Однозначность сложения в алгебрах Ли картановского типа над кольцами с обратимыми двойкой и тройкой

А. Р. МАЙОРОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: alina.arm@mail.ru

УДК 512.554.31

Ключевые слова: алгебра Ли, однозначность сложения.

Аннотация

В данной работе мы доказываем однозначность сложения в алгебрах Ли картановского типа (A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2) над коммутативными кольцами с обратимой двойкой (для G_2 — двойкой и тройкой). Как следствие, получаем однозначность сложения в полупростых алгебрах Ли всех картановских типов над полями характеристики, не равной двум (для G_2 — двум и трём).

Abstract

A. R. Mayorova, Uniqueness of addition in Lie algebras of Chevalley type over rings with $1/2$ *and* $1/3$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 2, pp. 193—216.

In this paper, it is proved that Lie algebras of Chevalley type (A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, and G_2) over associative commutative rings with $1/2$ (with $1/2$ and $1/3$ in the case of G_2) have unique addition. As a corollary of this theorem, we note the uniqueness of addition in semisimple Lie algebras of Chevalley type over fields of characteristic $\neq 2$ ($\neq 2, 3$ in the case of G_2).

1. Введение

В кольцах особое внимание уделяется мультипликативным свойствам элементов, таким как обратимость, нильпотентность, быть делителем нуля и т. д. Таким образом, полезно классифицировать изоморфизмы кольца по модулю его мультипликативной структуры. Также интересны критерии однозначности сложения в кольце, т. е. условия того, что в кольце все мультипликативные изоморфизмы являются кольцевыми. Данный вопрос был рассмотрен А. В. Михалёвым в [3], были выведены достаточные условия однозначности сложения и продолжаемости мультипликативных изоморфизмов подполугрупп мультипликативных полугрупп до изоморфизмов подколец, ими порождённых.

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 2, с. 193—216.

Естественным продолжением данных исследований является изучение критериев однозначности сложения в алгебрах Ли. Для полупростых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики однозначность сложения доказана И. В. Аржанцевым в [1], но некоторые достаточные условия для более общих случаев есть в его работах [1, 6, 7].

В данной работе мы доказываем однозначность сложения в алгебрах Ли картановского типа над коммутативными кольцами с обратимой двойкой (для G_2 — двойкой и тройкой).

2. Основные понятия и теоремы

2.1. Алгебры Ли и системы корней

Определение 1. Модуль L над кольцом R с операцией $L\times L\to L$, обозначаемой $[x,y]$ и называемой *скобкой* (*коммутатором*) элементов x и y, называется *алгеброй Ли над кольцом* R, если выполняются следующие условия:

1) операция коммутирования билинейна;
2) $[x,x]=0$ для всех $x\in L$;
3) $\big[x,[y,z]\big]+\big[y,[z,x]\big]+\big[z,[x,y]\big]=0$ для всех $x,y,z\in L$ (выполнено тождество Якоби).

Определение 2. Следующая последовательность идеалов алгебры Ли L называется *убывающим* или *нижним центральным рядом*:

$$L^0=L,\ L^1=[L,L](=L^{(1)}),\ L^2=[L,L^1],\dots,\ L^i=[L,L^{i-1}].$$

Определение 3. Алгебра L называется *нильпотентной*, если $L^n=0$ при некотором натуральном n.

Определение 4. Следующая последовательность идеалов алгебры Ли L называется *производным рядом*:

$$L^{(0)}=L,\quad L^{(1)}=[L,L],\quad L^{(2)}=\big[L^{(1)},L^{(1)}\big],\dots,\quad L^{(i)}=\big[L^{(i-1)},L^{(i-1)}\big].$$

Определение 5. Алгебра L называется *разрешимой*, если $L^{(n)}=0$ при некотором n.

Рассмотрим алгебру L и её максимальный разрешимый идеал S (т. е. такой разрешимый идеал, который не содержится ни в каком большем разрешимом идеале). Такой идеал называется *радикалом* алгебры L и обозначается $\operatorname{Rad} L$.

Определение 6. Алгебра L называется *полупростой*, если $L\neq 0$ и $\operatorname{Rad} L=0$.

Определение 7. *Нормализатором* подалгебры S в алгебре L называется подалгебра

$$N_L(S)=\{a\in L\mid [a,b]\in S \text{ для всех } b\in S\}.$$

Определение 8. *Подалгеброй Картана* алгебры Ли L называют её нильпотентную самонормализуемую подалгебру H.

Пусть далее в этом разделе L — полупростая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль.

Для полупростой алгебры Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль подалгебра Картана абелева и определена с точностью до внутреннего автоморфизма.

Рассмотрим

$$L_\alpha = \{x \in L \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ для всех } h \in H\},$$

где α пробегает H^*. Тогда имеет место разложение алгебры L:

$$L = H \oplus \sum_{\alpha \neq 0} L_\alpha.$$

Доказательство данного утверждения можно найти в [2].

Множество всех ненулевых элементов $\alpha \in H^*$, для которых $L_\alpha \neq 0$, обозначается через Φ, его элементы называются *корнями* алгебры Ли относительно H, и их количество конечно. В этих обозначениях мы получаем *разложение на корневые подпространства* (или *разложение Картана*):

$$L = H \oplus \sum_{\alpha \in \Phi} L_\alpha.$$

Все ненулевые L_α в этом разложении обязательно оказываются одномерными. Множество Φ оказывается системой корней.

Определение 9. Подмножество Φ евклидова пространства E называется *системой корней* в E, если выполнены следующие аксиомы:

1) множество Φ конечно, порождает E и не содержит 0;
2) если $\alpha \in \Phi$, то из кратных корня α в Φ содержатся ровно $\pm\alpha$;
3) если $\alpha \in \Phi$, то отражение

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$$

оставляет множество Φ инвариантным;

4) если $\alpha, \beta \in \Phi$, то

$$\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}.$$

Оказывается, что имеет место однозначное соответствие между системами корней Φ и полупростыми алгебрами Ли L над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль, т. е. по полупростой алгебре Ли можно однозначно восстановить систему корней Φ и наоборот.

Определение 10. Система корней Φ называется *неприводимой*, если её нельзя разбить на две подсистемы так, что корни одной подсистемы ортогональны корням другой.

Любая система корней Φ распадается в объединение неприводимых систем корней Φ_i в подпространствах $\mathbb{E}_i$ пространства $\mathbb{E}$, причём $\mathbb{E} = \bigoplus \mathbb{E}_i$.

Все системы корней классифицированы. Среди них выделяются четыре классические серии A_l $(l \geqslant 1)$, B_l $(l \geqslant 2)$, C_l $(l \geqslant 3)$ и D_l $(l \geqslant 4)$, а также пять исключительных систем корней E_6, E_7, E_8, F_4, G_2:

$$
\begin{aligned}
&A_n\ (n \geqslant 1): && \Phi = \{e_i - e_j \mid i, j = 1, \dots n+1,\ i \neq j\},\\
&B_n\ (n \geqslant 2): && \Phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n;\ \pm e_i \mid i = 1, \dots, n\},\\
&C_n\ (n \geqslant 3): && \Phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n;\ \pm 2e_i \mid i = 1, \dots, n\},\\
&D_n\ (n \geqslant 4): && \Phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\},\\
&F_4: && \Phi = \Big\{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 4;\ \pm e_i \mid i = 1, \dots, 4;\\
& && \quad \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e3 \pm e_4)\Big\},\\
&E_8: && \Phi = \Big\{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 8;\\
& && \quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{v(i)e_i} \;\Big|\; v(i) \in \{0,1\},\ \sum_i v(i) \text{ чётная}\Big\},\\
&E_7: && \Phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 6;\ \pm(e_7 - e_8);\\
& && \quad \pm\frac{1}{2}\Big(e_7 - e_8 + \sum_{i=1}^{6}(-1)^{v(i)e_i}\Big) \;\Big|\; v(i) \in \{0,1\},\\
& && \quad \sum_i v(i) \text{ нечётная}\Big\},\\
&E_6: && \Phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 5;\\
& && \quad \pm\frac{1}{2}\Big(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{i=1}^{5}(-1)^{v(i)e_i}\Big) \;\Big|\; v(i) \in \{0,1\},\\
& && \quad \sum_i v(i) \text{ чётная}\Big\},\\
&G_2: && \Phi = \{\pm(e_1 - e_2),\ \pm(e_2 - e_3),\ \pm(e_3 - e_1),\ \pm(2e_1 - e_2 - e_3),\\
& && \quad \pm(2e_2 - e_3 - e_1),\ \pm(2e_3 - e_1 - e_2)\},
\end{aligned}
$$

где $\{e_i\}$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Более подробную информацию о системах корней для различных типов алгебр Ли можно найти в [2].

В полупростой алгебре Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль можно выбрать *базис Шевалле*, состоящий из базиса $\{h_1, \dots, h_l\}$ в H и соответствующих $x_\alpha \in L_\alpha$, $\alpha \in \Phi$, так, чтобы выполнялись следующие соотношения на коммутаторы:

1) $[h_i, h_j] = 0$;
2) $[h_i, x_\alpha] = \langle \alpha, \alpha_i \rangle x_\alpha$;

3) $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$ (h_α — целочисленная линейная комбинация h_i);
4) $[x_\alpha, x_\beta] = N_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}$ в случае, если $x_{\alpha+\beta} \in \Phi$;
5) $[x_\alpha, x_\beta] = 0$ в случае, если $x_{\alpha+\beta} \notin \Phi$.

