Числовые характеристики многообразий алгебр Пуассона

С. М. РАЦЕЕВ
Ульяновский государственный университет
e-mail: ratseevsm@mail.ru

УДК 512.572

Ключевые слова: алгебра Пуассона, алгебра Ли, многообразие алгебр, рост многообразия.

Аннотация

В работе приведён обзор недавних результатов о многообразиях алгебр Пуассона. Приводятся алгебры Пуассона с экстремальными свойствами, эквивалентные условия полиномиальности роста многообразий алгебр Пуассона, исследуются многообразия алгебр Пуассона, идеалы тождеств которых содержат тождество $\{x,y\}\cdot\{z,t\}=0$, а также взаимосвязь таких многообразий с многообразиями алгебр Ли, исследуются пространства специального вида многообразий алгебр Пуассона.

Abstract

S. M. Ratseev, Numerical characteristics of varieties of Poisson algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 2, pp. 217—242.

The paper is a survey of recent results of investigations on varieties of Poisson algebras. We give constructions of varieties of Poisson algebras with extremal properties, we give equivalent conditions for the polynomial codimension growth of a variety of Poisson algebras, we study varieties of Poisson algebras whose ideals of identities contain the identity $\{x,y\}\cdot\{z,t\}=0$, and we study an interrelation between such varieties and varieties of Lie algebras.

Введение

В работе изложены результаты, относящиеся к теории многообразий алгебр Пуассона.

Векторное пространство A над полем K с двумя K-билинейными операциями умножения $\cdot$ и $\{\,,\,\}$ называется алгеброй Пуассона, если относительно операции $\cdot$ пространство A является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей, относительно операции $\{\,,\,\}$ — алгеброй Ли и данные операции связаны правилом Лейбница

$$\{a\cdot b,c\}=a\cdot\{b,c\}+\{a,c\}\cdot b,\quad a,b,c\in A.$$

Алгебры Пуассона возникают в различных разделах алгебры, дифференциальной геометрии, топологии, в современной теоретической физике и т. д. Приведём несколько примеров и конструкций алгебр Пуассона.

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 2, с. 217—242.

1. Пусть $H_{2m} = K[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m]$ — ассоциативное коммутативное кольцо многочленов. Превратим H_{2m} в алгебру Пуассона, введя в H_{2m} скобки Пуассона $\{\,,\,\}$ следующим образом:
$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right), \quad f, g \in H_{2m}.$$
Полученная алгебра называется *алгеброй Гамильтона*.
2. Пусть A_L — некоторая алгебра Ли над полем K с лиевым умножением $[\,,\,]$. Пусть $v_1, v_2, \ldots$ — линейный базис пространства A_L над K. Рассмотрим коммутативное кольцо полиномов $K[v_1, v_2, \ldots]$. Скобки Пуассона $\{\,,\,\}$ для элементов v_i определим как умножение в A_L: $\{v_i, v_j\} = [v_i, v_j]$. Распространим скобки Пуассона $\{\,,\,\}$ на всё $K[v_1, v_2, \ldots]$, используя линейность и правило Лейбница. Таким образом получается алгебра Пуассона $\mathrm{PS}(A_L)$.
3. Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра с единицей над полем K нулевой характеристики и умножением $\wedge$. Пусть в A выполнено тождество $\big[[x_1, x_2], x_3\big] = 0$ (см. [37]). Определим в A операции $\cdot$ и $\{\,,\,\}$ следующим образом:
$$a \cdot b = \frac{1}{2}(a \wedge b + b \wedge a), \quad \{a, b\} = a \wedge b - b \wedge a, \quad a, b \in A.$$
Полученная алгебра $(A, +, \cdot, \{\,,\,\}, K)$ будет алгеброй Пуассона.
4. Пусть A_L — некоторая алгебра Ли с лиевым умножением $[\,,\,]$ над произвольным полем K. Рассмотрим векторное пространство
$$A = A_L \oplus K,$$
в котором определим операции $\cdot$ и $\{\,,\,\}$ следующим образом:
$$(a + \alpha) \cdot (b + \beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha\beta, \quad \{a + \alpha, b + \beta\} = [a, b], \qquad a, b \in A_L, \quad \alpha, \beta \in K. \tag{1}$$
Тогда полученная алгебра $(A, +, \cdot, \{\,,\,\}, K)$ будет являться алгеброй Пуассона. Ниже будет изучена взаимосвязь алгебр A_L и A.
5. Пусть A — произвольная ассоциативная алгебра (с единицей или без неё) с умножением $\wedge$ над произвольным полем K. Рассмотрим алгебру Ли $[A]$ с операцией коммутирования
$$[x, y] = x \wedge y - y \wedge x, \quad x, y \in A.$$
Из алгебры $[A]$ можно построить алгебру Пуассона $[A] \oplus K$ с операциями (1). Ниже будут построены минимальные алгебры Пуассона полиномиального роста на основе данной конструкции.

Договоримся опускать скобки Пуассона при их левонормированной расстановке: $\big\{\{a, b\}, c\big\} = \{a, b, c\}$.

1. Пространство полилинейных элементов

Пусть $L(X)$ — свободная алгебра Ли с умножением $[\,,]$, где $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счётное множество свободных образующих. В алгебре $L(X)$ зафиксируем упорядоченный базис $v_1, v_2, \ldots$, где $v_i < v_j$ при $i < j$. Рассмотрим ассоциативную коммутативную алгебру полиномов $K[v_1, v_2, \ldots]$. В этой алгебре определим скобки Пуассона для порождающих элементов v_i как умножение в алгебре $L(X)$: $\{v_i, v_j\} = [v_i, v_j]$. Распространим скобки Пуассона на любые элементы из $K[v_1, v_2, \ldots]$, используя линейность и правило

$$\{f \cdot g, h\} = f \cdot \{g, h\} + \{f, h\} \cdot g, \quad f, g, h \in K[v_1, v_2, \ldots].$$

Тогда полученная алгебра будет свободной алгеброй Пуассона $F(X)$ (см. [27]), причём базис алгебры $F(X)$ будут составлять все элементы вида

$$v_{i_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_k}^{\alpha_k},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geqslant 0$, $i_1 < \ldots < i_k$.

Обозначим через P_n пространство в $F(X)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$, а через B_n — пространство полилинейных элементов степени n в свободной алгебре Ли $L(X)$. Так как базисом пространства B_n (см., например, [1, 29]) являются все элементы вида

$$[x_n, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)}], \quad \sigma \in \mathrm{S}_{n-1},$$

будет верным следующее утверждение.

Предложение 1. *Базис пространства P_n состоит из всех элементов вида*

$$x_{k_1} \cdot \ldots \cdot x_{k_r} \cdot \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}\}, \tag{2}$$

для каждого из которых выполнены следующие условия:

i) $r \geqslant 0$, $k_1 < \ldots < k_r$;

ii) *каждая из переменных $x_1, \ldots, x_n$ встречается в (2) ровно один раз;*

iii) *каждый множитель $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}, \ldots, \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}\}$ в (2), являющийся скобкой Пуассона, левонормирован, имеет длину не меньше 2 и в каждой такой скобке Пуассона элемент с максимальным индексом находится на первом месте:*

$$i_1 > i_2, \ldots, i_1 > i_s, \ldots, \quad j_1 > j_2, \ldots, j_1 > j_t;$$

iv) *множители в (2) упорядочены по длине: $s \leqslant \ldots \leqslant t$;*

v) *если два соседних множителя в (2), являющиеся скобками Пуассона, имеют одинаковую длину*

$$\ldots \cdot \{x_{p_1}, \ldots, x_{p_s}\} \cdot \{x_{q_1}, \ldots, x_{q_s}\} \cdot \ldots,$$

то $p_1 < q_1$.

Обозначим через Γ_n подпространство в P_n, являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$\{x_{i_1},\ldots,x_{i_s}\}\cdot\ldots\cdot\{x_{j_1},\ldots,x_{j_t}\},\quad s\geqslant 2,\ldots,t\geqslant 2. \tag{3}$$

Тогда из сказанного выше следует, что базисом пространства Γ_n будут являться все элементы вида (3) с условиями ii)—v) из предложения 1.

Предложение 2 [19]. *Для любого положительного целого n будут выполнены равенства*

$$\dim P_n = n! = 1+\sum_{k=2}^{n} C_n^k\cdot\dim\Gamma_k,\quad \dim\Gamma_n = n!\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\right),$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k.

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр Пуассона (все необходимые сведения о многообразиях PI-алгебр можно найти, например, в [1,29,35]), $\mathrm{Id}(\mathbf{V})$ — идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$. Обозначим

$$P_n(\mathbf{V}) = P_n/\big(P_n\cap\mathrm{Id}(\mathbf{V})\big),\quad c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V}),$$
$$\Gamma_n(\mathbf{V}) = \Gamma_n/\big(\Gamma_n\cap\mathrm{Id}(\mathbf{V})\big),\quad \gamma_n(\mathbf{V}) = \dim\Gamma_n(\mathbf{V}).$$

Предложение 3 [19]. *Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр Пуассона, и пусть элементы*

$$u_s^n(x_1,\ldots,x_n),\quad s=1,\ldots,\gamma_n(\mathbf{V}),$$

образуют базис пространства $\Gamma_n(\mathbf{V})$, $n\geqslant 2$. Тогда

i) *полилинейные элементы от переменных $x_1,\ldots,x_n$ вида*

$$x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_{n-k}}\cdot u_s^k(x_{j_1},\ldots,x_{j_k}),$$
$$k=0,\ldots,n,\quad s=1,\ldots,\gamma_k(\mathbf{V}),\quad i_1<\ldots<i_{n-k},\quad j_1<\ldots<j_k,$$

будут образовывать базис пространства $P_n(\mathbf{V})$;

ii) *коразмерности многообразия $\mathbf{V}$ вычисляются по следующей формуле:*

$$c_n(\mathbf{V}) = 1+\sum_{k=2}^{n} C_n^k\cdot\gamma_k(\mathbf{V}).$$

Обозначим через B линейную оболочку элементов (не обязательно полилинейных) свободной алгебры $F(X)$ вида

$$\{x_{i_1},\ldots,x_{i_s}\}\cdot\ldots\cdot\{x_{j_1},\ldots,x_{j_t}\},\quad s\geqslant 2,\quad\ldots,\quad t\geqslant 2.$$

При этом, в частности, $\Gamma_n = B\cap P_n$, $n=1,2,\ldots$.

