Линейный базис свободной алгебры Акивиса*

И. А. ГРОО
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: grooivan@yandex.ru

УДК 512.579

Ключевые слова: свободная неассоциативная алгебра, свободная алгебра Акивиса, универсальная обёртывающая алгебра.

Аннотация

В работе построен линейный базис свободных алгебр Акивиса.

Abstract

I. A. Groo, A linear basis of the free Akivis algebra, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 2, pp. 181—186.

We construct a linear basis of a free Akivis algebra.

1. Введение

Линейное пространство над полем K называется *алгеброй Акивиса*, если на этом пространстве введены две операции: антикоммутативная билинейная операция $[x,y]$, которую обычно называют *коммутатором*, и трилинейная операция $\mathcal{A}(x,y,z)$, называемая *ассоциатором*, удовлетворяющие соотношению

$$\begin{aligned}&\big[x,[y,z]\big]+\big[y,[z,x]\big]+\big[z,[x,y]\big]=\\&\qquad=\mathcal{A}(x,y,z)+\mathcal{A}(y,z,x)+\mathcal{A}(z,x,y)-\mathcal{A}(y,x,z)-\mathcal{A}(x,z,y)-\mathcal{A}(z,y,x).\end{aligned}$$

Эта алгебра впервые была рассмотрена М. А. Акивисом [1] в 1976 году.

Пусть n — натуральное число, $F(X)$ — свободная неассоциативная алгебра над полем K характеристики 0 с множеством X свободных образующих. Обозначим через $F_n = F_n(X)$ множество *однородных* элементов степени n. Имеем прямое разложение

$$F(X)=\bigoplus F_n(X).$$

В $F(X)$ рассмотрим новые операции: коммутатор $[x,y]=xy-yx$ и ассоциатор $\mathcal{A}(x,y,z)=x(yz)-(xy)z$. Тогда подалгебра в $F(X)$ относительно этих операций, порождённая множеством X, — *свободная алгебра Акивиса*. Обозначим её

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10013).

$\mathrm{Ak}(X)$. Таким образом, алгебра $F(X)$ является универсальной обёртывающей алгеброй для $\mathrm{Ak}(X)$ (см. [3, 4]). Известно, что подалгебры свободных алгебр Акивиса свободны (см. [3]).

Введём новое обозначение. Будем рассматривать свободную алгебру Акивиса $\mathrm{Ak}(X)$, где ассоциатор обозначается $\langle a, b, c\rangle$. Основное тождество будет иметь вид

$$\big[x,[y,z]\big]+\big[y,[z,x]\big]+\big[z,[x,y]\big]= \\ =\langle x,y,z\rangle+\langle y,z,x\rangle+\langle z,x,y\rangle-\langle y,x,z\rangle-\langle x,z,y\rangle-\langle z,y,x\rangle.$$

Через $\mathrm{Ak}_n(X)$ будем обозначать однородную часть степени n.

2. Основная часть

Рассмотрим X — некоторое непустое множество. Пусть $F = F(X)$ — свободная неассоциативная алгебра над X. Назовём базисным семейством любое подмножество $R = R(X) \subseteq F(X) = F$ с линейной упорядоченностью $\leqslant$, которое удовлетворяет следующим условиям.

R1. $X \subseteq R$.

R2. Элемент $w = u * v$ лежит в R тогда и только тогда, когда
   1) $u, v \in R$,
   2) $u < v$.

R3. Элемент w лежит в R, если $w = \langle a, b, c\rangle$, $a \in R_i$, $b \in R_j$, $c \in R_k$ и $a \geqslant b$ или $b \geqslant c$.

Пусть $R_m = R \cap F_m(X)$. Определим

$$\deg(\langle a,b,c\rangle)=\deg(a)+\deg(b)+\deg(c).$$

Элемент $w = \langle a, b, c\rangle$ линеен по всем трём аргументам.

Приведём пример такого семейства. Пусть $R_1 = X$. Зададим на X некоторый порядок. Определим R_n по индукции, включая в R_n одночлены степени n из $R_{n-1} * R_{n-1}$ и элементы вида $\langle a, b, c\rangle$ степени n.

Дополним упорядоченность на R_{n-1} до упорядоченности на R_n произвольно, но так, что для любого $u \in R_n$ и $v \in R_{n-1}$ выполнено $u > v$. Положим $R = \bigcup R_n$. Элементы, принадлежащие множеству R, будем называть *базисными*.