Доказательство можно найти в [5]. Там же можно посмотреть доказательство следующей теоремы.

Теорема 1 (Шевалле). *Пусть L — полупростая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль, $\{x_\alpha,\ \alpha \in \Phi;\ h_i \in H\}$ — её базис Шевалле. Тогда соответствующие структурные константы лежат в $\mathbb{Z}$. Более точно:*

1) $[h_i, h_j] = 0$;
2) $[h_i, x_\alpha] = \langle \alpha, \alpha_i \rangle x_\alpha$;
3) $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha =$ *линейная комбинация h_i, соответствующая разложению двойственного корня по простым корням;*
4) *если α, β — независимые корни, то $[x_\alpha, x_\beta] = \pm(r+1)x_{\alpha+\beta}$, если $\alpha+\beta \in \Phi$, где $\beta - r\alpha, \ldots, \beta + q\alpha$ составляют α-серию, порождённую корнем β.*

2.2. Однозначность сложения

Кратко сформулируем результаты по однозначности сложения в кольцах. Для этого нам понадобятся следующие определения.

Определение 11. Отображение колец $\alpha\colon R \to S$ называется *мультипликативным изоморфизмом*, если α — изоморфизм мультипликативных полугрупп данных колец.

Определение 12. Кольцо R называется *кольцом с однозначным сложением* или, кратко, *UA-кольцом*, если любой мультипликативный изоморфизм является одновременно и изоморфизмом колец.

Пусть $l_R(a)$, $r_R(a)$ — соответственно левый и правый аннуляторы элемента $a \in R$. Тогда определим множество, одновременно являющееся двусторонним идеалом кольца R.

Определение 13. *Аддитивным контроллером* кольца R называется подмножество
$$\mathrm{AC}(R) = \sum_{a,b\in R} l_R(a) b l_R(b) a = \sum_{a,b\in R} a r_R(b) b r_R(a).$$

Теперь мы можем сформулировать несколько достаточных условий для однозначности колец, доказанных А. В. Михалёвым [3].

Теорема 2. *Если $l_R\big(\mathrm{AC}(R)\big) \cap r_R\big(\mathrm{AC}(R)\big) = 0$, то R — UA-кольцо.*

Теорема 3. *Пусть R — первичное кольцо, множество левых аннуляторов элементов которого не является линейно упорядоченным относительно отношения включения. Тогда R — UA-кольцо.*

Теорема 4. *Предположим, что кольцо R обладает такой системой попарно ортогональных идемпотентов $\{e_i,\ i \in K\}$, что:*

1) *если* $0 \neq x \in R$, *то существуют* $i, j \in K$, *такие что* $e_i x e_j \neq 0$;
2) *для любого индекса* $i \in K$ *существует индекс* $j \in K \setminus i$, *такой что для* $x \in R$ *из* $e_i x e_i R e_j = 0 = e_j R e_i x e_i$ *следует* $e_i x e_i = 0$.

Тогда R — *UA-кольцо.*

Также важным результатом в данном направлении является теорема Стефенсона об однозначности сложения в кольце матриц размера $n \geqslant 2$ над произвольным ассоциативным кольцом с единицей [8].

Перейдём к алгебрам Ли. В работах И. В. Аржанцева используется следующее определение.

Определение 14. Алгебра Ли L называется *кольцом Ли с однозначным сложением* или, кратко, *UA-кольцом Ли*, если для каждой биекции $\varphi\colon L \to L$, удовлетворяющей условию

$$\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)] \text{ для всех } a, b \in L,$$

выполнено условие

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \text{ для всех } a, b \in L.$$

В [1] доказана однозначность сложения в случае выполнения условия на централизаторы элементов.

Теорема 5. *Пусть* L — *конечномерная алгебра Ли над бесконечным полем. Пусть также для любого элемента* $0 \neq a \in L$ *найдётся такой* $b \in L$, *что их централизаторы не пересекаются*: $Z(a) \cap Z(b) = 0$. *Тогда алгебра Ли* L *является UA-кольцом Ли.*

Именно из этой теоремы была выведена однозначность сложения для полупростых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль.

Очевидно, что простым примером алгебры Ли с неоднозначным сложением является любая вырожденная алгебра Ли, т. е. алгебра, центр которой совпадает со всей алгеброй. В [7] показано, что достаточным условием отсутствия однозначности сложения является невырожденность центра плюс несовпадение коммутанта со всей алгеброй. Таким образом, никакая разрешимая алгебра с непустым центром не является UA-кольцом Ли.

В данной работе мы будем пользоваться несколько более сильным определением однозначности сложения алгебр Ли, а именно будем требовать сохранения сложения не у «мультипликативных» автоморфизмов, а у «мультипликативных» изоморфизмов в любую другую алгебру Ли аналогично определению однозначности сложения А. В. Михалёва [3].

Определение 15. Алгебра Ли L называется *кольцом Ли с однозначным сложением* или, кратко, *UA-кольцом Ли*, если для каждой биекции $\varphi\colon L \to L'$, где L' — произвольная алгебра Ли, удовлетворяющей условию

$$\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)] \text{ для всех } a, b \in L,$$

выполнено условие

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \text{ для всех } a, b \in L.$$

Далее в данной работе мы будем иметь в виду именно это определение однозначности сложения в алгебре Ли.

Отметим, что есть ещё более сильное требование на однозначность сложения в алгебрах Ли.

Определение 16. Алгебра Ли L над полем k называется *алгеброй Ли с однозначным сложением* или, кратко, *UA-алгеброй Ли*, если для каждой биекции $\varphi\colon L \to L$, удовлетворяющей условию

$$\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)] \text{ для всех } a, b \in L,$$

существует такой базис $\{e_i \in L\}$, что φ является композицией некоторого автоморфизма и некоторого отображения

$$\sum_i k_i e_i \to \sum_i \alpha(k_i) e_i,$$

где α — автоморфизм поля k.

В [6] однозначность сложения в данном смысле была показана для алгебры Ли sl_2 над полем характеристики, не равной двум.

3. Однозначность сложения в алгебрах Ли

Основным результатом данной работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 6. *Алгебры Ли картановского типа над коммутативным кольцом с единицей и обратимой двойкой (в случае системы G_2 — с обратимой шестёркой) являются кольцами Ли с однозначным сложением.*

Следующие утверждения являются очевидными следствиями теоремы 6.

Следствие 1. *Алгебры Ли картановского типа над полями характеристики, не равной двум и трём, являются кольцами Ли с однозначным сложением.*

Следствие 2. *Полупростые алгебры Ли над алгебраически замкнутыми полями нулевой характеристики являются кольцами Ли с однозначным сложением.*

3.1. Основная идея доказательства

Обозначим нашу алгебру Ли через L. Зафиксируем её разложение на корневые подпространства:

$$L = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha.$$

Пусть $\{x_\alpha,\ \alpha \in \Phi,\ h_i \in H\}$ — базис Шевалле алгебры Ли L. Через φ будем обозначать биекцию алгебры Ли L на произвольную алгебру Ли, удовлетворяющую условию

$$\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)] \text{ для всех } a, b \in L.$$

Кратко опишем наши дальнейшие действия по доказательству теоремы 6.

1. Докажем для всех систем корней, что для α, β — неравных корней из Φ — если
$$\varphi(\lambda x_\alpha + \mu x_\beta) = \varphi(\lambda x_\alpha) + \varphi(\mu x_\beta) + \varphi(c),$$
где
$$c = \sum_{k \in \Phi} \lambda_k x_k,$$
то $c = 0$.
2. Докажем, что если
$$\varphi(\lambda x_\alpha + \mu h) = \varphi(\lambda x_\alpha) + \varphi(\mu h) + \varphi(C),$$
где
$$C = \sum_{k \in \Phi} \lambda_k x_k + \sum_i \lambda_i h_i, \quad h_i \in H,$$
то $C = 0$.
3. Для α, β — неравных корней из Φ — докажем, что
$$\varphi(\lambda x_\alpha + \mu x_\beta) = \varphi(\lambda x_\alpha) + \varphi(\mu x_\beta).$$
4. Докажем, что
$$\varphi(\lambda x_\alpha + \mu x_\alpha) = \varphi(\lambda x_\alpha) + \varphi(\mu x_\alpha) \text{ для всех } \alpha \in \Phi$$
и
$$\varphi(\lambda h_i + \mu h_j) = \varphi(\lambda h_i) + \varphi(\mu h_j) \text{ для всех } i, j.$$
5. По индукции докажем для любого количества слагаемых аддитивность функции φ.

