# Rolling simplexes and their commensurability. IV. Прощай, оружие![*]

**О. В. ГЕРАСИМОВА, Ю. П. РАЗМЫСЛОВ**
*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*
e-mail: ynona_olga@rambler.ru

УДК 512.543.7+512.544.33+512.815.8+517.984.5+514.84

**Ключевые слова:** дифференциальная алгебра, аффинная кривая, параметризация, степенные ряды, аналитичность.

**Аннотация**

В работе чисто алгебраическими средствами объясняется, почему спектр $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}} A$ произвольной счётномерной комплексной коммутативно-ассоциативной дифференциальной алгебры $A$, являющейся областью целостности степени трансцендентности 1, локально аналитичен, т. е. для любого $\mathbb{C}$-гомоморфизма $\psi_M \colon A \to \mathbb{C}$ $(M \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}} A)$ и $a \in A$ ряд Тейлора $\tilde{\psi}_M(a) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \psi_M(a^{(m)}) \frac{z^m}{m!}$ имеет ненулевой радиус сходимости, зависящий от элемента $a \in A$.

**Abstract**

*O. V. Gerasimova, Yu. P. Razmyslov, Rolling simplexes and their commensurability. IV. (A farewell to arms!)*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 2, pp. 145—156.

The text by pure algebraic reasons outlines why the spectrum of maximal ideals $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}} A$ of a countable-dimensional differential $\mathbb{C}$-algebra $A$ of transcendence degree 1 without zero divisors is locally analytic, which means that for any $\mathbb{C}$-homomorphism $\psi_M \colon A \to \mathbb{C}$ $(M \in \mathrm{Spec}_{\mathbb{C}} A)$ and any $a \in A$ the Taylor series $\tilde{\psi}_M(a) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \psi_M(a^{(m)}) \frac{z^m}{m!}$ has nonzero radius of convergence depending on the element $a \in A$.

Мы реалисты, а не мистики.
И в дифурах нам равных нет.
Алгебраисты мы, не физики,
Мозги — наш главный инструмент!
*Из манифеста ЛВМ*

Начнём с одного интуиционистского, чисто алгебраического трюка, позволяющего разрешать некоторые типы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно входящей в них старшей производной.

[*] Дифференциально-алгебраических кривых не существует.

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2016, том 21, № 2, с. 145—156.

**Лемма об аффинности промежуточной подалгебры.** *Пусть конечно порождённая коммутативно-ассоциативная область целостности $A$ является алгеброй (с единицей) над произвольным алгебраически замкнутым полем $k$* ($\operatorname{char} k = 0, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, \ldots$)*, а её поле частных $Q(A)$ имеет над $k$ степень трансцендентности, равную* 1. *Тогда если в цепочке $k$-подалгебр $A \subseteq C \subseteq B \subset Q(A)$ алгебры $A$ и $B$ содержат конечное число образующих, то это верно и для подалгебры $C$.*

**Доказательство.** Так как $B$ имеет конечное число образующих, то $C$ — счётномерная $k$-алгебра. Выберем в $C$ элементы $\{e_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ так, чтобы они дополняли базис $k$-алгебры $A$ до базиса $C$. Положим

$$C_0 \overset{\text{def}}{=} A, \quad C_{i+1} \overset{\text{def}}{=} C_i[e_{i+1}], \quad C_\infty \overset{\text{def}}{=} B.$$

Целые замыкания («нормализации») всех этих конечно порождённых подалгебр в $Q(A)$ будем обозначать $\bar{C}_0, \bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_i, \ldots, \bar{C}_\infty$ соответственно. Общеизвестно, что каждая такая подалгебра имеет над $k$ конечное число образующих. Более того, в ходе доказательства этого факта устанавливается (см. [2]), что $\bar{C}_i$ как модуль над $C_i$ конечно порождён и, следовательно, нётеров. Покажем, что возрастающие цепочки $k$-подалгебр $\{\bar{C}_i\}$, $\{C_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ стабилизируются.

**Предложение 1.** *Если в цепочке областей целостности $F \subseteq G \subset Q(F)$ $k$-подалгебры $F$ и $G$ имеют конечное число образующих, $F = \bar{F}$* (т. е. *$F$ целозамкнута*), $\deg_k Q(F) = 1$, *то для естественного отображения $\nu\colon \operatorname{Spec}_k G \to \operatorname{Spec}_k F$ выполняются следующие свойства*:

а) *$\nu$ — инъективное отображение*;

б) *если $\nu$ сюръективно, то $G$ совпадает с $F$*;

в) $(\operatorname{Spec}_k F) \setminus \nu(\operatorname{Spec}_k G)$ *— конечное множество.*

Это предложение — точный перевод на язык коммутативной алгебры утверждения следствия 2 теоремы 2 из параграфа 2 главы 2 монографии [2] (с. 136).

