Кольца Голди, градуированные по группе с периодической фактор-группой по центру*

А. Л. КАНУННИКОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: andrew.kanunnikov@gmail.com

УДК 512.552

Ключевые слова: градуированные кольца Голди, кольца частных.

Аннотация

В статье исследуются gr-первичные и gr-полупервичные кольца Голди, градуированные группой с периодической фактор-группой по центру. Усилен результат К. Гудёрла и Т. Стэффорда 2000 года, доказавших аналог теоремы Голди для gr-первичных колец, градуированных абелевой группой: условие абелевости ослаблено до условия периодичности фактор-группы по центру. Также доказано, что ортогональное градуированное пополнение $O^{\mathrm{gr}}(R)$ gr-полупервичного кольца Голди R (градуированного группой с тем же условием) раскладывается в прямую сумму gr-первичных колец Голди R_i, причём, хотя вполне gr-приводимое классическое градуированное кольцо частных $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R)$ может не существовать, полное градуированное кольцо частных $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ вполне gr-приводимо и равно прямой сумме колец $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R_i) = Q^{\mathrm{gr}}(R_i)$.

Abstract

A. L. Kanunnikov, Goldie rings graded by a group with periodic quotient group modulo the center, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 2, pp. 187—191.

In this paper, we study gr-prime and gr-semiprime Goldie rings graded by a group with periodic quotient group modulo the center. We enhance the theorem of Goodearl and Stafford (2000) about gr-prime rings graded by Abelian groups; we extend the Abelian group class to the class of groups with periodic quotient group modulo the center. We also decompose the orthogonal graded completion $O^{\mathrm{gr}}(R)$ of a gr-semiprime Goldie ring R (graded by a group satisfying the same condition) into a direct sum of gr-prime Goldie rings $R_1, \ldots, R_n$ and prove that the maximal graded quotient ring $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ equals the direct sum of classical graded quotients rings of $R_1, \ldots, R_n$.

Статья посвящена градуированным по группе кольцам Голди. В ней получены новые градуированные аналоги следующей теоремы, доказанной Альфредом Голди в конце 1950-х годов.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 14-01-00452 «Теория колец: структурная теория; комбинаторные методы; приложения».

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 2, с. 187—191.

Теорема (А. Голди). *Пусть R — полупервичное правое кольцо Голди. Тогда классическое правое кольцо частных $Q_{\mathrm{cl}}(R)$ существует, вполне приводимо и совпадает с полным правым кольцом частных $Q(R)$. Кроме того, R первично тогда и только тогда, когда $Q(R)$ просто.*

Всюду далее R — ассоциативное кольцо с единицей, градуированное по группе G с нейтральным элементом e; через $h(R)$ обозначено множество $\bigcup\limits_{g \in G} R_g$ однородных элементов в R. Основные определения из теории градуированных колец можно найти, например, в [1].

Аналоги теоремы Голди для колец, градуированных по группе, изучались в [1—3, 5, 7, 8]. Приведём наиболее значимые результаты.

Теорема 1 [5; 8, теорема 8.4.4]. *Пусть G — абелева группа и G-градуированное правое gr-кольцо Голди R gr-первично. Тогда кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$ существует и вполне gr-приводимо.*

Теорема 2 [8, теорема 8.4.9]. *Пусть R — gr-полупервичное правое gr-кольцо Голди, сильно градуированное конечной группой G. Тогда R_e — полупервичное правое кольцо Голди, кольцо $Q_{\mathrm{cl}}(R) = Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$ существует, является сильно G-градуированным и вполне gr-приводимым, при этом $\bigl(Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)\bigr)_e = Q_{\mathrm{cl}}(R_e) = R_e S_e^{-1}$.*

Пример ([7]). Кольцо $R = k\langle x, y \mid xy = yx = 0\rangle$ с $\mathbb{Z}$-градуировкой

$$R_n = \begin{cases} kx^n & \text{при } n > 0, \\ k & \text{при } n = 0, \\ ky^{-n} & \text{при } n < 0 \end{cases}$$

gr-полупервично, gr-нётерово, но не gr-артиново, и $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R) = R$.