Из всех пунктов основную техническую сложность представляет только первый пункт плана. Остановимся подробнее на нём. Пусть $\alpha, \beta \in \Phi$ — два корня из рассматриваемой системы и выполнено равенство
$$\varphi(\lambda x_\alpha + \mu x_\beta) = \varphi(\lambda x_\alpha) + \varphi(\mu x_\beta) + \varphi\Bigg(\sum_{k \in \Phi} \lambda_k x_k\Bigg).$$
Выберем какое-то из слагаемых в этом равенстве. Без ограничения общности пусть это будет α. Прокоммутируем равенство с различными $\varphi(x_\gamma)$, такими что $[x_\gamma, x_\alpha] = 0$, и воспользуемся сохранением скобки Ли:
$$\varphi(\mu[x_\beta, x_\gamma]) = \varphi(\mu[x_\beta, x_\gamma]) + \varphi\Bigg(\sum_{k \in \Phi} \lambda_k [x_k, x_\gamma]\Bigg).$$
Таким образом, можно заключить, что
$$\sum_{k \in \Phi} \lambda_k [x_k, x_\gamma] = 0.$$

Получается, что $\lambda_k N_{k,\gamma} = 0$. Таким образом, $\lambda_k = 0$ для всех k, таких что $[x_k, x_\gamma] \neq 0$ и $N_{k,\gamma}$ не делитель нуля. Обозначим множество индексов k, про которые мы узнали, что λ_k равны нулю, через K_α.

Далее мы определим для всех систем корней для каждого корня, чему равно K_α. Затем, если K_α не имеет общих с K_β элементов, можно будет заключить, что

$$\varphi(\lambda x_\alpha + \mu x_\beta) = \varphi(\lambda x_\alpha) + \varphi(\mu x_\beta),$$

таким образом доказав первый пункт плана.

3.2. Определение K_α ($\alpha \in \Phi$) для всех систем корней

Заметим, что $N_{\alpha,\beta} \in \{0, 1, 2\}$ для всех систем корней, кроме G_2, а так как двойка обратима, то в данном случае условие $[x_\alpha, x_\beta] = 0$ равносильно условию $\alpha + \beta \in \Phi \cup \{0\}$ (в случае системы G_2 $N_{\alpha,\beta} \in \{0, 1, 2, 3\}$, но у нас обратима шестёрка, т. е. эти условия опять же равносильны). Таким образом,

$$K_\alpha = \bigcup_{\gamma\colon\, \gamma+\alpha\notin\Phi\cup\{0\}} \ \bigcup_{k\colon\, \gamma+k\in\Phi\cup\{0\}} \{k\}.$$

Леммы данного пункта определяют K_α для систем корней всех типов[1].

Лемма 1. *Пусть L — алгебра Ли типа A_{n-1}, $n > 3$,*

$$\Phi = \{e_i - e_j \mid i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j\}.$$

Тогда $K_{e_i - e_j} = \Phi \setminus \{e_i - e_j\}$.

Доказательство. Рассмотрим цепочки вида

$$\alpha \longrightarrow \gamma \longrightarrow k \longrightarrow \{k\},$$

где $\alpha + \gamma \notin \Phi \cup \{0\}$, $\gamma + k \in \Phi \cup \{0\}$. Объединение по всем цепочкам, начинающимся с α, даст все K_α:

$$\begin{gathered} e_i - e_j \longrightarrow e_{l\neq j} - e_{k\neq i} \longrightarrow e_k - e_p \longrightarrow \{e_{\neq i} - e_p\}, \\ e_i - e_j \longrightarrow e_{l\neq j} - e_{k\neq i} \longrightarrow e_p - e_l \longrightarrow \{e_p - e_{\neq j}\}. \end{gathered}$$

Тогда $K_{e_i - e_j} = \Phi \setminus \{e_i - e_j\}$. $\square$

Лемма 2. *Пусть L — алгебра Ли типа A_1, A_2,*

$$\Phi_{A_1} = \{e_1 - e_2,\, e_2 - e_1\}, \quad \Phi_{A_2} = \{\pm(e_1 - e_2),\, \pm(e_2 - e_3),\, \pm(e_3 - e_1)\}.$$

Тогда $K_{e_i - e_j} = \Phi \setminus \{e_i - e_j\}$.

Доказательство. В качестве доказательства приведём два графа. Их вершины соответствуют корням A_1 и A_2, а ребро между α и β проведено в том случае, когда $\alpha + \beta \in \Phi \cup \{0\}$.

---

[1]Из-за большого объёма перебора и возможных ошибок все леммы данного раздела были дополнительно проверены автором при помощи компьютера.

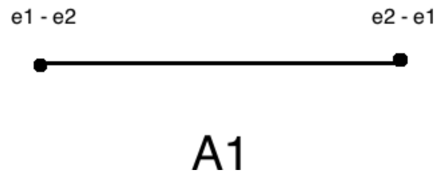

Рис. 1.

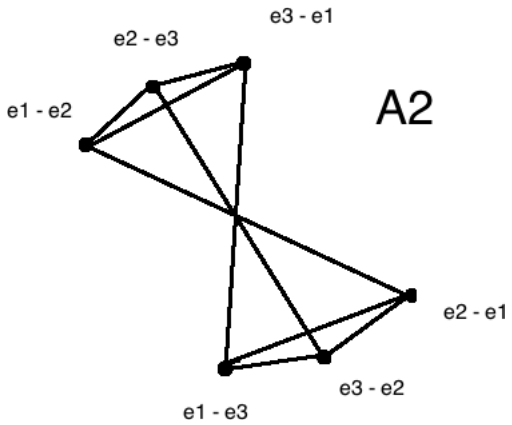

Рис. 2.

Утверждение леммы равносильно тому, что если мы из любого корня сначала пройдём в корень, не соединённый ребром (это может быть тот же самый корень, они не обязательно различны), а потом пройдём по ребру, то все такие пути заканчиваются во всех вершинах, кроме начальной. Легко убедиться, что это верно для данного графа. $\square$

Для удобства записи введём обозначение $te_i = e_{\langle t\rangle i}$, где $t \in \mathbb{Z}$ — какой-то коэффициент.

Лемма 3. *Пусть L — алгебра Ли типа D_n, $n > 3$,*

$$\Phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j\}.$$

Тогда $K_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}} = \Phi \setminus \{e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j}\}$, $t, r \in \{-1, 1\}$.

Доказательство. Рассмотрим цепочки вида $\alpha \longrightarrow \gamma \longrightarrow k \longrightarrow \{k\}$, где $\alpha+\gamma \notin \Phi\cup\{0\}$, $\gamma+k \in \Phi\cup\{0\}$. Объединение по всем цепочкам, начинающимся с α, даст все K_α:

$$e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} + e_{k\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} \longrightarrow -e_k + e_p \longrightarrow \{e_{\neq\langle t\rangle i,\langle r\rangle j} + e_p\},$$

откуда следует, что $K_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}} = \Phi \setminus \{e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j}\}$. $\square$

Лемма 4. *Пусть L — алгебра Ли типа B_n, $n > 2$,*

$$\Phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n;\ \pm e_i \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

Тогда $K_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}} = \Phi \setminus \{e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j}\}$ *и* $K_{e_{\langle t\rangle i}} = \Phi \setminus \{e_{\langle t\rangle i}\}$, $t, r \in \{-1, 1\}$.

Доказательство. Рассмотрим цепочки вида $\alpha \longrightarrow \gamma \longrightarrow k \longrightarrow \{k\}$, где $\alpha + \gamma \notin \Phi \cup \{0\}$, $\gamma + k \in \Phi \cup \{0\}$. Объединение по всем цепочкам, начинающимся с α, даст все K_α:

$$e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} + e_{k\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} \longrightarrow -e_k + e_p \longrightarrow \{e_{\neq\langle t\rangle i,\langle r\rangle j} + e_p\},$$

$$e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} \longrightarrow e_{p\neq l} \longrightarrow \{e_p\},$$

откуда следует, что $K_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}} = \Phi \setminus \{e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j}\}$;

$$e_{\langle t\rangle i} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i} + e_{k\neq\langle -t\rangle i} \longrightarrow -e_l + e_p \longrightarrow \{e_{\neq\langle t\rangle i} + e_p\},$$

$$e_{\langle t\rangle i} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i} + e_{k\neq\langle -t\rangle i} \longrightarrow -e_l \longrightarrow \{e_{\neq\langle t\rangle i}\}.$$

Таким образом, $K_{e_{\langle t\rangle i}} = \Phi \setminus \{e_{\langle t\rangle i}\}$. □

Лемма 5. *Пусть L — алгебра Ли типа B_2, $\Phi = \{\pm e_1 \pm e_2;\ \pm e_1,\ \pm e_2\}$. Тогда* $K_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}} = \Phi \setminus \{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}\}$ *и* $K_{e_{\langle t\rangle i}} = \Phi \setminus \{e_{\langle t\rangle i}, e_j, -e_j, \mid j \neq \pm i\}$, $t, r \in \{-1, 1\}$.

Доказательство. Как и выше, в качестве доказательства приведём граф. Его вершины соответствуют корням B_2, а ребро между α и β проведено в том случае, когда $\alpha + \beta \in \Phi \cup \{0\}$.

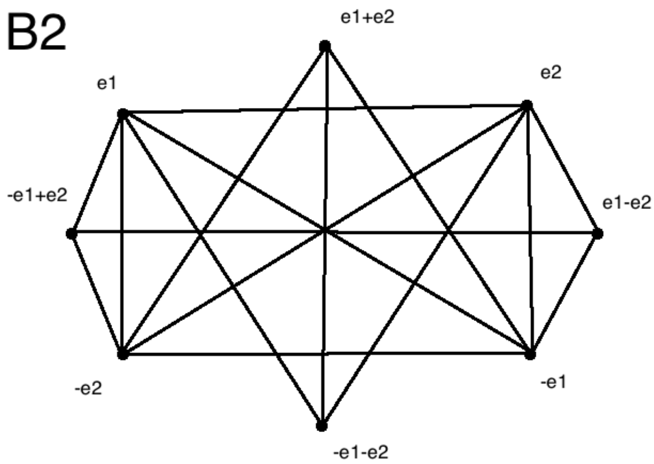

Рис. 3.