По свойству б) заключаем, что если $\bar{C}_i \neq \bar{C}_{i+1}$, то некоторый максимальный идеал $M \in \operatorname{Spec}_k \bar{C}_i$ не поднимается до идеала в $\operatorname{Spec}_k \bar{C}_{i+1}$, а тогда из свойства а) вытекает, что $M \cap \bar{C}_0 \in \operatorname{Spec}_k \bar{C}_0$ не поднимается до идеала в $\operatorname{Spec}_k \bar{C}_\infty$. Но в $\bar{C}_0$ по свойству в) конечное число максимальных идеалов, которые не поднимаются до идеала в $\operatorname{Spec}_k \bar{C}_\infty$. Следовательно, в возрастающей цепочке «нормализаций»

$$\bar{C}_0 \subseteq \bar{C}_1 \subseteq \ldots \subseteq \bar{C}_m \subseteq \ldots$$

лишь конечное число мест, где включения строгие, т. е. $\bar{C}_N = \bar{C}_{N+i}$ для достаточно большого $N \in \mathbb{N}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и

$$C_N \subseteq C = \bigcup_m C_m \subseteq \bar{C}_N.$$

Но, как было отмечено выше, $\bar{C}_N$ как модуль над $C_N$ нётеров. Поэтому его $C_N$-подмодуль $C$ конечно порождён и должен совпадать с $C_{N+q}$ для некоторого $q \in \mathbb{N}$, что доказывает лемму. □

Отсюда без труда выводятся следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Любая конечно порождённая дифференциальная $k$-алгебра без делителей нуля и степени трансцендентности 1 имеет конечное число образующих как коммутативно-ассоциативная алгебра. В частности, эта дифференциальная $k$-алгебра является конечно определённой.*

**Следствие.** *Спектр максимальных идеалов $\operatorname{Spec}_{\mathbb{C}} A$ произвольной конечно порождённой дифференциальной коммутативно-ассоциативной $\mathbb{C}$-алгебры $A$ без делителей нуля степени трансцендентности 1 аналитичен, т. е. для любого $\mathbb{C}$-гомоморфизма $\psi_M\colon A \to \mathbb{C}$ ($M \in \operatorname{Spec}_{\mathbb{C}} A$) при гомоморфизме Тейлора $\tilde{\psi}_M\colon A \to \mathbb{C}[[z]]$ все степенные ряды*

$$\tilde{\psi}_M(a) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_M\bigl(a^{(m)}\bigr)\frac{z^m}{m!}$$

*сходятся в некоторой окрестности нуля.*

**Теорема 2.** *Пусть $X$ — неприводимая аффинная алгебраическая кривая над алгебраически замкнутым полем $k$, а $k[X]$ — её алгебра регулярных функций. Тогда любая $k$-подалгебра в $k[X]$ порождается конечным числом своих элементов.*

**Следствие.** *Пусть поле $K$ имеет степень трансцендентности 1 над алгебраически замкнутым полем $k$, а $\operatorname{Der}_k K$ — алгебра Ли всех $k$-дифференцирований $K \to K$. Тогда для любых $a_1, \ldots, a_n \in K$, $D_1, \ldots, D_l \in \operatorname{Der}_k K$ наименьшая коммутативно-ассоциативная $k$-подалгебра $A$ в $K$, для которой $a_1, \ldots, a_m \in A$ и $D_i(A) \subset A$ ($i = 1, \ldots, l$), является конечно порождённой.*

Проиллюстрируем сказанное конкретными примерами.

## 1. Дифференциальные алгебры Пикара (доказательство следствия теоремы 1, см. [1])

Зададим дифференциальную $\mathbb{C}$-алгебру $P$ образующими $x_1, \ldots, x_n$ и $n$ определяющими соотношениями $x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), где все $f_i$ — произвольные фиксированные элементы алгебры многочленов $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Очевидно, что эта алгебра не имеет делителей нуля и $P$ можно реализовать на $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, взяв в качестве дифференцирования

$$D \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Спектр этой дифференциальной алгебры совпадает с аффинным пространством $\mathbb{C}^n$. Для коэффициентов ряда Тейлора

$$\tilde{\psi}_M(f) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} (D^m \times f)|_{x_i=\alpha_i, \ldots, x_n=\alpha_n} \cdot \frac{z^m}{m!}$$

($f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, $M \overset{\text{def}}{=} (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$) мгновенно выводится оценка

$$\left| \frac{(D^m \times f)|_{x=M}}{m!} \right| \leqslant n^m a^{m+1},$$

где $a$ — максимум модуля значений функций $f, f_1, \dots, f_n$ и всех их частных производных произвольного порядка в точке $M$. Следовательно, все степенные ряды $\tilde{\psi}_M(x_1), \dots, \tilde{\psi}_M(x_n)$ сходятся в некоторой окрестности нуля. Равенство

$$\tilde{\psi}_M(f) = f\bigl(\tilde{\psi}_M(x_1), \dots, \tilde{\psi}_M(x_n)\bigr)$$

