Радикал Кострикина и подобные ему радикалы алгебр Ли

А. Ю. ГОЛУБКОВ
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана
e-mail: artgolub@hotmail.com

УДК 512.555.36

Ключевые слова: алгебраический элемент, алгебраический элемент ограниченной степени, оболочка сэндвича, радикал Кострикина, первичный радикал.

Аннотация

Существующее на сегодняшний день представление о радикале Кострикина как о радикале в смысле Куроша—Амицура на классах алгебр Мальцева над кольцами с $1/6$ не является полностью обоснованным. Точнее, в полной мере оно верно для классов алгебр Ли над полями нулевой характеристики и, как показано в данной работе, классов алгебраических алгебр Ли степени не выше n над кольцами с $1/n!$ при всех $n \geqslant 1$. Сходные выводы получены в работе и для построенных аналогично радикалу Кострикина йорданова, регулярного и экстремального радикалов.

Abstract

A. Yu. Golubkov, The Kostrikin radical and similar radicals of Lie algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 2, pp. 157—180.

The existing notion of the Kostrikin radical as a radical in the Kurosh—Amitsur sence on classes of Mal'tsev algebras over rings with $1/6$ is not completely justified. More precisely, to the full it is true for classes of Lie algebras over fields of characteristic zero and, as shown in the given paper, classes of algebraic Lie algebras of degree not greater than n over rings with $1/n!$ at all $n \geqslant 1$. Similar conclusions are obtained in the paper also for the Jordan, regular, and extremal radicals constructed analogously to the Kostrikin radical.

1. Введение

Радикал Кострикина (сильно вырожденный радикал) был введён А. И. Кострикиным в качестве вспомогательного инструмента решения ослабленной проблемы Бернсайда для групп однократных простых показателей, сведённой ранее к вопросу о локальной нильпотентности n-энгелевых алгебр Ли над кольцами с $1/n!$ для всех $n \geqslant 1$. При этом А. И. Кострикин установил не только локальную нильпотентность таких алгебр, но и их совпадение со своими первичными радикалами (см. [12; 13, теоремы 1.7.3, 1.7.4 на с. 35]). Во многих источниках, цитирующих работу В. Т. Филиппова [15], включая монографию [13], фигурирует утверждение о радикальности в смысле Куроша—Амицура радикала

Кострикина, основанное на теореме 2 из [15]. Вместе с тем её доказательство корректно обосновывает радикальность подкласса алгебр Мальцева над кольцом с $1/6$, равных своим радикалам Кострикина, а не радикальность в смысле Куроша—Амицура самого радикала Кострикина на классе алгебр Мальцева над таким кольцом. Поэтому вопрос о том, является ли радикал Кострикина радикалом в смысле Куроша—Амицура на классах алгебр Ли и Мальцева, в общем случае остаётся открытым. Положительное решение этого вопроса для классов алгебр Ли над полями нулевой характеристики было найдено Е. И. Зельмановым [8]. В представленной работе оно получено для классов алгебраических алгебр Ли степени не выше n над кольцами с $1/n!$ для всех $n \geqslant 1$ вместе с достаточными условиями совпадения на них первичного радикала и радикала Кострикина. Кроме того, здесь обсуждаются также условия радикальности в смысле Куроша—Амицура йорданова, регулярного и экстремального радикалов алгебр Ли, которые могут быть интересны для последующих исследований.

Предварительные сведения

Всюду далее через F обозначается произвольное ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Предполагается, что все рассматриваемые модули над кольцом F являются левыми и унитарными. Под алгеброй над кольцом F понимается F-модуль с введённой на нём операцией умножения, перестановочной с умножением на элементы кольца F и F-линейной по обоим аргументам, под классом алгебр над кольцом F — абстрактный класс алгебр над F, т. е. класс, содержащий нулевую алгебру и все изоморфные копии каждой из принадлежащих ему алгебр. Операцию умножения любой алгебры Ли L над кольцом F мы будем обозначать через $[\,,\,]$, оператор левого умножения на элемент алгебры x (отвечающее x внутреннее дифференцирование) — через ad_x, $\mathrm{ad}_x = [x,\,]\colon y \mapsto [x,y]$ для всех $x, y \in L$. Присоединённые алгебра Ли и ассоциативная алгебра алгебры Ли L, которые, напомним, определяются как идеал внутренних дифференцирований алгебры Ли дифференцирований $\mathrm{Der}(L)$ алгебры L и порождённая его элементами подалгебра алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_F(L)$ F-модуля L (алгебра умножений алгебры L), будут обозначаться через $\mathrm{ad}(L)$ и $\mathrm{Ad}(L)$, $\mathrm{ad}(L) = \{\mathrm{ad}_x \mid x \in L\}$ и $\mathrm{Ad}(L) = \langle \mathrm{ad}(L)\rangle$.

Для краткости алгебры, аддитивные группы которых не имеют k-кручения для некоторого $k > 1$, мы будем называть *алгебрами без k-кручения*.

Определения используемых нами вариантов понятия алгебраического элемента из [4, 7] мы сформулируем, ограничившись случаем алгебр Ли.

Элемент x алгебры Ли L над кольцом F называется *алгебраическим над идеалом I кольца F* (*слабо энгелевым* или *ниль-элементом* при $I = \{0\}$), если для каждого её элемента y существует по меньшей мере один многочлен

$$ {}_{y,x}f(t) = t^{n_{y,x}} + {}_{y,x}f_{n_{y,x}-1}t^{n_{y,x}-1} + \ldots + {}_{y,x}f_1 t \in F[t], $$

$\deg {}_{y,x}f = n_{y,x} \geqslant 1$, с коэффициентами ${}_{y,x}f_1, \ldots, {}_{y,x}f_{n_{y,x}-1} \in I$ (${}_{y,x}f(t) = t$ при ${}_{y,x}n = 1$), такой что ${}_{y,x}f(\mathrm{ad}_x)y = 0$. В случае если многочлены ${}_{y,x}f$, $y \in L$, могут быть найдены таким образом, что их степени $n_{y,x}$, $y \in L$, не превышают некоторого $n \geqslant 1$, мы будем называть элемент x *алгебраическим над идеалом* I *элементом ограниченной степени* (*степени не выше* n), а при $I = \{0\}$ — *энгелевым* (*порядка не выше* n или n-*энгелевым*) *элементом*. В ситуации, когда многочлены ${}_{y,x}f$, $y \in L$, можно выбрать равными одному многочлену

$$ {}_xf(t) = t^{n_x} + {}_xf_{n_x-1}t^{n_x-1} + \ldots + {}_xf_1 t \in F[t], $$

$\deg {}_xf = n_x$, ${}_xf_1, \ldots, {}_xf_{n_x-1} \in I$, ${}_xf(\mathrm{ad}_x) = 0$, мы будем говорить, что элемент x является *сильно алгебраическим над идеалом* I (*степени не выше* n_x). При этом сильная алгебраичность над идеалом $I = \{0\}$ (степени не выше $n \geqslant 1$) элемента равносильна его энгелевости (n-энгелевости).

Алгебры Ли над кольцом F, все элементы которых являются алгебраическими над его идеалом I (ограниченной степени, степени не выше некоторого $n \geqslant 1$), называются при $I \neq \{0\}$ *алгебраическими над* I (*ограниченной степени, степени не выше* n), а при $I = \{0\}$ — *ниль-алгебрами* (*энгелевыми*, n-*энгелевыми*). Алгебры Ли над кольцом F, состоящие из сильно алгебраических над его идеалом I, $I \neq \{0\}$, элементов (степени не выше $n \geqslant 1$), называются *алгебрами Ли с алгебраическим над* I *присоединённым представлением* (*степени не выше* n).

Используя в дальнейшем любое из приведённых здесь условий алгебраичности без указания идеала I кольца F, мы будем предполагать по умолчанию, что речь идёт о его несобственном идеале $I = F$.

Перечислим теперь необходимые нам сведения из теории радикалов. Зафиксируем произвольный замкнутый относительно взятия идеалов и гомоморфных образов класс алгебр $\mathfrak{M}$ над кольцом F. Отображение $\mathcal{T}\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ класса $\mathfrak{M}$ в себя, ставящее в соответствие каждой алгебре R из класса $\mathfrak{M}$ один из её идеалов (её $\mathcal{T}$-*радикал*) $\mathcal{T}(R)$, называется *радикалом в смысле Куроша—Амицура*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $\mathcal{T}(R)$ — наибольший из идеалов I алгебры R, таких что $I = \mathcal{T}(I)$;
2) $\mathcal{T}\big(R/\mathcal{T}(R)\big) = \{0\}$;
3) $\varphi\big(\mathcal{T}(R)\big) \subseteq \mathcal{T}\big(\varphi(R)\big)$ для любого гомоморфизма $\varphi\colon R \to R'$ алгебры R в алгебру R' (включение алгебры R' над кольцом F в класс $\mathfrak{M}$ не предполагается).

Радикалу $\mathcal{T}$ отвечают класс $\mathcal{T}$-*радикальных* алгебр

$$ \mathfrak{R}_{\mathcal{T}} = \{R \in \mathfrak{M} \mid \mathcal{T}(R) = R\} $$

и класс $\mathcal{T}$-*полупростых* алгебр

$$ \mathfrak{S}_{\mathcal{T}} = \big\{R \in \mathfrak{M} \mid \mathcal{T}(R) = \{0\}\big\}. $$

Радикал $\mathcal{T}$ определяется в полной мере каждым из этих классов, так как $\mathcal{T}$-радикал $\mathcal{T}(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ является её наибольшим $\mathcal{T}$-радикальным идеалом и наименьшим из её идеалов, фактор-алгебры по которым $\mathcal{T}$-полупросты. Любой подкласс класса $\mathfrak{M}$, совпадающий с классом $\mathcal{T}$-радикальных алгебр $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}}$ ($\mathcal{T}$-полупростых алгебр $\mathfrak{S}_{\mathcal{T}}$) для некоторого радикала $\mathcal{T}$

на классе $\mathfrak{M}$, называется *радикальным* (*полупростым*). Радикал $\mathcal{T}$ на классе $\mathfrak{M}$, такой что класс $\mathcal{T}$-радикальных алгебр $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}}$ ($\mathcal{T}$-полупростых алгебр $\mathfrak{S}_{\mathcal{T}}$) является наименьшим среди радикальных (полупростых) подклассов класса $\mathfrak{M}$, содержащих его подкласс $\mathfrak{X}$, называется *нижним* (*верхним*) *радикалом*, *определяемым классом* $\mathfrak{X}$, и обозначается через $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ ($\mathcal{T}^{\mathfrak{X}}$). При этом радикал $\mathcal{T}^{\mathfrak{X}}$ существует не всегда, а радикал $\mathcal{T}_{\mathfrak{X}}$ определён в любом случае как радикал на классе $\mathfrak{M}$, класс радикальных алгебр которого равен пересечению всех содержащих класс $\mathfrak{X}$ радикальных подклассов класса $\mathfrak{M}$.