Утверждение леммы равносильно тому, что если мы из любого корня α сначала пройдём в корень, не соединённый ребром (это может быть тот же самый корень, они не обязательно различны), а потом пройдём по ребру, то все такие пути заканчиваются во всех вершинах множества K_α. Легко убедиться, что это верно для данного графа. □

Лемма 6. *Пусть L — алгебра Ли типа C_n, $n > 2$,*

$$\Phi = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n;\ \pm 2e_i \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

Тогда $K_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}} = \Phi \setminus \{e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j}, e_{\langle 2t\rangle i}, e_{\langle 2r\rangle j}\}$ *и* $K_{e_{\langle 2t\rangle i}} = \Phi \setminus \{e_{\langle 2t\rangle i}\}$, $t, r \in \{-1, 1\}$.

Доказательство. Рассмотрим цепочки вида $\alpha \longrightarrow \gamma \longrightarrow k \longrightarrow \{k\}$, где $\alpha+\gamma \notin \Phi\cup\{0\}$, $\gamma+k \in \Phi\cup\{0\}$. Объединение по всем цепочкам, начинающимся с α, даст все K_α:

$$e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} + e_{k\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} \longrightarrow -e_k + e_p \longrightarrow \{e_{\neq\langle t\rangle i,\langle r\rangle j} + e_p\},$$
$$e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} + e_{k\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} \longrightarrow -2e_k \longrightarrow \{e_{\neq\langle 2t\rangle i,\langle 2r\rangle j}\},$$

откуда следует, что $K_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}} = \Phi \setminus \{e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j}, e_{\langle 2t\rangle i}, e_{\langle 2r\rangle j}\}$. (На самом деле мы не доказываем, что $e_{\langle 2t\rangle i}$ недостижимо в результате такой цепочки, так как мы используем в доказательстве только утверждение, что $K_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}} \subset \subset \Phi \setminus \{e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j}, e_{\langle 2t\rangle i}, e_{\langle 2r\rangle j}\}$, но перебором можно показать, что это так.) Имеем

$$e_{\langle 2t\rangle i} \longrightarrow e_{2l\neq\langle -2t\rangle i} \longrightarrow -e_{2l} \longrightarrow \{e_{\neq\langle 2t\rangle i}\},$$
$$e_{\langle 2t\rangle i} \longrightarrow e_{2l\neq\langle -2t\rangle i} \longrightarrow -e_l + e_p \longrightarrow \{e_{\neq\langle t\rangle i} + e_p\},$$

следовательно, $K_{e_{\langle 2t\rangle i}} = \Phi \setminus \{e_{\langle 2t\rangle i}\}$. □

Лемма 7. *Пусть L — алгебра Ли типа F_4,*

$$\Phi = \left\{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 4;\ \pm e_i \mid i = 1, \ldots, 4;\ \frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e3 \pm e_4)\right\}.$$

Тогда $K_\alpha = \Phi \setminus \{\alpha\}$ для всех $\alpha \in \Phi$.

Доказательство. Рассмотрим цепочки вида $\alpha \longrightarrow \gamma \longrightarrow k \longrightarrow \{k\}$, где $\alpha+\gamma \notin \Phi\cup\{0\}$, $\gamma+k \in \Phi\cup\{0\}$. Объединение по всем цепочкам, начинающимся с α, даст все K_α:

$$e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} + e_{k\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} \longrightarrow -e_k + e_p \longrightarrow \{e_{\neq\langle t\rangle i,\langle r\rangle j} + e_p\},$$
$$e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} + e_{k\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} \longrightarrow \frac{1}{2}(-e_l - e_k + e_p + e_l) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \left\{\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e3 \pm e_4)\right\},$$
$$e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} \longrightarrow e_p \longrightarrow \{e_{\neq\langle 2t\rangle i,\langle 2r\rangle j}\},$$

откуда следует, что $K_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}} = \Phi \setminus \{e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j}\}$;

$$e_{\langle t\rangle i} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i} + e_{k\neq\langle -t\rangle i} \longrightarrow -e_l + e_p \longrightarrow \{e_{\neq\langle t\rangle i} + e_p\},$$
$$e_{\langle t\rangle i} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i} + e_{k\neq\langle -t\rangle i} \longrightarrow \frac{1}{2}(-e_l - e_k + e_p + e_l) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \left\{\frac{1}{2}(\pm e_1 \pm e_2 \pm e3 \pm e_4)\right\},$$
$$e_{\langle t\rangle i} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i} + e_{k\neq\langle -t\rangle i} \longrightarrow -e_l \longrightarrow \{e_{\neq\langle t\rangle i}\},$$

откуда следует, что $K_{e_{\langle t\rangle i}} = \Phi \setminus \{e_{\langle t\rangle i}\}$;

$$\frac{1}{2}(e_{\langle x\rangle i} + e_{\langle y\rangle j} + e_{\langle z\rangle k} + e_{\langle t\rangle p}) \longrightarrow e_{l\neq\langle -x\rangle i,\langle -y\rangle j,\langle -z\rangle k,\langle -t\rangle p} \longrightarrow e_d \longrightarrow \{e_d\},$$

$$\frac{1}{2}(e_{\langle x\rangle i} + e_{\langle y\rangle j} + e_{\langle z\rangle k} + e_{\langle t\rangle p}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow e_{l\neq\langle -x\rangle i,\langle -y\rangle j,\langle -z\rangle k,\langle -t\rangle p} + e_{m\neq\langle -x\rangle i,\langle -y\rangle j,\langle -z\rangle k,\langle -t\rangle p} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow -e_m + e_d \longrightarrow \{e_{\neq\langle -x\rangle i,\langle -y\rangle j,\langle -z\rangle k,\langle -t\rangle p} + e_d\}.$$

Не хватает корней, у которых оба индекса из множества $\{\langle -x\rangle i, \langle -y\rangle j, \langle -z\rangle k, \langle -t\rangle p\}$:

$$\frac{1}{2}(e_{\langle x\rangle i} + e_{\langle y\rangle j} + e_{\langle z\rangle k} + e_{\langle t\rangle p}) \longrightarrow \frac{1}{2}(e_{\langle x\rangle i} + e_{\langle y\rangle j} + e_{\langle z\rangle k} + e_{\langle t\rangle p}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow e_{\langle -x\rangle i} + e_{\langle -y\rangle j} \longrightarrow \{e_{\langle -x\rangle i} + e_{\langle -y\rangle j}\}.$$

Аналогичную цепочку можно написать и для любых других корней из этого множества. Имеем

$$\frac{1}{2}(e_{\langle x\rangle i} + e_{\langle y\rangle j} + e_{\langle z\rangle k} + e_{\langle t\rangle p}) \longrightarrow e_{l\neq\langle -x\rangle i,\langle -y\rangle j,\langle -z\rangle k,\langle -t\rangle p} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \frac{1}{2}(-e_l + e_a + e_b + e_c) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \left\{\frac{1}{2}(e_a + e_b + e_c + e_d)\right\} \setminus \left\{\frac{1}{2}(e_{\langle x\rangle i} + e_{\langle y\rangle j} + e_{\langle z\rangle k} + e_{\langle t\rangle p})\right\},$$

откуда следует, что

$$K_{(1/2)(e_{\langle x\rangle i}+e_{\langle y\rangle j}+e_{\langle z\rangle k}+e_{\langle t\rangle p})} = \Phi \setminus \left\{\frac{1}{2}(e_{\langle x\rangle i} + e_{\langle y\rangle j} + e_{\langle z\rangle k} + e_{\langle t\rangle p})\right\}. \qquad \square$$

Лемма 8. *Пусть L — алгебра Ли типа E_8,*

$$\Phi = \left\{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 8;\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{v(i)e_i} \;\Big|\; v(i) \in \{0,1\},\ \sum_i v(i) \text{ чётная}\right\}.$$

Тогда $K_\alpha = \Phi \setminus \{\alpha\}$ для всех $\alpha \in \Phi$.

