. Отображение

$$P_1 = \left(\prod_{\alpha\in\Gamma_0} S_\alpha \right) \circ S_\xi \tag{7}$$

является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ в подалгебру инвариантов $\mathcal{S}'(\mathfrak{g})^{\mathfrak{n}_1}$, тождественным на $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{n}_1}$. Отображение P_1 продолжается до проектора $\mathcal{S}'(\mathfrak{g})$ на подалгебру $\mathcal{S}'(\mathfrak{g})^{\mathfrak{n}_1}$. Заметим, что в формуле (7) произведение не зависит от порядка сомножителей.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathfrak{m}$ — алгебра Гейзенберга, $[\mathfrak{m},\mathfrak{m}] = Kz$, $\mathcal{S}(\mathfrak{m})_z$ — локализация $\mathcal{S}(\mathfrak{m})$ по множеству знаменателей, порождённому z. Пусть $\mathfrak{m}_0$ — подпространство, дополнительное к Kz в $\mathfrak{m}$. Тогда для всякого дифференцирования D алгебры $\mathfrak{m}$, удовлетворяющего $D(z) = 0$ и $D(\mathfrak{m}_0) \subseteq \mathfrak{m}_0$, существует единственный элемент $b_D \in (\mathfrak{m}_0)^2 z^{-1} \in \mathcal{S}(\mathfrak{m})_z$, такой что $D(a) = \{b_D, a\}$ для любого $a \in \mathfrak{m}$.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 4.6.8 в [4]. □

Любой элемент $x \in \mathfrak{g}_2$ определяет дифференцирование $D_x(a) = [x,a]$ алгебры Гейзенберга $\mathfrak{n}$, причём $D_x(E_\xi) = 0$, и D сохраняет подпространство $\mathfrak{n}_0 = \operatorname{span}\{E_\alpha \colon \alpha \in \Gamma_0\}$. По лемме 3.1 существует единственный элемент $b_x \in \mathfrak{n}_0^2 E_\xi^{-1}$, такой что $D_x(a) = \{b_x, a\}$. Тогда для элемента $\tilde{x} = x - b_x$ из $\mathcal{S}'(\mathfrak{g})$ получаем, что $[\tilde{x}, \mathfrak{n}] = 0$. Для любых $x, y \in \mathfrak{g}_2$ имеем

$$\{\tilde{x}, \tilde{y}\} = \{x - b_x, y - b_y\} = \{x, y - b_y\} = \{x, y\} - \{x, b_y\}.$$

Поскольку $\{x, y\} = [x, y] \in \mathfrak{g}_2$ и $\{x, b_y\} \in \mathfrak{n}_0^2 E_\xi^{-1}$, то согласно лемме 3.1 получаем, что $\{x, b_y\} = b_{[x,y]}$. Отсюда следует, что

$$\widetilde{[x,y]} = \{\tilde{x}, \tilde{y}\} \tag{8}$$

для любых $x, y \in \mathfrak{g}_2$. Подмножество $\tilde{\mathfrak{g}}_2 = \{\tilde{x} \colon x \in \mathfrak{g}_2\}$ является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона в $\mathcal{S}'(\mathfrak{g})$, изоморфной $\mathfrak{g}_2$. Применяя (8), получаем, что

$$\widetilde{D_x(y)} = \widetilde{[x,y]} = \{\tilde{x}, \tilde{y}\} = \{x - b_x, y - b_y\} = D_x(\widetilde{y}) \tag{9}$$

для любых $x, y \in \mathfrak{g}_2$.

Аналогично тому, как это делалось для $\mathfrak{g}$, в Δ_2^+ выделяем максимальный корень ξ_2, подсистему положительных корней Γ_2, подалгебры $\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{g}_3$ в $\mathfrak{g}_2$. Элемент Q_{ξ_2} определяется аналогично тому, как это делалось для ξ с заменой H_ξ на $\tilde{H}_{\xi_2}$ и E_ξ на $\tilde{E}_{\xi_2}$ в формуле (5). Элемент Q_{ξ_2} содержится в подалгебре $\mathcal{S}''(\mathfrak{g})$, локализации $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ по системе знаменателей, порождённой E_{ξ_1} и $\tilde{E}_{\xi_2}$. Элементы E_{ξ_1} и $\tilde{E}_{\xi_2}$ оба являются $\mathfrak{u}$-инвариантами.