В силу известных результатов о цепях Куроша (см., например, [1]) радикальность (полупростота) подкласса $\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{M}$ равносильна его совпадению с классом $\mathfrak{X}^{(1)}$ (${}^{(1)}\mathfrak{X}$), где $\mathfrak{X}^{(1)}$ — класс алгебр из класса $\mathfrak{M}$, ненулевые гомоморфные образы которых содержат ненулевые идеалы из $\mathfrak{X}$, а ${}^{(1)}\mathfrak{X}$ — класс алгебр из $\mathfrak{M}$, ненулевые идеалы которых имеют ненулевые гомоморфные образы в $\mathfrak{X}$. Заметим, что если подкласс $\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{M}$ входит в его подкласс ${}^{(1)}\mathfrak{X}$, то класс ${}^{(1)}\mathfrak{X}$ является наименьшим среди содержащих класс $\mathfrak{X}$ полупростых подклассов класса $\mathfrak{M}$, т. е. в данной ситуации ${}^{(1)}\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_{\mathcal{T}^{\mathfrak{X}}}$.

Пусть S — свойство элементов алгебр из класса $\mathfrak{M}$, состоящее в том, что нулевые элементы алгебр из класса $\mathfrak{M}$ являются их S-элементами (элементами со свойством S) и образы S-элементов алгебр из $\mathfrak{M}$ при действии их гомоморфизмов являются S-элементами их гомоморфных образов. Тогда любая алгебра R из класса $\mathfrak{M}$ содержит наименьший идеал ${}_SK(R)$ среди её идеалов, в фактор-алгебрам по которым нет ненулевых S-элементов. Идеал ${}_SK(R)$ является также наибольшим элементом неубывающей цепочки идеалов $\{{}_SK_\alpha(R) \mid \alpha \geqslant 0\}$ алгебры R, построенной по индукции аналогично бэровской цепочке идеалов с заменой её первого элемента (суммы всех идеалов с нулевыми квадратами) на идеал ${}_SK_1(R)$ алгебры R, порождённый всеми её S-элементами (см. [3, замечание 1.1]). Заметим, что для классов $\mathfrak{R}_S = \{R \in \mathfrak{M} \mid {}_SK(R) = R\}$ и $\mathfrak{S}_S = \big\{R \in \mathfrak{M} \mid {}_SK(R) = \{0\}\big\}$ выполняются равенства $\mathfrak{R}_S^{(1)} = {}^{-1}\big({}^{(1)}\mathfrak{S}_S\big)$ и ${}^{(1)}\mathfrak{S}_S = \mathfrak{R}_S^{-1}$, где ${}^{-1}\big({}^{(1)}\mathfrak{S}_S\big)$ — класс алгебр из класса $\mathfrak{M}$, не имеющих ненулевых гомоморфных образов в классе ${}^{(1)}\mathfrak{S}_S$, и $\mathfrak{R}_S^{-1}$ — класс алгебр из $\mathfrak{M}$, не содержащих ненулевых идеалов из класса $\mathfrak{R}_S$. Поэтому если класс ${}^{(1)}\mathfrak{S}_S$ полупростой, то класс $\mathfrak{R}_S^{(1)}$ совпадает с классом $\mathcal{T}^{{}^{(1)}\mathfrak{S}_S}$-радикальных алгебр $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}^{{}^{(1)}\mathfrak{S}_S}}$, а если класс $\mathfrak{R}_S$ радикальный, то класс ${}^{(1)}\mathfrak{S}_S$ равен классу $\mathcal{T}_{\mathfrak{R}_S}$-полупростых алгебр $\mathfrak{S}_{\mathcal{T}_{\mathfrak{R}_S}}$. Кроме того, если класс $\mathfrak{S}_S$ входит в класс ${}^{(1)}\mathfrak{S}_S$, то классы $\mathfrak{R}_S$ и ${}^{(1)}\mathfrak{S}_S$ совпадают с классами $\mathcal{T}_S$-радикальных и $\mathcal{T}_S$-полупростых алгебр $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}_S}$ и $\mathfrak{S}_{\mathcal{T}_S}$ для радикала $\mathcal{T}_S$, равного радикалам $\mathcal{T}_{\mathfrak{R}_S}$ и $\mathcal{T}^{\mathfrak{S}_S}$, $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_{\mathfrak{R}_S} = \mathcal{T}^{\mathfrak{S}_S}$, $\mathfrak{R}_S = \mathfrak{R}_{\mathcal{T}_S}$ и ${}^{(1)}\mathfrak{S}_S = \mathfrak{S}_{\mathcal{T}_S}$. При этом в данной ситуации радикал $\mathcal{T}_S(R)$ любой алгебры R из класса $\mathfrak{M}$ содержится в её идеале ${}_SK(R)$, $\mathcal{T}_S(R) \subseteq {}_SK(R)$.

Отображение ${}_SK\colon R \mapsto {}_SK(R)$, $R \in \mathfrak{M}$, тогда и только тогда является радикалом в смысле Куроша—Амицура, когда его значения на алгебрах из класса $\mathfrak{M}$ являются наибольшими среди их идеалов из класса $\mathfrak{R}_S$ (см. [3, замечание 1.3]). Это равносильно также совпадению отображения ${}_SK$ с радикалом $\mathcal{T}_{\mathfrak{R}_S}$ и существованию радикала $\mathcal{T}^{\mathfrak{S}_S}$ и его совпадению с ${}_SK$. Если класс $\mathfrak{S}_S$ содержится в классе ${}^{(1)}\mathfrak{S}_S$, то радикальность отображения ${}_SK$ эквивалентна выполнению в любой алгебре R из класса $\mathfrak{M}$ равенства ${}_SK(R) = {}_SK\big({}_SK(R)\big)$.

Включение класса $\mathfrak{S}_S$ в класс ${}^{(1)}\mathfrak{S}_S$ выполняется, в частности, если $\mathfrak{S}_S$ замкнут относительно взятия идеалов и, как следствие, в ситуации, когда S-элементы идеалов алгебр из класса $\mathfrak{M}$ являются их S-элементами. Примерами свойств S с таким условием для класса всех алгебр $\mathfrak{U}$ над кольцом F могут служить отвечающие любому идеалу I кольца F свойства быть алгебраическим над I (слабо энгелевым при $I = 0$) элементом, быть алгебраическим над I ограниченной степени (энгелевым при $I = 0$) элементом, быть целым в смысле Ширшова над I элементом, быть целым над I элементом и т. п. (см. [3,7]). Для класса бинарно лиевых алгебр над кольцом F к ним можно добавить свойство быть PK-алгебраическим элементом (см. [4]). Позднее мы также столкнёмся с подобными свойствами в алгебрах Ли при описании радикала Кострикина и сходных с ним радикалов.

Первичный радикал и радикал Кострикина

Начнём с краткого описания конструкции первичного радикала алгебр. Алгебра R над кольцом F называется *первичной*, если произведение любых двух её ненулевых идеалов отлично от нуля, и *полупервичной*, если в ней нет ненулевых идеалов, имеющих нулевые квадраты. Идеал P алгебры R, фактор-алгебра по которому R/P является первичной, называется *первичным идеалом*, а пересечение $\mathrm{Rad}(R)$ всех первичных идеалов алгебры R — её *первичным радикалом*. Элемент r алгебры R называется *строго разрешимым*, если любая цепочка элементов $\{r_i\}_{i=0}^{\infty}$, в которой $r_0 = r$ и $r_{j+1} \in (r_j)_R^2$ при всех $j \geqslant 0$, где $(r_j)_R$ — идеал алгебры R, порождённый r_j, содержит нуль, а значит стабилизируется нулём на некотором конечном шаге $k \geqslant 0$, $r_i = 0$ при $i \geqslant k$. Первичный радикал $\mathrm{Rad}(R)$ алгебры R совпадает с множеством всех её строго разрешимых элементов и является наименьшим среди тех её идеалов, фактор-алгебры по которым полупервичны (см. 3, теорема 2.1; 6, предложение 4 на с. 192 и теорема 6 на с. 193]).

В дальнейшем под подкольцами с единицей основного кольца F мы будем понимать его подкольца, имеющие общую с ним единицу.

Замечание 1.1. Для любых алгебры R над кольцом F и его подкольца с единицей H идеалы алгебры R, фактор-алгебры по которым полупервичны, и её идеалы с тем же свойством как H-алгебры составляют одно множество.

Доказательство. Для любых двух H-идеалов I и J алгебры R произведение $(I)_R(J)_R$ её F-идеалов $(I)_R$ и $(J)_R$, порождённых их элементами и равных порождённым ими F-подмодулям FI и FJ, совпадает с F-подмодулем $F(IJ)$, порождённым элементами произведения I и J, $(I)_R(J)_R = (FI)(FJ) = F(IJ)$. Поэтому каждый F-идеал алгебры R, фактор-алгебра по которому полупервична, является её идеалом с тем же свойством в качестве H-алгебры. Остаётся заметить, что всякий H-идеал I алгебры R, фактор-алгебра по которому R/I

полупервична, является её F-идеалом, так как $(I)_R^2 \subseteq RI \subseteq I$ и, следовательно, $(I)_R = FI \subseteq I$, $I = FI = (I)_R$. $\square$

Это означает также, что определение первичного радикала алгебры над кольцом F не зависит от выбора его подкольца с единицей, над которым она рассматривается.

Отображение Rad, которое ставит в соответствие алгебрам над кольцом F их первичные радикалы, называется *первичным радикалом алгебр*. Отображение Rad удовлетворяет на классе всех алгебр $\mathfrak{U}$ над кольцом F условиям 2) и 3) определения радикала в смысле Куроша—Амицура, но не удовлетворяет условию 1), поскольку первичный радикал алгебры может не содержать все её идеалы, равные своим первичным радикалам. Тем не менее оно является радикалом в смысле Куроша—Амицура на классах альтернативных алгебр, обобщённо специальных алгебр Ли (алгебр Ли, присоединённые ассоциативные алгебры которых являются PI-алгебрами) и некоторых других классах алгебр над кольцом F. Отметим, что радикальность в смысле Куроша—Амицура отображения Rad на замкнутом относительно взятия идеалов и гомоморфных образов классе алгебр над кольцом F равносильна его совпадению на нём с нижним ниль-радикалом $\mathrm{RN} = \mathcal{T}_{\mathfrak{A}}$ (нижним радикалом, определяемым на классе $\mathfrak{U}$ его подклассом $\mathfrak{A}$, состоящим из алгебр с нулевым умножением).

Элемент x алгебры Ли L над кольцом F называется *оболочкой сэндвича толщины не ниже* m, $m \geqslant 1$, если

$$\mathrm{ad}_x^2 = \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_1} \cdots \mathrm{ad}_{y_k} \mathrm{ad}_x = 0$$

для любых элементов $y_1, \ldots, y_k \in L$ и $k = 1, \ldots, m$, и *оболочкой сэндвича толщины* m, если в дополнение к данному условию

$$\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{z_1} \cdots \mathrm{ad}_{z_m} \mathrm{ad}_{z_{m+1}} \mathrm{ad}_x \neq 0$$

для некоторых элементов $z_1, \ldots, z_{m+1} \in L$. Если указание границы толщины оболочки сэндвича не требуется, мы будем называть её просто оболочкой сэндвича. Оболочки сэндвичей алгебр Ли являются по определению их 2-энгелевыми элементами. Для алгебр Ли без 2-кручения верно и обратное: каждый 2-энгелев элемент такой алгебры является оболочкой сэндвича (см. [13, с. 27]). Алгебры Ли, не имеющие ненулевых оболочек сэндвичей, называются *невырожденными*. В любой алгебре Ли L над кольцом F можно выделить наименьший идеал $K(L)$ среди её идеалов, фактор-алгебры по которым невырожденны (идеал ${}_SK(L)$ для свойства S быть оболочкой сэндвича). Идеал $K(L)$ называется *радикалом Кострикина* или *сильно вырожденным радикалом* алгебры Ли L. Поскольку элементы абелевых идеалов алгебры Ли являются её оболочками сэндвичей толщины не ниже любого $m \geqslant 1$, невырожденные алгебры Ли являются полупервичными, и потому радикал Кострикина алгебры Ли равен всем её радикалам Кострикина как алгебры над подкольцами с единицей основного кольца (см. замечание 1.1).