Доказательство. Рассмотрим цепочки вида $\alpha \longrightarrow \gamma \longrightarrow k \longrightarrow \{k\}$, где $\alpha+\gamma \notin \Phi\cup\{0\}$, $\gamma+k \in \Phi\cup\{0\}$. Объединение по всем цепочкам, начинающимся с α, даст все K_α:

$$e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} + e_{k\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} \longrightarrow -e_k + e_p \longrightarrow \{e_{\neq\langle t\rangle i,\langle r\rangle j} + e_p\},$$

$$e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} + e_{k\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \frac{1}{2}(-e_l - e_k + e_p + e_l + \ldots) \longrightarrow \left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{v(i)e_i}\right\}.$$

Можно выбрать e_l и e_k ортогональными к e_i и e_j, тогда мы получим все корни такого типа. Следовательно, $K_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}} = \Phi \setminus \{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}\}$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(e_{\langle x\rangle i}+e_{\langle y\rangle j}+\ldots) \longrightarrow e_{\langle x\rangle i}+e_{l\neq\pm i} \longrightarrow -e_{l\neq\pm i}+e_p \longrightarrow \{\pm e_a \pm e_b\},\\
&\alpha = \frac{1}{2}(e_{\langle x\rangle i}+e_{\langle y\rangle j}+\ldots) \longrightarrow e_{\langle x\rangle i}+e_{\langle y\rangle j} \longrightarrow\\
&\quad\longrightarrow \frac{1}{2}(e_{\langle -x\rangle i}+e_{\langle -y\rangle j}+\ldots) \longrightarrow \left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8}(-1)^{v(i)e_i}\right\} \setminus \{\alpha\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы можем какие-то два индекса обратить, а остальные сделать любыми: получим все корни такого типа, кроме α. Следовательно, $K_{\alpha=(1/2)(e_{\langle x\rangle i}+e_{\langle y\rangle j}+\ldots)} = \Phi \setminus \{\alpha\}$. □

Лемма 9. *Пусть L — алгебра Ли типа E_7,*

$$\begin{aligned}
\Phi = \Bigg\{&\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 6;\ \pm(e_7-e_8);\\
&\pm\frac{1}{2}\left(e_7-e_8+\sum_{i=1}^{6}(-1)^{v(i)e_i}\right) \;\Bigg|\; v(i)\in\{0,1\},\ \sum_i v(i) \text{ нечётная}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Тогда $K_\alpha = \Phi \setminus \{\alpha\}$ для всех $\alpha \in \Phi$.

Доказательство. Рассмотрим цепочки вида $\alpha \longrightarrow \gamma \longrightarrow k \longrightarrow \{k\}$, где $\alpha+\gamma \notin \Phi\cup\{0\}$, $\gamma+k \in \Phi\cup\{0\}$. Объединение по всем цепочкам, начинающимся с α, даст все K_α:

$$\begin{aligned}
&e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j}+e_{k\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} \longrightarrow -e_k+e_p \longrightarrow \{e_{\neq\langle t\rangle i,\langle r\rangle j}+e_p\},\\
&e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j}+e_{k\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} \longrightarrow\\
&\quad\longrightarrow \frac{1}{2}\big(\pm(e_7-e_8)+(-e_l-e_k+e_p+e_l+\ldots)\big) \longrightarrow\\
&\quad\longrightarrow \left\{\pm\frac{1}{2}\left(e_7-e_8+\sum_{i=1}^{6}(-1)^{v(i)e_i}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

Можно выбрать e_l и e_k ортогональными к e_i и e_j, тогда мы получим все корни такого типа. Имеем

$$e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j} \longrightarrow \pm(e_7-e_8) \longrightarrow \mp(e_7-e_8) \longrightarrow \{\pm(e_7-e_8)\},$$

откуда следует, что $K_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}} = \Phi \setminus \{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}\}$;

$$\begin{aligned}
&(-1)^t(e_7+e_8) \longrightarrow e_l+e_k \longrightarrow -e_k+e_p \longrightarrow \{e_k+e_p\},\\
&(-1)^t(e_7+e_8) \longrightarrow e_l+e_k \longrightarrow \frac{1}{2}\big(\pm(e_7-e_8)+(-e_l-e_k+e_p+e_l+\ldots)\big) \longrightarrow\\
&\quad\longrightarrow \left\{\pm\frac{1}{2}\left(e_7-e_8+\sum_{i=1}^{6}(-1)^{v(i)e_i}\right)\right\},
\end{aligned}$$

$$(-1)^t(e_7+e_8) \longrightarrow \frac{1}{2}\big((-1)^t(e_7-e_8)+\ldots\big) \longrightarrow (-1)^{t+1}(e_7+e_8) \longrightarrow \\ \longrightarrow \{(-1)^{t+1}(e_7+e_8)\},$$

откуда следует, что $K_{(-1)^t(e_7+e_8)} = \Phi \setminus \{(-1)^t(e_7+e_8)\}$;

$$\frac{1}{2}(\pm(e_7-e_8)+e_{\langle x\rangle i}+e_{\langle y\rangle j}+\ldots) \longrightarrow e_{\langle x\rangle i}+e_{l\neq\pm i} \longrightarrow \\ \longrightarrow -e_{l\neq\pm i}+e_p \longrightarrow \{\pm e_a \pm e_b\},$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\pm(e_7-e_8)+e_{\langle x\rangle i}+e_{\langle y\rangle j}+\ldots) \longrightarrow e_{\langle x\rangle i}+e_{\langle y\rangle j} \longrightarrow \\ \longrightarrow \frac{1}{2}(\pm(e_7-e_8)+e_{\langle -x\rangle i}+e_{\langle -y\rangle j}+\ldots) \longrightarrow \\ \longrightarrow \left\{\pm\frac{1}{2}\left(e_7-e_8+\sum_{i=1}^{6}(-1)^{v(i)e_i}\right)\right\} \setminus \{\alpha\}.$$

Таким образом, мы можем какие-то два индекса обратить, а остальные сделать любыми: получим все корни такого типа, кроме α. Имеем

$$\alpha = \frac{1}{2}(\pm(e_7-e_8)+e_{\langle x\rangle i}+e_{\langle y\rangle j}+\ldots) \longrightarrow \alpha \longrightarrow \mp(e_7-e_8) \longrightarrow \{\mp(e_7-e_8)\},$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\pm(e_7-e_8)+e_{\langle x\rangle i}+e_{\langle y\rangle j}+\ldots) \longrightarrow \\ \longrightarrow \frac{1}{2}(\mp(e_7-e_8)+e_{\langle x\rangle i}+e_{\langle y\rangle j}+\ldots) \longrightarrow \pm(e_7-e_8) \longrightarrow \{\pm(e_7-e_8)\},$$

поэтому $K_{\alpha=(1/2)(\pm(e_7-e_8)+e_{\langle x\rangle i}+e_{\langle y\rangle j}+\ldots)} = \Phi \setminus \{\alpha\}$. □

Лемма 10. *Пусть L — алгебра Ли типа E_6,*

$$\Phi = \left\{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant 5; \right. \\ \left. \pm\frac{1}{2}\left(e_8-e_7-e_6+\sum_{i=1}^{5}(-1)^{v(i)e_i}\right) \,\Big|\, v(i)\in\{0,1\},\ \sum_i v(i)\ \text{чётная}\right\}.$$

Тогда $K_\alpha = \Phi \setminus \{\alpha\}$ для всех $\alpha \in \Phi$.

Доказательство. Рассмотрим цепочки вида $\alpha \longrightarrow \gamma \longrightarrow k \longrightarrow \{k\}$, где $\alpha+\gamma \notin \Phi\cup\{0\}$, $\gamma+k \in \Phi\cup\{0\}$. Объединение по всем цепочкам, начинающимся с α, даст все K_α:

$$e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j}+e_{k\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} \longrightarrow -e_k+e_p \longrightarrow \{e_{\neq\langle t\rangle i,\langle r\rangle j}+e_p\},$$

$$e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j} \longrightarrow e_{l\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j}+e_{k\neq\langle -t\rangle i,\langle -r\rangle j} \longrightarrow \\ \longrightarrow \frac{1}{2}\big(\pm(e_8-e_7-e_6)+(-e_l-e_k+e_p+e_l+\ldots)\big) \longrightarrow \\ \longrightarrow \left\{\pm\frac{1}{2}\left(e_8-e_7-e_6+\sum_{i=1}^{5}(-1)^{v(i)e_i}\right)\right\}.$$

Можно выбрать e_l и e_k ортогональными к e_i и e_j, тогда мы получим все корни такого типа. Следовательно, $K_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}} = \Phi \setminus \{e_{\langle t\rangle i} + e_{\langle r\rangle j}\}$. Имеем

$$\frac{1}{2}(\pm(e_8 - e_7 - e_6) + e_{\langle x\rangle i} + e_{\langle y\rangle j} + \ldots) \longrightarrow e_{\langle x\rangle i} + e_{l\neq\pm i} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow -e_{l\neq\pm i} + e_p \longrightarrow \{\pm e_a \pm e_b\},$$
$$\alpha = \frac{1}{2}(\pm(e_8 - e_7 - e_6) + e_{\langle x\rangle i} + e_{\langle y\rangle j} + \ldots) \longrightarrow e_{\langle x\rangle i} + e_{\langle y\rangle j} \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \frac{1}{2}(\pm(e_8 - e_7 - e_6) + e_{\langle -x\rangle i} + e_{\langle -y\rangle j} + \ldots) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \left\{\pm\frac{1}{2}\left(e_8 - e_7 - e_6 + \sum_{i=1}^{5}(-1)^{v(i)e_i}\right)\right\} \setminus \{\alpha\}.$$

Таким образом, мы можем какие-то два индекса обратить, а остальные сделать любыми: получим все корни такого типа, кроме α. Следовательно, $K_{\alpha=(1/2)(\pm(e_7-e_8)+e_{\langle x\rangle i}+e_{\langle y\rangle j}+\ldots)} = \Phi \setminus \{\alpha\}$. $\square$