Лемма 1. *Пусть R — базисное семейство в $F(X)$. Тогда для любого натурального n линейное подпространство Ak_n порождается множеством R_n.*

Доказательство. Индукция по n. При $n = 1$ $R_n = X$, основание индукции доказано.

Любой элемент из Ak_n — это линейная комбинация элементов $w = [u, v]$ и $w' = \langle a, b, c\rangle$, где $u \in \mathrm{Ak}_i$, $v \in \mathrm{Ak}_j$, $a \in \mathrm{Ak}_k$, $b \in \mathrm{Ak}_m$, $c \in \mathrm{Ak}_r$. По индукции элементы u, v, a, b, c представимы в виде линейной комбинации базисных одночленов. Раскрывая $[u,v]$ и $\langle ,a,b,c\rangle$ по дистрибутивности, можем считать, что $u,v,a,b,c\in R$. Так как $[u,v]=-[v,u]$, получаем, что $[u,v]\in R$. Имеем, что $\langle a,b,c\rangle\in R$ всегда, кроме случая $a<b<c$; в этом случае, применяя основное тождество, можем представить $\langle a,b,c\rangle$ в виде суммы элементов из R. $\square$

Множеством B назовём множество, состоящее из неассоциативных элементов $w_1w_2\dots w_s$, $w_i\in R$ для $1\leqslant i\leqslant s$, с условиями, что если есть (w_iw_{i+1}), то $w_i\geqslant w_{i+1}$, а также если есть $\big(w_i(w_{i+1}w_{i+2})\big)$, то $w_i<w_{i+1}$, а также нет случаев $\big((w_iw_{i+1})w_{i+2}\big)$.

Пусть B_n — множество элементов степени n из множества B.

Заметим, что любой элемент $w\in R$ принадлежит множеству B, т. е. $R\subset B$.

Лемма 2. *$F_n(X)$ является линейной оболочкой множества B_n.*

Доказательство. F_n является линейной оболочкой неассоциативных одночленов $(x_1x_2\dots x_n)$. Для этого покажем, что $(w_1w_2\dots w_s)$, $w_i\in R$ степени n, с произвольной расстановкой скобок представляется линейной комбинацией элементов из B_n. Будем вести индукцию по s, а при данном s — по количеству случаев, не подходящих под условия множества B, т. е. по количеству (w_iw_{i+1}), $w_i<w_{i+1}$; $\big(w_i(w_{i+1}w_{i+2})\big)$, $w_i<w_{i+1}$; $\big((w_iw_{i+1})w_{i+2}\big)$, встречающихся в $(w_1w_2\dots w_s)$ с данной расстановкой скобок. Допустим, что в $(w_1w_2\dots w_s)$ есть (w_iw_{i+1}), $w_i<w_{i+1}$. Тогда

$$\begin{aligned}&(w_1w_2\dots(w_iw_{i+1})\dots w_s)=\\&\qquad=(w_1w_2\dots([w_iw_{i+1}])\dots w_s)+(w_1w_2\dots(w_{i+1}w_i)\dots w_s).\end{aligned}$$

В первом слагаемом $[w_iw_{i+1}]$ принадлежит R, а значит, количество множителей в первом слагаемом стало $s-1$ и к нему применимо предположение индукции. Таким образом, мы можем заменить все случаи (w_iw_{i+1}), $w_i<w_{i+1}$. Будем считать, что в $(w_1w_2\dots w_s)$ их нет.

Пусть в $(w_1w_2\dots w_s)$ есть $\big(w_i(w_{i+1}w_{i+2})\big)$, $w_i<w_{i+1}$, при этом $w_{i+1}\geqslant w_{i+2}$, так как мы убрали все случаи (w_iw_{i+1}), $w_i<w_{i+1}$ на предыдущем шаге. Тогда

$$\begin{aligned}&\big(w_1w_2\dots\big(w_i(w_{i+1}w_{i+2})\big)\dots w_s\big)=\\&\quad=(w_1w_2\dots(\langle w_i,w_{i+1},w_{i+2}\rangle)\dots w_s)+\big(w_1w_2\dots\big((w_iw_{i+1})w_{i+2}\big)\dots w_s\big)=\\&\quad=(w_1w_2\dots(\langle w_i,w_{i+1},w_{i+2}\rangle)\dots w_s)+(w_1w_2\dots([w_iw_{i+1}])w_{i+2})\dots w_s)+\\&\quad+\big(w_1w_2\dots\big((w_{i+1}w_i)w_{i+2}\big)\dots w_s\big)=\\&\quad=(w_1w_2\dots(\langle w_i,w_{i+1},w_{i+2}\rangle)\dots w_s)+\big(w_1w_2\dots\big(([w_iw_{i+1}])w_{i+2}\big)\dots w_s\big)-\\&\quad-(w_1w_2\dots(\langle w_{i+1},w_i,w_{i+2}\rangle)\dots w_s)+\big(w_1w_2\dots\big(w_{i+1}(w_iw_{i+2})\big)\dots w_s\big).\end{aligned}$$