Предложение 4 [19]. *Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие алгебр Пуассона над бесконечным полем K. Тогда идеал тождеств $\mathrm{Id}(\mathbf{V})$ порождается элементами из множества тождеств $B\cap\mathrm{Id}(\mathbf{V})$. Если $\mathrm{char}\,K=0$, то $\mathrm{Id}(\mathbf{V})$ порождается системой полилинейных тождеств из множества*

$$\bigcup_{n\geqslant 1}\big(\Gamma_n\cap\mathrm{Id}(\mathbf{V})\big).$$

Пространство $P_n(\mathbf{V})$ наделено структурой левого S_n-модуля, где S_n — симметрическая группа степени n. Напомним, что последовательность $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ называют *разбиением числа* n и обозначают $\lambda \vdash n$, если

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k = n, \quad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k > 0.$$

Пусть χ_λ — характер неприводимого представления симметрической группы, соответствующий разбиению λ числа n. Тогда в силу вполне приводимости модуля $P_n(\mathbf{V})$ в случае поля нулевой характеристики для многообразия $\mathbf{V}$ имеет место разложение

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \chi_n\big(P_n(\mathbf{V})\big) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V}) \chi_\lambda, \tag{4}$$

где $m_\lambda(\mathbf{V})$ — степени неприводимых представлений, соответствующих разбиению λ числа n. *Кодлина* многообразия определяется как сумма

$$l_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V}).$$

Аналогично определим $\chi_n^\Gamma(\mathbf{V}) = \chi_n\big(\Gamma_n(\mathbf{V})\big)$ и $l_n^\Gamma(\mathbf{V})$.

Скажем, что диаграмма Юнга лежит в крюке $H(i,j)$, если $\lambda_{i+1} \leqslant j$.

2. Рост многообразий

Хорошо известно, что в случае основного поля нулевой характеристики идеал тождеств произвольного многообразия $\mathbf{V}$ порождается совокупностью полилинейных тождеств данного многообразия. Поэтому одной из важных числовых характеристик многообразия $\mathbf{V}$ является последовательность $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n \geqslant 1}$, которая называется *последовательностью коразмерностей* многообразия $\mathbf{V}$. Асимптотическое поведение данной последовательности называют *ростом многообразия* $\mathbf{V}$. Рост многообразия служит своеобразной оценкой количества тождеств, которым удовлетворяет та или иная алгебра, принадлежащая данному многообразию. Говорят, что многообразие $\mathbf{V}$ имеет *полиномиальный рост*, если существуют такие константы C и k, что для любого n выполнено неравенство $c_n(\mathbf{V}) \leqslant Cn^k$. Аналогично вводится понятие *экспоненциального роста*: для любого n выполнено неравенство $c_n(\mathbf{V}) \leqslant Ca^n$, где C и a — некоторые константы. Если многообразие $\mathbf{V}$ имеет экспоненциальный рост, то можно ввести в рассмотрение нижнюю и верхнюю экспоненты:

$$\underline{\mathrm{Exp}}(\mathbf{V}) = \varliminf_{n \to \infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}, \quad \overline{\mathrm{Exp}}(\mathbf{V}) = \varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}$$

Если имеет место равенство

$$\mathrm{Exp}(\mathbf{V}) = \underline{\mathrm{Exp}}(\mathbf{V}),$$

то эту величину обозначим через $\mathrm{Exp}(\mathbf{V})$.

В случае многообразий ассоциативных алгебр хорошо известен следующий результат А. Регева [40]: многообразие ассоциативных алгебр $\mathbf{V}$, в котором выполнено нетривиальное тождество степени m, удовлетворяет неравенству $c_n(\mathbf{V}) \leqslant (m-1)^{2n}$ для любого n. При этом в случае основного поля нулевой характеристики М. В. Зайцев и А. Джамбруно [34] доказали гипотезу С. А. Амицура о существовании и целочисленности экспоненты произвольного многообразия ассоциативных алгебр.

Пусть $f(n)$ и $g(n)$ — две функции натурального аргумента. Будем писать $f(n) \approx g(n)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

В теории ассоциативных алгебр очень важную роль играет бесконечно порождённая алгебра Грассмана Λ и алгебра верхнетреугольных матриц порядка 2, которую мы обозначим через UT_2. Из [7] следует, что в случае основного поля нулевой характеристики многообразие ассоциативных алгебр $\mathbf{V}$ имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда $\Lambda \notin \mathbf{V}$, $\mathrm{UT}_2 \notin \mathbf{V}$. Интересным объектом являются многообразия *почти полиномиального роста*: это многообразия, рост которых не является полиномиальным, но такие, что всякое собственное подмногообразие имеет полиномиальный рост. Из результата А. Р. Кемера [7] следует, что существуют только два многообразия ассоциативных алгебр почти полиномиального роста: $\mathrm{var}(\Lambda)$, $\mathrm{var}(\mathrm{UT}_2)$. Также из данного результата следует, что при $\mathrm{char}\, K = 0$ произвольное многообразие ассоциативных алгебр $\mathbf{V}$ либо имеет полиномиальный рост, либо $c_n(\mathbf{V}) \geqslant 2^{n-1}$ для любого n. В случае унитарных ассоциативных алгебр В. Дренски и А. Регев [30] показали, что это свойство распространяется на случай произвольного поля. При этом если многообразие $\mathbf{V}$ имеет полиномиальный рост, то в случае поля нулевой характеристики найдётся такое рациональное q и целое k, что $c_n(\mathbf{V}) \approx qn^k$ [28]. Это утверждение верно и для многообразия ассоциативных алгебр с единицей $\mathbf{V}$ над произвольным полем [30], при этом

$$\frac{1}{k!} \leqslant q \leqslant \sum_{i=2}^{k} \frac{(-1)^i}{i!} \approx \frac{1}{e},$$

где e — основание натурального логарифма. Заметим, что в [36] Д. Ла Маттиной полностью описаны все подмногообразия в $\mathrm{var}(\Lambda)$ и $\mathrm{var}(\mathrm{UT}_2)$.

В отличие от ассоциативных алгебр, существуют многообразия алгебр Ли, в которых выполняются нетривиальные тождества, со сверхэкспоненциальным ростом (т. е. сверху они не ограничиваются никакой экспонентой). Одним из хорошо изученных примеров таких многообразий является многообразие алгебр Ли $\mathbf{AN}_2$, определяемое тождеством $\big[[x_1, x_2, x_3], [x_4, x_5, x_6]\big] = 0$ (см. [5]). Для элементов последовательности $\{c_n(\mathbf{AN}_2)\}_{n\geqslant 1}$ выполняется равенство

$$c_n(\mathbf{AN}_2) = \sqrt{n!}\big(1 + o(1)\big)^n$$

[10], при этом рост произвольного собственного подмногообразия в $\mathbf{AN}_2$ ограничен экспоненциальной функцией [5].

Для произвольного многообразия $\mathbf{V}$ определим функцию сложности

$$\mathcal{C}(\mathbf{V}, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(\mathbf{V})}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ю. П. Размысловым [12] показано, что для произвольного нетривиального многообразия алгебр Ли $\mathbf{V}$ функция $\mathcal{C}(\mathbf{V}, z)$ является целой функцией комплексного аргумента. Далее будет показано, что в случае алгебр Пуассона существуют нетривиальные многообразия, для которых функция сложности не является целой.

Алгебры Пуассона наследуют ряд свойств как ассоциативных алгебр, так и алгебр Ли. В то же время данные алгебры обладают уникальными свойствами.

Теорема 1 [19]. *Для многообразия алгебр Пуассона $\mathbf{V}$ над произвольным полем следующие условия эквивалентны:*

i) *последовательность $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n \geqslant 1}$ ограничена полиномом;*
ii) *для некоторого $m \geqslant 2$ в $\mathbf{V}$ выполнены полилинейные тождества*

$$\{x_1, \ldots, x_m\} = 0, \quad \{x_1, y_1\} \cdot \ldots \cdot \{x_m, y_m\} = 0;$$

iii) *найдётся такое число N, что для любого $n > N$ выполнено равенство $\gamma_n(\mathbf{V}) = 0$;*
iv) *найдётся такое число N, что для любого $n \geqslant N$ будет выполнено равенство*

$$c_n(\mathbf{V}) = 1 + \sum_{k=2}^{N} C_n^k \cdot \gamma_k(\mathbf{V}).$$

Теорема 2 [19]. *Пусть $\mathbf{V}$ — нетривиальное многообразие алгебр Пуассона над произвольным полем. Тогда*

1) *либо $c_n(\mathbf{V}) \geqslant 2^{n-1}$ для любого n,*
2) *либо найдётся такой многочлен $a_N x^N + \ldots + a_1 x + a_0$ степени $N \geqslant 0$ из кольца $\mathbb{Q}[x]$, что для любого $n \geqslant N$ будет выполнено равенство*

$$c_n(\mathbf{V}) = a_N n^N + \ldots + a_1 n + a_0, \quad a_N \neq 0,$$

причём

2a) *либо $c_n(\mathbf{V}) \geqslant 1 + n(n-1)/2$, $n \geqslant 1$, и*

$$\frac{1}{N!} \leqslant a_N \leqslant \sum_{k=2}^{N} \frac{(-1)^k}{k!},$$

2b) *либо $c_n(\mathbf{V}) = 1$ для любого n.*

Следствие 1 [19]. *Пусть $\operatorname{char} K = 0$, рост многообразия $\mathbf{V}$ является полиномиальным и число N в теореме 2 является нечётным, причём $N > 1$. Тогда $a_N \geqslant (N-1)/(N!)$.*

Пусть основное поле имеет нулевую характеристику, Λ — бесконечномерная алгебра Грассмана с единицей, Λ_{2n} — алгебра Грассмана с единицей и $2n$ образующими элементами $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ и операцией умножения $\wedge$. Введём в алгебрах Λ и Λ_{2n} два новых умножения:

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(a \wedge b + b \wedge a), \quad \{a, b\} = a \wedge b - b \wedge a, \quad a, b \in \Lambda \quad (a, b \in \Lambda_{2n}).$$

Нетрудно проверить, что алгебры $(\Lambda, +, \cdot, \{\,,\,\})$ и $(\Lambda_{2n}, +, \cdot, \{\,,\,\})$ будут алгебрами Пуассона, которые обозначим соответственно через G и G_{2n} и будем называть *алгебрами Грассмана—Пуассона*.