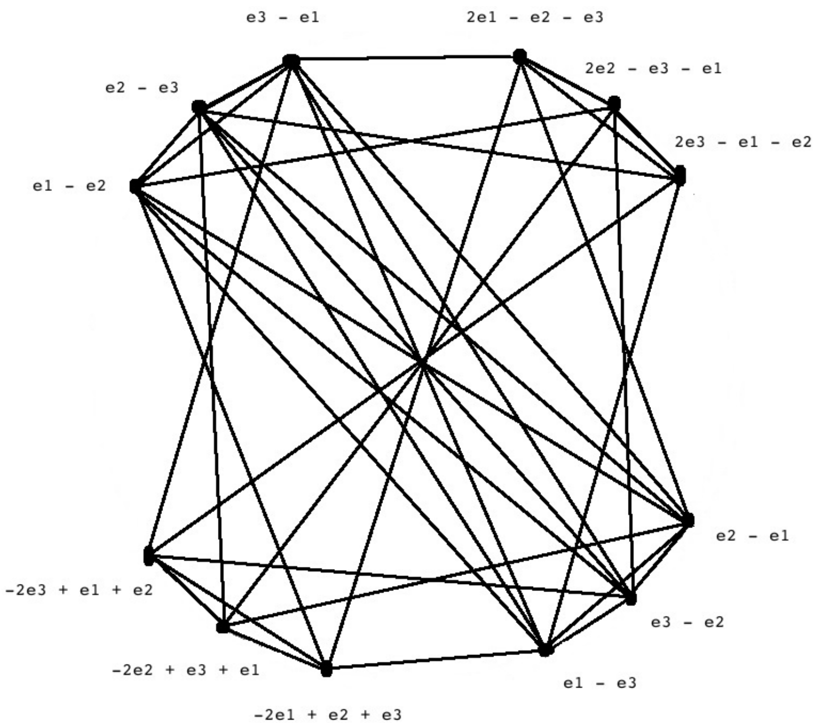

Рис. 4.

Лемма 11. *Пусть L — алгебра Ли типа G_2,*

$$\Phi = \{\pm(e_1 - e_2),\ \pm(e_2 - e_3),\ \pm(e_3 - e_1),\\ \pm(2e_1 - e_2 - e_3),\ \pm(2e_2 - e_3 - e_1),\ \pm(2e_3 - e_1 - e_2)\}.$$

Тогда $K_\alpha = \Phi \setminus \{\alpha\}$ для всех $\alpha \in \Phi$.

Доказательство. В качестве доказательства приведём граф (рис. 4). Его вершины соответствуют корням G_2, а ребро между α, β проведено в том случае, когда $\alpha + \beta \in \Phi \cup \{0\}$.

Утверждение леммы равносильно тому, что если мы из любого корня сначала пройдём в корень, не соединённый ребром, а потом пройдём по ребру, то все такие пути заканчиваются во всех вершинах, кроме начальной. Легко убедиться, что это верно для данного графа. □

3.3. Доказательство аддитивности для случая двух слагаемых

Мы выделили в отдельное замечание утверждения, являющиеся очевидными фактами, на которые мы часто будем ссылаться в дальнейшем.

Замечание 1. Пусть L — алгебра Ли над кольцом R любого из рассматриваемых нами типов. Определим $N_{k,t}$, для всех $k, t \in \Phi$, $k \neq -t$, как структурный коэффициент в равенстве $[x_k, x_t] = N_{k,t} x_{k+t}$. Определим h_α из равенства $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$. Тогда:

1) для каждого $\lambda \in R$ из $\lambda N_{k,t} = 0$ следует, что $\lambda = 0$;
2) для каждого $\lambda \in R$ из $\lambda h_\alpha = 0$ следует, что $\lambda = 0$;
3) для каждого i из $[c, h_i] = 0$ следует, что $c \in H$;
4) если для каждого $\gamma \in \Phi$ справедливо $[h, x_\gamma] = 0$, то $h = 0$;
5) для каждого α найдётся такой h_i, что $\langle \alpha, \alpha_i \rangle$ обратим;
6) для каждого $c \in L$ справедливо, что если $[c, x_\beta] = 0$ для каждого $\beta \in \Phi$, то $c = 0$;
7) для каждого $\alpha \in \Phi$ найдётся $h \in H$, такой что $[x_\alpha, h] \neq 0$.

Лемма 12. *Пусть L — алгебра Ли любого рассматриваемого нами типа с системой корней Φ, $\alpha \neq \beta$ — корни из Φ,*

$$\varphi(\lambda x_\alpha + \mu x_\beta) = \varphi(\lambda x_\alpha) + \varphi(\mu x_\beta) + \varphi(c), \quad c = \sum_{k \in \Phi} \lambda_k x_k.$$

Тогда $c = 0$.

Доказательство. Заметим, что для алгебр Ли L всех рассмотренных в предыдущем пункте типов, кроме C_n, B_2, для различных корней $\alpha \neq \beta$ верно, что $K_\alpha \cup K_\beta = \Phi$. Таким образом, прокоммутировав равенство

$$\varphi(\lambda x_\alpha + \mu x_\beta) = \varphi(\lambda x_\alpha) + \varphi(\lambda x_\beta) + \varphi\biggl(\sum_{k \in \Phi} \lambda_k x_k\biggr)$$

со всеми γ, такими что $\gamma+\alpha\notin\Phi\cup\{0\}$ или $\gamma+\beta\notin\Phi\cup\{0\}$, получаем

$$0=\varphi\biggl(\sum_{k\in\Phi}\lambda_k[x_k,x_\gamma]\biggr).$$

После расписывания коммутатора справа в равенстве будет стоять разложение нуля по корневым пространствам, ни одно слагаемое не станет нулём при $\lambda_k\neq 0$ из-за наложенных ограничений на кольцо, таким образом, все λ_k равны 0 по пунктам 1) и 2) замечания 1.

Для алгебр Ли типа C_n ситуация несколько другая, а именно для следующих пар корней остаются ненулевые коэффициенты λ:

$$\begin{aligned}&\varphi\bigl(\lambda_{i,j}x_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}}+\lambda_{i,k}x_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle q\rangle k}}\bigr)=\\&\quad=\varphi\bigl(\lambda_{i,j}x_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}}\bigr)+\varphi\bigl(\lambda_{i,k}x_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle q\rangle k}}\bigr)+\varphi\bigl(\lambda x_{e_{\langle 2t\rangle i}}\bigr),\\&\varphi\bigl(\lambda_{i,j}x_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}}+\lambda_{2i}x_{e_{\langle 2t\rangle i}}\bigr)=\varphi\bigl(\lambda_{i,j}x_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle r\rangle j}}\bigr)+\varphi\bigl(\lambda_{2i}x_{e_{\langle 2t\rangle i}}\bigr)+\varphi\bigl(\lambda x_{e_{\langle 2t\rangle i}}\bigr).\end{aligned}$$

Прокоммутируем эти равенства с $x_{-e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle t\rangle p}}$ и получим

$$\begin{aligned}&\varphi\bigl(\lambda'_{i,j}x_{e_{\langle t\rangle p}+e_{\langle r\rangle j}}+\lambda'_{i,k}x_{e_{\langle t\rangle p}+e_{\langle q\rangle k}}\bigr)=\\&\quad=\varphi\bigl(\lambda'_{i,j}x_{e_{\langle t\rangle p}+e_{\langle r\rangle j}}\bigr)+\varphi\bigl(\lambda'_{i,k}x_{e_{\langle t\rangle p}+e_{\langle q\rangle k}}\bigr)+\varphi\bigl(\lambda' x_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle t\rangle p}}\bigr),\\&\varphi\bigl(\lambda'_{i,j}x_{e_{\langle t\rangle p}+e_{\langle r\rangle j}}+\lambda'_{2i}x_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle t\rangle p}}\bigr)=\\&\quad=\varphi\bigl(\lambda'_{i,j}x_{e_{\langle t\rangle p}+e_{\langle r\rangle tj}}\bigr)+\varphi\bigl(\lambda'_{2i}x_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle t\rangle p}}\bigr)+\varphi\bigl(\lambda' x_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle t\rangle p}}\bigr).\end{aligned}$$

С другой стороны, мы знаем, что если у двух корней совпадает индекс $e_{\langle t\rangle p}$, то единственный коэффициент, про который мы не знаем, равен ли он нулю, — это коэффициент при $x_{e_{\langle 2t\rangle p}}$. Таким образом, из того, что $\lambda'=0$, следует, что $\lambda=0$, т. е. для двух слагаемых φ аддитивна.