Теорема 3 [2, теоремы 11 и 13, следствие 12]. *Верны следующие утверждения.*

1. *Пусть R — правое gr-кольцо Голди, удовлетворяющее следующим условиям:*

   $$\text{кольцо } R \text{ } e\text{-точно справа и кольцо } R_e \text{ полупервично.} \qquad (*)$$

   Тогда R_e — правое кольцо Голди и

   $$Q^{\mathrm{gr}}(R) = Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R) = RS^{-1} = RS_e^{-1}, \quad Q_{\mathrm{cl}}(R_e) = R_e S_e^{-1} = Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)_e.$$

2. *gr-полупервичное правое gr-кольцо Голди удовлетворяет условию $(*)$ в каждом из следующих случаев:*
   1) *группа G периодична;*
   2) *кольцо R имеет конечный носитель.*

Замечание. Сохраним условия и обозначения теоремы 3. Так как R_e — правое кольцо Голди, то $Q_{\mathrm{cl}}(R_e)$ — вполне приводимое кольцо. По теореме Веддербёрна—Артина и её градуированному аналогу

$$Q_{\mathrm{cl}}(R_e)=\bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(T_i), \quad Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)=\bigoplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(D_i)(\bar{g}_i),$$

где D_i — градуированные тела, $T_i=(D_i)_e$ — тела, $\bar{g}_i\in G^{n_i}$ при $i=1,\ldots,n$ $(M_n(R)(g_1,\ldots,g_n)_h=(R_{g_i^{-1}hg_j})_{ij})$.

В настоящей работе получено усиление теоремы 1 о gr-первичных кольцах Голди и с его помощью доказан новый вариант об ортогонально полных gr-полупервичных кольцах Голди. Мы доказываем градуированные аналоги теорем Голди для колец, градуированных группой с периодической фактор-группой по центру. Этот класс групп, очевидно, включает в себя абелевы и периодические группы, рассмотренные в теоремах 1 и 3.

Теорема 4. *Пусть R — G-градуированное gr-первичное правое gr-кольцо Голди, фактор-группа $G/Z(G)$ периодична. Тогда кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$ существует, вполне gr-приводимо и совпадает с кольцом $Q^{\mathrm{gr}}(R)$.*

Доказательство. Пусть I — gr-существенный правый идеал в R. Как и в неградуированном случае, достаточно доказать, что I содержит однородный регулярный элемент.

По [8, лемма 8.4.2] существует элемент $a_1\in h(I)$, ненильпотентный gr-униформный справа, т. е. такой, что правый градуированный идеал a_1R gr-униформен справа (это значит, что любые два ненулевых градуированных правых идеала, лежащих в a_1R, имеют ненулевое пересечение). Пусть уже найдены ненильпотентные gr-униформные элементы $a_1,\ldots,a_m\in h(I)$ с условием $a_ia_j=0$ при $1\leqslant i<j\leqslant m$, т. е. $a_{i+1}\in\bigcap\limits_{j=1}^{i} r_R(a_j)$ при $1\leqslant i<m$. Если $J=\bigcap\limits_{j=1}^{m} r_R(a_j)\neq 0$, то $J\cap I\neq 0$ и по [8, лемма 8.4.2] существует ненильпотентный gr-униформный справа элемент $a_{m+1}\in h(J\cap I)$. Так как $a_j\in r_R(a_i)=r_R(a_i^2)$ при $j>i$ [8, лемма 8.4.3], то сумма $\sum\limits_i a_iR$ прямая. Значит, существует такое $n\in\mathbb{N}$, что $\bigcap\limits_{j=1}^{n} r_R(a_j)=0$. Поскольку кольцо R gr-первично и элементы $a_1,\ldots,a_n$ ненильпотентны, то $a_1^2R\cdots Ra_n^2\neq 0$, поэтому существуют такие элементы $s_1,\ldots,s_{n-1}\in h(R)$, что $s_1a_2^2s_2\cdots s_{n-1}a_n^2\neq 0$. По [8, лемма 8.4.2] существует такое $s_n\in h(R)$, что элемент

$$c=a_1^2s_1a_2^2s_2\ldots s_{n-1}a_n^2s_n$$

ненильпотентен. Определим элементы

$$d_i=(a_is_ia_{i+1}^2\cdots s_{n-1}a_n^2s_n)(a_1^2\cdots s_{i-1}a_i), \quad i=1,\ldots,n.$$

Так как d_i — подслова в c^2, то d_i ненильпотентны.

