Пересечение степеней топологического радикала Джекобсона и топологическая размерность Крулля

В. В. ТЕНЗИНА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: viktoriach@yandex.ru

УДК 512.556

Ключевые слова: топологические кольца, топологические модули, радикал Джекобсона, радикал Левицкого, размерность Крулля.

Аннотация

В статье доказывается, что топологический радикал Джекобсона кольца в некоторой порядковой степени аннулирует левый модуль с топологической размерностью Крулля над этим кольцом. Даётся оценка этой степени, зависящая от топологической размерности Крулля и дуальной топологической размерности Крулля. Подобная оценка верна для обычного радикала Джекобсона. Также обобщается теорема Левицкого для топологических колец.

Abstract

V. V. Tenzina, The intersection of the powers of the topological Jacobson radical and topological Krull dimension, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 2, pp. 243—252.

In this paper, it is proved that a certain power of the topological Jacobson radical for a ring annihilates a left module having topological Krull dimension over this ring. The estimation of this power depends on the topological Krull dimension and the dual topological Krull dimension. A similar estimation for discrete Jacobson radical holds true. Levitzky's theorem is generalized for topological rings.

Н. Джекобсон в [6] доказал, что радикал Джекобсона нётерова справа кольца в некоторой степени равен нулю, при этом степень идеала определяется для всякого порядкового числа специальным образом. Х. Краузе[7] дал оценку этой степени, зависящую от правой размерности Крулля самого кольца. Во втором разделе данной статьи рассматривается топологический аналог результата Джекобсона для топологического радикала Джекобсона, определённого в [2]. При этом получается обобщение и в смысле дискретных колец. В том же разделе обобщается результат, доказанный в [5], утверждающий, что топологический радикал Бэра любого топологического кольца с левой топологической размерностью Крулля не содержит топологически идемпотентных левых идеалов. В третьем разделе обобщается результат Краузе, при этом рассматриваются

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 2, с. 243—252.

не только топологически нётеровы кольца, но и кольца с левой (правой) топологической размерностью Крулля. В заключительном, четвёртом, разделе доказываются некоторые свойства топологически нётеровых колец. В частности, обобщается теорема Левицкого.

1. Обозначения и определения

В данной работе будем пользоваться следующими обозначениями и соглашениями.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, R — кольцо, $A, B \subseteq R$. Пусть M — левый R-модуль, а C — подмножество в M или в R. Положим

$$A \cdot C = \{a \cdot c \mid a \in A,\ c \in C\},$$
$$AC = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot c_i \;\middle|\; a_i \in A,\ c_i \in C,\ 1 \leqslant i \leqslant k,\ k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Если B — подмножество в топологическом пространстве A, то $[B]_A$ (или просто $[B]$, если нет неопределённости) — замыкание B в A.

Будем рассматривать только отделимые топологические кольца и топологические модули.

Далее везде под R-модулем будем понимать левый R-модуль.

Если I — идеал топологического кольца R, то I рассматриваем как топологическое кольцо с индуцированной топологией. Если к тому же идеал I замкнут, то фактор-кольцо R/I рассматривается как топологическое кольцо с фактор-топологией. Если ρ — замкнутый левый идеал в топологическом кольце R, то под R-модулем R/ρ будем понимать фактор-модуль с фактор-топологией.

Определение 1 [2]. *Топологический радикал Джекобсона* топологического кольца R определяется как множество всех элементов кольца, аннулирующих всякий топологически неприводимый R-модуль, и обозначается через $\operatorname{top} J(R)$.

Определение 2. Под *топологически нётеровым модулем* мы будем понимать модуль, удовлетворяющий условию обрыва возрастающей цепочки замкнутых подмодулей. Тогда естественно можно определить *топологически нётерово слева* (*справа*) *кольцо* как кольцо, удовлетворяющее условию обрыва возрастающей цепочки замкнутых левых (правых) идеалов.

Если размерность Крулля модуля определяется как девиация упорядоченного множества всех подмодулей с упорядочением по включению, то под топологической размерностью Крулля понимается девиация упорядоченного множества всех замкнутых подмодулей с упорядочением по включению.