Отображение K, которое ставит в соответствие алгебрам Ли над кольцом F их радикалы Кострикина, называется *радикалом Кострикина алгебр Ли*. Обозначим через $\mathfrak{S}_K$ класс невырожденных алгебр Ли над кольцом F и через $\mathfrak{R}_K$ — класс алгебр Ли над F, равных своим радикалам Кострикина. Основные сведения о выполнении условия радикальности в смысле Куроша—Амицура для отображения K приведены ранее в общем виде для отображения ${}_SK$. Следует лишь заметить, что в случае кольца F с $1/2$ класс $\mathfrak{S}_K$ входит в класс ${}^{(1)}\mathfrak{S}_K$ (см. [8, лемма 4 и далее замечание 2.3; 15, лемма 4]), а потому классы $\mathfrak{R}_K$ и ${}^{(1)}\mathfrak{S}_K$ являются радикальным и полупростым подклассами класса всех алгебр Ли над кольцом F. Точнее, они совпадают с классами $\mathcal{T}_K$-полупростых и $\mathcal{T}_K$-радикальных алгебр $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}_K}$ и $\mathfrak{S}_{\mathcal{T}_K}$ для радикала $\mathcal{T}_K = \mathcal{T}_{\mathfrak{R}_K} = \mathcal{T}^{\mathfrak{S}_K}$, $\mathfrak{R}_K = \mathfrak{R}_{\mathcal{T}_K}$ и ${}^{(1)}\mathfrak{S}_K = \mathfrak{S}_{\mathcal{T}_K}$. Кроме того, отображение K является радикалом в смысле Куроша—Амицура на замкнутом относительно взятия идеалов и гомоморфных образов классе алгебр Ли над кольцом F с $1/2$, если и только если в каждой алгебре L из этого класса выполнено равенство $K(L) = K\big(K(L)\big)$. Последнее справедливо, в частности, для класса всех алгебр Ли над любым полем нулевой характеристики (см. [8, предложение 2; 24, предложения 3.6, 3.8 и следствие 3.9]). Отметим и то, что на данном классе радикал Кострикина является идеально наследственным и специальным, т. е. является кручением (см. [8, следствие 1 предложения 2; 24, теорема 3.10]).

2. Радикал Кострикина в алгебраических алгебрах Ли ограниченной степени

Обсудим для начала достаточные условия существования в алгебре Ли ненулевых 3-энгелевых элементов, которые с этого момента мы будем называть её *йордановыми элементами*. Для алгебр Ли, обладающих ненулевыми энгелевыми элементами, такие условия можно сформулировать в виде следующего предложения, которое объединяет известную лемму Кострикина (см. [12, доказательство теоремы 2; 13, лемма 2.1.1 на с. 40]) и следствие 2.4 из [23].

Предложение 2.1. *Пусть $n \geqslant 4$ и L — алгебра Ли без $n!$-кручения над кольцом F. Тогда для любых n-энгелева элемента x алгебры Ли L и её элемента y элемент $\operatorname{ad}_x^{n-1} y$ является $(n-1)$-энгелевым и в случае отсутствия у алгебры L $(n+[n/2]-1)!$-кручения йордановым элементом.*

Следствие 2.2. *Пусть $n \geqslant 1$, L — алгебра Ли над кольцом F, которая обладает как минимум одним ненулевым n-энгелевым элементом и при $n \geqslant 4$ не имеет $n!$-кручения. Тогда алгебра Ли L содержит ненулевой йорданов элемент.*

Для полноты изложения мы приведём развёрнутый вариант леммы 4 из [8].

Замечание 2.3. Пусть L — алгебра Ли над кольцом F, I — идеал алгебры L, x — оболочка сэндвича идеала I. Тогда для любого элемента y алгебры Ли L элемент $\operatorname{ad}_x^2 y$ либо равен нулю, либо является оболочкой сэндвича алгебры L.

Доказательство. Так как $\mathrm{ad}_x^2 z = \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_u \mathrm{ad}_x z = 0$ для любых $z, u \in I$,

$$\mathrm{ad}_x^2 \psi = \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_u \mathrm{ad}_x \psi = 0 \quad (u \in I, \quad \psi \in C(L, I)), \tag{1}$$

где

$$C(L, I) = \{\psi \in \mathrm{Ad}(L) \mid \psi(L) \subseteq I\} —$$

идеал присоединённой ассоциативной алгебры $\mathrm{Ad}(L)$ алгебры Ли L, который состоит из элементов алгебры $\mathrm{Ad}(L)$, имеющих образы в идеале I. Кроме того, при всех $z \in I$ и $v \in L$ справедливы равенства

$$\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x^2 z} = \mathrm{ad}_x^2 \mathrm{ad}_z - 2\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_z \mathrm{ad}_x + \mathrm{ad}_z \mathrm{ad}_x^2 = -2\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_z \mathrm{ad}_x + \mathrm{ad}_z \mathrm{ad}_x^2 = 0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_x^3 = \mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x^3 v} &= \mathrm{ad}_x^3 \mathrm{ad}_v - 3\,\mathrm{ad}_x^2 \mathrm{ad}_v \mathrm{ad}_x + 3\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_v \mathrm{ad}_x^2 - \mathrm{ad}_v \mathrm{ad}_x^3 = \\ &= 3\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_v \mathrm{ad}_x^2 = 0.\end{aligned} \tag{3}$$

При помощи (1) мы можем вывести для любого $w \in L$ соотношения

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}^2_{\mathrm{ad}_x^2 y} &= -2\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x (\mathrm{ad}_x^2 \mathrm{ad}_y - 2\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x + \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x^2) = \\ &= -2\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x^2 = \\ &= \mathrm{ad}_x \big(\big[\mathrm{ad}_y, [\mathrm{ad}_y, \mathrm{ad}_x]\big] - \mathrm{ad}_y^2 \mathrm{ad}_x - \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y^2 \big) \mathrm{ad}_x^2 = \\ &= \mathrm{ad}_x (\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_y^2 x} - \mathrm{ad}_y^2 \mathrm{ad}_x - \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y^2) \mathrm{ad}_x^2 = 0\end{aligned}$$

(см. [8, лемма 4]) и

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}^2_{\mathrm{ad}_x^2 y} w} = \mathrm{ad}^2_{\mathrm{ad}_x^2 y} \mathrm{ad}_w - 2\,\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x^2 y} \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x^2 y} + \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}^2_{\mathrm{ad}_x^2 y} = \\ = -2\,\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x^2 y} \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x^2 y} = 0,\end{aligned} \tag{4}$$

а также

$$\begin{aligned}&\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x^2 y} \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x^2 y} = -2\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_w (\mathrm{ad}_x^2 \mathrm{ad}_y - 2\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x + \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x^2) = \\ &= -2\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_x^2 \mathrm{ad}_y + 4\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x - \\ &\quad - 2\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x^2 .\end{aligned}$$

Вновь воспользовавшись (1) и тем, что

$$\big[[\mathrm{ad}_w, \mathrm{ad}_x], \mathrm{ad}_y\big] = \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_x + \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_w,$$

мы можем записать

$$\begin{aligned}&4\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_x = \\ &\quad = 2\,\mathrm{ad}_x \big(\mathrm{ad}_y^2 \mathrm{ad}_x + \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y^2 - \big[\mathrm{ad}_y, [\mathrm{ad}_y, \mathrm{ad}_x]\big] \big) \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_x = \\ &\quad = -2\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{[y,[y,x]]} \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_x = 0\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}&4\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x = \\ &\quad = 4\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x \big(\big[[\mathrm{ad}_w, \mathrm{ad}_x], \mathrm{ad}_y\big] + \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_y + \\ &\quad + \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_x - \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_w \big) \mathrm{ad}_x =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_{[[w,x],y]}\,\mathrm{ad}_x + 4\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x^2 - \\
&- 4\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x = \\
&= 4\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_{[[w,x],y]}\,\mathrm{ad}_x + 4\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x^2\,.
\end{aligned}
$$

Применяя (2), мы получаем, что

$$
\begin{aligned}
&4\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x = \\
&\quad = \mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_{[[w,x],y]}\,\mathrm{ad}_x^2 + 4\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x^2 = \\
&\quad = 2\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\big[[\mathrm{ad}_w,\mathrm{ad}_x],\mathrm{ad}_y\big]\,\mathrm{ad}_x^2 + 4\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x^2 = \\
&\quad = 2\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y(\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_y - \mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x + \mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_w)\,\mathrm{ad}_x^2 + \\
&\quad + 4\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x^2 = \\
&\quad = 2\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x^2 - 2\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x^2 + \\
&\quad + 2\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y^2\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x^2 + 4\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x^2\,.
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x^2 y}\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x^2 y} = -2\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x^2\,\mathrm{ad}_y + 2\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x^2 + \\
&\quad + 2\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y^2\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x^2 + 4\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x[\mathrm{ad}_y,\mathrm{ad}_w]\,\mathrm{ad}_x^2 = \\
&\quad = -2\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x^2\,\mathrm{ad}_y + 2\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x^2 + \\
&\quad + 2\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y^2\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x^2 + 4\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_{[y,w]}\,\mathrm{ad}_x^2\,.
\end{aligned}
$$

Наконец, пользуясь (4) и тем, что $3\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_v\,\mathrm{ad}_x^2 = 0$ при $v = w, y, [y,w]$ в силу (3), мы приходим к соотношению

$$
\begin{aligned}
&0 = 2\,\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x^2 y}\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x^2 y} = -4\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x^2\,\mathrm{ad}_y + \\
&\quad +4\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x^2 + 4\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y^2\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x^2 + 8\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_{[y,w]}\,\mathrm{ad}_x^2 = \\
&\quad = -\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x^2\,\mathrm{ad}_y + \mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x^2 + \\
&\quad + \mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y^2\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_x^2 + 2\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_{[y,w]}\,\mathrm{ad}_x^2,
\end{aligned}
$$

в соответствии с которым

$$
0 = 4\,\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x^2 y}\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x^2 y} = \mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x^2 y}\,\mathrm{ad}_w\,\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x^2 y}\,. \qquad \square
$$

Для энгелевых и йордановых элементов алгебр Ли справедливы следующие аналоги замечания 2.3, первый из которых следует из предложения 2.1 и того, что n-энгелевы элементы идеалов алгебр являются их $(n+1)$-энгелевыми элементами при всех $n \geqslant 1$, а второй соответствует предложению 1.6 из [21].