Теорема 3 [37]. *В случае основного поля нулевой характеристики для алгебры G верны следующие утверждения*:

1) *полилинейное тождество $\{x, y, z\} = 0$ порождает идеал тождеств алгебры G*;
2) *для любого $n \geqslant 2$*

$$\Gamma_{2n}(G) = \langle \{x_1, x_2\} \cdot \ldots \cdot \{x_{2n-1}, x_{2n}\} \rangle_K;$$

3) $\chi_{2n}^{\Gamma}(G) = \chi_{(1^{2n})}$, $n \geqslant 2$;
4) *полилинейные элементы от переменных $x_1, \ldots, x_n$*

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{i_{2s-1}}, x_{i_{2s}}\} \cdot x_{j_1} \cdot x_{j_2} \cdot \ldots \cdot x_{j_t},$$
$$2s + t = n, \quad s \geqslant 0, \quad , i_1 < \ldots < i_{2s}, \quad j_1 < \ldots < j_t,$$

образуют базис пространства $P_n(G)$;

5) *рост многообразия $\mathrm{var}(G)$, порождённого алгеброй G, является почти полиномиальным, причём $c_n(G) = 2^{n-1}$.*

Обозначим через $L_{\geqslant 2}(X)$ подпространство свободной алгебры Ли $L(X)$, являющееся линейной оболочкой элементов вида $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}]$, $s \geqslant 2$. Также обозначим через $PL_{\geqslant 2}(X)$ подпространство свободной алгебры Пуассона $F(X)$, являющееся линейной оболочкой элементов вида $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$, $s \geqslant 2$. Так как алгебры Ли $L_{\geqslant 2}(X)$ и $PL_{\geqslant 2}(X)$ равны с точностью до изоморфизма лиевых алгебр, то далее везде будет фигурировать алгебра Ли $L_{\geqslant 2}(X)$.

Предложение 5 [19]. *Пусть A_L — некоторая ненулевая алгебра Ли с лиевым умножением $[\,,\,]$ над произвольным полем K. Рассмотрим векторное пространство $A = A_L \oplus K$, в котором определим операции $\cdot$ и $\{\,,\,\}$ следующим образом*:

$$(a+\alpha)\cdot(b+\beta) = (\beta a+\alpha b)+\alpha\beta, \quad \{a+\alpha, b+\beta\} = [a, b], \quad a, b \in A_L, \quad \alpha, \beta \in K. \tag{5}$$

Тогда полученная алгебра $(A, +, \cdot, \{\,,\,\}, K)$ будет являться алгеброй Пуассона, причём будут выполнены следующие условия:

i) $\mathrm{Id}(A_L) = \mathrm{Id}(A) \cap L_{\geqslant 2}(X)$ *и в алгебре A выполнено тождество* $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$;
ii) $\Gamma_n(A) = B_n(A) = B_n(A_L)$ *для любого $n \geqslant 2$, где равенства приведены с точностью до изоморфизма векторных пространств*;

iii) *для любого n выполнено равенство*

$$c_n(A) = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \cdot \dim B_k(A_L).$$

Пусть UT_2 — алгебра верхнетреугольных матриц порядка 2. Обозначим через U_2 алгебру Пуассона $[\mathrm{UT}_2] \oplus K$, построенную с помощью предложения 5, где $[\mathrm{UT}_2]$ — алгебра Ли относительно операции коммутирования.

Теорема 4 [18]. *В случае основного поля нулевой характеристики для алгебры U_2 верны следующие утверждения*:

1) *полилинейные тождества*

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\} = 0$$

порождают идеал тождеств алгебры Пуассона U_2;

2) *для любого $n \geqslant 2$ полилинейные элементы от переменных $x_1, \ldots, x_n$*

$$\{x_{i_1}, x_{i_2} \ldots, x_{i_n}\}, \quad i_1 > i_2 < \ldots < i_n,$$

образуют базис пространства $\Gamma_n(U_2)$;

3) $\chi_n^\Gamma(U_2) = \chi_{(n-1,1)}$, $n \geqslant 2$;

4) *полилинейные элементы от переменных $x_1, \ldots, x_n$*

$$\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}\} \cdot x_{j_1} \cdot x_{j_2} \cdot \ldots \cdot x_{j_t},$$
$$s + t = n, \quad 0 \leqslant s \leqslant n, \quad s \neq 1, \quad i_1 > i_2 < \ldots < i_s, \quad j_1 < \ldots < j_t,$$

образуют базис пространства $P_n(U_2)$;

5) *рост многообразия $\mathrm{var}(U_2)$, порождённого алгеброй U_2, является почти полиномиальным, причём для любого $n \geqslant 2$ выполнено равенство $c_n(U_2) = 2^{n-1}(n-2) + 2$.*

Следующая теорема показывает, что в случае алгебр Пуассона алгебры U_2 и G играют ту же роль, что и алгебры UT_2 и Λ в ассоциативном случае (см. [7]).

Теорема 5 [18]. *Для многообразия алгебр Пуассона $\mathbf{V}$ в случае основного поля нулевой характеристики следующие условия эквивалентны*:

1) *последовательность $\{c_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ ограничена полиномом*;
2) $U_2 \notin \mathbf{V}$, $G \notin \mathbf{V}$;
3) *существует такая константа C, что в сумме* (4) $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$, *если выполнено условие $n - \lambda_1 > C$*;
4) *последовательность кодлин многообразия $\mathbf{V}$ ограничена константой.*

Следствие 2 [18]. *В случае основного поля нулевой характеристики существует только два многообразия алгебр Пуассона почти полиномиального роста*: $\mathrm{var}(G)$ *и* $\mathrm{var}(U_2)$.

Пусть R — некоторая ассоциативная алгебра с операцией умножения $\wedge$, $[R]$ — алгебра Ли (на базе алгебры R) относительно операции коммутирования $[a,b] = a \wedge b - b \wedge a$.

Пусть $A(X)$ — свободная ассоциативная алгебра над полем K, где $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счётное множество свободных образующих, V_n — подпространство в $A(X)$, состоящее из всех полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \ldots, x_n$, B_n — подпространство в V_n, являющееся линейной оболочкой левонормированных коммутаторов длины n:

$$V_n = \langle x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in \mathrm{S}_n \rangle_K,$$
$$B_n = \langle [x_n, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)}] \mid \sigma \in \mathrm{S}_{n-1} \rangle_K.$$

Обозначим через T_n (собственное) подпространство в V_n, являющееся линейной оболочкой элементов вида

$$[x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}] \cdots [x_{j_1}, \ldots, x_{j_t}], \quad s \geqslant 2, \ldots, \ t \geqslant 2.$$

Очевидно, что $B_n \subseteq T_n \subseteq V_n$, причём $\dim B_n = (n-1)!$, $\dim V_n = n!$, $\dim T_n \approx (1/e)n!$, где e — основание натурального логарифма.

Пусть $\mathrm{Id}(R)$ — идеал тождеств ассоциативной алгебры R в свободной алгебре $A(X)$, $\mathrm{Id}([R])$ — идеал тождеств алгебры Ли $[R]$ в $L(X)$. Обозначим

$$V_n(R) = V_n / \big(V_n \cap \mathrm{Id}(R)\big), \quad T_n(R) = T_n / \big(T_n \cap \mathrm{Id}(R)\big),$$
$$B_n([R]) = B_n / \big(B_n \cap \mathrm{Id}([R])\big),$$
$$c_n^A(R) = \dim V_n(R), \quad c_n^T(R) = \dim T_n(R), \quad c_n^L([R]) = \dim B_n([R]).$$

Предложение 6 [22]. *Пусть R — некоторая ненулевая ассоциативная PI-алгебра над произвольным полем K. Рассмотрим векторное пространство $A = [R] \oplus K$, в котором определим операции $\cdot$ и $\{\ ,\ \}$ следующим образом:*

$$(a+\alpha)\cdot(b+\beta) = (\beta a + \alpha b) + \alpha\beta, \quad \{a+\alpha, b+\beta\} = [a,b], \quad a, b \in R, \ \ \alpha, \beta \in K. \quad (6)$$

Тогда полученная алгебра $(A, +, \cdot, \{\ ,\ \}, K)$ будет алгеброй Пуассона, причём будут выполнены следующие условия:

1) *в алгебре A выполнено тождество $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$;*
2) *найдётся такая константа a, что для всех $n \geqslant 1$ выполнены неравенства $\gamma_n(A) \leqslant a^n$, $c_n(A) \leqslant (a+1)^n$;*
3) *если характеристика поля K равна нулю, то кохарактеры $\chi_n^\Gamma(A)$, $\chi_n(A)$, $n \geqslant 1$, лежат в крюке $H(k,l)$ для некоторых констант k и l, а последовательности кодлин $\{l_n^\Gamma(A)\}_{n \geqslant 1}$, $\{l_n(A)\}_{n \geqslant 1}$ ограничены полиномом.*

Следуя [36], будем говорить, что многообразие $\mathbf{V}$ является *минимальным многообразием полиномиального роста степени k*, если $c_n(\mathbf{V}) \approx qn^k$ для некоторых $q > 0$ и $k \geqslant 1$ и для любого собственного подмногообразия $\mathbf{W} \subset \mathbf{V}$, $c_n(\mathbf{W}) \approx rn^s$, имеем строгое неравенство $s < k$.

Обозначим через

$$J = \sum_{i=1}^{k-1} e_{i,i+1}$$

квадратную матрицу порядка k, которая на диагонали выше главной диагонали имеет единицы, а все остальные элементы равны нулю, e_{ij} — матричные единички. Рассмотрим следующую подалгебру в UT_k порядка k над полем K, введённую в [33]:

$$N_k = \langle E, J, J^2, \ldots, J^{k-2};\ e_{12}, e_{13}, \ldots, e_{1k}\rangle_K,$$

где E — единичная матрица.

Пусть $PN_k = [N_k] \oplus K$ — алгебра Пуассона с операциями (6).