Определение 3 [4]. Пусть M — топологический R-модуль. *Топологическая размерность Крулля модуля* M ($\operatorname{top} \operatorname{Kdim} M$) определяется при помощи трансфинитной индукции:

1) если $M = \{0\}$, то $\operatorname{top} \operatorname{Kdim} M = -1$;

2) если $\mathrm{top\,Kdim}\, M \not< \alpha$, то $\mathrm{top\,Kdim}\, M = \alpha$ тогда и только тогда, когда не существует бесконечной убывающей цепочки замкнутых подмодулей $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots$, такой что $\mathrm{top\,Kdim}\, M_{i-1}/M_i \not< \alpha$, $i \in \mathbb{N}$;
3) если не существует порядкового числа α, такого что $\mathrm{top\,Kdim}\, M = \alpha$, то считаем, что модуль M не имеет топологической размерности Крулля.

Модули с нулевой топологической размерностью Крулля, т. е. модули, удовлетворяющие условию обрыва убывающей цепочки замкнутых подмодулей, являются *топологически артиновыми*.

Определение 4 [4]. Пусть R — топологическое кольцо. *Левой* (*правой*) *топологической размерностью Крулля* $\mathrm{l\,top\,Kdim}\, R$ ($\mathrm{r\,top\,Kdim}\, R$) этого кольца называется топологическая размерность левого (правого) R-модуля R, т. е. $\mathrm{l\,top\,Kdim}\, R = \mathrm{top\,Kdim}_R\, R$ ($\mathrm{r\,top\,Kdim}\, R = \mathrm{top\,Kdim}\, R_R$).

Если дуальная размерностью Крулля (или N-размерность) модуля определяется как кодевиация упорядоченного множества всех подмодулей с упорядочением по включению, то под дуальной топологической размерностью Крулля понимается кодевиация упорядоченного множества всех замкнутых подмодулей с упорядочением по включению.

Определение 5. Пусть M — топологический R-модуль. *Дуальная топологическая размерность Крулля модуля* M ($\mathrm{top\,Ndim}\, M$) определяется при помощи трансфинитной индукции:

1) если $M = \{0\}$, то $\mathrm{top\,Ndim}\, M = -1$;
2) если $\mathrm{top\,Ndim}\, M \not< \alpha$, то $\mathrm{top\,Ndim} = \alpha$ тогда и только тогда, когда в M не существует бесконечной возрастающей цепочки замкнутых подмодулей $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots$, такой что $\mathrm{top\,Ndim}\, M_{i-1}/M_i \not< \alpha$, $i \in \mathbb{N}$;
3) если не существует порядкового числа α, такого что $\mathrm{top\,Ndim}\, M = \alpha$, то считаем, что модуль M не имеет дуальной топологической размерности Крулля.

В [4] дуальная топологическая размерность Крулля называлась топологической N-размерностью.

Ясно, что всякий топологически нётеров модуль имеет нулевую дуальную топологическую размерность Крулля.

Предложение 3.3. работы [4] утверждает, что модуль имеет топологическую размерность Крулля тогда и только тогда, когда он обладает дуальной топологической размерностью Крулля. В частности, получаем, что всякий топологически нётеров модуль имеет топологическую размерность Крулля (см. [4, предложение 3.4]).

2. Обобщение результата Джекобсона

Пусть R — кольцо с радикалом Джекобсона J. Н. Джекобсон [6] доказал, что если кольцо R нётерово справа, то $J^{(\nu)} = \{0\}$ для некоторого порядкового ν, где для любого порядкового α определяется $J^{(\alpha)} = J^{(\beta)}J$, если $\alpha = \beta + 1$, и $J^{(\alpha)} = \bigcap\limits_{\alpha<\gamma} J^{(\gamma)}$, если α — предельное порядковое число. Рассмотрим следующий топологический аналог этого факта.

Теорема 1. *Пусть R — топологическое кольцо с левой топологической размерностью Крулля, а J — топологический радикал Джекобсона этого кольца. Тогда существует порядковое число ν, такое что $J^{(\nu)} = \{0\}$, где для любого порядкового α определяется $J^{(\alpha)} = [JJ^{(\beta)}]$, если $\alpha = \beta + 1$, и $J^{(\alpha)} = \bigcap\limits_{\gamma<\alpha} J^{(\gamma)}$, если α — предельное порядковое число.*

Будем доказывать более общий результат.