Следствие 2.4. *Пусть $n \geqslant 3$, L — алгебра Ли без $(n+1)!$-кручения над кольцом F, I — идеал алгебры L и x — n-энгелев элемент идеала I. Тогда для любого элемента y алгебры Ли L элемент $\mathrm{ad}_x^n y$ или равен нулю, или является n-энгелевым элементом алгебры L.*

Предложение 2.5. *Йордановы элементы идеалов любой невырожденной алгебры Ли L без 6-кручения над кольцом F являются её йордановыми элементами.*

Помимо йордановых элементов алгебр Ли, которые используются для построения их йордановых алгебр (см. [20]), важную роль в изучении внутренних идеалов алгебр Ли и связанных с ними йордановых систем играют также их экстремальные и регулярные элементы (см., к примеру, [19, 21]). Йорданов элемент x алгебры Ли L над кольцом F называется *экстремальным*, если $\mathrm{ad}_x^2 L \subseteq Fx$, и *регулярным* (*в смысле фон Неймана*), если $\mathrm{ad}_x^2 y = x$ для некоторого элемента $y \in L$. Хорошо известно, что при отсутствии у алгебры Ли L 6-кручения для любых её йорданова элемента x и элемента y элемент $\mathrm{ad}_x^2 y$ является йордановым и потому, помимо равенств

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_x^3 &= \mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x^3 y} = \mathrm{ad}_x^3 \mathrm{ad}_y - 3\,\mathrm{ad}_x^2 \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x + 3\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x^2 - \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x^3 = \\ &= -3\,\mathrm{ad}_x^2 \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x + 3\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x^2 = -\mathrm{ad}_x^2 \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x + \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x^2 = \\ &= \mathrm{ad}_x^2 \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x^2 = 0,\end{aligned}$$

для x и $\mathrm{ad}_x^2 y$ справедлив также следующий вариант тождества Макдональда линейных йордановых алгебр (см. [6, с. 99]):

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}^2_{\mathrm{ad}_x^2 y} &= (\mathrm{ad}_x^2 \mathrm{ad}_y - 2\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x + \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x^2)^2 = \\ &= -2\,\mathrm{ad}_x^2 \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x + \mathrm{ad}_x^2 \mathrm{ad}_y^2 \mathrm{ad}_x^2 + \\ &\quad + 4\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x^2 \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x - 2\,\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x^2 = \mathrm{ad}_x^2 \mathrm{ad}_y^2 \mathrm{ad}_x^2\end{aligned}$$

(см. [18, 20]). Для регулярного элемента x алгебры Ли L и её элемента y, такого что $\mathrm{ad}_x^2 y = x$, последнее выражение примет вид $\mathrm{ad}_x^2 = \mathrm{ad}_x^2 \mathrm{ad}_y^2 \mathrm{ad}_x^2$, т. е. в этом случае ad_x^2 является регулярным в смысле фон Неймана элементом присоединённой ассоциативной алгебры $\mathrm{Ad}(L)$ алгебры L в традиционном значении данного понятия. Любая алгебра Ли L над кольцом F с $1/6$, содержащая ненулевой регулярный элемент x, обладает элементом y, для которого $\big[[x,y],x\big] = 2x$ и $\big[[x,y],y\big] = -2y$, а значит и $\mathfrak{sl}(2)$-тройкой $(x, [x,y], y)$ (см. [19, предложение 1.18; 25, V.8.2]). При наличии $1/30$ в кольце F такой элемент y является к тому же йордановым элементом. Отметим и то, что в алгебрах Ли над полями нулевой характеристики экстремальные элементы порождают локально конечномерные идеалы (см. [8, лемма 15]).

Следствие 2.6. *Регулярные элементы идеалов любой невырожденной алгебры Ли L без 6-кручения над кольцом F являются её регулярными элементами. Если кольцо F является локальным кольцом Джекобсона, то экстремальные элементы идеалов такой алгебры Ли L являются её экстремальными элементами.*

Доказательство. Первое из этих утверждений напрямую следует из предложения 2.5. Пусть теперь L — невырожденная алгебра Ли без 6-кручения над локальным кольцом Джекобсона F, I — её ненулевой идеал и x — его ненулевой экстремальный элемент. Необратимые элементы такого кольца F формируют её первичный радикал $\mathrm{Rad}(F)$, фактор-алгебра по которому $F/\mathrm{Rad}(F)$ является полем. Из невырожденности алгебры Ли L следует её полупервичность, полупервичность фактор-кольца $F/\mathrm{Ann}_F L$ кольца F по аннулятору в нём $\mathrm{Ann}_F L = \big\{f \in F \mid fL = \{0\}\big\}$ F-модуля L и совпадение радикала $\mathrm{Rad}(F)$ с аннулятором $\mathrm{Ann}_F L$, $\mathrm{Rad}(F) = \mathrm{Ann}_F L$. Экстремальность элемента x идеала I предполагает выполнение для каждого $z \in I$ равенства $\mathrm{ad}_x^2 z = g_z x$ при некотором $g_z \in F$. Вместе с тем по предложению 2.5 он является йордановым элементом алгебры Ли L, и потому в силу сделанных ранее замечаний

$$\mathrm{ad}^2_{\mathrm{ad}_x^2 u} v = \mathrm{ad}_x^2 \mathrm{ad}_u^2 \mathrm{ad}_x^2 v = g_{\mathrm{ad}_u^2 \mathrm{ad}_x^2 v} x \quad (u, v \in L).$$

Поскольку идеалы алгебры Ли L не содержат ненулевых 2-энгелевых элементов (см. замечание 2.3), найдутся элементы $z \in I$ и $g_z \in F \setminus \mathrm{Ann}_F L$, такие что $\mathrm{ad}_x^2 z = g_z x \neq 0$ и как следствие

$$\mathrm{ad}^2_{\mathrm{ad}_x^2 z} y = \mathrm{ad}^2_{g_z x} y = g_z^2 \mathrm{ad}_x^2 y = g_{\mathrm{ad}_z^2 \mathrm{ad}_x^2 y} x, \quad \mathrm{ad}_x^2 y = \big((g_z^2)^{-1} g_{\mathrm{ad}_z^2 \mathrm{ad}_x^2 y}\big) x \quad (y \in L).$$

Поэтому x является экстремальным элементом алгебры Ли L. Кроме того, он является также её регулярным элементом, так как $\mathrm{ad}_x^2 g_z^{-1} z = x$. □

Используя введённые ранее обозначения, определим на классе всех алгебр Ли над кольцом F отображения ${}_J K$, ${}_R K$ и ${}_E K$ для свойства J быть йордановым элементом, свойства R быть регулярным элементом или оболочкой сэндвича и свойства E быть экстремальным элементом и выделим классы алгебр Ли $\mathfrak{R}_J$, $\mathfrak{R}_R$, $\mathfrak{R}_E$, $\mathfrak{S}_J$, $\mathfrak{S}_R$ и $\mathfrak{S}_E$ над кольцом F. Мы будем называть отображения ${}_J K$, ${}_R K$ и ${}_E K$ (их значения ${}_J K(L)$, ${}_R K(L)$ и ${}_E K(L)$ на конкретной алгебре Ли L над кольцом F) *йордановым*, *регулярным* и *экстремальным радикалами алгебр Ли* (*алгебры* L). В любой алгебре Ли L над кольцом F выполняются включения

$$K(L) \subseteq {}_R K(L) \cap {}_E K(L) \subseteq {}_R K(L) + {}_E K(L) \subseteq {}_J K(L),$$

из которых следуют включения

$$\mathfrak{R}_K \subseteq \mathfrak{R}_R \cap \mathfrak{R}_E \subseteq \mathfrak{R}_R \cup \mathfrak{R}_E \subseteq \mathfrak{R}_J, \quad \mathfrak{S}_J \subseteq \mathfrak{S}_R \cap \mathfrak{S}_E \subseteq \mathfrak{S}_R \cup \mathfrak{S}_E \subseteq \mathfrak{S}_K.$$

В случае локального кольца Джекобсона F с $1/6$ к ним можно добавить включения $\mathfrak{R}_E \subseteq \mathfrak{R}_R$ и $\mathfrak{S}_R \subseteq \mathfrak{S}_E$ (см. доказательство следствия 2.6).

Если фактор-алгебра $L/{}_J K(L)$ алгебры Ли L по её йорданову радикалу ${}_J K(L)$ не имеет $n!$-кручения для некоторого $n \geqslant 4$ (k-кручения для всех $k > 1$), то радикал ${}_J K(L)$ является наименьшим из идеалов алгебры L, фактор-алгебры по которым не содержат ненулевых n-энгелевых (энгелевых) элементов (см. следствие 2.2). Заметим также, что йорданов и регулярный радикалы алгебры Ли над кольцом F не изменятся при замене F на любое из его подколец с единицей H. В то же время её экстремальные радикалы как алгебры над кольцами F и H могут быть различными, причём второй из них входит в первый и является F-идеалом (см. замечание 1.1).

По замечанию 2.3, предложению 2.5 (или следствию 2.4) и следствию 2.6 класс $\mathfrak{S}_S$ входит в класс ${}^{(1)}\mathfrak{S}_S$ для $S = J, R$ при наличии $1/6$ в кольце F и для $S = E$, если F является локальным кольцом Джекобсона с $1/6$. Поэтому при таких ограничениях на кольцо F классы $\mathfrak{R}_S$ и ${}^{(1)}\mathfrak{S}_S$ совпадают с классами $\mathcal{T}_S$-радикальных и $\mathcal{T}_S$-полупростых алгебр $\mathfrak{R}_{\mathcal{T}_S}$ и $\mathfrak{S}_{\mathcal{T}_S}$ для радикала $\mathcal{T}_S = \mathcal{T}_{\mathfrak{R}_S} = \mathcal{T}^{\mathfrak{S}_S}$, $\mathfrak{R}_S = \mathfrak{R}_{\mathcal{T}_S}$ и ${}^{(1)}\mathfrak{S}_S = \mathfrak{S}_{\mathcal{T}_S}$, $S = J, R, E$. Вместе с тем мы получаем, что отображение ${}_SK$, $S = J, R, E$, является радикалом в смысле Куроша—Амицура на замкнутом относительно взятия идеалов и гомоморфных образов классе алгебр Ли над кольцом F с соответствующим S ограничением тогда и только тогда, когда ${}_SK(L) = {}_SK\big({}_SK(L)\big)$ для любой алгебры Ли L из этого класса.

Помимо введённого здесь понятия регулярного радикала можно рассматривать и его вариант, в котором вместо оболочек сэндвичей используются 2-энгелевы элементы.

Предложение 2.7. *Если алгебра Ли L над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ нулевой характеристики обладает ненулевыми сильно алгебраическими элементами, то она содержит ненулевые йордановы элементы* (см. [22, следствие 2.3]).

Следствие 2.8. *Йорданов радикал ${}_JK(L)$ любой алгебры Ли L над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{F}$ нулевой характеристики является наименьшим среди её идеалов, в фактор-алгебрах по которым нет ненулевых сильно алгебраических элементов.*

Поэтому на классе алгебр Ли с алгебраическим присоединённым представлением над таким полем $\mathbb{F}$ йорданов радикал ${}_JK$ и радикал $\mathcal{T}_J$ совпадают с тождественным радикалом (радикалом, ставящим в соответствие алгебрам их несобственные идеалы).

Нам также потребуется следующая лемма Кострикина (см. [11; 13, доказательство предложения 1.4.6 на с. 23; 17, лемма 2.2 на с. 347]).

Предложение 2.9. *Пусть $n \geqslant 1$ и R — ассоциативная алгебра над кольцом F с $1/n!$. Тогда произведение $r_1 \cdots r_n$ любых n элементов $r_1, \ldots, r_n$ алгебры R можно записать в виде*
$$r_1 \cdots r_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} q_{ij} y_{ij}^i$$
для некоторых $m_i \geqslant 1$, обратимых в кольце F рациональных кратных $\{q_{ij}\}$ его единицы 1 и элементов $\{y_{ij}\}$ подалгебры $\langle r_1, \ldots, r_n \rangle$ алгебры Ли $R^{(-)}$, порождённой элементами $r_1, \ldots, r_n$, $i = 1, \ldots, n$.