показывает, что для любого $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ряд $\tilde{\psi}(f)$ сходится в той же окрестности. Так как любая конечно порождённая коммутативно-ассоциативная $\mathbb{C}$-алгебра $A$ с фиксированным дифференцированием $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}} A$ является гомоморфным образом алгебры Пикара $P$ при подходящем выборе $n$ и $f_1, \dots, f_n$, то $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}\, A$ также аналитичен для любого $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{C}} A$. Это доказывает следствие теоремы 1.

## 2. «Рациональные» дифференциально-алгебраические параметризации плоских аффинных неприводимых алгебраических кривых

Обозначим через $X_H$ плоскую аффинную неприводимую алгебраическую кривую, заданную уравнением $H(x,y) = 0$ ($H(x,y) \in k[x,y]$). Пусть $k[X_H]$ — её алгебра регулярных функций над алгебраически замкнутым полем $k$ произвольной характеристики. Мы предполагаем, что в разделах 2.1—2.3 и 3 задаваемые дифференциально-алгебраическими соотношениями дифференциальные $k$-алгебры («параметризации») естественным образом содержат $k[X_H]$ в качестве подалгебры. Разумеется, это должно накладывать некоторые ограничения на неприводимый многочлен $H(x,y)$. Сразу явно укажем необходимые и достаточные условия, обеспечивающие такое включение:

а) $\partial H/\partial y \not\equiv 0$ в разделах 2.1, 2.3;

б) $x \cdot (\partial H/\partial x) + y \cdot (\partial H/\partial y) \notin k \cdot H(x,y)$ в разделе 2.2;

в) $(\partial H/\partial x)^2 + (\partial H/\partial y)^2 \not\equiv 0$ в разделе 3.

### 2.1. Однопорождённые дифференциально-алгебраические кривые (доказательство теоремы 1)

Зададим дифференциальную $k$-алгебру с единицей $W_H$ двумя образующими $\omega$, $\omega_1$ и двумя определяющими соотношениями $H(\omega, \omega_1) = 0$, $\omega' = \omega_1$, где $H(\omega, \omega_1)$ — неприводимый многочлен в $k[\omega, \omega_1]$, для которого $\partial H/\partial \omega_1 \not\equiv 0$. К сожалению, в данный момент неизвестно, содержит ли эта коммутативно-ассоциативная алгебра делители нуля. Чтобы избавиться (при $\partial H/\partial \omega_1 \not\equiv 0$) от такого рода виртуальных элементов, рассмотрим в $W_H$ дифференциальный идеал

$$I_H \overset{\text{def}}{=} \left\{ a \in W_H \;\Big|\; \left(\frac{\partial H}{\partial \omega_1}\right)^m \cdot a = 0,\ m = m(a) \right\}$$

и пролокализуем $W_H$ по элементу

$$d \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial H}{\partial \omega_1} \in W_H.$$

Тогда ядро канонического гомоморфизма дифференциальных алгебр

$$\nu\colon W_H \to (W_H)_d \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ \frac{b}{d^k} \;\middle|\; b \in W_H \right\}$$

совпадает с идеалом $I_H$. Положим

$$\bar{W}_H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \nu(W_H), \quad \bar{\omega} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \nu(\omega), \quad \bar{d} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \nu(d), \quad \bar{\omega}_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \nu(\omega_1), \quad k[X_H] \stackrel{\mathrm{def}}{=} k[\bar{\omega}, \bar{\omega}_1].$$

Тогда из равенства $\bar{\omega}' = \bar{\omega}_1$ вытекает, что $\bar{W}_H$ дифференциально порождается одним элементом $\bar{\omega}$, а из равенства

$$0 = H' = \frac{\partial H}{\partial \omega}\omega' + \frac{\partial H}{\partial \omega_1}\omega''$$

выводим, что при $\nu\colon W_H \to (W_H)_d$ все элементы $\nu(W_H) = \bar{W}_H$ лежат в коммутативно-ассоциативной подалгебре $(W_H)_d$, порождённой тремя элементами $\omega$, $\omega_1$, $d^{-1} = (\partial H/\partial \omega_1)^{-1}$. Это позволяет реализовать $\bar{W}_H$ как дифференциальную $k$-подалгебру в поле $k(X_H)$, где $X_H$ — плоская неприводимая аффинная алгебраическая кривая, заданная уравнением $H(\omega, \omega_1) = 0$ ($\partial H/\partial \omega_1 \not\equiv 0$), взяв в качестве дифференцирования

$$D \stackrel{\mathrm{def}}{=} \omega_1 \left( \frac{\partial}{\partial \omega} - \left( \frac{\partial H}{\partial \omega} \Big/ \frac{\partial H}{\partial \omega_1} \right) \frac{\partial}{\partial \omega_1} \right).$$