Теорема 2. *Пусть топологическое кольцо R обладает топологическим левым модулем M с топологической размерностью Крулля. Пусть I — левый замкнутый идеал, содержащийся в топологическом радикале Джекобсона $\operatorname{top} J(R)$ кольца R, такой что $[\operatorname{top} J(R)I] = I$. Тогда $IM = \{0\}$.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится одно понятие, связанное с топологической размерностью Крулля.

Определение 6 [4]. Топологический модуль M с топологической размерностью Крулля называется *топологически критическим модулем*, если для любого замкнутого ненулевого подмодуля N в M выполняется $\operatorname{top}\operatorname{Kdim} M/N < \operatorname{top}\operatorname{Kdim} M$.

Доказательство теоремы 2. Для каждого порядкового числа γ определим замкнутое подмножество $S_\gamma(M)$ модуля M. Положим $S_0(M) = \{0\}$. Пусть уже определены все $S_\beta(M)$ для каждого порядкового числа $\beta < \alpha$. Тогда $S_\alpha(M)$ определим следующим образом. Если α — предельное порядковое число, то $S_\alpha(M) = \Big[\bigcup\limits_{\beta<\alpha} S_\beta(M)\Big]$. Иначе существует порядковое число $\alpha - 1$, в этом случае $S_\alpha(M)$ представляет собой замыкание суммы всех замкнутых подмодулей N, таких что фактор-модуль $N/S_{\alpha-1}(M)$ является топологически критическим. Заметим, что $\alpha_1 < \alpha_2$ тогда и только тогда, когда $S_{\alpha_1}(M) \subseteq S_{\alpha_2}(M)$. Существует порядковое число δ, такое что для каждого порядкового числа $\gamma > \delta$ справедливо $S_\gamma(M) = S_\delta(M)$. Так как всякий ненулевой топологический модуль с топологической размерностью Крулля содержит хотя бы один топологически критический подмодуль (см. [4, предложение 3.1]), то $M = S_\delta(M)$.

Пусть утверждение теоремы верно для всех топологических модулей с топологической размерностью Крулля меньше α. Докажем справедливость утверждения теоремы, когда $\operatorname{top}\operatorname{Kdim} M = \alpha$.

Пусть C — замкнутый топологически критический подмодуль M, существование которого следует из [4, предложение 3.1]. Для любого замкнутого подмодуля C', лежащего в C, выполняется $\operatorname{top}\operatorname{Kdim} C/C' < \operatorname{top}\operatorname{Kdim} C \leqslant \alpha$. Тогда по предположению $IC \subseteq C'$. Следовательно, $[IC]$ — минимально замкнутый подмодуль в C и поэтому топологически неприводимый R-модуль. Получаем, что $\operatorname{top} J(R)[JC] = \{0\}$. Следовательно, $\operatorname{top} J(R)IC = \{0\}$. Но тогда

$[\operatorname{top} J(R)J]C = \{0\}$. Таким образом, $IC = \{0\}$. Поэтому $IS_1(M) = \{0\}$. При помощи трансфинитной индукции можно доказать, что $IM = \{0\}$. $\square$

Из этой теоремы очевидным образом получается следующий результат.

Теорема 3. *Пусть R — топологическое кольцо, имеющее левую топологическую размерность Крулля, тогда $\operatorname{top} J(R)$ не содержит ненулевых левых идеалов I, таких что $[\operatorname{top} J(R)I] = I$, а следовательно, топологически идемпотентных левых идеалов.*

Доказательство. Докажем теорему от противного. Пусть I — это ненулевой левый идеал, лежащий в $\operatorname{top} J(R)$, такой что $[\operatorname{top} J(R)I] = I$. Тогда по теореме 2 $IR = \{0\}$, а следовательно, $I^2 = \{0\}$. Поэтому $I = [I^2]_I = \{0\}$. $\square$

Теорема 1 из [5] утверждает, что всякий топологически идемпотентный левый идеал кольца R, лежащий в топологическом радикале Бэра, аннулирует любой топологический R-модуль с топологической размерностью Крулля. Так как в любом топологическом кольце топологический радикал Бэра содержится в топологическом радикале Джекобсона [2, теорема 4], то теорема 3 является усилением теоремы 1 из [5].

Из теоремы 3 следует, что топологический радикал Джекобсона кольца с левой топологической размерностью Крулля не содержит единицу. Заметим, что в случае произвольного топологического кольца это не так, так как существует топологическое кольцо, топологический радикал Бэра которого содержит единицу, а следовательно, и топологический радикал Джекобсона этого кольца обладает единицей. Такой пример можно найти в [1].