Указанная здесь алгебра Ли $R^{(-)}$ определяется на основе ассоциативной алгебры R путём замены её операции умножения на кольцевой коммутатор $[\,,\,]$, $[a, b] = ab - ba$ для всех $a, b \in R$.

Теорема 2.10. *Для любого $n \geqslant 1$ радикал Кострикина K является радикалом в смысле Куроша—Амицура на классе алгебраических алгебр Ли степени не выше n над кольцом F с $1/n!$.*

Доказательство. Случай $n = 1$ отвечает классу абелевых алгебр Ли над кольцом F, на котором радикал Кострикина K равен тождественному радикалу. Согласно сделанным ранее замечаниям нам следует показать только то, что для любых $n \geqslant 2$ и алгебраической алгебры Ли L степени не выше n над кольцом F с $1/n!$ её радикал Кострикина $I = K(L)$ совпадает с его радикалом Кострикина $J = K(I)$. Переходя при необходимости к фактор-алгебре алгебры Ли L по наибольшему из её идеалов, входящих в идеал J её идеала I, мы можем считать без ограничения общности, что J не содержит ненулевых идеалов алгебры L, и тем самым свести нашу задачу к проверке невырожденности L в данной ситуации. Зафиксируем любой 2-энгелев элемент $x \in L$, $x \in J \subseteq I$. Докажем при помощи индукции по k, что $\mathrm{ad}_y^k x \in J$ при всех $y \in L$ и $k = 1, \ldots, n-1$. Поскольку $\big[J, [L, I]\big] \subseteq [J, I] \subseteq J$ и $\mathrm{ad}_x^2 = \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_u \mathrm{ad}_x = 0$ для каждого $u \in L$, в фактор-алгебре I/J

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}^2_{\mathrm{ad}_y x + J}(z + J) = \mathrm{ad}^2_{\mathrm{ad}_y x} z + J = (\mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x - \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y)^2 z + J = \\ = \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x (\mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x - \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y) z + J = J \quad (z \in I).\end{aligned}$$

Поэтому элемент $\mathrm{ad}_y x + J$ алгебры Ли I/J является 2-энгелевым и нулевым ввиду её невырожденности, $\mathrm{ad}_y x \in J$. Основание индукции для $k = 1$ выполнено. Предположим, что включение $\mathrm{ad}_y^i x \in J$ уже доказано для любых $y \in L$ и $i = 1, \ldots, s-1$ при некотором s, $1 < s \leqslant n-1$. Используя легко выводимое по индукции равенство

$$\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_u^p w} = \sum_{q=0}^{p} (-1)^q \binom{p}{q} \mathrm{ad}_u^{p-q} \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_u^q \quad (p \geqslant 0,\ u, w \in L), \tag{5}$$

мы можем записать

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_u^p \mathrm{ad}_w = \mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_u^p w} - \sum_{q=1}^{p} (-1)^q \binom{p}{q} \mathrm{ad}_u^{p-q} \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_u^q = \mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_u^p w} - \\ - \sum_{q=1}^{p} (-1)^q \binom{p}{q} \left(\mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_u^{p-q} w} - \sum_{j=1}^{p-q} (-1)^j \binom{p-q}{j} \mathrm{ad}_u^{p-q-j} \mathrm{ad}_w \mathrm{ad}_u^j \right) \mathrm{ad}_u^q = \\ = \sum_{l=0}^{p} c_{pl} \mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_u^l w} \mathrm{ad}_u^{p-l} \quad (p \geqslant 0,\ u, w \in L)\end{aligned}$$

для подходящих целых коэффициентов $\{c_{pl}\}$ с $c_{pp} = 1$. Значит,

$$\mathrm{ad}_y^i \mathrm{ad}_x \psi(z) + J = J \quad (y \in L,\ z \in I,\ i = 0, \ldots, s-1,\ \psi \in \mathrm{Ad}(L)'), \tag{6}$$

где $\mathrm{Ad}(L)' = F\,\mathrm{Id}_L + \mathrm{Ad}(L)$ — подалгебра алгебры эндоморфизмов $\mathrm{End}_F(L)$ F-модуля L, порождённая его тождественным эндоморфизмом Id_L и элементами присоединённой ассоциативной алгебры $\mathrm{Ad}(L)$ алгебры Ли L. Отсюда следует также, что

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ad}^2_{\operatorname{ad}_y^s x+J}(z+J)=\operatorname{ad}^2_{\operatorname{ad}_y^s x} z+J=\\
&\quad=\sum_{i,j=0}^{s}(-1)^{i+j}\binom{s}{i}\binom{s}{j}\operatorname{ad}_y^{s-i}\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^{s+i-j}\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^{j} z+J=\\
&\quad=\sum_{j=0}^{s}(-1)^{j}\binom{s}{j}\operatorname{ad}_y^{s}\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^{s-j}\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^{j} z+J \quad (y\in L,\ z\in I).
\end{aligned}$$

Рассмотрим любой элемент

$$\operatorname{ad}_y^s\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^t\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^h z+J$$

для $2\leqslant t\leqslant s$ и $h\geqslant 0$ ($t\geqslant 2$, так как $\operatorname{ad}_y^s\operatorname{ad}_x^2\operatorname{ad}_y^h z+J=\operatorname{ad}_y^s\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^h z+ J=J$). Положим $q=\min\{t,n-s\}$ и выпишем при помощи (5) и (6) для каждого $i=1,\dots,q$ равенства

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ad}_y^s\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^t\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^h z+J=\operatorname{ad}_y^s\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^i\operatorname{ad}_y^{t-i}\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^h z+J=(-1)^i\binom{s+i}{i}^{-1}\times\\
&\quad\times\Biggl(\operatorname{ad}_{\operatorname{ad}_y^{s+i}x}-\sum_{0\leqslant l\leqslant s+i,\ l\neq i}(-1)^l\binom{s+i}{l}\operatorname{ad}_y^{s+i-l}\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^l\Biggr)\operatorname{ad}_y^{t-i}\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^h z+J=\\
&\quad=(-1)^i\binom{s+i}{i}^{-1}\Biggl(-\sum_{l=0}^{i-1}(-1)^l\binom{s+i}{l}\operatorname{ad}_y^{s+i-l}\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^l\Biggr)\operatorname{ad}_y^{t-i}\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^h z+J=\\
&\quad=\sum_{l=0}^{i-1}(-1)^{l+i+1}\binom{s+i}{i}^{-1}\binom{s+i}{l}\operatorname{ad}_y^{s+i-l}\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^{l+t-i}\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^h z+J=\\
&\quad=\sum_{l=0}^{i-1}(-1)^{l+i+1}\frac{s!\,i!}{l!\,(s+i-l)!}\operatorname{ad}_y^{s+i-l}\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^{l+t-i}\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^h z+J=\\
&\quad=\sum_{k=1}^{i}(-1)^{k+1}\frac{s!\,i!}{(i-k)!\,(s+k)!}(\operatorname{ad}_y^{s+k}\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^{t-k}\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^h z+J).
\end{aligned}$$

Полагая

$$Y_m(t)=\operatorname{ad}_y^{s+m}\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^{t-m}\operatorname{ad}_x\operatorname{ad}_y^h z+J$$

для $m=0,\dots,q$, мы можем переписать эти равенства в виде линейной системы

$$\sum_{j=0}^{q}a_{ij}Y_j(t)=Y_0(t)\quad (i=1,\dots,q)$$

с нижней треугольной матрицей $A=(a_{ij})_{i,j=1}^q\in\mathrm{M}_q(F)$, где

$$a_{ij}=\begin{cases}0, & \text{если } j>i,\\ (-1)^{j+1}\dfrac{s!\,i!}{(i-j)!\,(s+j)!}, & \text{если } j\leqslant i,\end{cases}$$

$\mathrm{M}_q(F)$ — алгебра матриц размера $q \times q$ над кольцом F. Матрица A имеет обратимые в кольце F диагональные элементы и потому обратима в алгебре $\mathrm{M}_q(F)$. Кроме того, она представима в виде произведения $A = A' \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{qq})$ нижней треугольной матрицы

$$A' = (a'_{ij})_{i,j=1}^q = \exp(G) = \sum_{m=0}^{q-1} \frac{G^m}{m!},$$

где

$$a'_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } j > i, \\ a_{ij} a_{jj}^{-1} = \dfrac{s!\, i!\, (s+j)!}{(i-j)!\, (s+j)!\, s! j!} = \dfrac{i!}{(i-j)!\, j!} = \dbinom{i}{j}, & \text{если } j \leqslant i, \end{cases}$$

$G = (g_{ij})_{i,j=1}^q$ — нильпотентная матрица, $G^q = 0$,

$$g_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } j \geqslant i \text{ или } j < i-1, \\ i, & \text{если } j = i-1 \geqslant 1, \end{cases}$$

и диагональной матрицы $\operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{qq})$. Поэтому

$$A^{-1} = \operatorname{diag}(a_{11}^{-1}, \ldots, a_{qq}^{-1}) A'^{-1}$$

и

$$A'^{-1} = \exp(G)^{-1} = \exp(-G) = \sum_{m=0}^{q-1} (-1)^m \frac{G^m}{m!} = (a''_{ij} = (-1)^{i-j} a'_{ij})_{i,j=1}^q.$$

Следовательно, используя равенства

$$\sum_{j=1}^q a''_{ij} = \sum_{j=1}^q (-1)^{i-j} a'_{ij} = \sum_{j=1}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} = (-1)^{i+1},$$

мы получаем, что при всех $i = 1, \ldots, q$

$$Y_i(t) = \operatorname{ad}_y^{s+i} \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y^{t-i} \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y^h z + J = (-1)^{i+1} a_{ii}^{-1} Y_0(t) = \binom{s+i}{i} Y_0(t). \tag{7}$$

В частности, при $q \geqslant t-1$

$$Y_{t-1}(t) = \operatorname{ad}_y^{s+t-1} \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y^h z + J = J = \binom{s+t-1}{t-1} Y_0(t) = Y_0(t).$$

Если $q < t-1$, и значит $q = n-s < t-1$, $n < s+t-1 \leqslant 2s-1$, то согласно (7)

$$Y_q(t) = \operatorname{ad}_y^n \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y^{t-q} \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y^h z + J = \binom{n}{q} Y_0(t).$$

Вместе с тем алгебраичность степени не выше n алгебры Ли L позволяет нам записать

$$\operatorname{ad}_y^n \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y^{t-q} \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y^h z = (f_{n-1,t} \operatorname{ad}_y^{n-1} + \ldots + f_{1,t} \operatorname{ad}_y) \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y^{t-q} \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y^h z$$

для подходящих $f_{1,t}, \dots, f_{n-1,t} \in F$. Подставляя это равенство в выражение для элемента $Y_q(t)$, мы можем переписать его с учётом (6) в виде

$$Y_q(t) = \sum_{j=1}^{n-1} f_{j,t} \operatorname{ad}_y^j \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y^{t-q} \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y^h z + J =$$

$$= \sum_{j=s}^{n-1} f_{j,t} (\operatorname{ad}_y^j \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y^{t-q} \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y^h z + J) =$$

$$= \sum_{i=0}^{q-1} f_{s+i,t} (\operatorname{ad}_y^{s+i} \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y^{(t+i-q)-i} \operatorname{ad}_x \operatorname{ad}_y^h z + J) = \sum_{i=0}^{q-1} f_{s+i,t} Y_i(t+i-q).$$