Следовательно, мы получаем цепочку $k$-алгебр

$$k[X_H] \subseteq \bar{W}_H \subseteq (\bar{W}_H)_{\bar{d}} \subseteq k(X_H),$$

удовлетворяющую всем условиям леммы об аффинности промежуточной подалгебры, и $\bar{W}_H$ является конечно порождённой. Очевидно, что любая однопорождённая дифференциальная подалгебра в произвольной дифференциальной области целостности (степени трансцендентности 1) является гомоморфным образом $\bar{W}_H$ при подходящем выборе $H(\omega, \omega_1)$ ($\partial H/\partial \omega_1 \not\equiv 0$). Это доказывает теорему 1 об аффинности дифференциально-алгебраических кривых.

Особо отметим, что проведённое рассуждение справедливо и над полями положительной характеристики $p$, так как из равенств

$$\frac{\partial H}{\partial w_1} \equiv 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \omega} \equiv 0$$

следует, что

$$H(\omega, \omega_1) = \bigl(F(\omega, \omega_1)\bigr)^p,$$

а это противоречит неприводимости $H$.

Завершим этот раздел одной незамысловатой (возможно, никчёмной, но запоминающейся) версией теоремы 1.

**Предложение 2.** *Если в дифференциальной области целостности $F$ над алгебраически замкнутым полем $k$ элементы $f$ и $f'$ связаны некоторым ненулевым полиномиальным соотношением $H(f, f') = 0$ $(H(x, y) \in k[x, y],\ H \not\equiv 0)$, то для некоторого натурального числа $N$ «$N$-я производная» $f^{(N)}$ полиномиально выражается через предыдущие $f, f', f'', \ldots, f^{(N-1)}$.*

**Следствие.** *Если на действительном интервале $(a, b)$ бесконечно дифференцируемая комплекснозначная функция $f(t)$ является решением дифференциального уравнения $H(f, f') = 0$, где $H(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ — неприводимый (ненулевой) полином, то для некоторого натурального числа $N$ функция $f^{(N)}(t)$ полиномиально выражается через $f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(N-1)}(t)$.*

### 2.2. Кеплеровы параметризации плоской кривой

Зададим дифференциальную $k$-алгебру с единицей $G_H$, образующими $x$, $y$ и двумя дифференциальными определяющими соотношениями $H(x, y) = 0$, $xy' - x'y = \sigma$, где $H$ — неприводимый многочлен в $k[x, y]$, для которого

$$x \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \notin k \cdot H(x, y)^{(1)},$$

$0 \neq \sigma \in k$ (например, $\sigma = \hbar/m_e$). Решая систему уравнений

$$\begin{aligned} 0 = H' = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot x' + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot y', \\ -yx' + xy' = \sigma \end{aligned}$$

относительно $x'$, $y'$, получаем, что

$$\mathcal{L}(x, y) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \sigma \begin{pmatrix} -\partial H/\partial y \\ \partial H/\partial x \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{L} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial H}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot y.$$

Если неприводимая аффинная кривая $X_H$ (заданная уравнением $H(x, y) = 0$) является гладкой, то идеал, порождённый $\partial H/\partial x$, $\partial H/\partial y$ в $k[X_H]$ должен совпадать со всей алгеброй. Поэтому

---

(1) Если $H = H_0 + H_1 + \ldots + H_m$ — разложение полинома $H(x, y)$ на однородные компоненты, то

$$x \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) + y \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right) = 0 \cdot H_0 + 1 \cdot H_1 + \cdots + m \cdot H_m$$

и для случая нулевой характеристики основного поля включение

$$x \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) + y \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right) \in k \cdot H(x, y)$$

возможно только для однородного многочлена $H(x, y)$. Но из неприводимости $H$ вытекает, что тогда $H(x, y) = H_1$, т. е. уравнение $H(x, y) = 0$ задаёт прямую, проходящую через начало координат.

$$a\frac{\partial H}{\partial x}+b\frac{\partial H}{\partial y}=1$$

для некоторых $a$, $b$ из $k[X_H]$. Следовательно, $\mathcal{L}\cdot(-ax'+by')=\sigma$, т. е. элемент $\mathcal{L}$ обратим в $G_H$. Отсюда немедленно следует, что $G_H$ (как коммутативно-ассоциативная $k$-алгебра)

а) порождается тремя элементами: $x$, $y$, $\mathcal{L}^{-1}$;