В первых трёх слагаемых $\langle w_i,w_{i+1},w_{i+2}\rangle\in R$, $[w_iw_{i+1}]\in R$ и $\langle w_{i+1},w_i,w_{i+2}\rangle\in R$, так как $w_i<w_{i+1}$ и $w_{i+1}\geqslant w_{i+2}$. Значит, к первым трём слагаемым применима индукция по s. В последнем слагаемом если $w_i\geqslant w_{i+2}$, то $w_{i+1}\geqslant w_i\geqslant w_{i+2}$ и применима индукция по числу случаев, не подходящих под условия множества B, так как их число стало на один меньше. Если $w_{i+1}<w_{i+2}$, то, как и

на первом шаге,

$$\big(w_1w_2\dots\big(w_{i+1}(w_iw_{i+2})\big)\dots w_s\big) =$$
$$= \big(w_1w_2\dots\big(w_{i+1}([w_iw_{i+2}])\big)\dots w_s\big) + \big(w_1w_2\dots\big(w_{i+1}(w_{i+2}w_i)\big)\dots w_s\big).$$

Для первого слагаемого применима индукция по s, а для второго слагаемого, содержащего $\big(w_{i+1}(w_{i+2}w_i)\big)$, $w_{i+1} \geqslant w_{i+2} \geqslant w_i$, — индукция по числу случаев, не подходящий под условия множества B.

Пусть теперь в $(w_1w_2\dots w_s)$ есть $\big((w_iw_{i+1})w_{i+2}\big)$. Тогда $w_i \geqslant w_{i+1}$, так как мы убрали противоположные случаи на первом шаге. Получаем

$$\big(w_1w_2\dots\big((w_iw_{i+1})w_{i+2}\big)\dots w_s\big) =$$
$$= (w_1w_2\dots(\langle w_i, w_{i+1}, w_{i+2}\rangle)\dots w_s) + \big(w_1w_2\dots\big(w_i(w_{i+1}w_{i+2})\big)\dots w_s\big).$$

В первом слагаемом $\langle w_i, w_{i+1}, w_{i+2}\rangle \in R$, так как $w_i \geqslant w_{i+1}$, а значит, к первому слагаемому применима индукция по s. Во втором слагаемом если $w_{i+1} \geqslant w_{i+2}$, то применима индукция по числу случаев, не подходящих под условия множества B. Если во втором слагаемом $w_{i+1} < w_{i+2}$, то

$$\big(w_1w_2\dots\big(w_i(w_{i+1}w_{i+2})\big)\dots w_s\big) =$$
$$= \big(w_1w_2\dots\big(w_i([w_{i+1}w_{i+2}])\big)\dots w_s\big) + \big(w_1w_2\dots\big(w_i(w_{i+2}w_{i+1})\big)\dots w_s\big).$$

Для первого слагаемого применима индукция по s, а второе слагаемое такое же, как и на втором шаге, значит, его мы тоже сможем представить в виде линейной комбинации элементов множества B. $\square$

Будем смотреть на неассоциативные произведения элементов $w_1w_2\dots w_s$ из R как на неассоциативные слова. *Расстановкой скобок* на неассоциативном слове $w_1w_2\dots w_s$ будем называть замену круглых скобок на квадратные или на треугольные по следующему правилу.

Если в слове есть подслово $\big((w_i)(w_{i+1})\big)$ и $w_i < w_{i+1}$, то заменяем это подслово на $([w_i, w_{i+1}])$.

Если в слове есть подслово $\Big(\big((w_i)(w_{i+1})\big)w_{i+2}\Big)$ и $w_i \geqslant w_{i+1}$, то заменяем это подслово на $\langle w_i, w_{i+1}, w_{i+2}\rangle$.

Если в слове есть подслово $\Big(w_i\big((w_{i+1})(w_{i+2})\big)\Big)$ и $w_i < w_{i+1}$, $w_{i+1} \geqslant w_{i+2}$, то заменяем это подслово на $\langle w_i, w_{i+1}, w_{i+2}\rangle$.