Поскольку

$$Y_i(t+i-q) = \binom{s+i}{i} Y_0(t+i-q), \quad i = 0, \dots, q-1$$

(см. (7)), отсюда следует, что

$$Y_0(t) = \binom{n}{q}^{-1} Y_q(t) = \sum_{l=1}^{q} f_{s+q-l,t} \binom{n}{q}^{-1} \binom{s+q-l}{q-l} Y_0(t-l) = \sum_{l=1}^{q} h_{l,t} Y_0(t-l),$$

где

$$h_{l,t} = f_{s+q-l,t} \binom{n}{q}^{-1} \binom{s+q-l}{q-l}, \quad l = 1, \dots, q.$$

Данное равенство выполняется не только при t, удовлетворяющих неравенствам $2 \leqslant t \leqslant s$, $q < t-1$, но и при всех t, удовлетворяющих соотношениям $1 \leqslant t \leqslant s$, с любыми коэффициентами $\{h_{l,t}\}$ из кольца F при $q \geqslant t-1$ (в последнем случае $\min\{t-l, n-s\} \geqslant t-l-1$ и $Y_0(t-l) = J$, $l = 1, \dots, q$ (см. выше)). Применяя к нему индукцию по t с основанием $Y_0(0) = Y_0(1) = J$, несложно вывести, что $Y_0(t) = J$ для любого $t = 0, \dots, s$. Таким образом,

$$\operatorname{ad}^2_{\operatorname{ad}_y^s x + J}(z+J) = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{s}{j} Y_0(s-j) + J = J \quad (z \in I).$$

Поэтому элемент $\operatorname{ad}_y^s x + J$ невырожденной алгебры Ли I/J является 2-энгелевым и как следствие нулевым, $\operatorname{ad}_y^s x \in J$. Шаг индукции доказан полностью.

По предложению 2.9, применённому к ассоциативной алгебре $\operatorname{Ad}(L)$ и подалгебре $\operatorname{ad}(L)$ её алгебры Ли $\operatorname{Ad}(L)^{(-)}$, получаем, что из включений $\operatorname{ad}_y^k x \in J$ для всех $y \in L$ и $k = 0, \dots, n-1$ следует, что идеал $(x)_L$ алгебры Ли L, порождённый элементом x, входит в идеал J её идеала I, $(x)_L \subseteq J$. По условию последнее означает, что $(x)_L = \{0\}$. Так как это верно для любого 2-энгелева элемента x алгебры Ли L, алгебра L является невырожденной, $K(L) = I = J = \{0\}$. □

Теорема 2.11. *Для любого $n \geqslant 3$ йорданов радикал ${}_JK$ является радикалом в смысле Куроша—Амицура на классе алгебраических алгебр Ли степени не выше n над кольцом F с $1/n!$.*

Доказательство. По аналогии с предыдущим доказательством достаточно показать, что алгебраическая алгебра Ли L степени не выше n над кольцом F с $1/n!$, $n \geqslant 3$, имеет нулевой йорданов радикал $I = {}_JK(L)$ в ситуации, когда его йорданов радикал $J = {}_JK(I)$ не содержит ненулевых идеалов алгебры L. Применяя замечание 2.3 и теорему 2.10, мы получаем, что $K(L) = K\big(K(L)\big) \subseteq \subseteq K(I) \subseteq J$, и как следствие $K(L) = \{0\}$. Предположим, что алгебра Ли L обладает ненулевым йордановым элементом x, $x \in J \subseteq I$. Поскольку идеалы невырожденной алгебры Ли L не имеют ненулевых 2-энгелевых элементов (см. замечание 2.3), мы можем построить бесконечную цепочку ненулевых элементов $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ с $x_0 = x$ и $x_{j+1} \in \operatorname{ad}_{x_j}^2 I$ при любом $j \geqslant 0$. Несложно доказать по индукции, что $x_j \in J^{2^j}$ для каждого $j \geqslant 0$. Поэтому с учётом (5) для всех $y \in L$, $j \geqslant \log_2 n$ и $k = 0, \ldots, n-1$

$$\operatorname{ad}_y^k \operatorname{ad}_{x_j} I \subseteq \operatorname{ad}_y^k J^{2^j} \subseteq J^{2^j - k} \subseteq J,$$
$$\operatorname{ad}_{\operatorname{ad}_y^k x_j} I = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} \operatorname{ad}_y^{k-l} \operatorname{ad}_{x_j} \operatorname{ad}_y^l I \subseteq \sum_{l=0}^{k} \operatorname{ad}_y^l \operatorname{ad}_{x_j} I \subseteq J.$$

Так как фактор-алгебра I/J с нулевым йордановым радикалом имеет нулевой центр, отсюда следует, что $\operatorname{ad}_y^k x_j \in J$ для любых $y \in L$, $j \geqslant \log_2 n$ и $k = 0, \ldots, n-1$. Согласно предложению 2.9 последнее равносильно включению идеала $(\{x_j\}_{j \geqslant \log_2 n})_L$ алгебры Ли L, порождённого элементами x_j, $j \geqslant \log_2 n$, в идеал J её идеала I, $(\{x_j\}_{j \geqslant \log_2 n})_L \subseteq J$, что невозможно, $\{0\} \neq (\{x_j\}_{j \geqslant \log_2 n})_L \nsubseteq J$. Таким образом, йорданов радикал алгебры Ли L равен нулю, ${}_JK(L) = I = J = \{0\}$. □

Замечание 2.12. Пусть $n \geqslant 3$ и L — алгебраическая алгебра Ли степени не выше n над локальным кольцом Джекобсона F с $1/n!$. Тогда йорданов радикал ${}_JK(L)$ алгебры Ли L является наименьшим из её идеалов, фактор-алгебры по которым не содержат ненулевых энгелевых элементов.

Доказательство. По следствию 2.2 ввиду невырожденности фактор-алгебр алгебр Ли по их йордановым радикалам достаточно доказать n-энгелевость энгелевых элементов любой невырожденной алгебраической алгебры Ли L степени не выше n над локальным кольцом Джекобсона F при всех $n \geqslant 1$. Тривиальный случай абелевой алгебры Ли L и $n = 1$ не нуждается в рассмотрении. Для любых элементов $x, y \in L$ можно подобрать такой многочлен

$${}_{x,y}f(t) = t^{n_{x,y}} + {}_{x,y}f_{n_{x,y}-1} t^{n_{x,y}-1} + \ldots + {}_{x,y}f_1 t \in F[t], \quad \deg {}_{x,y}f = n_{x,y} \leqslant n,$$

что ${}_{x,y}f(\operatorname{ad}_x) y = 0$. Все коэффициенты многочлена ${}_{x,y}f$, входящие в аннулятор $\operatorname{Ann}_F L$ F-модуля L, можно считать равными нулю. Остальные его коэффициенты обратимы в кольце F (см. доказательство следствия 2.6). Если элемент x энгелев и при этом не все коэффициенты ${}_{x,y}f_1, \ldots, {}_{x,y}f_{n_{x,y}-1}$ принадлежат аннулятору $\operatorname{Ann}_F L$, тогда, пользуясь обратимостью эндоморфизма модуля L

$$\psi = \operatorname{ad}_x^{n_{x,y}-i} + {}_{x,y}f_{n_{x,y}-1} \operatorname{ad}_x^{n_{x,y}-1-i} + \ldots + {}_{x,y}f_i \operatorname{Id}_L,$$

где $i = \min\{j \mid {}_{x,y}f_j \notin \operatorname{Ann}_F L\}$, мы можем перейти от равенства ${}_{x,y}f(\mathrm{ad}_x)y = \psi\,\mathrm{ad}_x^i\, y = 0$ к равенству $\mathrm{ad}_x^i\, y = 0$. Следовательно, любой энгелев элемент x алгебры Ли L является n-энгелевым, $\mathrm{ad}_x^n = 0$. □

Теорема 2.13. *На любом замкнутом относительно взятия идеалов и гоморфных образов классе алгебр Ли $\mathfrak{M}$ над кольцом (локальным кольцом Джекобсона) F с $1/6$, на котором радикал Кострикина K является радикалом в смысле Куроша—Амицура, регулярный радикал ${}_RK$ (экстремальный радикал ${}_EK$) является радикалом в смысле Куроша—Амицура. В частности, радикал ${}_RK$ (радикал ${}_EK$) является радикалом в смысле Куроша—Амицура на классах алгебр Ли над полями нулевой характеристики и классах алгебраических алгебр Ли степени не выше n над кольцами (локальными кольцами Джекобсона) с $1/n!$ при любом $n \geqslant 3$.*

Доказательство. Достаточно лишь установить равенство нулю регулярного радикала $I = {}_RK(L)$ (экстремального радикала $I' = {}_EK(L)$ для локального кольца Джекобсона F) алгебры Ли L из класса $\mathfrak{M}$ в случае, когда его регулярный (экстремальный) радикал $J = {}_RK(I)$ ($J' = {}_EK(I')$) не содержит ненулевых идеалов алгебры L. Из замечания 2.3 и наложенного на класс алгебр Ли $\mathfrak{M}$ условия следует, что $K(L) = K\big(K(L)\big) \subseteq K(I) \subseteq J$ ($K(L) = K\big(K(L)\big) \subseteq K(I') \subseteq J'$), а потому $K(L) = \{0\}$. Допустим, что в алгебре Ли L имеется ненулевой регулярный элемент x. Значит, она содержит также элемент y, для которого $\big[[x,y],x\big] = 2x$ и $\big[[x,y],y\big] = -2y$ (см. выше). Так как $x, [x,y], y \in J \subseteq I$ и

$$\mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_x^2(-1/2y)} = -1/2(\mathrm{ad}_x^2\,\mathrm{ad}_y - 2\,\mathrm{ad}_x\,\mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x + \mathrm{ad}_y\,\mathrm{ad}_x^2),$$

мы получаем, что

$$\mathrm{ad}_x \in \bigcap_{k\geqslant 1} (\mathrm{ad}_x)^k_{\mathrm{Ad}^L(I)} = (\mathrm{ad}_x)^\omega_{\mathrm{Ad}^L(I)}, \quad x \in \mathrm{ad}_x I \subseteq \bigcap_{k\geqslant 1} J^k \;=\; J^\omega,$$

где $\mathrm{Ad}^L(I)$ — подалгебра присоединённой ассоциативной алгебры $\mathrm{Ad}(L)$ алгебры Ли L, порождённая внутренними дифференцированиями ad_u, $u \in I$, и $(\mathrm{ad}_x)_{\mathrm{Ad}^L(I)}$ — идеал алгебры $\mathrm{Ad}^L(I)$, который порождает дифференцирование ad_x. Хорошо известно, что пересечение всех степеней достижимой подалгебры (элемента конечного нормального ряда подалгебр) алгебры Ли является её идеалом (см. [17, лемма 3.2 на с. 10]). Поэтому указанное здесь ненулевое пересечение J^ω является идеалом алгебры Ли L, входящим в её достижимую подалгебру J, $J^\omega \subseteq J$, и, следовательно, равным нулю?! Полученное противоречие означает, что невырожденная алгебра Ли L имеет нулевой регулярный радикал ${}_RK(L) = I = J = \{0\}$.