Теорема 6 [22]. *Для алгебры Пуассона PN_k, $k \geqslant 3$, над полем нулевой характеристики верны следующие утверждения:*

1) *идеал тождеств $\mathrm{Id}(PN_k)$ порождается тождествами*

$$\{x_1, \ldots, x_k\} = 0, \quad \big\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}\big\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0;$$

2) *для любого $n < k$ полилинейные элементы*

$$\{x_n, x_i, x_1, \ldots \widehat{x_i}, \ldots, x_{n-1}\}, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

образуют базис пространства $\Gamma_n(PN_k)$, где $\widehat{\ }$ означает, что элемент пропущен;

3) $\gamma_n(PN_k) = n - 1$ *для любого* $n < k$, $\gamma_n(PN_k) = 0$, $n \geqslant k$;

4) $\chi_n^{\Gamma}(PN_k) = \chi_{(n-1,1)}$, $n < k$;

5) *для любого $n \geqslant k - 1$ справедливы соотношения*

$$c_n(PN_k) = 1 + \sum_{j=2}^{k-1} C_n^j (j-1) \approx \frac{k-2}{(k-1)!} n^{k-1}, \quad n \to \infty;$$

6) *алгебра PN_k порождает минимальное многообразие полиномиального роста степени $k - 1$.*

Следствие 3. *Пусть характеристика основного поля равна нулю и $\mathbf{V}$ — некоторое собственное подмногообразие в $\mathrm{var}(U_2)$. Тогда для некоторого $k \geqslant 2$ выполнено равенство $\mathbf{V} = \mathrm{var}(PN_k)$.*

Теорема 7 [22]. *Для алгебры Пуассона G_{2k}, $k \geqslant 1$, над полем нулевой характеристики верны следующие утверждения:*

1) *полилинейные тождества*

$$\{x, y, z\} = 0, \quad \{x_1, y_1\} \cdot \ldots \cdot \{x_{k+1}, y_{k+1}\} = 0$$

порождают идеал тождеств алгебры G_{2k};

2) *для любого $n \leqslant k$*

$$\Gamma_{2n}(G_{2k}) = \langle \{x_1, x_2\} \cdot \ldots \cdot \{x_{2n-1}, x_{2n}\}\rangle_K;$$

3) $\gamma_{2n}(G_{2k}) = 1$, $n \leqslant k$, $\gamma_{2n}(G_{2k}) = 0$, $n > k$;

4) $\chi_{2n}^{\Gamma}(G_{2k}) = \chi_{(1^{2n})}$, $n \leqslant k$;

5) *для любого* $n \geqslant 2k$

$$c_n(G_{2k}) = 1 + \sum_{j=1}^{k} C_n^{2j} \approx \frac{1}{(2k)!} n^{2k}, \quad n \to \infty;$$

6) *алгебра* G_{2k} *порождает минимальное многообразие полиномиального роста степени* $2k$.

Следствие 4. *Пусть характеристика основного поля равна нулю и* $\mathbf{V}$ *— некоторое собственное подмногообразие в* $\mathrm{var}(G)$. *Тогда для некоторого* $k \geqslant 0$ *выполнено равенство* $\mathbf{V} = \mathrm{var}(G_{2k})$.

Следствие 5. *В случае основного поля нулевой характеристики будут верными следующие утверждения*:

1) $\mathrm{var}(PN_3) = \mathrm{var}(G_2) = \mathbf{V}$;
2) *тождества*
$$\{x_1, x_2, x_3\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$$
порождают идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$;
3) $\Gamma_2(\mathbf{V}) = \langle \{x_1, x_2\} \rangle_K$, $\gamma_2(\mathbf{V}) = 1$, $\gamma_n(\mathbf{V}) = 0$, $n > 2$, $c_n(\mathbf{V}) = 1 + n(n-1)/2$, $n \geqslant 2$;
4) *если некоторое многообразие алгебр Пуассона* $\mathbf{W}$ *имеет полиномиальный рост, то* $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{W}$, $\mathrm{Id}(\mathbf{W}) \subseteq \mathrm{Id}(\mathbf{V})$.

Следствия 3—5 показывают, что следующие два строго возрастающие ряда подмногообразий в $\mathrm{var}(U_2)$ и $\mathrm{var}(G)$ являются неуплотняемыми и описывают все подмногообразия в $\mathrm{var}(U_2)$ и $\mathrm{var}(G)$, а многообразие $\mathrm{var}(PN_3) = \mathrm{var}(G_2)$ является (единственным) наименьшим многообразием алгебр Пуассона полиномиального роста:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{var}(PN_2) & \subset & \mathrm{var}(PN_3) & \subset & \mathrm{var}(PN_4) & \subset & \mathrm{var}(PN_5) & \subset & \ldots \\
\| & & \| & & & & & & \\
\mathrm{var}(G_0) & \subset & \mathrm{var}(G_2) & \subset & \mathrm{var}(G_4) & \subset & \mathrm{var}(G_6) & \subset & \ldots .
\end{array}$$

Пусть $\mathbf{N}_s\mathbf{A}$ — многообразие алгебр Ли, определённое тождеством

$$\big[[x_1, x_2], \ldots, [x_{2s+1}, x_{2s+2}]\big] = 0.$$

В [23] построена серия подмногообразий в $\mathbf{N}_2\mathbf{A}$, каждое из которых имеет полиномиальный рост и является минимальным по отношению к старшему коэффициенту полинома. В [11, 39] В. М. Петроградский, используя разработанный им так называемый *метод ожерелий*, доказал, что в случае произвольного поля экспоненты всех подмногообразий в $\mathrm{var}(\mathrm{UT}_s)$, а также подмногообразий в $\mathbf{N}_s\mathbf{A}$ существуют и являются целыми числами. В [14, 15, 17], в частности, усилены оценки роста данных многообразий и приведены эквивалентные условия для значений экспонент. В следующих двух теоремах приведены аналогичные результаты для алгебр Пуассона.

Теорема 8 [16]. *Пусть* $\mathbf{V}$ — *многообразие алгебр Пуассона над произвольным полем, идеал тождеств которого содержит полилинейные тождества*

$$\big\{\{x_1, y_1\}, \ldots, \{x_m, y_m\}\big\} = 0, \quad \{x_1, y_1\} \cdot \ldots \cdot \{x_m, y_m\} = 0 \tag{7}$$

для некоторого числа m*. Тогда существуют такие константы* N, α, β *и такое целое число* d, $1 \leqslant d \leqslant s$, *что для любого* $n \geqslant N$ *будет выполнено следующее двойное неравенство*:

$$n^{\alpha} d^n \leqslant c_n(\mathbf{V}) \leqslant n^{\beta} d^n.$$

После выяснения того, чем аппроксимируется последовательность коразмерностей произвольного многообразия алгебр Пуассона, идеал тождеств которого содержит полилинейные тождества вида (7), закономерно возникает вопрос, с помощью каких условий (критериев) искать значения экспонент d, фигурирующих в теореме 8. Следующая теорема в какой-то степени даёт ответ на поставленный вопрос.

Теорема 9 [25]. *Пусть* $\mathbf{V}$ — *многообразие алгебр Пуассона над полем нулевой характеристики, идеал тождеств которого содержит полилинейные тождества вида* (7)*. Также пусть* d — *некоторое положительное целое число. Тогда следующие условия эквивалентны*:

i) $\operatorname{Exp}(\mathbf{V}) \leqslant d$;

ii) *найдётся некоторый набор чисел* $\alpha_\sigma \in K$, $\sigma \in \mathrm{S}_d$, *в котором имеется хотя бы один ненулевой элемент, такой что для некоторого целого числа* $m \geqslant 0$ *в многообразии* $\mathbf{V}$ *выполнены все тождества вида*

$$\sum_{\sigma_m \in \mathrm{S}_d} \ldots \sum_{\sigma_1 \in \mathrm{S}_d} \alpha_{\sigma_m} \cdots \alpha_{\sigma_1} \cdots \big\{y_1, y_2, x_{\sigma_1(1)}, x_{\sigma_2(1)}, \ldots, x_{\sigma_m(1)}\big\} \ldots$$
$$\ldots \big\{y_2, y_3, x_{\sigma_1(2)}, x_{\sigma_2(2)}, \ldots, x_{\sigma_m(2)}\big\} \ldots$$
$$\ldots \big\{y_{2d-1}, y_{2d}, x_{\sigma_1(d)}, x_{\sigma_2(d)}, \ldots, x_{\sigma_m(d)}\big\} = 0,$$

где вместо многоточий, находящихся вне элементов $\{y_1, y_2, \ldots\}, \ldots, \{y_{2d-1}, y_{2d}, \ldots\}$, *каким-то образом расставлены скобки Пуассона* $\{\,,\,\}$ *и операции умножения* $\cdot$;

iii) *найдётся такое целое* $p \geqslant 0$, *что в многообразии* $\mathbf{V}$ *выполнены все полилинейные тождества вида*

$$\sum_{\sigma_p \in \mathrm{S}_d} \ldots \sum_{\sigma_1 \in \mathrm{S}_d} (-1)^{\sigma_p} \cdots (-1)^{\sigma_1} \cdots \big\{y_1, y_2, x_{1\sigma_1(1)}, x_{2\sigma_2(1)}, \ldots, x_{p\sigma_p(1)}\big\} \ldots$$
$$\ldots \big\{y_2, y_3, x_{1\sigma_1(2)}, x_{2\sigma_2(2)}, \ldots, x_{p\sigma_p(2)}\big\} \ldots$$
$$\ldots \big\{y_{2d-1}, y_{2d}, x_{1\sigma_1(d)}, x_{2\sigma_2(d)}, \ldots, x_{p\sigma_p(d)}\big\} = 0,$$

где вместо многоточий, находящихся вне элементов $\{y_1, y_2, \ldots\}, \ldots, \{y_{2d-1}, y_{2d}, \ldots\}$, *каким-то образом расставлены скобки Пуассона* $\{\,,\,\}$ *и операции умножения* $\cdot$;

iv) *существует такая константа* C, *что в сумме* (4) $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$, *если выполнено условие* $n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_d) > C$.

Левонормированные мономы вида $\big\{z, \underbrace{x, \ldots, x}_{n}\big\}$ будем обозначать $\big\{z, x^{\{n\}}\big\}$.

Заметим, что тождества пункта ii) теоремы 9 не являются полилинейными при $m > 1$. Из данной теоремы следует, что если, например, идеал тождеств многообразия $\mathbf{V}$ содержит тождества вида (7) и для некоторого s в многообразии $\mathbf{V}$ выполнены тождества

$$\Big\{\big\{y_1, y_2, x_1^{\{s\}}\big\}, \big\{y_3, y_4, x_2^{\{s\}}\big\}, \big\{y_5, y_6, x_3^{\{s\}}\big\}\Big\} = 0,$$
$$\Big\{\big\{y_1, y_2, x_1^{\{s\}}\big\}, \big\{y_3, y_4, x_2^{\{s\}}\big\}\Big\} \cdot \big\{y_5, y_6, x_3^{\{s\}}\big\} = 0,$$
$$\big\{y_1, y_2, x_1^{\{s\}}\big\} \cdot \big\{y_3, y_4, x_2^{\{s\}}\big\} \cdot \big\{y_5, y_6, x_3^{\{s\}}\big\} = 0$$

то $\mathrm{Exp}(\mathbf{V}) \leqslant 3$.

3. Полилинейные пространства специального вида

В данном разделе везде предполагается, если это специально не оговорено, что основное поле имеет нулевую характеристику.