Применяя (9), имеем, что $D_{\xi_2}(Q_{\xi_2}) = 1$. Следуя формуле (3), определяем оператор S_{ξ_2}. Легко показать, что если $a \in \mathcal{S}'(\mathfrak{g})^{\mathfrak{n}_1}$, то $S_{\xi_2}(a)$ также содержится в $\mathcal{S}'(\mathfrak{g})^{\mathfrak{n}_1}$.

Аналогично S_{ξ_2} определяется S_α для любого $\alpha \in (\Gamma_2)_0 = \Gamma_2 \setminus \xi_2$. Отображение

$$P_2 = \Big(\prod_{\alpha \in (\Gamma_2)_0} S_\alpha\Big) \circ S_{\xi_2} \tag{10}$$

является гомоморфизмом алгебры $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ в подалгебру инвариантов $\mathcal{S}''(\mathfrak{g})^{\mathfrak{n}_2}$, тождественным на $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{n}_2}$. Оператор P_2 продолжается до проектора $\mathcal{S}''(\mathfrak{g})$ на подалгебру $\mathcal{S}''(\mathfrak{g})^{\mathfrak{n}_2}$. Если $a \in \mathcal{S}''(\mathfrak{g})^{\mathfrak{n}_1}$, то $P_2(a)$ инвариантен относительно всех D_x, $x \in \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$. Поэтому отображение $P_2 \circ P_1$ — гомоморфизм алгебр

$$\mathcal{S}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{S}''(\mathfrak{g})^{\mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2},$$

постоянный на $(\mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2)$-инвариантах в $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$.

Продолжая процесс, получаем последовательность положительных корней $\xi = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, которая называется *каскадом Костанта*. Максимальная нильпотентная подалгебра $\mathfrak{u}$ разлагается в сумму подалгебр Гейзенберга $\mathfrak{u} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{n}_m$, причём $[\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_j] \subset \mathfrak{n}_i$ для всех $i < j$.

Определим цепочку редуктивных подалгебр $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{g}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_m$ с системами корней $\Delta = \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_m$; каждый ξ_i — максимальный корень в Δ_i. Индукцией по i определяются проекторы $P_1, P_2, \ldots, P_m$, для которых любая композиция $P_i \circ \cdots \circ P_1$ является проектором алгебр $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ в подалгебру $(\mathfrak{n}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{n}_i)$-инвариантов в локализации алгебры $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ по системе знаменателей, порождённой

$$\Xi_i = \{E_{\xi_1}, \tilde{E}_{\xi_2}, \ldots, \tilde{\tilde{E}}_{\xi_i}\}.$$

Пусть $\Xi = \Xi_m$ и $\mathcal{S}(\mathfrak{g})_*$ — локализация $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ по системе знаменателей, порождённой Ξ.

Теорема 3.2.

1. *Отображение $P = P_m \circ \ldots \circ P_1$ — гомоморфизм алгебры $\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ в $\mathcal{S}(\mathfrak{g})_*^U$, тождественный на $\mathcal{S}(\mathfrak{g})^U$, т. е. P является U-проектором для присоединённого представления группы G.*
2. *Пусть $\{H_i\}$ — базис в ортогональном дополнении к каскаду Костанта в $\mathfrak{h}$. Тогда система элементов*

$$\{P(E_{-\alpha})\colon \alpha \in \Delta^+\} \cup \{P(H_i)\} \cup \Xi$$

свободно порождает $\mathcal{S}(\mathfrak{g})_*^U$ (также свободно порождает поле U-инвариантов).

4. U-проекторы для произвольных представлений

В этом разделе будет предложена общая схема построения U-проектора для произвольного конечномерного представления. Как и в предыдущем разделе, K — поле характеристики нуль, $\mathfrak{g}$ — редуктивная расщепимая алгебра Ли над полем K, G — связная редуктивная подгруппа с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, B — борелевская подгруппа в G, содержащая подгруппу Картана H и максимальную унипотентную подгруппу $U = B'$, их алгебры Ли — $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{u}$.

Пусть V — произвольное конечномерное представление группы G. Это представление определяет представление $f(v) \to f(g^{-1}v)$ в алгебре $\mathcal{A} = K[V]$. Соответствующее представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в этом пространстве реализуется по формуле

$$D_x f(v) = -f(xv), \quad x \in \mathfrak{g}.$$

Для любого $x \in \mathfrak{u}$ оператор D_x является локально нильпотентным дифференцированием алгебры $\mathcal{A}$.