б) вкладывается в поле $k(X_H)$ и не содержит делителей нуля;

в) реализуется как дифференциальная подалгебра в $k(X_H)$ относительно дифференцирования

$$D_H \overset{\text{def}}{=} \sigma\cdot\mathcal{L}^{-1}\biggl(-\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\biggr).$$

В общем случае не исключено, что в $G_H$ существуют делители нуля. Пусть $I$ — произвольный дифференциальный идеал в $G_H$, для которого $G_H/I$ не имеет таких элементов. Допустим, что $I$ пересекается с подалгеброй $k[X_H]$, порождённой $x$, $y$ в $G_H$ ненулевым образом. Тогда фактор-алгебра $k[X_H]/(I\cap k[X_H])$ нульмерна и область целостности $G_H/I$ должна совпадать с $k\cdot 1$, а это противоречит тому, что $xy'-x'y=\sigma\neq 0$. Если же $I\cap k[X_H]=0$, то элемент $\mathcal{L}\in k[X_H]$ не равен нулю в области целостности $G_H/I$ и, локализуя по $\mathcal{L}$, получаем, что $(G_H/I)_{\mathcal{L}}=(G_H)_{\mathcal{L}}/I_{\mathcal{L}}$. Следовательно, идеал $I$ должен совпадать с идеалом

$$I(H)\overset{\text{def}}{=}\{a\in G_H \mid \mathcal{L}^m\cdot a=0 \text{ в } G_H,\ m=m(a)\}.$$

Это доказывает, что существует единственная область целостности $\bar{G}_H$, заданная образующими $x$, $y$ и двумя дифференциальными соотношениями $H(x,y)=0$, $xy'-x'y=\sigma$ ($\sigma\in k$, $\sigma\neq 0$, $\mathcal{L}\notin k\cdot H(x,y)$), для которой выполняются следующие свойства:

а) $\bar{G}_H$ вкладывается в $k(X_H)$ относительно дифференцирования

$$D_H \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}^{-1}\cdot\sigma\biggl(-\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\biggr);$$

б) при этом вложении

$$k[X_H]\subseteq \bar{G}_H\subseteq (\bar{G}_H)_{\mathcal{L}}\subset k(X_H)$$

и локализация $(\bar{G}_H)_{\mathcal{L}}$ как коммутативно-ассоциативная $k$-алгебра порождается тремя элементами $x,y,\mathcal{L}^{-1}$;

в) $\bar{G}_H$ — простая дифференциальная $k$-алгебра, и сигнатурное дифференцирование не исчезает ни в одной точке спектра $\operatorname{Spec}_k\bar{G}_H$.

Таким образом, $X_{\bar{G}_H}=\operatorname{Spec}_k\bar{G}_H$ — это гладкая аффинная неприводимая алгебраическая кривая и $\bar{G}_H$ содержит $k[X_H^\nu]$, где $X_H^\nu$ — нормализация кривой $X_H$. Это показывает, что кеплеров наблюдатель $\bar{G}_H$ исключает из рассмотрения все нелинейчатые ветви $X_H^\nu$, но, немного сдвинувшись из начала координат, может заметить все линейчатые.

Такой наблюдатель способен, обозревая кривую $X_H$, поступить более радикально: взбежать из начала координат по прямой $x=0$ на галёрку.

### 2.3. Параметризации Пюизо

Рассмотрим дифференциальную $k$-алгебру с единицей $P_H$, заданную образующими $x$, $y$ и двумя дифференциальными соотношениями $H(x,y)=0$, $x'=c$ ($c\in k$, $c\neq 0$), где $H(x,y)$ — неприводимый многочлен, для которого $\partial H/\partial y\not\equiv 0$. Аргументы, приведённые в предыдущих двух примерах, гарантируют, что в $P_H$ существует единственный (возможно, нулевой) дифференциальный идеал

$$I \overset{\mathrm{def}}{=} \left\{a\in P_H \;\Big|\; \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^m\cdot a=0,\ m=m(a)\right\},$$

фактор-алгебра по которому не содержит делителей нуля. Обозначим её $\bar P_H$. Равенство

$$0=H'=\frac{\partial H}{\partial x}c+\frac{\partial H}{\partial y}y'$$

показывает, что локализация $\bar P_H$ по элементу $\partial H./\partial y$ порождается как коммутативно-ассоциативная $k$-алгебра тремя элементами $x$, $y$, $(\partial H/\partial y)^{-1}$, а $\bar P_H$ реализуется как дифференциальная подалгебра в поле $k(X_H)$ относительно дифференцирования

$$D=D(H)=c\left(\frac{\partial}{\partial x}-\left(\frac{\partial H}{\partial x}\Big/\frac{\partial H}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Тогда

$$k[X_H]\subset \bar P_H\subseteq (\bar P_H)_{\partial H/\partial y}\subset k(X_H),$$