Доказательство теоремы 1. Существует такое порядковое число ν, что $\left[J\big(J^{(\nu)}\big)\right] = J^{(\nu)}$. Так как идеал $J^{(\nu)}$ лежит в J, то из теоремы 3 следует, что $J^{(\nu)} = \{0\}$. $\square$

Теорема 3 также позволяет новым способом доказать, что топологический радикал Джекобсона топологически артинова слева кольца нильпотентен [3, теорема 2].

Допустим J — топологический радикал Джекобсона топологически артинова слева кольца R. Тогда существует такое натуральное число n, что $[J^m] = [J^n]$ для любого $m \geqslant n$. Итак, $[I^n]$ — топологически идемпотентный идеал, лежащий в $\operatorname{top} J(R)$. Из топологической артиновости слева кольца следует, что $\operatorname{l\,top\,Kdim} R = 0$. Применяя теорему 3, получаем, что $[I^n] = \{0\}$.

Способом, похожим на применяемый при доказательстве теоремы 1, можно доказать дискретный вариант этой теоремы, тем самым получая результат Джекобсона с более слабым условием, а именно вместо нётеровости достаточно взять существование размерности Крулля.

Теорема 4. *Пусть R — кольцо с правой (левой) размерностью Крулля, а J — радикал Джекобсона этого кольца. Тогда существует порядковое число ν, такое что $J^{(\nu)} = \{0\}$, где для любого порядкового α определяется $J^{(\alpha)} = J^{(\beta)}J$*

($J^{(\alpha)} = JJ^{(\beta)}$), если $\alpha = \beta + 1$, и $J^{(\alpha)} = \bigcap_{\gamma<\alpha} J^{(\gamma)}$, если α — предельное порядковое число.

3. Обобщение результата Краузе

В [7] Х. Краузе для всякого порядкового числа α и идеала I из кольца R рассматривал следующий идеал I^{α}: если α — натуральное число, то

$$I^{\alpha} = \left\{ \sum_{i=1}^{r} x_{i1} \cdot \ldots \cdot x_{i\alpha} \;\middle|\; x_{ij} \in I,\ r \in \mathbb{N} \right\},$$

если α — предельный ординал, то

$$I^{\alpha} = \bigcap_{\gamma<\alpha} I^{\gamma},$$

а если α — бесконечный непредельный ординал, т. е. существует такой предельный ординал β, что $\alpha = \beta + n$ для некоторого натурального n, то положим

$$I^{\alpha} = (I^{\beta})^{n+1}.$$

Теорема 5 [7]. *Пусть R — нётерово справа кольцо R с правой размерностью Крулля α. Тогда $J(R)^{\omega\alpha+n} = \{0\}$ для некоторого натурального числа n.*

Оказывается, что можно доказать топологический аналог этого утверждения, если заменить нётеровость, размерность Крулля и радикал Джекобсона на соответствующие топологические аналоги.

Теорема 6. *Пусть M — топологически нётеров R-модуль с топологической размерностью Крулля α. Тогда $J^{\omega\alpha+n}M = \{0\}$ для некоторого натурального числа n, где $J = \operatorname{top} J(R)$.*

Доказательство. Воспользуемся трансфинитной индукцией.

Рассмотрим $\alpha = 0$. Считаем, что $M \neq \{0\}$. Положим $N_0 = \{0\}$. Пусть для некоторого натурального i уже определён замкнутый подмодуль N_{i-1} модуля M. Если $N_{i-1} \neq M$, то в топологически артиновом фактор-модуле M/N_{i-1} существует ненулевой минимально замкнутый подмодуль, скажем $\bar{N}_i$. Пусть

$$N_i = \{x \in M \mid x + N_{i-1} \in \bar{N}_i\}.$$

Из того, что $J\bar{N}_i = \{0\}$, следует, что $JN_i \subseteq N_{i-1}$. Так как модуль M топологически нётеров, то найдётся такое натуральное число l, что $N_l = M$. Но в таком случае

$$J^l N_l \subseteq J^{l-1} N_{l-1} \subseteq \ldots \subseteq JN_1 \subseteq N_0 = \{0\}$$