Разложим V в прямую сумму $V = W_0 \oplus W_1$, где W_0 — неприводимое подпредставление, а W_1 — его инвариантное дополнение. Предположим, что $\dim W_0 > 1$. Выберем в W_0 младший вектор v_0. Стабилизатор $\mathfrak{p}^-$ одномерного подпространства $\langle v_0 \rangle$ является параболической подалгеброй в $\mathfrak{g}$, содержащей $\mathfrak{h}$. Предположим, что $\mathfrak{p}^- \neq \mathfrak{g}$. Действуя на $\mathfrak{p}^-$ инволюцией Картана θ, получаем параболическую подалгебру $\mathfrak{p}$. Пересечение $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{p} \cup \mathfrak{p}^-$ является подалгеброй Леви в $\mathfrak{p}$ (и в $\mathfrak{p}^-$). Пусть $\mathfrak{m} = \mathrm{rad}(\mathfrak{p})$.

Здесь и далее порядок $\gamma_1 \leqslant \gamma_2$ на множестве весов означает, что разность $\gamma_2 - \gamma_1$ — сумма простых корней с неотрицательными коэффициентами.

Дополним v_0 до базиса $v_0, v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_n$ в V, удовлетворяющего следующим условиям:

1) если $v_i \in W_0$ и $v_j \in W_1$, то $i < j$;
2) пусть $E_{\alpha_1}, \ldots, E_{\alpha_k}$ — базис $\mathfrak{m}$ над K, тогда $v_i = E_{\alpha_i} v_0$, $1 \leqslant i \leqslant k$, — базис в $\mathfrak{m}v_0$ и $v_{k+1}, \ldots, v_n$ — базис в $\mathfrak{g}_1$-инвариантом дополнении к $\langle v_0 \rangle \oplus \mathfrak{m}v_0$ в V;
3) каждый вектор v_i является весовым для $\mathfrak{h}$, причём если $v_i, v_j \in W_0$ и $\mathrm{wt}(v_i) < \mathrm{wt}(v_j)$, то $i < j$ (что равносильно условию, что из $\alpha_i < \alpha_j$ вытекает $i < j$).

Пусть $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots, \omega_n$ — двойственный базис. Линейная форма ω_0 инвариантна относительно $\mathfrak{u}$; операторы D_x, $x \in \mathfrak{u}$, продолжаются до локально нильпотентных дифференцирований локализации $\mathcal{A}_{\omega_0}$ алгебры $\mathcal{A}$ по системе знаменателей, порождённой ω_0. Наша первая цель — построить проектор $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_{\omega_0}^{\mathfrak{m}}$.

Заметим, что для любого i линейная форма $D_{E_i}(\omega_j)$ принадлежит подпространству $\langle \omega_0, \ldots, \omega_{j-1} \rangle$. Более того, если $i > j$, то $D_{E_i}(\omega_j) = 0$. В случае $i = j$ имеет место $D_{E_j}(\omega_j) = -\omega_0$. Тогда для элемента $Q_j = -\omega_j \omega_0^{-1}$ и любого $i > j$ имеем, что

$$D_{E_i}(Q_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i > j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases} \tag{11}$$

Для каждого $1 \leqslant i \leqslant k$ построим отображение S_{α_i} согласно (3). Образуем отображение

$$P_0 = S_{\alpha_1} \circ \ldots \circ S_{\alpha_k}. \tag{12}$$

Лемма 4.1. *Оператор P_0 является гомоморфизмом $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}^{\mathfrak{m}}_{\omega_0}$, тождественным на $\mathcal{A}^{\mathfrak{m}}$; его ядро порождается (как идеал) элементами $\omega_1, \ldots, \omega_k$.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $S_{\alpha_j}(\omega_j) = 0$ для любого $1 \leqslant j \leqslant k$. Поскольку $D_{E_i}(\omega_j) = 0$ для $i > j$, то $S_{\alpha_i}(\omega_j) = \omega_j$ и

$$P_0(\omega_j) = S_{\alpha_1} \circ \cdots \circ S_{\alpha_k}(\omega_j) = S_{\alpha_1} \circ \cdots \circ S_{\alpha_j}(\omega_j) = 0.$$

Так как P_0 — гомоморфизм алгебр, то идеал I, порождённый $\omega_1, \ldots, \omega_k$, содержится в ядре P_0. С другой стороны, для $j = 0$ или $j > k$ образ $P_0(\omega_j)$ записывается в виде $P_0(\omega_j) = \omega_j + b$, где $b \in I$. Следовательно, $\operatorname{Ker}(P_0) = I$.