а в силу единственности идеала $I$ дифференциальная $k$-алгебра $\bar P_H$ не исчезает ни в одной точке $\operatorname{Spec}_k\bar P_H$ и так же, как и в предыдущем примере, $X_{\bar P_H}\overset{\mathrm{def}}{=}\operatorname{Spec}_k\bar P_H$ — это гладкая аффинная неприводимая алгебраическая кривая, для которой $k[X_{\bar P_H}]=\bar P_H$ содержит $k[X_H^\nu]$, где $X_H^\nu$ — нормализация плоской кривой $X_H^\nu$. При этом $\bar P_H$ исключает из рассмотрения те ветви кривой $X_H^\nu$, для которых проекция касательной на плоскость $Oxy$ параллельна прямой $x=0$ (включая и нелинейчатые ветви).

### 2.4. Общий случай

Общий случай

$$D=\frac{P}{Q}\left(\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\colon k(X_H)\to k(X_H)$$

рассматривается аналогично случаям в 2.1—2.3.

## 3. Параметризации Ферма (натуральный параметр)

Зададим дифференциальную $k$-алгебру с единицей $F_H$, образующими $x$, $y$ и двумя определяющими соотношениями $H(x,y)=0$, $x'^2+y'^2=c^2$ ($\operatorname{char}k\neq 2$,

$0 \neq c \in k$), где $H(x,y)$ — неприводимый полином, для которого

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 \not\equiv 0^{(1)}.$$

Очевидно, что сигнатурное дифференцирование не исчезает ни в одной точке спектра $\operatorname{Spec}_k F_H$ $k$-алгебры $F_H$, поэтому если мы покажем, что любой гомоморфный образ $\bar{F}_H$ алгебры $F_H$, не содержащий делителей нуля, имеет над $k$ степень трансцендентности, равную 1, то $\bar{F}_H$ окажется простой конечно определённой дифференциальной $k$-алгеброй с аналитическим спектром. Пусть $\varphi\colon F_H \to \bar{F}_H$ — соответствующий эпиморфизм и $\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x)$, $\bar{y} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(y)$, $k[X_H]$ — алгебра регулярных функций плоской аффинной кривой $X_H$, заданной уравнением $H(x,y) = 0$. Ясно[2], что $k[X_H]$ изоморфна $k$-подалгебре, порождённой $x$, $y$ в $F_H$, и $k[X_H] \cap \operatorname{Ker}\varphi = 0$ (в противном случае нульмерная подалгебра $\varphi(k[X_H])$ порождала бы $\bar{F}_H$ и $\bar{x}'$, $\bar{y}'$ должны были быть равными нулю, а это

---

[1] Если $\Delta = 0$, то

$$0 = \left(\frac{\partial H}{\partial x} + (-1)^{1/2} \cdot \frac{\partial H}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} - (-1)^{1/2} \cdot \frac{\partial H}{\partial y}\right) = \frac{\partial H}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial H}{\partial t_2},$$

где $t_1 \stackrel{\text{def}}{=} (1/2) \cdot (x + (-1)^{1/2} \cdot y)$, $t_2 \stackrel{\text{def}}{=} (1/2) \cdot (x - (-1)^{1/2} \cdot y)$. Но тогда, если $\operatorname{char} k = 0$, ввиду неприводимости многочлена $H(x,y)$ над алгебраически замкнутым полем $k$ либо $H = \alpha \cdot t_1 + \beta$, либо $H = \alpha \cdot t_2 + \beta$. Таким образом, в этом случае условие

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 \not\equiv 0$$

исключает из рассмотрения две пачки параллельных прямых, задаваемых уравнениями $x + y \cdot (-1)^{1/2} = \delta$, $x - y \cdot (-1)^{1/2} = \delta$, для которых

$$x'^2 + y'^2 = (x' + y' \cdot (-1)^{1/2}) \cdot (x' - y' \cdot (-1)^{1/2}) = 0.$$

[2] Непосредственно проверяется, что из равенства $H(x,y) = 0$ следует, что

$$0 = H = x' \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + y' \cdot \frac{\partial H}{\partial y},$$

в частности,

$$x'^2 \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 = y'^2 \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2,$$

Учитывая соотношение $x'^2 + y'^2 = c^2$, отсюда получаем, что

$$x'^2 \cdot \Delta = c^2 \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2, \quad y'^2 \cdot \Delta = c^2 \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2.$$

Так как $\Delta \not\equiv 0$, то из равенства

$$\Delta = \left(\frac{\partial H}{\partial x} + (-1)^{1/2} \cdot \frac{\partial H}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} - (-1)^{1/2} \cdot \frac{\partial H}{\partial y}\right),$$

вытекает, что многочлен $\Delta$ не делится на $H(x,y)$, т. е. $\Delta \neq 0$ в $k[X_H]$ и $\bar{x}'^2, \bar{y}'^2 \in k[X_H]_\Delta \subset$ $\subset k(X_H)$.