Выделим в пространстве P_{2n} подпространство Q_{2n}, порождённое элементами вида

$$\{x_{a_1}, x_{a_2}\} \cdot \{x_{a_3}, x_{a_4}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{a_{2n-1}}, x_{a_{2n}}\}.$$

Тогда данное пространство есть линейная оболочка следующих элементов:

$$Q_{2n} = \langle \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{\tau(2n-1)}, x_{\tau(2n)}\} \mid$$
$$\tau \in \mathrm{S}_{2n},\ \tau(1) < \tau(2),\ \tau(3) < \tau(4),\ \ldots,\ \tau(2n-1) < \tau(2n),$$
$$\tau(1) < \tau(3) < \ldots < \tau(2n-1)\rangle_K.$$

Обозначим через T_{2n} множество перестановок τ из S_{2n}, которые удовлетворяют указанным выше свойствам. Пространство Q_{2n} было введено Д. Фаркашем в [31, 32]. Важность рассмотрения данных пространств показывает следующая теорема.

Теорема 10 [31]. *Пусть* $\mathbf{V}$ *— многообразие алгебр Пуассона над полем нулевой характеристики, в котором выполнено нетривиальное тождество. Тогда в* $\mathbf{V}$ *выполняется нетривиальное тождество вида*

$$\sum_{\tau \in T_{2n}} \alpha_\tau \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{\tau(2n-1)}, x_{\tau(2n)}\} = 0, \quad \alpha_\tau \in K.$$

Определим также подпространство R_n в P_n, порождённое элементами вида

$$\{x_{a_1}, x_{a_2}\} \cdot \{x_{a_3}, x_{a_4}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{a_{2m-1}}, x_{a_{2m}}\} \cdot x_{\alpha_{2m+1}} \cdot \ldots \cdot x_{\alpha_n}.$$

Тогда пространство R_n является линейной оболочкой элементов вида

$$\begin{gathered}R_n = \langle \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \{x_{\tau(3)}, x_{\tau(4)}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{\tau(2m-1)}, x_{\tau(2m)}\} \cdot x_{\tau(2m+1)} \cdot \ldots \cdot x_{\tau(n)} \mid \\ \tau \in \mathrm{S}_n,\ 0 \leqslant 2m \leqslant n,\ \tau(1) < \tau(2),\ \tau(3) < \tau(4),\ \ldots,\ \tau(2m-1) < \tau(2m), \\ \tau(1) < \tau(3) < \ldots < \tau(2m-1),\ \tau(2m+1) < \tau(2m+2) < \ldots < \tau(n) \rangle_K.\end{gathered}$$

Для произвольного многообразия алгебр Пуассона $\mathbf{V}$ обозначим через $q_{2n}(\mathbf{V})$ и $r_n(\mathbf{V})$ размерности пространств $Q_{2n}(\mathbf{V})$ и $R_n(\mathbf{V})$:

$$Q_{2n}(\mathbf{V}) = Q_{2n}/\big(Q_{2n} \cap \mathrm{Id}(\mathbf{V})\big), \quad q_{2n}(\mathbf{V}) = \dim Q_{2n}(\mathbf{V}),$$
$$R_n(\mathbf{V}) = R_n/\big(R_n \cap \mathrm{Id}(\mathbf{V})\big), \quad r_n(\mathbf{V}) = \dim R_n(\mathbf{V}).$$

Теорема 11 [19]. *Пусть $\mathbf{V}$ — нетривиальное многообразие алгебр Пуассона над произвольным полем. Тогда*

1) *либо $r_n(\mathbf{V}) \geqslant 2^{n-1}$ для любого n,*
2) *либо найдётся такой многочлен $a_{2N}x^{2N} + \ldots + a_1x + a_0$ степени $2N \geqslant 0$ из кольца $\mathbb{Q}[x]$, что для любого $n \geqslant 2N$ будет выполнено равенство*

$$r_n(\mathbf{V}) = a_{2N}n^{2N} + \ldots + a_1n + a_0, \quad a_{2N} \neq 0,$$

причём

2а) *либо $r_n(\mathbf{V}) \geqslant 1 + n(n-1)/2$, $n \geqslant 1$, и*

$$\frac{1}{(2N)!} \leqslant a_{2N} \leqslant \frac{1}{N!2^N},$$

2б) *либо $r_n(\mathbf{V}) = 1$ для любого n.*

Из теоремы 7 вытекает, что последовательность $\{r_n(G_{2N})\}_{n\geqslant 1}$ достигает нижней границы полиномиального роста степени $2N$, при этом $a_{2N} = 1/2N)!$. Из следствия 5 вытекает, что многообразие $\mathrm{var}(G_2)$ является наименьшим многообразием среди всех многообразий алгебр Пуассона $\mathbf{V}$, у которых последовательность $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ растёт не ниже полинома, т. е. если для некоторого многообразия $\mathbf{V}$ последовательность $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ растёт не ниже полинома, то $G_2 \in \mathbf{V}$.

Заметим, что существует бесконечно много попарно различных многообразий алгебр Пуассона $\mathbf{V}$, у которых последовательность $\{r_n(\mathbf{V})\}_{n\geqslant 1}$ достигает нижней границы полиномиального роста. Пусть $\mathrm{SU}_N = \mathrm{SU}_N(K)$ — алгебра строго верхнетреугольных матриц порядка N над полем K и операцией умножения $\wedge$. В векторном пространстве $\mathrm{SU}_N \oplus K$ над полем K определим две операции умножения $\cdot$ и $\{\,,\,\}$, как и в предложении 5. Полученную алгебру Пуассона $(\mathrm{SU}_N \oplus K, \cdot, \{\,,\,\}, K)$ обозначим через PSU_N.

Предложение 7 [26]. *В случае основного поля нулевой характеристики для алгебры Пуассона PSU_N верны следующие утверждения:*

i) *полилинейные тождества*

$$\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0, \quad \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} = 0$$

порождают идеал тождеств алгебры PSU_N;

ii) $q_2(\mathrm{PSU}_N) = 1$, $q_{2n}(\mathrm{PSU}_N) = 0$, $n > 1$,

$$r_n(\mathrm{PSU}_N) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}, \quad n \geqslant 1,$$

$$c_n(\mathrm{PSU}_N) = 1 + \sum_{k=2}^{\min\{n, N-1\}} C_n^k \cdot (k-1)!, \quad n \geqslant 1.$$

Пусть $\sigma \in \mathrm{S}_n$. Так как действие $\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}$ естественным образом продолжается до автоморфизма свободной алгебры Пуассона $F(X)$, то пространство $R_n(\mathbf{V})$ можно рассматривать как S_n-модуль, а пространство $Q_{2n}(\mathbf{V})$ — как S_{2n}-модуль. Тогда можно определить соответствующие последовательности кохарактеров $\chi_n^R(\mathbf{V})$ и $\chi_{2n}^Q(\mathbf{V})$, $n \geqslant 1$.

Если λ — разбиение некоторого числа n, то будем обозначать через λ' сопряжённое разбиение к λ. Пусть n — некоторое чётное число. Обозначим через $\lambda \models n$ разбиение числа n, при котором соответствующая диаграмма Юнга имеет только чётные длины столбцов.

Введём в рассмотрение следующие полиномы:

$$\mathrm{St}_{2m} = \mathrm{St}_{2m}(x_1, \ldots, x_{2m}) = \sum_{\tau \in T_{2m}} (-1)^\tau \{x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}\} \cdot \ldots \cdot \{x_{\tau(2m-1)}, x_{\tau(2m)}\},$$

$$\mathrm{St}_{2m+1} = \mathrm{St}_{2m+1}(x_1, \ldots, x_{2m+1}) = \sum_{j=1}^{2m+1} (-1)^{j+1} \mathrm{St}_{2m}(x_1, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{2m+1}) \cdot x_j.$$

Теорема 12 [37]. *Пусть $F = F(X)$ — свободная алгебра Пуассона счётного ранга над полем нулевой характеристики. Тогда для любого натурального n верны равенства*

$$\chi_n^R(F) = \sum_{\lambda \vdash n} \chi_\lambda, \quad \chi_{2n}^Q(F) = \sum_{\lambda \models 2n} \chi_\lambda.$$

Теорема 13 [37]. *Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие алгебр Пуассона над полем нулевой характеристики. Тогда для любого n верно следующее.*

i) $\chi_n^R(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(\mathbf{V}) \chi_\lambda$, *где все $m_\lambda(\mathbf{V})$ принадлежат $\{0, 1\}$. Более того, если*

$$f_\lambda = \mathrm{St}_{m_1} \cdot \mathrm{St}_{m_2} \cdot \ldots \cdot \mathrm{St}_{m_k},$$

то $m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$ тогда и только тогда, когда f_λ — тождество в $\mathbf{V}$.

ii) $\chi_{2n}^Q(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \models 2n} \tilde{m}_\lambda(\mathbf{V}) \chi_\lambda$, *где все $\tilde{m}_\lambda(\mathbf{V})$ принадлежат $\{0, 1\}$. Более того, если*

$$f_\lambda = \mathrm{St}_{m_1} \cdot \mathrm{St}_{m_2} \cdot \ldots \cdot \mathrm{St}_{m_k},$$

где $\lambda' = (m_1, \ldots, m_k)$ и все m_i чётные, то $\tilde{m}_\lambda(\mathbf{V}) = 0$ тогда и только тогда, когда f_λ — тождество в $\mathbf{V}$.

Определим верхнюю и нижнюю экспоненты для последовательности $q_{2n}(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \ldots$, следующим образом:

$$\underline{\mathrm{Exp}}^{Q}(\mathbf{V}) = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[2n]{q_{2n}(\mathbf{V})}, \quad \overline{\mathrm{Exp}}^{Q}(\mathbf{V}) = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{q_{2n}(\mathbf{V})}.$$

В случае равенства верхней и нижней экспоненты обозначим $\mathrm{Exp}^{Q}(\mathbf{V}) = \underline{\mathrm{Exp}}^{Q}(\mathbf{V})$.