Поскольку $S_{\alpha_j}(a) = a$ для любого j и $\mathfrak{m}$-инварианта a, то $P_0(a) = a$. Покажем, что для любого $a \in \mathcal{A}_{\omega_0}$ образ $P_0(a)$ является $\mathfrak{m}$-инвариантом. Для любого $1 \leqslant s \leqslant k$ обозначим $P_0^{(s)} = S_{\alpha_s} \circ \ldots \circ S_{\alpha_k}$. Покажем индукцией по s, начиная с $s = k$, что

$$D_{\alpha_s}\big(P_0^{(s)}(a)\big) = \ldots = D_{\alpha_k}\big(P_0^{(s)}(a)\big) = 0.$$

Действительно, для $s = k$ имеем, что

$$D_{\alpha_k}\big(P_0^{(k)}(a)\big) = D_{\alpha_k}\big(S^{(k)}(a)\big) = 0.$$

Предположим, что утверждение доказано для $s+1$; докажем его для s. Очевидно, что

$$D_{\alpha_s}\big(P_0^{(s)}(a)\big) = D_{\alpha_s} S_{\alpha_s}\big(P_0^{(s+1)}(a)\big) = 0.$$

Пусть $t > s$. Индукцией по n легко показать, что для элементов произвольной алгебры Ли верно равенство

$$xy^n = (y - \operatorname{ad}_y)^n(x). \tag{13}$$

Применяя (13), получаем, что существуют операторы $L_1, \ldots, L_{k-t}$, такие что

$$D_{\alpha_t} S_{\alpha_s} = S_{\alpha_s} D_{\alpha_t} + L_1 D_{\alpha_{t+1}} + \cdots + L_{k-t} D_{\alpha_k}.$$

Тогда

$$D_{\alpha_t}\big(P_0^{(s)}(a)\big) = S_{\alpha_s} D_{\alpha_t}\big(P_0^{(s+1)}(a)\big) + L_1 D_{\alpha_{t+1}}\big(P_0^{(s+1)}(a)\big) + \ldots + L_{k-t} D_{\alpha_k}\big(P_0^{(s+1)}(a)\big).$$

Согласно предположению индукции $D_{\alpha_t}\big(P_0^{(s)}(a)\big) = 0$. □

Пусть G_1 — подгруппа в G, алгебра Ли которой совпадает с $\mathfrak{g}_1$. Проектор P_0 инвариантен относительно G_1. Действительно, поскольку $g_1 \mathfrak{m} g_1^{-1} = \mathfrak{m}$ для любого $g_1 \in G_1$, то проектор $g_1 P_0 g_1^{-1}$ имеет то же ядро и образ, что и P_0, и поэтому $g_1 P_0 g_1^{-1} = P_0$. Отсюда следует, что $g_1 P_0(a) = P_0(g_1 a)$.

Группа G_1 действует в подпространстве $V_1 = \langle v_0, v_{k+1}, \ldots, v_n \rangle$. Алгебра $\mathcal{A}_1 = K[V_1]$ является симметрической алгеброй

$$\mathcal{S}(V_1^*) = K[\omega_0, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_n].$$

Гомоморфизм P_0 — изоморфизм $K[\omega_0^{\pm 1}, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_n]$ на алгебру $\mathcal{A}^{\mathfrak{m}}_{\omega_0}$. Поскольку P_0 коммутирует с g_1, то P_0 осуществляет изоморфизм G_1-представлений V_1^* и $P_0(V_1^*)$.