противоречит равенству $x'^2 + y'^2 = c^2 \neq 0$). Равенства
$$\frac{\partial H}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} \equiv 0$$
возможны, если $\operatorname{char} k = p > 0$, но ввиду неприводимости $H(x, y)$ либо
$$\frac{\partial H}{\partial x} \not\equiv 0,$$
либо
$$\frac{\partial H}{\partial y} \not\equiv 0.$$

Рассмотрим случай, когда
$$\frac{\partial H}{\partial y} \not\equiv 0.$$
Тогда
$$d \overset{\text{def}}{=} \varphi\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right) -$$
ненулевой элемент в области целостности $\bar{F}_H$, и из равенств
$$0 = \varphi(H') = \varphi\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)\bar{x}' + \varphi\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)\bar{y}', \quad \bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 = c^2$$
получаем, что
$$\bar{y}' = -\left(\varphi\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)/d\right)\bar{x}', \quad \bar{x}'^2\left(1 + \left(\varphi\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)/d\right)^2\right) = c^2$$
в поле частных $Q(\bar{F}_H)$ алгебры $\bar{F}_H$. Из последнего соотношения следует, что

а) $k$-подалгебра $E$, порождённая $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{x}'$, $\bar{y}'$ содержится в «квадратичном расширении» поля $\varphi\big(k(X_H)\big)$;

б) $\bar{x}^{(i)}, \bar{y}^{(i)} \in Q(E)$ $(i = 2, 3, \ldots)$.

Это доказывает, что область целостности $\bar{F}_H$ содержится в $Q(E)$ и $\deg_k \bar{F}_H = \deg_k Q(E) = 1$. По теореме 1 коммутативно-ассоциативная $k$-алгебра $\bar{F}_H$ порождается конечным числом своих элементов и является конечно определённой как дифференциальная $k$-алгебра. Так как сигнатурное дифференцирование $'$ не исчезает ни в одной точке $X_{\bar{F}_H} \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Spec}_k \bar{F}_H$, то $\bar{F}_H$ — целозамкнутая $k$-алгебра и $\bar{F}_H$ содержит $k[X_H^\nu]$, где $X_H^\nu$ — нормализация кривой $X_H$.

## 4. Неаффинные дифференциально-алгебраические поверхности существуют

Зададим дифференциальную $\mathbb{C}$-алгебру (с единицей) $E$ образующими $x$, $y$ и определяющими соотношениями $x' = 1$, $x^2y' + y - x = 0$. Положим
$$\bar{x}(z) \overset{\text{def}}{=} z, \quad \bar{y}(z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m m! \cdot z^{(m+1)}$$

и породим элементами $\bar{x}$, $\bar{y}$ в степенных рядах $\mathbb{C}[[z]]$ дифференциальную $\mathbb{C}$-подалгебру $\bar{E}$ относительно дифференцирования $d/dz$. Непосредственная проверка показывает, что
$$\frac{d\bar{x}}{dz} = 1, \quad \bar{x}^2 \frac{d\bar{y}}{dz} + \bar{y} - \bar{x} = 0$$
в $\mathbb{C}[[z]]$. Поэтому область целостности $\bar{E}$ является гомоморфным образом $E$ при $\varphi\colon E \to \bar{E}$ ($\varphi(x) = \bar{x}$, $\varphi(y) = \bar{y}$), и мы последовательно получаем следующее:

а) $\operatorname{Ker}\varphi = \{a \in E \mid x^{2m} \cdot a = 0 \ (m = m(a))\}$,

б) для максимального идеала $M \in \operatorname{Spec}_{\mathbb{C}} \bar{E}$, являющегося пересечением $\bar{E}$ с единственным максимальным идеалом в $\mathbb{C}[[z]]$, при гомоморфизме Тейлора $\tilde{\psi}_M\colon \bar{E} \to \mathbb{C}[[z]]$ имеем, что $\tilde{\psi}_M(\bar{x}) = \bar{x}$, $\tilde{\psi}_M(\bar{y}) = \bar{y}$, т. е. $\operatorname{Spec}_{\mathbb{C}} \bar{E}$ неаналитичен в точке $M$;

в) элементы $\bar{x}$, $\bar{y}$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}$ (в противном случае $\bar{E}$ совпадала бы с некоторой параметризацией Пюизо $\bar{P}_H$ ($H(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$) и $\operatorname{Spec}_{\mathbb{C}} \bar{E}$ был бы аналитичным);

г) подалгебра $\bar{E}$ может быть реализована в поле рациональных функций $\mathbb{C}(x,y)$ как дифференциальная $\mathbb{C}$-подалгебра относительно дифференцирования
$$D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x-y}{x^2}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Таким образом, дифференциальная область целостности $\bar{E}$ имеет над $\mathbb{C}$ степень трансцендентности, равную 2, её спектр максимальных идеалов не аналитичен и, следовательно $\bar{E}$ как коммутативно-ассоциативная $\mathbb{C}$-алгебра не может порождаться конечным числом своих элементов.