Теорема 14 [13]. *Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие алгебр Пуассона над полем нулевой характеристики, в котором выполняется нетривиальное тождество. Тогда существуют такие целые константы d, N, α и β, что для любого $n \geqslant N$ будет выполняться неравенство*

$$n^{\alpha} d^{2n} \leqslant q_{2n}(\mathbf{V}) \leqslant n^{\beta} d^{2n}.$$

Теорема 15 [13]. *Для многообразия алгебр Пуассона $\mathbf{V}$ над полем нулевой характеристики следующие условия эквивалентны*:

1) *последовательность $q_{2n}(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена полиномом*;
2) *ненулевые подмодули в $Q_{2n}(\mathbf{V})$ соответствуют лишь диаграммам Юнга, у которых число клеток вне первого столбца ограничено некоторой константой, не зависящей от n*;
3) *существует такое N, что в многообразии $\mathbf{V}$ выполняются тождества $\mathrm{St}_2^{2N} = 0$ и $\mathrm{St}_{2N}^2 = 0$*;
4) *существует такое N и такой многочлен $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, что для любого $n \geqslant N$ выполняется равенство $q_{2n}(\mathbf{V}) = f(2n)$.*

Теорема 16 [16]. *Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие алгебр Пуассона над полем нулевой характеристики, в котором выполнено нетривиальное тождество. Тогда существует такое целое число $p \geqslant 1$ и такие константы N, α и β, что для любого $n \geqslant N$ будет выполняться следующее двойное неравенство*:

$$n^{\alpha} p^{n} \leqslant r_n(\mathbf{V}) \leqslant n^{\beta} p^{n},$$

причём $p = d + 1$, где d — значение экспоненты для многообразия $\mathbf{V}$ из теоремы 14.

Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое многообразие алгебр Пуассона, A — некоторая алгебра Пуассона. Будем писать $A \notin_R \mathbf{V}$, если найдётся $f \in R_n \cap \mathrm{Id}(\mathbf{V})$ для некоторого n, такое что тождество $f = 0$ не выполняется в алгебре A.

Напомним, что G — алгебра Грассмана—Пуассона, H_2 — алгебра Гамильтона.

Теорема 17 [16,37]. *Для многообразия алгебр Пуассона $\mathbf{V}$ в случае основного поля нулевой характеристики следующие условия эквивалентны*:

1) *последовательность $r_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена полиномом*;
2) *существует такое число N, что $q_{2n}(\mathbf{V}) = 0$ для любого $n \geqslant N$*;
3) *существует такое N, что в многообразии $\mathbf{V}$ выполнены тождества $\mathrm{St}_2^N = 0$ и $\mathrm{St}_{2N} = 0$*;

4) *существует такая константа C, что в сумме*

$$\chi_n^R(\mathbf{V}) = \chi_n\big(R_n(\mathbf{V})\big) = \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda(\mathbf{V})\chi_\lambda \tag{8}$$

$m_\lambda(\mathbf{V}) = 0$, если выполнено условие $n - \lambda_1 > C$;

5) *существует такое N и такой многочлен $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$, что для любого $n \geqslant N$ выполнено равенство $r_n(\mathbf{V}) = f(n)$;*
6) *последовательность кодлин $l_n^R(\mathbf{V}) = \sum\limits_{\lambda\vdash n} m_\lambda(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \ldots$, ограничена некоторой константой, где кратности $m_\lambda(\mathbf{V})$ определяются из разложения* (8);
7) *$G \notin \mathbf{V}$, $H_2 \notin_R \mathbf{V}$.*

4. Взаимосвязь алгебр Пуассона и алгебр Ли «на языке» тождеств

В данном разделе исследуются многообразия алгебр Пуассона, идеалы тождеств которых содержат тождество $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$. Исследуется взаимосвязь таких многообразий с многообразиями алгебр Ли. Будет показано, что из любой алгебры Ли можно построить алгебру Пуассона с похожими свойствами исходной алгебры.

Обозначим через $\mathrm{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\})$ идеал тождеств в свободной алгебре Пуассона $F(X)$, порождённый элементом $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}$.

Теорема 18 [21]. *Пусть $\mathbf{V}_L$ — некоторое многообразие алгебр Ли над произвольным полем K, определённое системой тождеств*

$$\{f_i = 0 \mid i \in I,\ f_i \in L_{\geqslant 2}(X)\}.$$

Пусть также имеется совокупность элементов

$$g_j \in \mathrm{Id}(\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\}), \quad j \in J, \quad |J| > 0.$$

Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие алгебр Пуассона, определённое системой тождеств

$$\{f_i = 0,\ g_j = 0 \mid i \in I,\ j \in J\}.$$

Тогда будут верны следующие условия:

i) $\mathrm{Id}(\mathbf{V}_L) = \mathrm{Id}(\mathbf{V}) \cap L_{\geqslant 2}(X)$;
ii) $B_n(\mathbf{V}) = B_n(\mathbf{V}_L)$;
iii) $c_n(\mathbf{V}) \geqslant 1 + \sum\limits_{k=2}^{n} C_n^k \cdot \dim B_k(\mathbf{V}_L)$;
iv) *если $|I| = 0$, то для любого $n \geqslant 2$*

$$c_n(\mathbf{V}) \geqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \cdot (k-1)! \geqslant [(n-1)! \cdot e],$$

где e — основание натурального логарифма, $[\ ]$ — целая часть числа.

Теорема 19 [21]. *Пусть $\mathbf{V}_L$ — некоторое многообразие алгебр Ли над произвольным полем K, определённое системой тождеств*

$$\{f_i = 0 \mid i \in I,\ f_i \in L_{\geqslant 2}(X)\}.$$

Пусть также $\mathbf{V}$ — многообразие алгебр Пуассона, определённое тождествами

$$f_i = 0, \quad i \in I, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0.$$

Тогда будут верны следующие утверждения.

1. $\Gamma_n(\mathbf{V}) = B_n(\mathbf{V}) = B_n(\mathbf{V}_L)$ *для любого $n \geqslant 2$, где равенства приведены с точностью до изоморфизма векторных пространств.*
2. *Пусть элементы*

   $$u_s^n(x_1, \ldots, x_n), \quad s = 1, \ldots, c_n^L(\mathbf{V}_L),$$

   образуют базис пространства $B_n(\mathbf{V}_L)$, $n \geqslant 2$. Тогда полилинейные элементы

   $$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n, \quad x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_{n-k}} \cdot u_s^k(x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}),$$
   $$k = 2, \ldots, n, \quad s = 1, \ldots, c_k^L(\mathbf{V}_L), \quad i_1 < \ldots < i_{n-k}, \quad j_1 < \ldots < j_k,$$

   будут образовывать базис пространства $P_n(\mathbf{V})$.
3. *Для любого n выполнено равенство*

   $$c_n(\mathbf{V}) = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \cdot \dim B_k(\mathbf{V}_L).$$

4. *Если существует $\mathrm{Exp}(\mathbf{V}_L)$, то $\mathrm{Exp}(\mathbf{V}) = \mathrm{Exp}(\mathbf{V}_L) + 1$, более того, если найдутся такие действительные числа $d \geqslant 0$, α и β, что для всех достаточно больших n выполнено двойное неравенство*

   $$n^\alpha d^n \leqslant c_n^L(\mathbf{V}_L) \leqslant n^\beta d^n,$$

   то найдутся такие γ и δ, что для всех достаточно больших n будет выполнено двойное неравенство

   $$n^\gamma (d+1)^n \leqslant c_n(\mathbf{V}) \leqslant n^\delta (d+1)^n.$$

5. *Если поле K бесконечно и некоторая алгебра Ли A_L порождает многообразие $\mathbf{V}_L$, то алгебра Пуассона $A = A_L \oplus K$ с операциями* (5) *будет порождать многообразие $\mathbf{V}$.*
6. *Если поле K бесконечно, $|I| < +\infty$ и многообразие $\mathbf{V}_L$ шпехтово, то многообразие $\mathbf{V}$ также будет шпехтовым.*
7. *Пусть поле K бесконечно и $\mathbf{W}$ — некоторое собственное подмногообразие в $\mathbf{V}$. Тогда идеал тождеств $\mathrm{Id}(\mathbf{W}) \cap L_{\geqslant 2}(X)$ определяет некоторое собственное подмногообразие в $\mathbf{V}_L$.*
8. *Многообразие $\mathbf{V}_L$ нильпотентно тогда и только тогда, когда рост многообразия $\mathbf{V}$ ограничен полиномом.*

Обозначим через $\mathbf{W}_m$ многообразие алгебр Пуассона, порождённое полилинейным тождеством

$$\{x_1, y_1\} \cdot \ldots \cdot \{x_m, y_m\} = 0.$$

Из теоремы 18 следует, что рост многообразия $\mathbf{W}_2$ является сверхэкспоненциальным, причём для многообразия $\mathbf{W}_2$ над произвольным полем для любого $n \geqslant 2$ выполнено

$$c_n(\mathbf{W}_2) = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_n^k \cdot (k-1)! \geqslant [(n-1)! \cdot e].$$

Поэтому функция сложности для многообразий $\mathbf{W}_m$, $m \geqslant 2$, не является целой функцией комплексного аргумента.

Теорема 20 [21]. *В случае основного поля нулевой характеристики многообразие алгебр Пуассона, определённое тождествами*

$$\big\{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4, x_5, x_6\}\big\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0,$$

имеет почти экспоненциальный рост.

Предложение 8 [21]. *В случае основного поля нулевой характеристики многообразие алгебр Пуассона, определённое тождествами*

$$\big\{\{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{2s+1}, x_{2s+2}\}\big\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0,$$

является шпехтовым.

Пусть $\mathbf{A}^2$ — многообразие всех метабелевых алгебр Ли, т. е. многообразие, определяемое тождеством $\big[[x_1, x_2], [x_3, x_4]\big] = 0$. Обозначим через $M = F_3(\mathbf{A}^2)$ относительно свободную алгебру этого многообразия с множеством свободных образующих $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Рассмотрим линейное преобразование d векторного пространства $\langle y_1, y_2, y_3\rangle_K$, определённое правилом

$$d(y_1) = y_2, \quad d(y_2) = y_3, \quad d(y_3) = y_1.$$

Хорошо известно, что в этом случае d продолжается до дифференцирования алгебры M, которое обозначим той же буквой. Дифференцирование d порождает в алгебре всех дифференцирований одномерную подалгебру $\langle d\rangle$, поэтому можно построить полупрямое произведение $L = M\lambda\langle d\rangle$ алгебр M и $\langle d\rangle$. В [2, 38] показано, что экспонента многообразия $\operatorname{var} L$ существует, причём выполнено следующее строгое двойное неравенство:

$$3 < \operatorname{Exp}(\operatorname{var} L) < 4.$$

Данный пример и теорема 19 показывают, что в случае многообразий алгебр Пуассона существуют алгебры с подобными свойствами.