Выберем в V_1 младший вектор v_0' для $\mathfrak{g}_1$ и продолжим процесс аналогично вышеизложенному. В итоге получаем цепочку подпространств

$$V \supset V_1 \supset \ldots \supset V_s$$

и цепочку редуктивных подалгебр

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_s,$$

в которой $\mathfrak{g}_s$ диагонализируемо действует в V_s. Получаем цепочку младших векторов

$$v_0, v_0', \ldots v_0^{(s-1)} \subset V_s$$

и соответствующих линейных форм

$$f_0 = \omega_0,\ f_1 = \omega_0', \ldots,\ f_{s-1} = \omega_0^{(s-1)} \subset V_s^* \subset V^*.$$

Дополним $\{f_1, \ldots, f_{s-1}\}$ до базиса $\{f_1, \ldots, f_{s-1}, \ldots, f_m\}$ в V_s^*. Для любого $1 \leqslant i \leqslant s-1$ зададим гомоморфизм P_i, определённый на локализации $\mathcal{A}_{\Lambda_i}$ алгебры $\mathcal{A}$ по системе знаменателей, порождённой

$$\Lambda_i = \{f_0, P_0(f_1), \ldots, P_{i-1} \circ \ldots \circ P_0(f_i)\}.$$

Обозначим $P = P_{s-1}$ и $\mathcal{A}_* = \mathcal{A}_{\Lambda_{s-1}}$.

Теорема 4.2.

1. *Отображение P — гомоморфизм алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{A}_*^U$, тождественный на $\mathcal{A}^U$, т. е. P — U-проектор для представления G в V.*
2. *Система элементов $\Lambda \cup \{P(f_i)\colon 1 \leqslant i \leqslant s-1\}$ свободно порождает $\mathcal{A}_*^U$ (и свободно порождает поле U-инвариантов).*

5. U-проектор на редуктивной группе

Пусть G как выше (т. е. связная редуктивная расщепимая группа, определённая над полем K нулевой характеристики). В пространстве $K[G]$ реализуется присоединённое представление группы G по формуле $R_g f(s) = f(g^{-1}sg)$. Наша цель в этом разделе — построить U-проектор для этого представления в алгебре $K[G]$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли для группы G. Пусть $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — набор простых корней в Δ^+ и $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ — набор фундаментальных весов, $\varphi_i(\alpha_j) = \delta_{ij}$. В каждом фундаментальном неприводимом представлении V_i со старшим весом φ_i выберем старший вектор v_i^+ и младший вектор v_i^-. В сопряжённом пространстве V_i^* выберем старший и младший векторы l_i^+ и l_i^-, удовлетворяющие соотношению $(v_i^-, l_i^+) = (v_i^+, l_i^-) = 1$. Матричный элемент $d_i(g) = (gv_i^+, l_i^+)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, является U-инвариантом. Обозначим через $K[G]_*$ локализацию алгебры $K[G]$ по системе знаменателей, порождённой $\{d_i(g)\colon 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

Перенумеруем положительные корни $\Delta^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ так, что из $\beta_t < \beta_s$ вытекает $t < s$. Любой корень $\beta_s \in \Delta^+$ либо простой (тогда β_s совпадает с некоторым $\alpha_{\nu(s)} \in \Pi$), либо имеет вид $\beta_s = \alpha_{\nu(s)} + \beta'_s$ для некоторых $\alpha_{\nu(s)} \in \Pi$ и $\beta'_s \in \Delta^+$. Зафиксируем простой корень $\alpha_{\nu(s)}$, удовлетворяющий перечисленным свойствам для β_s. Каждому $\beta_s \in \Delta^+$ поставим в соответствие матричный элемент

$$d_{\beta_s}(g) = (gv^+, E_{-\beta_s} l^+),$$

где $v^+ = v^+_{\nu(s)}$ и $l^+ = l^+_{\nu(s)}$. Тогда для любого $x \in \mathfrak{u}$ получаем

$$D_x d_{\beta_s}(g) = -(xgv^+, E_{-\beta_s} l^+) + (gxv^+, E_{-\beta_s} l^+) = (gv^+, xE_{-\beta_s} l^+). \tag{14}$$

Если $x = E_\beta$, то, как и выше, упростим обозначение: $D_\beta = D_{E_\beta}$. Из формулы (14) вытекает, что $D_{\beta_s} d_{\beta_t}(g) = 0$, если $s > t$, и

$$D_{\beta_s} d_{\beta_s}(g) = \varphi(H_{\beta_s}) d_{\nu(s)}(g).$$

Тогда для

$$Q_{\beta_s}(g) = d_{\beta_s}(g)\bigl(\varphi(H_{\beta_s}) d_{\nu(s)}(g)\bigr)^{-1}$$

имеем, что

$$D_{\beta_s} Q_{\beta_t}(g) = \begin{cases} 0, & \text{если } s > t, \\ 1, & \text{если } s = t. \end{cases} \tag{15}$$

Для каждого $1 \leqslant s \leqslant m$ построим отображение S_{β_s} по формуле (3). Определим оператор $P = S_{\beta_1} \circ \ldots \circ S_{\beta_m}$. Для любого $\beta_s \in \Delta^+$ рассмотрим матричный элемент $c_{\beta_s} = (gE_{-\beta_s} v^+, l^+)$.