Предположим теперь, что алгебра Ли L над локальным кольцом Джекобсона F с $1/6$ обладает ненулевым экстремальным элементом x', $x' \in J' \subseteq I'$. Ввиду невырожденности алгебры Ли L найдутся элементы $z' \in I'$ и $g \in F$, для которых $\mathrm{ad}_{x'}^2 z' = gx' \neq 0$ (см. замечание 2.3). Поскольку элемент g не принадлежит аннулятору $\operatorname{Ann}_F L$ F-модуля L, он обратим в кольце F и, как следствие, элемент $\mathrm{ad}^2_{x'}(g^{-1}z') = x'$ является регулярным (см. доказательство следствия 2.6). Это позволяет применить предыдущее рассуждение и вновь прийти к противоречию. Таким образом, экстремальный радикал алгебры Ли L равен нулю, ${}_EK(L) = I' = J' = \{0\}$. $\square$

Интересным вариантом условия регулярности элементов алгебр Ли является условие дополняемости до $\mathfrak{sl}(2)$-тройки. Элемент x алгебры Ли L над кольцом F с $1/2$ мы будем называть *дополняемым до* $\mathfrak{sl}(2)$*-тройки*, если она содержит элемент y, для которого $\big[[x,y],x\big] = 2x$ и $\big[[x,y],y\big] = -2y$. При этом элемент y также дополняем до $\mathfrak{sl}(2)$-тройки элементом $-x$. Используя схему доказательства теоремы 2.13, несложно показать, что отображение ${}_{\mathfrak{sl}(2)}K$ класса всех алгебр Ли над кольцом F с $1/2$, отвечающее свойству дополняемости до $\mathfrak{sl}(2)$-тройки, является радикалом в смысле Куроша—Амицура.

В заключение мы приведём следующий комментарий к центральному результату работы [13], основанный на его доказательстве.

Теорема 2.14. *Пусть $n \geqslant 1$ и L — алгебраическая алгебра Ли степени не выше n над кольцом F с $1/k(n)!$, где $k(1) = 1$, $k(2) = 2$, $k(3) = k(4) = 7$ и $k(n) = n + 2$ при $n \geqslant 5$. Тогда первичный радикал $\mathrm{Rad}(L)$ алгебры Ли L равен её радикалу Кострикина $K(L)$ и, как следствие, нижнему ниль-радикалу $\mathrm{RN}(L)$, $\mathrm{Rad}(L) = \mathrm{RN}(L) = K(L)$.*

Доказательство. Оставляя в стороне случай абелевой алгебры Ли L, равной своим радикалам $\mathrm{Rad}(L)$, $\mathrm{RN}(L)$ и $K(L)$, $L = \mathrm{Rad}(L) = \mathrm{RN}(L) = K(L)$, мы можем ограничить наше рассмотрение ситуацией, когда алгебра L является первичной и $n \geqslant 2$. При этом алгебру Ли L можно отождествить с лиевской подалгеброй $\mathrm{ad}(L)$ её присоединённой ассоциативной алгебры $\mathrm{Ad}(L)$, используя изоморфизм $\mathrm{ad}\colon x \mapsto \mathrm{ad}_x$, $x \in L$. Допустим, что алгебра Ли L содержит ненулевые оболочки сэндвичей. Для того чтобы свести это предположение к противоречию, достаточно сделать ряд замечаний к доказательству основного результата монографии [13] (теорема 1.7.1 на с. 34), позволяющих установить наличие в алгебре Ли L ненулевых оболочек сэндвичей толщины не ниже $n - 1$. Точнее, нам следует лишь внести необходимые изменения в те промежуточные выводы [13], которые используют условия n-энгелевости и конечномерности. В первую очередь это относится к теореме 3.4.1 на с. 77, которую можно заменить на более общую теорему Кострикина—Зельманова о сэндвичевых алгебрах из работы [10]. Ещё одно ключевое наблюдение состоит в том, что для любых $n \geqslant 1$, алгебраической алгебры Ли M степени не выше n над кольцом F, которая не имеет $n!$-кручения и кручения как модуль над фактор-кольцом $F/\operatorname{Ann}_F M$ кольца F по аннулятору $\operatorname{Ann}_F M$ F-модуля M, её оболочки сэндвича x и элементов $y_1, \ldots, y_n$, удовлетворяющих условию

$$\psi_n(x, y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}) = \psi_n\big(x, y_{i_{\sigma(1)}}, \ldots, y_{i_{\sigma(n)}}\big) \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n,\ 1 \leqslant i_1, \ldots, i_m \leqslant n), \quad (8)$$

где $\mathfrak{S}_n$ — симметрическая группа степени n и

$$\psi_k(x, z_1, \ldots, z_k) = \mathrm{ad}_x \,\mathrm{ad}^2_{z_1} \mathrm{ad}_x \cdots \mathrm{ad}_x \,\mathrm{ad}^2_{z_k} \mathrm{ad}_x \quad (z_1, \ldots, z_k \in M,\ k \geqslant 1),$$

выполняется равенство $\psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = 0$. Случай $n = 1$ и абелевой алгебры Ли M не нуждается в рассмотрении. При $n = 2$ выполнение для любой оболочки сэндвича $x \in M$ равенств

$$\psi_1(x, y) = \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y^2 \mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y \mathrm{ad}_x = 0 \quad (y \in M)$$

сразу следует из включения $\mathrm{ad}_y^2 z \in F \mathrm{ad}_y z$ для всех $y, z \in M$. Переходя к случаю $n \geqslant 3$, выделим в алгебре Ли M любые оболочку сэндвича x и элементы $y_1, \ldots, y_n$ с условием (8), положим

$$z = \sum_{i=1}^{n} \bigl[y_i, [y_i, x]\bigr] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ad}_{y_i}^2 x$$

и выберём для каждого $a \in M$ многочлен

$$_{a,z}f(t) = t^n + {}_{a,z}f_{n-1} t^{n-1} + \ldots + {}_{a,z}f_1 t \in F[t], \quad \deg {}_{a,z}f = n,$$

такой что $_{a,z}f(\mathrm{ad}_z)a = 0$. При $n \geqslant 3$ алгебра Ли M не имеет 6-кручения и потому

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{\mathrm{ad}_y^4 x} \mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_x \Bigl[\mathrm{ad}_y, \Bigl[\mathrm{ad}_y, \bigl[\mathrm{ad}_y, [\mathrm{ad}_y, \mathrm{ad}_x]\bigr]\Bigr]\Bigr] \mathrm{ad}_x = \\ &= \sum_{i=0}^{4} \binom{4}{i} (-1)^{4-i} \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y^i \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y^{4-i} \mathrm{ad}_x = \\ &= 6 \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y^2 \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y^2 \mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y^2 \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_y^2 \mathrm{ad}_x \end{aligned} \tag{9}$$

для всех $y \in M$. Вместе с тем для каждого $k \geqslant 1$

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_z^k \mathrm{ad}_x &= \Bigl(\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{ad}_{y_i}^2 \mathrm{ad}_x - 2 \mathrm{ad}_{y_i} \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_i} + \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_i}^2)\Bigr)^k \mathrm{ad}_x = \\ &= \Bigl(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_i}^2\Bigr)^k \mathrm{ad}_x = \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n} \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{i_1}}^2 \mathrm{ad}_x \cdots \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{i_k}}^2 \mathrm{ad}_x = \\ &= \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant n} \psi_k(x, y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}). \end{aligned}$$

Поэтому в силу (8) и (9)

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_z^n \mathrm{ad}_x &= \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant n} \psi_n(x, y_{i_1}, \ldots, y_{i_n}) = \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \psi_n(x, y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(n)}) = n! \, \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

и, кроме того, при любом k, $1 \leqslant k \leqslant n - 1$,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_1}^2 \mathrm{ad}_x \cdots \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{n-k}}^2 \mathrm{ad}_z^k \mathrm{ad}_x = \\
&\quad = \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_1}^2 \mathrm{ad}_x \cdots \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{n-k}}^2 \Bigg(\sum_{n-k+1 \leqslant i_1 \neq \ldots \neq i_k \leqslant n} \psi_k(x, y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}) \Bigg) = \\
&\quad = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \psi_n(x, y_1, \ldots, y_{n-k}, y_{n-k+\sigma(1)}, \ldots, y_{n-k+\sigma(k)}) = k!\, \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n)
\end{aligned}
$$

и при всех k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, и l, $l > k$,

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_1}^2 \mathrm{ad}_x \cdots \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{n-k}}^2 \mathrm{ad}_z^l \mathrm{ad}_x = \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_1}^2 \mathrm{ad}_x \cdots \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{n-k}}^2 \mathrm{ad}_z^k \mathrm{ad}_z^{l-k} \mathrm{ad}_x = \\
&\quad = \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_1}^2 \mathrm{ad}_x \cdots \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{n-k}}^2 \mathrm{ad}_z^k \mathrm{ad}_x \times \\
&\quad \times \Bigg(\sum_{1 \leqslant j_1, \ldots, j_{l-k} \leqslant n} \mathrm{ad}_{y_{j_1}}^2 \mathrm{ad}_x \cdots \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{j_{l-k}}}^2 \Bigg) \mathrm{ad}_x = \\
&\quad = k!\, \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) \Bigg(\sum_{1 \leqslant j_1, \ldots, j_{l-k} \leqslant n} \mathrm{ad}_{y_{j_1}}^2 \mathrm{ad}_x \cdots \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{j_{l-k}}}^2 \Bigg) \mathrm{ad}_x = \\
&\quad = \sum_{1 \leqslant j_1, \ldots, j_{l-k} \leqslant n} k!\, \psi_n(x, y_{\pi_{j_1}(1)}, \ldots, y_{\pi_{j_1}(n)}) \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{j_1}}^2 \mathrm{ad}_x \cdots \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{j_{l-k}}}^2 \mathrm{ad}_x = 0,
\end{aligned}
$$

где $\pi_{j_1} = (j_1 n)$ — транспозиция индексов j_1 и n,

$$
\begin{aligned}
&\psi_n(x, y_{\pi_{j_1}(1)}, \ldots, y_{\pi_{j_1}(n)}) \mathrm{ad}_{y_{j_1}}^2 \mathrm{ad}_x = \\
&\quad = \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{\pi_{j_1}(1)}}^2 \mathrm{ad}_x \cdots \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{\pi_{j_1}(n)}}^2 \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{j_1}}^2 \mathrm{ad}_x = \\
&\quad = \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{\pi_{j_1}(1)}}^2 \mathrm{ad}_x \cdots \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{\pi_{j_1}(n-1)}}^2 \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{j_1}}^2 \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{j_1}}^2 \mathrm{ad}_x = 0 \quad (j_1 = 1, \ldots, n).
\end{aligned}
$$

Для любого элемента $a \in M$ обозначим через k_a наименьшую из степеней одночленов в записи многочлена

$$
{}_{[x,a],z}f(t) = t^n + {}_{[x,a],z}f_{n-1} t^{n-1} + \ldots + {}_{[x,a],z}f_1 t \in F[t],
$$

коэффициенты которых не входят в аннулятор $\mathrm{Ann}_F M$ F-модуля M ($1 \notin \mathrm{Ann}_F M$, поскольку случай $M = \{0\}$ здесь не рассматривается). Тогда при $k_a = n$

$$
0 = {}_{[x,a],z}f(\mathrm{ad}_z)[x,a] = \mathrm{ad}_z^n \mathrm{ad}_x a = n!\, \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) a,
$$