Мы оставляем читателю в качестве упражнения проверку ещё двух свойств $\mathbb{C}$-алгебры $\bar{E}$:

д) $\mathbb{C}[x,y] \subset \bar{E} \subset \mathbb{C}[x,y,x^{-1}] \subset \mathbb{C}(x,y)$;

е) $\bar{E}$ — простая дифференциальная $\mathbb{C}$-алгебра.

## 5. Доказательство теоремы 2

Так как алгебра $k[X]$ конечно порождена, то её произвольная $k$-подалгебра $C$ счётномерна. Если $C$ содержит единичный элемент алгебры $k[X]$, то выберем в $C$ базис $\{e_i \mid i = 0,1,\ldots\}$ так, чтобы $e_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$. Положим
$$C_0 \stackrel{\text{def}}{=} k \cdot e_0, \quad C_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} C_i[e_{i+1}] \ \ (i = 0,1,2,\ldots).$$
Так как поле $k$ алгебраически замкнуто, то $k$-алгебра $C_1$ изоморфна алгебре многочленов $k[e_1]$. Рассмотрим возрастающую цепочку полей частных $Q(C_i)$ $k$-алгебр $C_i$. Так как $k[X]$ конечно порождена и $\deg_k k(X) = 1$, то поле $k(X)$ является конечным расширением подполя $Q(C_1)$ и
$$\dim_{Q(C_1)} Q(C_i) \leqslant \dim_{Q(C_1)} Q(C_{i+1}) \leqslant \dim_{Q(C_1)} k(X).$$

Следовательно, возрастающая цепочка полей $Q(C_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ стабилизируется начиная с некоторого номера $N$: $Q(C_N) = Q(C_{N+i})$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Положим $A \stackrel{\text{def}}{=} C_N$. Тогда $Q(A) = Q(C) \subseteq k(X)$ и вложение $A \subset k[X]$ задаёт регулярное отображение $\nu\colon X \to X_A \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Spec}_k A$. Так как $\deg_k k(X) = 1$, то множество $X_A \setminus \nu(X)$ конечно и $X_A$ содержит конечное число особых точек. Поэтому в $k$-алгебре $A$ можно выбрать такой элемент $d$, что

а) локализация $A_d \stackrel{\text{def}}{=} A[d^{-1}] \subset Q(A)$ алгебры $A$ по элементу $d$ — целозамкнутая $k$-алгебра;

б) локализация $(k[X])_d$ состоит из алгебраических над $A_d$ элементов и любой идеал из $\operatorname{Spec}_k A_d$ поднимается до идеала из $\operatorname{Spec}_k(k[X])_d$, в частности до идеала из $\operatorname{Spec}_k(C_{N+i})_d$.

Применяя предложение 1 при $F = A_d$, $G = (C_{N+i})_d$, заключаем, что $A_d = (C_{N+i})_d = C_d$. Мы получаем цепочку подалгебр

$$A \stackrel{\text{def}}{=} C_N \subseteq C \subseteq B \stackrel{\text{def}}{=} A_d = (C_{N+i})_d \subseteq Q(A)$$

удовлетворяющую всем условиям леммы об аффинности промежуточной подалгебры. Это завершает доказательство теоремы в случае, когда $k$-подалгебра $C$ содержит единицу.

В противном случае рассмотрим $k$-подалгебру $C_{\text{id}} \stackrel{\text{def}}{=} k \cdot 1 \oplus C$, которая по уже доказанному порождается некоторыми своими элементами $e_i = \lambda_i \cdot 1 \oplus c_i$ $(i = 1, \ldots, m,\ m = m(C),\ c_i \in C,\ \lambda_i \in k)$. Но тогда $c_1, \ldots, c_m \in C$ порождают $C$. Теорема 2 полностью доказана.

Авторы считают своим долгом выразить глубокую благодарность Игорю Ростиславовичу Шафаревичу за его неизменный интерес к результатам наших исследований и поддержку в работе.

## Литература

[1] Герасимова О. В., Погудин Г. А., Размыслов Ю. П. Rolling simplexes and their commensurability. III (соотношения Капелли и их применения в дифференциальных алгебрах) // Фундамент. и прикл. матем. — 2014. — Т. 19, вып. 6. — С. 7—24.

[2] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. — М.: МЦНМО, 2007.