Теорема 5.1.

1. *Оператор P является гомоморфизмом $K[G]_*$ на $K[G]_*^U$, тождественным на $K[G]_*^U$, т. е. является U-проектором.*
2. *Система рациональных функций*

$$\{d_i(g)\colon 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{P(c_{\beta_s})(g)\colon 1 \leqslant s \leqslant m\}$$

свободно порождает алгебру $K[G]_*^U$ (и также свободно порождает поле $K(G)^U$).

Доказательство. Первое утверждение вытекает из предыдущего. Докажем второе утверждение. Достаточна показать, что выбранные системы функций удовлетворяют условиям теоремы 2.3.

Условия $d_i \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, выделяют открытую клетку Брюа Bw_0B. Покажем, что система $\{d_{\beta_s}(g)\colon 1 \leqslant s \leqslant m\}$ порождает определяющий идеал I_{w_0B} подмножества w_0B в Bw_0B. Элемент g принадлежит Bw_0B, если g можно записать в виде $g = aw_0bh$, где $a = \exp(x) \in U$, $b = \exp(y) \in U$, $h \in H$ и

$$x = \sum_{\alpha \in \Delta^+} x_\alpha E_\alpha, \quad y = \sum_{\alpha \in \Delta^+} y_\alpha E_\alpha.$$

Идеал I_{w_0B} порождается $\{x_\beta\colon \beta \in \Delta^+\}$.

С другой стороны,

$$d_{\beta_s}(g) = (aw_0bhv^+, E_{-\beta_s}l^+) = \varphi_{\nu(s)}(h)(v^-, a^{-1}E_{-\beta_s}l^+) = \varphi_{\nu(s)}(h)f_s(x),$$

где $f_s(x)$ — полином от $\{x_\alpha\}$ вида

$$f_s(x) = cx_{\beta_s} + \text{полином от } \{x_{\beta_t}\colon t < s\},$$

причём $c \neq 0$. Поэтому идеал I_{w_0B} порождается $\{d_{\beta_s}(g)\colon 1 \leqslant s \leqslant m\}$.

Покажем, что $K[w_0B]$ порождается ограничениями $\{d_i(g), c_{\beta_s}(b)\}$ на w_0B. Действительно, $K[w_0B]$ порождается $\{\varphi_i(h), y_{\beta_s}\}$.

С другой стороны, $d_i(w_0bh) = (w_0bhv^+, l^+) = \varphi_i(h)$,

$$c_{\beta_s}(w_0bh) = (w_0bhE_{-\beta_s}v^+, l^+) = \varphi_{\nu(s)}(h)(bE_{-\beta_s}v^+, l^-) = \varphi_{\nu(s)}f'_s(y),$$

где $f'_s(y)$ — полином от $\{y_\alpha\}$ вида

$$f'_s(y) = cy_{\beta_s} + \text{полином от } \{y_{\beta_t}\colon t < s\},$$

причём $c \neq 0$. Отсюда следует, что $K[w_0B]$ порождается ограничениями $\{d_i(g), c_{\beta_s}(b)\}$ на w_0B. $\square$

Литература

[1] Винберг Э. Б. Рациональность поля инвариантов треугольной группы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1982. — № 2. — С. 23—24.

[2] Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — 1989. — Т. 55. — С. 137—309.

[3] Вяткина К. А., Панов А. Н. Поле U-инвариантов присоединённого действия группы $\mathrm{GL}(n, k)$ // Матем. заметки. — 2013. — Т. 93. — С. 144—147.

[4] Диксмье Ж. Универсальные обёртывающие алгебры. — М.: Мир, 1978.

[5] Joseph A. A preparation theorem for the prime spectrum of a semisimple Lie algebra // J. Algebra. — 1977. — Vol. 48. — P. 241—289.

[6] Miyata K. Invariants of certain groups // Nagoya Math. J. — 1971. — Vol. 41. — P. 69—73.

[7] Pukanszky L. Leçons sur les représentations des groupes: Monogr. Soc. Math. France. — Paris: Dunod, 1967.