а при $k_a < n$

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_1}^2 \mathrm{ad}_x \cdots \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{n-k_a}}^2 \, {}_{[x,a],z}f(\mathrm{ad}_z)[x,a] = \\
&= \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_1}^2 \mathrm{ad}_x \cdots \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{n-k_a}}^2 \times \\
&\times (\mathrm{ad}_z^n + {}_{[x,a],z}f_{n-1} \mathrm{ad}_z^{n-1} + \ldots + {}_{[x,a],z}f_{k_a} \mathrm{ad}_z^{k_a})[x,a] = \\
&= {}_{[x,a],z}f_{k_a} \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_1}^2 \mathrm{ad}_x \cdots \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_{y_{n-k_a}}^2 \mathrm{ad}_x \mathrm{ad}_z^{k_a} \mathrm{ad}_x a = \\
&= k_a!\, {}_{[x,a],z}f_{k_a} \psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) a.
\end{aligned}
$$

Ввиду условий, наложенных на алгебру Ли M, отсюда следует, что $\psi_n(x, y_1, \ldots, y_n)a = 0$ для всех $a \in M$, т. е. $\psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = 0$. Заменив в доказательстве предложения 3.2.2 из [13] вывод равенства $\psi_n(x, y_1, \ldots, y_n) = 0$ из условий n-энгелевости и r-мерности для $n \leqslant \binom{r+1}{2} + 1$ на проделанное нами рассуждение, мы можем записать предложение 3.2.2 и его следствие 3.2.3 следующим образом: если алгебраическая алгебра Ли M степени не выше некоторого $n \geqslant 1$ над кольцом F имеет нулевой центр, не имеет $n!$-кручения, $5!$-кручения при $n = 3, 4$ и кручения как $F / \operatorname{Ann}_F M$-модуль и обладает ненулевыми оболочками сэндвичей c_1 и c_2, для которых выполняется одно из условий

1) $[c_2, c_1] \neq 0$ и $\Big[\Big[\Big[\Big[\Big[[c_2, c_1], u\Big], u\Big], c_1\Big], u\Big], v\Big], c_1\Big] = 0$ для всех $u, v \in M$,
2) $[c_2, c_1] = 0$, $\big[[a, c_1], c_2\big] \neq 0$ при некотором $a \in M$ и
$$\operatorname{ad}_{c_1} \operatorname{ad}_v \operatorname{ad}_u \operatorname{ad}_{c_1} \operatorname{ad}_u^2 \operatorname{ad}_{c_1} \operatorname{ad}_{c_2} = 0$$
для всех $u, v \in M$,
3) $\Big[\Big[\big[[c_1, a], a\big], a\Big], c_1\Big] \neq 0$ при некотором $a \in M$ и
$$\operatorname{ad}_{c_1} \operatorname{ad}_v \operatorname{ad}_u \operatorname{ad}_{c_1} \operatorname{ad}_u^2 \operatorname{ad}_{c_1} \operatorname{ad}_w^2 \operatorname{ad}_{c_1} = 0$$
для любых $u, v, w \in M$,
4) $\operatorname{ad}_{[[[[c_1,u],u],u],c_1]} \operatorname{ad}_{[[[[c_1,v],v],v],c_1]} = 0$ для всех $u, v \in M$,

то она содержит ненулевую оболочку сэндвича толщины не ниже 2. Заметим, что в [13] внутренние дифференцирования алгебр Ли действуют на их элементах по правилу $\operatorname{ad}_x \colon y \mapsto y \operatorname{ad}_x = [y, x]$, а потому при цитировании [13] мы вынуждены менять в ряде случаев порядок записи и расстановку скобок.

Применяя данный вариант предложения 3.2.2 и теорему Кострикина—Зельманова о сэндвичевых алгебрах (вместо теоремы 3.4.1) в доказательстве теоремы 1.7.1, можно доказать существование в рассматриваемой нами первичной алгебре Ли L ненулевой оболочки сэндвича z толщины не ниже $n-1$ (не ниже $\max\{11, k(n)+1\} - 4 \geqslant n-1$ при $n \geqslant 3$, так как $1/k! \in F$ для $k = \max\{10, k(n)\}$). Следовательно, по выбору элемента z и по предложению 2.9
$$\operatorname{ad}_z^2 = \operatorname{ad}_z \operatorname{ad}_{a_1} \cdots \operatorname{ad}_{a_l} \operatorname{ad}_z = 0 \quad (a_1, \ldots, a_l \in L,\ l = 1, \ldots, n-1),$$
$$\operatorname{ad}_z \operatorname{Ad}(L)' \operatorname{ad}_z = (\operatorname{ad}_z)^2_{\operatorname{Ad}(L)} = \big[(\operatorname{ad}_z)_{\operatorname{ad}(L)}, (\operatorname{ad}_z)_{\operatorname{ad}(L)}\big] = \{0\},$$
где $(\operatorname{ad}_z)_{\operatorname{Ad}(L)}$ и $(\operatorname{ad}_z)_{\operatorname{ad}(L)}$ — идеалы ассоциативной алгебры $\operatorname{Ad}(L)$ и алгебры Ли $\operatorname{ad}(L)$, которые порождает внутреннее дифференцирование ad_z, $\operatorname{Ad}(L)' = F \operatorname{Id}_L + \operatorname{Ad}(L)$. Это означает также, что элемент z порождает ненулевой абелев идеал $(z)_L$ алгебры Ли L (см. начало доказательства), наличие которого в алгебре L противоречит её первичности. Таким образом, алгебра Ли L является невырожденной. $\square$

Теорема 2.14 и результаты работы [14] (см. также [4,7]) позволяют получить следующий результат.

Следствие 2.15. *Радикал Кострикина K является кручением на любом классе алгебр Ли над кольцом F, которые удовлетворяют вместе с F при некотором $n \geqslant 1$ условиям теоремы 2.14, причём радикал Кострикина $K(L)$ каждой алгебры L из такого класса является её локально конечным локально разрешимым идеалом.*

Отметим, что в случае совпадения радикала Кострикина $K(L)$ алгебры Ли L над кольцом F с её первичным радикалом $\mathrm{Rad}(L)$ его можно описать как множество всех элементов $x \in L$, удовлетворяющих условию, что всякая цепочка элементов $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ с $x_0 = x$ и $x_{j+1} \in \{\mathrm{ad}_{x_j}^2 y, \mathrm{ad}_{x_j} \mathrm{ad}_z \mathrm{ad}_{x_j} y \mid y, z \in L\}$ для любого $j \geqslant 0$ стабилизируется нулём на конечном шаге. Кроме того, если фактор-алгебра $L/K(L)$ не имеет 2-кручения, то в таком описании элементов радикала $K(L)$ можно ограничиться условием $x_{j+1} \in \mathrm{ad}_{x_j}^2 L$, $j \geqslant 0$. Последнее хорошо согласуется с известными описаниями радикала Маккриммона альтернативных и йордановых алгебр и первичного радикала групп (см. [9, 16, 26, 27]). В число алгебр Ли, имеющих равные первичные радикалы и радикалы Кострикина, входят, помимо алгебр Ли из теоремы 2.14, обобщённо специальные алгебры Ли над полями нулевой характеристики (см. [2, 5]).

Литература

[1] Андрунакиевич В. А., Рябухин В. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.

[2] Бейдар К. И., Пихтильков С. А. О первичном радикале специальных алгебр Ли // УМН. — 1994. — Т. 49, № 1. — С. 233.

[3] Голубков А. Ю. Конструкции специальных радикалов алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2015. — Т. 20, вып. 1. — С. 57—133.

[4] Голубков А. Ю. Локальная конечность алгебр // Фундамент. и прикл. матем. — 2014. — Т. 19, вып. 6. — С. 25—75.

[5] Гришков А. Н. О локальной нильпотентности идеала алгебры Ли, порождённого элементами 2-го порядка // Сиб. матем. журн. — 1982. — Т. 23, № 1. — С. 181—182.

[6] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[7] Жевлаков К. А., Шестаков И. П. О локальной конечности в смысле Ширшова // Алгебра и логика. — 1973. — Т. 12, № 1. — С. 41—73.

[8] Зельманов Е. И. Алгебры Ли с алгебраическим присоединённым представлением // Матем. сб. — 1983. — Т. 121 (163), № 4 (8). — С. 545—561.

[9] Зельманов Е. И. Характеризация радикала Маккриммона // Сиб. матем. журн. — 1984. — Т. 25, № 5. — С. 190—192.

[10] Зельманов Е. И., Кострикин А. И. Теорема о сэндвичевых алгебрах // Тр. МИАН СССР. — 1988. — Т. 183. — P. 106—111.

[11] Кострикин А. И. Кольца Ли, удовлетворяющие условию Энгеля // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1957. — Т. 21. — С. 515—540.

[12] Кострикин А. И. О проблеме Бернсайда // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1959. — Т. 23. — С. 3—34.

[13] Кострикин А. И. Вокруг Бернсайда. — М.: Наука, 1986.

[14] Плоткин Б. И. Об алгебраических множествах элементов в группах и алгебрах Ли // УМН. — 1958. — Т. 13, № 6. — С. 133—138.

[15] Филиппов В. Т. О ниль-элементах индекса 2 в алгебрах Мальцева // Сиб. матем. журн. — 1981. — Т. 22, № 3.

[16] Щукин К. К. RI*-разрешимый радикал групп // Матем. сб. — 1966. — Т. 52, № 4. — С. 1024—1031.

[17] Amayo R. K., Stewart I. N. Infinite dimensional Lie algebras. — Leyden: Noordhoof, 1974.

[18] Benkart G. On inner ideals and ad-nilpotent elements of Lie algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1977. — Vol. 232. — P. 61—81.

[19] Draper Fontanals C., Fernández López A., García E., Gómez Lozano M. The socle of a non-degenerate Lie algebra // J. Algebra. — 2008. — Vol. 319. — P. 2372—2394.

[20] Fernández López A., García E., Gómez Lozano M. The Jordan algebra of a Lie algebra // J. Algebra. — 2007. — Vol. 308. — P. 164—177.

[21] Fernández López A., García E., Gómez Lozano M. Inner ideal structure of nearly Artinian Lie algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 2009. — Vol. 137, no. 1. — P. 1—9.

[22] Fernández López A., Golubkov A. Yu. Lie algebras with an algebraic adjoint representation revisited // Manuscripta Math. — 2013. — Vol. 140, no. 3-4. — P. 363—376.

[23] García E., Gómez Lozano M. A note on a result of Kostrikin // J. Algebra. — 2009. — Vol. 37. — P. 2405—2409.

[24] García E., Gómez Lozano M. A characterization of the Kostrikin radical of a Lie algebra // J. Algebra. — 2011. — Vol. 346. — P. 266—283.

[25] Seligman G. B. Modular Lie algebras. — New York: Springer, 1967. — (Ergebn. Math. ihrer Grenzgeb.; Bd. 40).

[26] Thedy A. Radicals of right-alternative and Jordan rings // Commun. Algebra. — 1984. — Vol. 12, no. 7. — P. 857—887.

[27] Thedy A. Z-closed ideals of quadratic Jordan algebras // Commun. Algebra. — 1985. — Vol. 13, no. 12. — P. 2537—2565.