Заметим, что при каждой замене скобок мы заменяем произведение нескольких элементов из R на элемент из R, так как новый элемент удовлетворяет условиям R2 и R3.

Лемма 3. *На любом неассоциативном одночлене $x_1x_2\dots x_n \in F_n(X)$ можно единственным способом расставить квадратные и треугольные скобки так, что получится элемент множества B.*

Доказательство. Будем доказывать, что на любом неассоциативном элементе $(w_1w_2\dots w_m)$, $w_i \in R$, можно расставить скобки так, что получится элемент из B. Неассоциативный одночлен $(x_1x_2\dots x_n)$ также является неассоциативным произведение элементов из R. Будем вести индукцию по длине слова $w_1w_2\dots w_m$. База индукции очевидна.

Любой неассоциативный элемент $(w_1w_2\dots w_m)$ является произведением двух неассоциативных элементов, $X=(w_1w_2\dots w_s)$ и $Y=(w_{s+1}w_{s+2}\dots w_m)$. Для удобства дальше будем обозначать $(w_{s+1},w_{s+2},\dots,w_m)$ через $(u_1,u_2,\dots,u_k)$, $s+k=m$.

Существование расстановки. По предположению индукции на X и на Y можно расставить единственным образом квадратные и треугольные скобки так, что получатся неассоциативные элементы из множества B.

Если $s\neq 1$ и $k\neq 1$, то $(w_1w_2\dots w_s)(u_1u_2\dots u_k)\in B$, т. е. мы получили расстановку скобок.

Если $s\geqslant 3$ или $k\geqslant 3$, то $(w_1w_2\dots w_s)(u_1u_2\dots u_k)\in B$ и у нас есть расстановка скобок.

Если $s=1$, $k=1$ и $w_1<u_1$, то расстановкой скобок будет $[w_1,u_1]$, при этом это единственно возможный способ получить элемент из B. Если $w_1\geqslant u_1$, то $(w_1)(u_1)\in B$, и у нас есть расстановка скобок.

Если $s=2$, $k=1$, то $w_1\geqslant w_2$, так как $(w_1w_2)\in B$ по предположению индукции. Единственно возможной расстановкой скобок будет $\langle w_1,w_2,u_1\rangle$.

Если $s=1$, $k=2$, то $u_1\geqslant u_2$, так как $(u_1u_2)\in B$. Если $w_1\geqslant u_1$, то $\big(w_1(u_1u_2)\big)\in B$, и это единственная расстановка скобок. Если $w_1<u_1$, то единственной возможной расстановкой будет $\langle w_1,u_1,u_2\rangle$.

Единственность расстановки. Предположим, что на

$$(w_1w_2\dots w_m)=(X)(Y)$$

существует две расстановки скобок. Заметим, что если $s\geqslant 3$, или $k\geqslant 3$, или $s,k\neq 1$, то замену скобок можно делать или внутри слова X, или внутри слова Y, а так как расстановка скобок на X и Y единственна, то расстановка скобок единственна и на $(w_1w_2\dots w_m)$. Остаётся рассмотреть случаи, когда $s=2$, $k=1$, или $s=1$, $k=2$, или $s=1$, $k=1$, а для этих случаев расстановка скобок возможна единственным способом. □

Теорема. *Множество R образует линейный базис алгебры* $\mathrm{Ak}(X)$.

Доказательство. В $F_n(X)$ имеется базис из неассоциативных одночленов, а также по лемме 2 система порождающих элементов из множества B. По лемме 3 число неассоциативных одночленов равно числу элементов из множества B. Отсюда следует, что и множество элементов B также базис в $F_n(X)$. Значит, система элементов B линейно независима. В частности, независима и подсистема этой системы, состоящая из произведений длины $s=1$, т. е. система элементов из множества R. Так как система этих элементов порождает $\mathrm{Ak}_n(X)$, по лемме 1 она является базисом. Следовательно, R — линейный базис алгебры $\mathrm{Ak}(x)$. □

Литература

[1] Акивис М. А. О локальных алгебрах многомерных три-тканей // Сиб. матем. журн. — 1976. — Т. 17, № 1. — С. 5—11.

[2] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985.

[3] Mikhalev A. A., Shestakov I. P. PBW-pairs of varieties of linear algebras // Commun. Algebra. — 2014. — Vol. 42. — P. 667—687.

[4] Shestakov I. P., Umirbaev U. U. Free Akivis algebras, primitive elements, and hyperalgebras // J. Algebra. — 2002. — Vol. 250. — P. 533—548.