Предложение 9. *Пусть* $\operatorname{char} K = 0$ *и* $PL = L \oplus K$ *— алгебра Пуассона с операциями* (5). *Тогда*

$$4 < \operatorname{Exp}(\operatorname{var}\ PL) < 5.$$

5. Алгебры Пуассона с экстремальными свойствами

До конца раздела предполагается, что основное поле имеет нулевую характеристику. На сегодняшний день известно всего пять многообразий алгебр Ли почти полиномиального роста. Для однородности записи обозначим их через $\mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$, $\mathbf{V}_4$.

$\mathbf{V}_0 = \mathrm{var}(\mathrm{sl}_2)$ — многообразие алгебр Ли, порождённое алгеброй матриц порядка 2 со следом 0. Это единственное известное многообразие алгебр Ли почти полиномиального роста, не являющееся разрешимым [6].

Многообразие алгебр Ли $\mathbf{V}_1 = \mathbf{N}_2\mathbf{A}$ определяется тождеством

$$\big[[x_1, x_2], [x_3, x_4], [x_5, x_6]\big] = 0$$

(см. [8]).

Многообразие $\mathbf{V}_2$ построено И. Б. Воличенко [3,4]. Оно порождается алгеброй Ли

$$A_L = \begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где Λ — бесконечномерная алгебра Грассмана, а 0 — нулевая алгебра. Это многообразие является наименьшим в классе многообразий алгебр Ли, в которых не выполняется ни одно лиево стандартное тождество.

Многообразия $\mathbf{V}_3$ и $\mathbf{V}_4$ построены С. П. Мищенко [9] следующим образом. Рассмотрим кольцо многочленов $R = K[t]$ от переменной t, трёхмерную нильпотентную алгебру Гейзенберга N_3 с базисом $\{a, b, c\}$ и таблицей умножения $[b, a] = c$, $[a, c] = [b, c] = 0$ и двумерную метабелеву (разрешимую ступени 2) алгебру M_2 с базисом $\{h, e\}$ и таблицей умножения $[h, e] = h$. Гомоморфизмы $\sigma\colon N_3 \to \mathrm{Der}\, R$ и $\varphi\colon M_2 \to \mathrm{Der}\, R$ определяются следующим образом:

$$\sigma(e)f(t) = tf'(t), \quad \sigma(a)f(t) = tf(t),$$
$$\varphi(a)f(t) = f'(t), \quad \varphi(b)f(t) = tf(t), \quad \varphi(c)f(t) = f(t).$$

Полупрямые произведения алгебр $N_L = R \leftthreetimes N_3$, $M_L = R \leftthreetimes M_2$ порождают соответственно многообразия $\mathbf{V}_3$ и $\mathbf{V}_4$.

Обозначим через $\mathrm{sl}_2(K) \oplus K$, $A_L \oplus K$, $M_L \oplus K$ и $N_L \oplus K$ алгебры Пуассона с операциями (5), а через $\mathbf{V}_0^P$, $\mathbf{V}_2^P$, $\mathbf{V}_3^P$ и $\mathbf{V}_4^P$ — многообразия алгебр Пуассона, порождённые соответственно алгебрами $\mathrm{sl}_2(K) \oplus K$, $A_L \oplus K$, $M_L \oplus K$ и $N_L \oplus K$. Также обозначим через $\mathbf{V}_1^P$ многообразие алгебр Пуассона, порождённое тождествами

$$\big\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_6\}\big\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0.$$

Теорема 21 [20]. $\mathrm{Exp}(\mathbf{V}_0^P) = 4$, $\mathrm{Exp}(\mathbf{V}_1^P) = 3$, $\mathrm{Exp}(\mathbf{V}_2^P) = 3$, $\mathrm{Exp}(\mathbf{V}_3^P) = 4$, $\mathrm{Exp}(\mathbf{V}_4^P) = 3$. *Пусть $\mathbf{V}$ — некоторое собственное подмногообразие одного из многообразий $\mathbf{V}_i^P$, $i = 0, \ldots, 4$. Тогда рост многообразия $\mathbf{V}$ либо ограничен полиномом, либо найдётся такое β, что для любого n будет выполнено неравенство*

$$2^{n-1} \leqslant c_n(\mathbf{V}) \leqslant n^\beta 2^n.$$

Теорема 22 [20]. *Многообразие $\mathbf{V}_2^P$ является наименьшим многообразием алгебр Пуассона, в котором не выполнено ни одно лиево стандартное тождество.*

6. Минимальные алгебры Пуассона

В данном разделе приводятся два класса алгебр Пуассона с экстремальными свойствами.

Важность изучения пространств $\Gamma_n(\mathbf{V})$ показано в предложении 4: в случае основного поля нулевой характеристики идеал тождеств $\mathrm{Id}(\mathbf{V})$ произвольного многообразия алгебр Пуассона $\mathbf{V}$ порождается последовательностью пространств $\Gamma_n \cap \mathrm{Id}(\mathbf{V})$, $n \geqslant 1$.

Далее нам понадобится следующее несложное утверждение, которое нетрудно проверить.

Предложение 10. *Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра с операцией умножения $\wedge$ над произвольным полем K. Рассмотрим декартово произведение $C = A \times A \times K$, в котором определим операцию сложения и две операции умножения $\cdot$ и $\{\,,\,\}$ элементов множества C:*

$$\begin{aligned}
&(x_1, x_2, \alpha) + (y_1, y_2, \beta) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \alpha + \beta),\\
&(x_1, x_2, \alpha) \cdot (y_1, y_2, \beta) = (\beta x_1 + \alpha y_1, \beta x_2 + \alpha y_2, \alpha\beta),\\
&\{(x_1, x_2, \alpha), (y_1, y_2, \beta)\} = ([x_1, y_1], x_1 \wedge y_2 - y_1 \wedge x_2, 0),
\end{aligned}$$

где $[x_1, y_1] = x_1 \wedge y_1 - y_1 \wedge x_1$, $(x_1, x_2, \alpha), (y_1, y_2, \beta) \in C$. Тогда полученная алгебра C — алгебра Пуассона, в которой выполнено тождество $\{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0$.

Пусть, как и ранее, Λ — бесконечномерная алгебра Грассмана с единицей, Λ_{2k} — алгебра Грассмана с единицей и $2k$ образующими элементами $\{e_1, \ldots, e_{2k}\}$. Обозначим через $Q = \Lambda \times \Lambda \times K$, $Q_{2k} = \Lambda_{2k} \times \Lambda_{2k} \times K$ алгебры Пуассона, построенные с помощью предложения 10.

Для удобства записи элементы, содержащие кососимметрический набор, будем записывать без знака суммирования, помечая переменные этого набора чертой сверху. Например, лиев стандартный полином примет вид

$$\{x_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\} = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} (-1)^\sigma \{x_0, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\}.$$

Под lin будем подразумевать полную линеаризацию полинома.

Теорема 23 [24]. *В случае основного поля нулевой характеристики для алгебры Пуассона Q_{2k}, $k \geqslant 1$, верны следующие утверждения:*

1) *идеал тождеств $\mathrm{Id}(Q_{2k})$ порождается тождествами*

$$\big\{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_1, x_3\}\big\} = 0, \quad \big\{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_4, x_5, x_6\}\big\} = 0,$$
$$\big\{\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \ldots, \{x_{k+2}, y_{k+2}\}\big\} = 0, \quad \{x_1, x_2\} \cdot \{x_3, x_4\} = 0;$$

2) *для любого* $n \geqslant 2k+3$ *полилинейные элементы от переменных* $x_1, \ldots, x_n$

$$\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}, \{x_{j_1}, x_{j_2}\}, \ldots, \{x_{j_{2s-1}}, x_{j_{2s}}\}\},$$
$$r + 2s = n, \quad i_1 > i_2 < \ldots < i_r, \quad j_1 < j_2 < \ldots < j_{2s}, \quad 0 \leqslant s \leqslant k, \quad r \geqslant 3,$$

образуют базис пространства $\Gamma_n(Q_{2k})$;

3) *размерности пространств* $\Gamma_n(Q_{2k})$ *вычисляются по формуле*

$$\gamma_n(Q_{2k}) = \begin{cases} (n-2)2^{n-2}, & 3 \leqslant n \leqslant 2k+2, \\ \sum\limits_{i=0}^{k} (n-2i-1)C_n^{2i}, & n \geqslant 2k+3; \end{cases}$$

причём для любого $n \geqslant 2k+3$

$$\gamma_n(Q_{2k}) = \gamma_n(Q_{2k-2}) + (n-2k-1)C_n^{2k} \approx \frac{n^{2k+1}}{(2k)!}, \quad n \to \infty,$$

где C_n^k — *число сочетаний из* n *по* k;

4) *для кохарактеров пространств* $\Gamma_n(Q_{2k})$ *верно следующее равенство*:

$$\chi_n^{\Gamma}(Q_{2k}) = \begin{cases} \chi_n^{\Gamma}(Q), & 1 \leqslant n \leqslant 2k+2, \\ \sum\limits_{i=1}^{2k+1} \chi_{(n-i,1^i)} + \sum\limits_{i=2}^{2k+1} \chi_{(n-i,2,1^{i-2})}, & n \geqslant 2k+3, \end{cases}$$

причём для любого $n \geqslant 2k+3$

$$\chi_n^{\Gamma}(Q_{2k}) = \chi_n^{\Gamma}(Q_{2k-2}) + \chi_{(n-2k,1^{2k})} + \chi_{(n-2k-1,1^{2k+1})} + \\ + \chi_{(n-2k,2,1^{2k-2})} + \chi_{(n-2k-1,2,1^{2k-1})};$$

5) *для любого* $n \geqslant 2k+3$ *пространство* $\Gamma_n(Q_{2k})$ *имеет следующее разложение на неприводимые* S_n-*модули*:

$$\Gamma_n(Q_{2k}) = \Gamma_n(Q_{2k-2}) \oplus K\mathrm{S}_n\bigl(\mathrm{lin}\bigl\{\bar{x}_1, x_1^{\{n-2k-1\}}, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{2k+1}\bigr\}\bigr) \oplus \\ \oplus K\mathrm{S}_n\bigl(\mathrm{lin}\bigl\{\bar{x}_1, x_1^{\{n-2k-2\}}, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{2k+2}\bigr\}\bigr) \oplus \\ \oplus K\mathrm{S}_n\bigl(\mathrm{lin}\bigl\{x_2, x_1^{\{n-2k-1\}}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{2k}\bigr\}\bigr) \oplus \\ \oplus K\mathrm{S}_n\bigl(\mathrm{lin}\bigl\{x_2, x_1^{\{n-2k-2\}}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{2k+1}\bigr\}\bigr) = \\ = \bigoplus_{i=1}^{2k+1} K\mathrm{S}_n\bigl(\mathrm{lin}\bigl\{\bar{x}_1, x_1^{\{n-i-1\}}, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{i+1}\bigr\}\bigr) \oplus \\ \oplus \bigoplus_{i=2}^{2k+1} K\mathrm{S}_n\bigl(\mathrm{lin}\bigl\{x_2, x_1^{\{n-i-1\}}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_i\bigr\}\bigr),$$

причём элемент

$$\bigl\{\bar{x}_1, x_1^{\{n-i-1\}}, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{i+1}\bigr\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2k+1,$$

соответствует разбиению $(n-i,1^i)$, *элемент*

$$\{x_2, x_1^{\{n-i-1\}}, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_i\}, \quad 2 \leqslant i \leqslant 2k+1,$$

соответствует разбиению $(n-i,2,1^{i-2})$;

6) *если* $\mathbf{W}$ — *некоторое собственное подмногообразие в* $\mathrm{var}(Q_{2k})$, *то найдётся такой многочлен* $f(x)$ *с рациональными коэффициентами, зависящий от* $\mathbf{W}$, *что для всех достаточно больших* n *выполнено неравенство* $\gamma_n(\mathbf{W}) \leqslant f(n)$, *причём* $\deg f(x) < 2k+1$.