Для алгебр типа B_2 рассуждения аналогичны. Мы ещё не доказали аддитивность для следующих пар корней B_2 $(t,q\in\{\pm1\}$, $\{\pm i,\pm j\}=\{\pm e_1,\pm e_2\})$:

$$\begin{aligned}&\varphi\bigl(\lambda_i x_{e_{\langle t\rangle i}}+\lambda_k x_{e_{\langle q\rangle k}}\bigr)=\varphi\bigl(\lambda_i x_{e_{\langle t\rangle i}}\bigr)+\varphi\bigl(\lambda_k x_{e_{\langle q\rangle k}}\bigr)+\varphi\bigl(\lambda x_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle q\rangle k}}\bigr),\\&\varphi\bigl(\lambda_i x_{e_{\langle t\rangle i}}+\lambda_k x_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle q\rangle k}}\bigr)=\varphi\bigl(\lambda_i x_{e_{\langle t\rangle i}}\bigr)+\varphi\bigl(\lambda_k x_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle q\rangle k}}\bigr)+\varphi\bigl(\lambda x_{e_{\langle t\rangle i}+e_{\langle q\rangle k}}\bigr).\end{aligned}$$

Прокоммутируем равенства с $x_{e_{-\langle t\rangle i}}$ и получим

$$\begin{aligned}&\varphi\bigl(\lambda_i h_{e_{\langle t\rangle i}}+\lambda'_k x_{e_{\langle q\rangle k}-e_{\langle t\rangle i}}\bigr)=\varphi\bigl(\lambda_i h_{e_{\langle t\rangle i}}\bigr)+\varphi\bigl(\lambda'_k x_{e_{\langle q\rangle k}-e_{\langle t\rangle i}}\bigr)+\varphi\bigl(\lambda' x_{e_{\langle q\rangle k}}\bigr),\\&\varphi\bigl(\lambda_i h_{e_{\langle t\rangle i}}+\lambda'_k x_{e_{\langle q\rangle k}}\bigr)=\varphi\bigl(\lambda_i h_{e_{\langle t\rangle i}}\bigr)+\varphi\bigl(\lambda'_k x_{e_{\langle q\rangle k}}\bigr)+\varphi\bigl(\lambda' x_{e_{\langle q\rangle k}}\bigr).\end{aligned}$$

По замечанию 1 есть h, который не обнулит коэффициент λ'. Прокоммутировав с ним, получим

$$\begin{aligned}&\varphi\bigl(\lambda''_k x_{e_{\langle q\rangle k}-e_{\langle t\rangle i}}\bigr)=\varphi\bigl(\lambda''_k x_{e_{\langle q\rangle k}-e_{\langle t\rangle i}}\bigr)+\varphi\bigl(\lambda'' x_{e_{\langle q\rangle k}}\bigr),\\&\varphi\bigl(\lambda''_k e_{\langle q\rangle k}\bigr)=\varphi\bigl(\lambda''_k x_{e_{\langle q\rangle k}}\bigr)+\varphi\bigl(\lambda'' x_{e_{\langle q\rangle k}}\bigr).\end{aligned}$$

Поэтому $\lambda''=0$, тогда $\lambda'=0$, следовательно, $\lambda=0$. $\square$

Лемма 13. *Пусть L — алгебра Ли любого типа с системой корней Φ, α — корень из Φ, $h \in H$. Пусть*

$$\varphi(\lambda x_\alpha + \mu h) = \varphi(\lambda x_\alpha) + \varphi(\mu h) + \varphi(C),$$

где

$$C = \sum_{k \in \Phi} \lambda_k x_k + \sum_i \lambda_i h_i, \quad h_i \in H.$$

Тогда $C = 0$.

Доказательство. Прокоммутируем это равенство с любым h_i. По пункту 3) замечания 1

$$\varphi(\lambda_i x_\alpha) = \varphi(\lambda_i x_\alpha) + \varphi([C, h_i]).$$

Поэтому $[C, h_i] = 0$ для всех i. Следовательно, $C = h' \in H$.

Прокоммутируем с любым x_γ равенство

$$\varphi(\lambda x_\alpha + \mu h) = \varphi(\lambda x_\alpha) + \varphi(\mu h) + \varphi(h').$$

Получим

$$\varphi(\lambda' x_{\gamma+\alpha} + \mu' x_\gamma) = \varphi(\lambda' x_{\gamma+\alpha}) + \varphi(\mu' x_\gamma) + \varphi([h', x_\gamma]).$$

В разложении $[h', x_\gamma]$ нет h_i, поэтому по лемме 12 $[h', x_\gamma] = 0$. Таким образом, h' коммутирует со всеми x_γ. По замечанию 1 получаем, что $C = 0$. □

Теперь рассмотрим варианты, когда в уравнении

$$\varphi(\lambda x_\alpha + \mu x_\beta) = \varphi(\lambda x_\alpha) + \varphi(\mu x_\beta) + \varphi(C)$$

в разложении C содержатся $h_i \in H$.

Лемма 14. *Пусть L — алгебра Ли любого рассматриваемого нами типа с системой корней Φ,*

$$\varphi(\lambda x_\alpha + \mu x_\beta) = \varphi(\lambda x_\alpha) + \varphi(\mu x_\beta) + \varphi(C),$$

где

$$\alpha \neq \beta \in \Phi, \quad C = \sum_{k \in \Phi} \lambda_k x_k + \sum_i \lambda_i h_i, \quad h_i \in H.$$

Тогда $C = 0$.

Доказательство. Пусть

$$\varphi(\lambda x_\alpha + \mu x_\beta) = \varphi(\lambda x_\alpha) + \varphi(\mu x_\beta) + \varphi(C),$$

где

$$C = c + h, \quad h = \sum \lambda_i h_i, \quad h_i \in H, \quad c = \sum_\delta \lambda_\delta x_\delta.$$

Прокоммутируем равенство с любым $h_i \in H$, получим

$$\varphi(\lambda_i x_\alpha + \lambda_j x_\beta) = \varphi(\lambda_i x_\alpha) + \varphi(\lambda_j x_\beta) + \varphi([c, h_i]).$$

Применив утверждение, доказанное в лемме 12, получим, что $[c, h_i] = 0$. Следовательно, $c \in H$ по замечанию 1, т. е. $c = 0$:

$$\varphi(\lambda x_\alpha + \mu x_\beta) = \varphi(\lambda x_\alpha) + \varphi(\mu x_\beta) + \varphi(h).$$

Тогда прокоммутируем

$$\varphi(\lambda x_\alpha + \mu x_\beta) = \varphi(\lambda x_\alpha) + \varphi(\mu x_\beta) + \varphi(h)$$

с x_γ, $\gamma \neq -\alpha, -\beta$. Получаем

$$\varphi(\lambda_i x_{\alpha+\gamma} + \lambda_j x_{\beta+\gamma}) = \varphi(\lambda_i x_{\alpha+\gamma}) + \varphi(\lambda_j x_{\beta+\gamma}) + \varphi([h, x_\gamma]).$$

Так как результат коммутирования $[h, x_\gamma]$ в разложении не содержит элементов H, то $\varphi([h, x_\gamma]) = 0$. Следовательно, $[h, x_\gamma] = 0$ для любого x_γ, $\gamma \neq -\alpha, -\beta$.

Если $\gamma = -\alpha$ или $\gamma = -\beta$, то рассмотрим

$$\varphi(\lambda_i x + \lambda_j h) = \varphi(\lambda_i x) + \varphi(\lambda_j h) + \varphi([h, x_\gamma]).$$

По лемме 13 $[h, x_\gamma] = 0$. Таким образом, h коммутирует со всеми x_γ, т. е. $h = 0$ по замечанию 1, что возвращает нас к уже доказанному случаю в лемме 12. □

Лемма 15. *Пусть L — алгебра Ли любого рассматриваемого нами типа с системой корней Φ,*

$$\varphi(\lambda x_\alpha + \mu x_\alpha) = \varphi(\lambda x_\alpha) + \varphi(\mu x_\alpha) + \varphi(C),$$

где

$$\alpha \in \Phi, \quad C = \sum_{k \in \Phi} \lambda_k x_k + \sum_i \lambda_i h_i, \quad h_i \in H.$$

Тогда $C = 0$.

Доказательство. Рассмотрим

$$\varphi(\lambda' x_\alpha + \mu' h_i) = \varphi(\lambda' x_\alpha) + \varphi(\mu' h_i).$$

Заметим, что

$$[h_i, x_\alpha] = \langle \alpha, \alpha_i \rangle x_\alpha = \frac{2(\alpha, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} x_\alpha.$$

Заметим также, что по замечанию 1 существует i, такой что $[h_i, x_\alpha]$ не равняется нулю. Прокоммутируем последнее равенство с $x_\alpha + h_i$. Получим

$$\varphi(\lambda'' x_\alpha + \mu'' x_\alpha) = \varphi(\lambda'' x_\alpha) + \varphi(\mu'' x_\alpha).$$

Получили нужное равенство с пропорциональными коэффициентами. Здесь $\lambda'' = \langle \alpha, \alpha_i \rangle \lambda'$ и $\mu'' = \langle \alpha, \alpha_i \rangle \mu'$, причём по замечанию 1 обратим коэффициент $\langle \alpha, \alpha_i \rangle$. Полагая

$$\lambda' = \frac{1}{\langle \alpha, \alpha_i \rangle} \lambda, \quad \mu' = \frac{1}{\langle \alpha, \alpha_i \rangle} \mu,$$

получаем $\lambda'' = \lambda$ и $\mu'' = \mu$. Соответственно

$$\varphi(\lambda x_\alpha + \mu x_\alpha) = \varphi(\lambda x_\alpha) + \varphi(\mu x_\alpha).$$ □

Лемма 16. *Пусть L — алгебра Ли любого рассматриваемого нами типа с системой корней Φ,*

$$\varphi(\lambda h_i + \mu h_j) = \varphi(\lambda h_i) + \varphi(\mu h_j) + \varphi(C)$$

(*возможно,* $i = j$),

$$C = \sum_{k\in\Phi} \lambda_k x_k + \sum_i \lambda_i h_i, \quad h_i \in H.$$

Тогда $C = 0$.