Обозначим $\deg c=x_iy_i$, $\deg d_i=:y_ix_i$, $x_i,y_i\in G$, $i=1,\ldots,n$. По условию фактор-группа $G/Z(G)$ периодична, поэтому найдётся такое $N\in\mathbb{N}$, что $(x_iy_i)^N\in Z(G)$. Тогда $(y_ix_i)^N=y_i(x_iy_i)^Ny_i^{-1}=(y_ix_i)^N$. Следовательно, однородные элементы $d_1^N,\ldots,d_n^N$ имеют одинаковую степень $(x_iy_i)^N$, так что их сумма $d = d_i^N + \ldots + d_n^N$ — однородный элемент той же степени. Кроме того, элемент d регулярен, поскольку

$$r_R(d) = \bigcap_{i=1}^{n} r_R(d_i^N) = \bigcap_{i=1}^{n} r_R(a_i) = 0. \qquad \square$$

Как известно, существуют $\mathbb{Z}$-градуированные gr-полупервичные кольца Голди, классические градуированные кольца частных которых не вполне gr-приводимы (см. пример). Тем не менее теорему о gr-первичных кольцах Голди можно «поднять» до теоремы о gr-полупервичных кольцах Голди с помощью ортогонального градуированного пополнения, построенного автором в [4].

Если R — gr-полупервичное gr-кольцо Голди, то конструкция его ортогонального градуированного пополнения $O^{\mathrm{gr}}(R)$ легко описывается непосредственно [3]. По [3, теорема 1] полное правое градуированное кольцо частных $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ вполне gr-приводимо, поэтому

$$Q^{\mathrm{gr}}(R) = Q_1 \oplus \ldots \oplus Q_n$$

для некоторых однозначно определённых вполне gr-приводимых gr-простых колец $Q_1, \ldots, Q_n$ (колец матриц над градуированными телами). Пусть u_i — единица кольца Q_i. Назовём ортогональным градуированным пополнением кольца R кольцо

$$O^{\mathrm{gr}}(R) = u_1 R \oplus \ldots \oplus u_n R. \qquad (1)$$

Для кольца $O^{\mathrm{gr}}(R)$ удаётся получить градуированный аналог теоремы Голди в следующей форме.

Теорема 5. *Пусть R — G-градуированное gr-полупервичное правое gr-кольцо Голди, фактор-группа $G/Z(G)$ периодична. Тогда кольцо $O^{\mathrm{gr}}(R)$ — прямая сумма конечного числа gr-первичных правых gr-колец Голди $R_1, \ldots, R_n$, причём*

$$Q^{\mathrm{gr}}(R) = Q^{\mathrm{gr}}\big(O^{\mathrm{gr}}(R)\big) = Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R_1) \oplus \ldots \oplus Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R_n).$$

Если, кроме того, сама группа G периодична, то $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R) = Q^{\mathrm{gr}}(R)$.

Доказательство. По [3, предложение 3] $u_1 R, \ldots, u_n R$ в разложении (1) — gr-первичные gr-кольца Голди. По теореме 4 существуют вполне gr-приводимые кольца

$$Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(u_i R) = Q^{\mathrm{gr}}(u_i R), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$Q^{\mathrm{gr}}(R) = Q^{\mathrm{gr}}\big(O^{\mathrm{gr}}(R)\big) = \bigoplus_{i=1}^{n} Q^{\mathrm{gr}}(u_i R) = \bigoplus_{i=1}^{n} Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(u_i R). \qquad \square$$

Автор выражает глубокую благодарность своему Учителю профессору Александру Васильевичу Михалёву и поздравляет его с юбилеем.

Литература

[1] Балаба И. Н., Канунников А. Л., Михалёв А. В. Градуированные кольца частных ассоциативных колец. I // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 2. — С. 3—74.

[2] Канунников А. Л. Градуированные варианты теоремы Голди // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2011. — № 3. — С. 46—50.

[3] Канунников А. Л. Градуированные варианты теоремы Голди. II // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2013. — № 3. — С. 47—51.

[4] Канунников А. Л. Ортогональное градуированное пополнение градуированно полупервичных колец // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 7. — С. 117—150.

[5] Goodearl K., Stafford T. The graded version of Goldie's theorem // Contemp. Math. — 2000. — Vol. 259. — P. 237—240.

[6] Năstăsescu C., Nauwelaerts E., van Oystaeyen F. Arithmetically graded rings revisited // Commun. Algebra. — 1986. — Vol. 14, no. 10. — P. 1191—2017.

[7] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Graded and Filtered Rings and Modules. — Berlin: Springer, 1979. — (Lect. Notes Math.; Vol. 758).

[8] Nastasescu C., van Oystaeyen F. Graded Ring Theory. — Amsterdam: North-Holland, 2004.