Пусть N_k — ассоциативная алгебра, описанная выше. Обозначим через $R_k = N_k \times N_k \times K$ алгебру Пуассона, построенную с помощью предложения 10.

Теорема 24 [24]. *В случае основного поля нулевой характеристики для алгебры Пуассона* R_k, $k \geqslant 3$, *верны следующие утверждения*:

1) *идеал тождеств* $\mathrm{Id}(R_k)$ *порождается полилинейными тождествами*

$$\{\{x_1,x_2\},\{x_3,x_4\},\{x_5,x_6\}\} = 0, \quad \{x_1,x_2\}\cdot\{x_3,x_4\} = 0,$$
$$\{\{x_1,x_2,\ldots,x_k\},\{y_1,y_2,\ldots,y_k\}\} = 0;$$

2) *для любого* $n \geqslant 1$ *полилинейные элементы от переменных* $x_1,\ldots,x_n$

$$\begin{aligned}
&\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\}, \quad i_1 > i_2 < \ldots < i_n,\\
&\{\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}\}, \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_t}\}\},\\
&\quad s+t=n, \quad i_1 > i_2 < \ldots < i_s, \quad j_1 > j_2 < \ldots < j_t,\\
&\quad 2 \leqslant s \leqslant t \leqslant n-2 \ \ (s=t \Rightarrow i_2 < j_2), \quad s<k,
\end{aligned}$$

образуют базис пространства $\Gamma_n(R_k)$;

3) *размерности пространств* $\Gamma_n(R_k)$ *вычисляются по формуле*

$$\gamma_n(R_k) = \begin{cases} (n-1)!, & 1 \leqslant n \leqslant 4,\\ (n-1)(2^{n-3}(n-4)+2), & 5 \leqslant n \leqslant 2k-2,\\ (n-1) + \sum\limits_{i=2}^{k-1}(i-1)(n-i-1)C_n^i, & n \geqslant 2k-1, \end{cases}$$

причём для любого $n \geqslant 2k-1$

$$\gamma_n(R_k) = \gamma_n(R_{k-1}) + (k-2)(n-k)C_n^{k-1} \approx \frac{k-2}{(k-1)!}n^k, \quad n \to \infty;$$

4) *если* $\mathbf{W}$ — *некоторое собственное подмногообразие в* $\mathrm{var}(R_k)$, *то найдётся такой многочлен* $f(x) = a_0 + \ldots + a_k x^k$ *с рациональными коэффициентами, зависящий от* $\mathbf{W}$, *что для всех достаточно больших* n *выполнено неравенство* $\gamma_n(\mathbf{W}) \leqslant f(n)$, *причём*

$$a_k \leqslant \frac{k-3}{(k-1)!}.$$

Литература

[1] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985.

[2] Верёвкин А. Б., Зайцев М. В., Мищенко С. П. Достаточное условие совпадения нижней и верхней экспонент многообразия линейных алгебр // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2011. — № 2. — С. 36—39.

[3] Воличенко И. Б. Об одном многообразии алгебр Ли, связанном со стандартными тождествами // Весцi АН БССР: Сер. фiз. матем. наук. — 1980. — № 1. — С. 23—30.

[4] Воличенко И. Б. Об одном многообразии алгебр Ли, связанном со стандартными тождествами // Весцi АН БССР: Сер. фiз. матем. наук. — 1980. — № 2. — С. 22—29.

[5] Воличенко И. Б. Многообразие алгебр Ли с тождеством $\big[[X_1, X_2, X_3], [X_4, X_5, X_6]\big] = 0$ над полем характеристики нуль // Сиб. матем. журн. — 1984. — Т. 25, № 3. — С. 40—54.

[6] Дренски В. С. Представления симметрической группы и многообразия линейных алгебр // Матем. сб. — 1981. — Т. 115, № 1 (5). — С. 98—115.

[7] Кемер А. Р. Шпехтовость Т-идеалов со степенным ростом коразмерностей // Сиб. матем. журн. — 1978. — Т. 19, № 1. — С. 54—69.

[8] Мищенко С. П. Многообразия алгебр Ли с двуступенно нильпотентным коммутантом // Весцi АН БССР: Сер. фiз. матем. наук. — 1987. — № 6. — С. 39—43.

[9] Мищенко С. П. О многообразиях разрешимых алгебр Ли // ДАН СССР. — 1990. — Т. 313, № 6. — С. 1345—1348.

[10] Петроградский В. М. Рост полинильпотентных многообразий алгебр Ли и быстро растущие целые функции // Матем. сб. — 1997. — Т. 188, № 6. — С. 119—138.

[11] Петроградский В. М. О численных характеристиках подмногообразий трёх многообразий алгебр Ли // Матем. сб. — 1999. — Т. 190, № 6. — С. 111—126.

[12] Размыслов Ю. П. Тождества алгебр и их представлений. — М.: Наука, 1989.

[13] Рацеев С. М. Рост и кодлина пространств специального вида многообразий алгебр Пуассона // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. рег. — 2006. — Т. 26, № 5. — С. 125—135.

[14] Рацеев С. М. Рост некоторых многообразий алгебр Лейбница // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2006. — Т. 46, № 6/1. — С. 70—77.

[15] Рацеев С. М. Оценки роста многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2010. — Т. 78, № 4. — С. 65—72.

[16] Рацеев С. М. Рост в алгебрах Пуассона // Алгебра и логика. — 2011. — Т. 50, № 1. — С. 68—88.

[17] Рацеев С. М. Тождества в многообразиях, порождённых алгебрами верхнетреугольных матриц // Сиб. матем. журн. — 2011. — Т. 52, № 2. — С. 416—429.

[18] Рацеев С. М. Эквивалентные условия полиномиальности роста многообразий алгебр Пуассона // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2012. — Т. 67, № 5. — С. 8—13.

[19] Рацеев С. М. Алгебры Пуассона полиномиального роста // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54, № 3. — С. 700—711.

[20] Рацеев С. М. О некоторых алгебрах Пуассона с экстремальными свойствами // Науч. ведомости БелГУ. Математика. Физика. — 2013. — № 5. — С. 107—110.

[21] Рацеев С. М. Взаимосвязь алгебр Пуассона и алгебр Ли на языке тождеств // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96, № 4. — С. 567—577.

[22] Рацеев С. М. О минимальных алгебрах Пуассона // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2015. — № 11. — С. 64—72.

[23] Рацеев С. М. Об алгебрах Ли с экстремальными свойствами // Сиб. матем. журн. — 2015. — Т. 56, № 2. — С. 444—454.

[24] Рацеев С. М. О собственных Т-идеалах алгебр Пуассона с экстремальными свойствами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2016. — № 6. — С. 8—16.

[25] Рацеев С. М., Череватенко О. И. Экспоненты некоторых многообразий алгебр Лейбница—Пуассона // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. — 2013. — Т. 104, № 3. — С. 42—52.

[26] Череватенко О. И. О лиево нильпотентных алгебрах Пуассона // Науч. ведомости БелГУ. Сер.: Математика, Физика. — 2012. — Т. 142, № 23. — С. 14—16.

[27] Шестаков И. П. Квантования супералгебр Пуассона и специальность йордановых супералгебр Пуассона // Алгебра и логика. — 1993. — Т. 32, № 5. — С. 572—585.

[28] Drensky V. Relations for the cocharacter sequences of T-ideals // Proc. Int. Conf. on Algebra Honoring A. Malcev. — Providence: Amer. Math. Soc., 1992. — (Contemp. Math.; Vol. 131, pt. 2). — P. 285—300.

[29] Drensky V. Free Algebras and PI-Algebras. Graduate Course in Algebra. — Singapore: Springer, 2000.

[30] Drensky V., Regev A. Exact asymptotic behaviour of the codimensions of some P.I. algebras // Israel J. Math. — 1996. — Vol. 96. — P. 231—242.

[31] Farkas D. R. Poisson polynomial identities // Commun. Algebra. — 1998. — Vol. 26, no. 2. — P. 401—416.

[32] Farkas D. R. Poisson polynomial identities. II // Arch. Math. (Basel). — 1999. — Vol. 72, no. 4. — P. 252—260.

[33] Giambruno A., La Mattina D., Petrogradsky V. M. Matrix algebras of polynomial codimension growth // Israel J. Math. — 2007. — Vol. 158. — P. 367—378.

[34] Giambruno A., Zaicev M. V. Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate // Adv. Math. — 1999. — Vol. 142. — P. 221—243.

[35] Giambruno A., Zaicev M. V. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. — Providence: Amer. Math. Soc., 2005. — (Math. Surveys Monographs; Vol. 122).

[36] La Mattina D. Varieties of almost polynomial growth: classifying their subvarieties // Manuscripta Math. — 2007. — Vol. 123, no. 2. — P. 185—203.

[37] Mishchenko S. P., Petrogradsky V. M., Regev A. Poisson PI algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 2007. — Vol. 359, no. 10. — P. 4669—4694.

[38] Mishchenko S. P., Zaicev M. V. An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent// J. Math. Sci. — 1999. — Vol. 93, no. 6. — P. 977—982.

[39] Petrogradsky V. M. Exponents of subvarieties of upper triangular matrices over arbitrary fields are integral // Serdica Math. J. — 2000. — Vol. 26, no. 2. — P. 167—176.

[40] Regev A. Existence of polynomial identities in $A \otimes B$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 77, no. 6. — P. 1067—1069.