Доказательство. Прокоммутируем это равенство с x_α. Получим

$$\varphi(\lambda' x_\alpha + \mu' x_\alpha) = \varphi(\lambda' x_\alpha) + \varphi(\mu' x_\alpha) + \varphi([C, x_\alpha]).$$

По предыдущему замечанию $[C, x_\alpha] = 0$ для любого $\alpha \in \Phi$. Следовательно, по замечанию 1 $C = 0$. □

Таким образом, для любых двух элементов базиса верно, что $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$. Теперь надо доказать аналогичное утверждение для произвольного числа элементов базиса.

3.4. Доказательство теоремы

Предложение 1. *Пусть L — алгебра Ли любого рассматриваемого нами типа с системой корней Φ. Тогда*

$$\varphi\biggl(\sum_{\alpha\in\Phi} \lambda_\alpha x_\alpha + \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i\biggr) = \sum_{\alpha\in\Phi} \varphi(\lambda_\alpha x_\alpha) + \sum_{i=1}^n \varphi(\lambda_i h_i).$$

Доказательство. Докажем данное утверждение по индукции по числу ненулевых λ.

База индукции — соответствующее утверждение для двух слагаемых — доказана выше.

Шаг индукции. Пусть

$$\varphi\biggl(\sum_{\alpha\in\Phi} \lambda_\alpha x_\alpha + \sum_{i=1}^n \lambda_i h_i\biggr) = \sum_{\alpha\in\Phi} \varphi(\lambda_\alpha x_\alpha) + \sum_{i=1}^n \varphi(\lambda_i h_i) + \varphi(C),$$

где

$$C = \sum_{\alpha\in\Phi} \mu_\alpha x_\alpha + \sum_{i=1}^n \mu_i h_i.$$

Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Есть больше чем один λ_i. Тогда, прокоммутировав равенство со всеми x_β, получим

$$\varphi\biggl(\sum_{\alpha\in\Phi} \lambda_\alpha [x_\alpha, x_\beta] + \sum_{i=1}^n \lambda_i [h_i, x_\beta]\biggr) = \\ = \sum_{\alpha\in\Phi} \varphi(\lambda_\alpha [x_\alpha, x_\beta]) + \sum_{i=1}^n \varphi(\lambda_i [h_i, x_\beta]) + \varphi([C, x_\beta]).$$

Так как $[h, x_\beta] = \mu x_\beta$ и ненулевых λ_i больше одного, то получаем формулу с меньшим числом ненулевых слагаемых. Следовательно, по предположению индукции она раскладывается и $[C, x_\beta] = 0$ для любого $\beta \in \Phi$. Тогда $C = 0$.

Случай 2. Все λ_i равны 0 и

$$C = c = \sum_{\alpha \in \Phi} \mu_\alpha x_\alpha,$$

число ненулевых λ_α больше двух. Будем коммутировать равенство с корнями x_β так, что по крайней мере один из x_α исчезнет, т. е. $\alpha + \beta \notin \Phi \cup \{0\}$. Уменьшится число ненулевых слагаемых, и мы можем применить предположение индукции и получить, что $[c, x_\beta] = 0$. В случае если алгебра Ли не типа C_n и B_2, этого достаточно для того, чтобы утверждать, что $c = 0$. В случае алгебры Ли типа C_n применим тот же трюк, что и в лемме 12: пусть из коэффициентов не обнулился какой-то из $\lambda_{\pm 2e_i}$, тогда прокоммутируем равенство с $x_{e_p \mp e_i}$. Получим, что единственным ненулевым членом в разложении нового $c^* = [c, x_{x_{e_p \mp e_i}}]$ является $\lambda_{e_p \pm e_i} x_{e_p \pm e_i}$. С другой стороны, ненулевыми членами в разложении c^* могли быть только члены вида $\lambda_{\pm 2e_k} x_{\pm 2e_k}$. Противоречие. Следовательно, все коэффициенты равны нулю, то есть $C = 0$. Аналогично лемме 12 доказывается и утверждение для системы корней типа B_2.

Случай 3. Все λ_i равны 0, $C = c + h$, где $c = \sum \mu_\alpha x_\alpha$. Прокоммутируем равенство с любым $h^* \in H$. Так как

$$[c + h, h^*] = [c, h^*] = \sum \mu^*_\alpha x_\alpha,$$

то получим либо предположение индукции, либо предыдущий случай. Тогда $[C, h^*] = 0$ для $h^* \in H$, т. е. $C = h \in H$. Имеем

$$\varphi\biggl(\sum_{\alpha \in \Phi}^{n} \lambda_\alpha x_\alpha\biggr) = \sum_{\alpha}^{n} \varphi(\lambda_\alpha x_\alpha) + \varphi\biggl(\sum_i \mu_i h_i\biggr).$$

Прокоммутировав равенство выше со всеми x_β, получим либо предположение индукции, либо случай 2. Таким образом, $\sum \mu_i h_i = 0$, так как этот элемент коммутирует со всеми x_β.

Случай 4. Все, кроме одного λ_i, равны нулю:

$$\varphi\biggl(\sum_{\alpha \in \Phi} \lambda_\alpha x_\alpha + \lambda_k h_k\biggr) = \sum_{\alpha \in \Phi} \varphi(\lambda_\alpha x_\alpha) + \varphi(\lambda_k h_k) + \varphi(C),$$

Прокоммутировав равенство со всеми $h^* \in H$, получим предположение индукции. Следовательно, $C = h \in H$. Имеем

$$\varphi\biggl(\sum_{\alpha \in \Phi} \lambda_\alpha x_\alpha + \lambda_k h_k\biggr) = \sum_{\alpha \in \Phi} \varphi(\lambda_\alpha x_\alpha) + \varphi(\lambda_k h_k) + \varphi(h).$$

Теперь, прокоммутировав это равенство со всеми x_β, получим случай 2, следовательно, $[h, x_\beta] = 0$, т. е. $h = 0$, значит, $C = 0$.

Все случаи разобраны, шаг индукции доказан. $\square$

Теперь мы готовы доказать теорему 6.

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathcal{L}$. Тогда

$$a = \sum_{\alpha\in\Phi} \lambda_{a,\alpha} x_\alpha + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a,i} h_i, \quad b = \sum_{\alpha\in\Phi} \lambda_{b,\alpha} x_\alpha + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{b,i} h_i.$$

Обозначим

$$\lambda_{a+b,i,j} = \lambda_{a,i,j} + \lambda_{b,i,j}, \quad \lambda_{a+b,i} = \lambda_{a,i} + \lambda_{b,i}.$$

Разложим $a+b$ по базису, далее разложим по леммам 15 и 16 и соберём по отдельности a и b:

$$\begin{aligned}\varphi\Bigg(\sum_{\alpha\in\Phi} \lambda_{a+b,\alpha} x_\alpha + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a+b,i} h_i\Bigg) &= \sum_{\alpha\in\Phi} \varphi(\lambda_{a+b,\alpha} x_\alpha) + \sum_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_{a+b,i} h_i) = \\ &= \sum_{\alpha\in\Phi} \varphi\big((\lambda_{a,\alpha} + \lambda_{b,\alpha}) x_\alpha\big) + \sum_{i=1}^{n} \varphi\big((\lambda_{a,i} + \lambda_{b,i}) h_i\big) = \\ &= \sum_{\alpha\in\Phi} \varphi(\lambda_{a,\alpha} x_\alpha) + \sum_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_{a,i} h_i) + \sum_{\alpha\in\Phi} \varphi(\lambda_{b,\alpha} x_\alpha) + \sum_{i=1}^{n} \varphi(\lambda_{b,i} h_i) = \\ &= \varphi\Bigg(\sum_{\alpha\in\Phi} \lambda_{a,\alpha} x_\alpha + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{a,i} h_i\Bigg) + \varphi\Bigg(\sum_{\alpha\in\Phi} \lambda_{b,\alpha} x_\alpha + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{b,i} h_i\Bigg).\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

В заключение хотелось бы выразить благодарность и искреннюю признательность Елене Игоревне Буниной за внимание к работе, ценные обсуждения и помощь на всех этапах выполнения данной работы, Александру Васильевичу Михалёву за постановку задачи и полезные советы, а также Ивану Владимировичу Аржанцеву и Глебу Александровичу Погудину за полезные обсуждения и критические замечания.

Литература

[1] Аржанцев И. В. Однозначность сложения в полупростых алгебрах Ли // УМН. — 2001. — Т. 56, № 3. — С. 155—156.

[2] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1972.

[3] Михалёв А. В. Мультипликативная классификация ассоциативных колец // Матем. сб. — 1988. — Т. 135, № 2. — С. 210—224.

[4] Пономарёв К. Н. Об определимости сложения в алгебрах Ли // Сиб. матем. журн. — 2011. — Т. 52, № 6. — С. 1341—1345.

[5] Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. — М.: Изд-во МЦНМО, 2003.

[6] Arzhantsev I. V. Uniqueness of addition in Lie algebra sl(2) // Lie Algebras, Rings and Related Topics. — Berlin: Springer, 2000. — P. 1—4.

[7] Arzhantsev I. V. Some results on uniqueness of addition in Lie algebras // Proc. of the First Colloquium on Lie Theory and Applications. — Univ. de Vigo, 2002. — P. 19—24.

[8] Stephenson W. Unique addition rings // Can. J. Math. — 1969. — Vol. 21, no. 6. — P. 1455—1461.