Пусть утверждение теоремы верно для всех топологически нётеровых модулей с топологической размерностью Крулля меньше α. Существует топологически критический замкнутый подмодуль N_1 модуля M. Пусть C — замкнутый подмодуль модуля N_1. Тогда $\gamma = \operatorname{top} \operatorname{Kdim} N_1/C < \alpha$. По предположению индукции существует натуральное число l, такое что $J^{\omega\gamma+l}N_1 \subseteq C$. Так как $\omega\gamma + l < \omega\alpha$, то $[J^{\omega\alpha}N_1] \subseteq C$. Предположим, что $J^{\omega\alpha}N_1 \neq \{0\}$. Тогда модуль $[J^{\omega\alpha}N_1]$ топологически неприводим как R-модуль. Поэтому $J[J^{\omega\alpha}N_1] = \{0\}$, т. е. $J(J^{\omega\alpha}N_1) = \{0\}$, а следовательно,

$$J^{\omega\alpha+1}N_1 = (J^{\omega\alpha})(J^{\omega\alpha})N_1 = \{0\}.$$

Итак, в любом случае получаем $J^{\omega\alpha+1}N_1 = \{0\}$.

Если $N_1 = M$, то утверждение теоремы очевидно. Пусть мы уже определили собственный замкнутый подмодуль N_i в M для некоторого натурального числа i. В M существует замкнутый подмодуль N_{i+1}, такой что фактор-модуль N_{i+1}/N_i является топологически критическим модулем. Следовательно, $J^{\omega\alpha+1}N_{i+1} \subseteq N_i$. Так как модуль M топологически нётеров, то найдётся такое натуральное n, что $N_n = M$. Тогда

$$\begin{aligned} J^{\omega\alpha+2n-1}M &= (J^{\omega\alpha})^{2n}M \subseteq (J^{\omega\alpha}J^{\omega\alpha})^n M \subseteq (J^{\omega\alpha+1})^n M = \\ &= (J^{\omega\alpha+1})^n N_n \subseteq (J^{\omega\alpha+1})^{n-1}J^{\omega\alpha+1}N_n \subseteq \\ &\subseteq (J^{\omega\alpha+1})^{n-1}N_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq (J^{\omega\alpha+1})N_1 = \{0\}. \end{aligned}$$ □

Заметим, что вышеприведённое доказательство принципиально отличается от доказательства Краузе.

В теореме 7 мы отказываемся от требования левой топологической нётеровости кольца, тем самым обобщая теорему 6. Напомним, что если кольцо обладает левой топологической размерностью Крулля, то оно имеет левую дуальную топологическую размерность Крулля (см. [4, предложение 3.3]). Для формулировки теоремы 7 нам потребуется новое обозначение для степени идеала.

Для любых порядковых чисел α, β и идеала I из кольца R определим идеал $I^{(\alpha,\beta)}$ следующим образом: $I^{(0,0)} = I$,

$$I^{(\alpha,\beta)} = \Bigg(\bigcap_{\alpha'<\alpha,\ n\in\mathbb{N}} (I^{(\alpha',\beta)})^n\Bigg) \cap \Bigg(\bigcap_{\beta'<\beta,\ n\in\mathbb{N}} (I^{(\alpha,\beta')})^n\Bigg).$$

Покажем, что $I^{(\alpha,0)} = I^{w\alpha}$, где степень в правой части равенства понимается в смысле Краузе. Воспользуемся индукцией. Предположим, что для всех $\gamma < \alpha$ уже доказано, что $I^{(\gamma,0)} = I^{w\gamma}$. Если существует $\alpha - 1$, то

$$\begin{aligned} I^{\omega\alpha} = I^{\omega(\alpha-1+1)} = I^{\omega\alpha-1+\omega} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(I^{\omega(\alpha-1)}\big)^n = \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(I^{(\alpha-1,0)}\big)^n = \bigcap_{\gamma<\alpha,\ n\in\mathbb{N}} (I^{(\gamma,0)})^n = I^{(\alpha,0)}. \end{aligned}$$

Теорема 7. *Пусть M — топологический R-модуль с топологической размерностью Крулля α и дуальной топологической размерностью Крулля β. Тогда $(J^{(\alpha,\beta)})^n M = \{0\}$ для некоторого натурального числа n, где $J = \operatorname{top} J(R)$.*

Доказательство. Будем доказывать утверждение теоремы индукцией по β. Базой индукции является формулировка теоремы 6. Пусть

$$S = \{x \in M \mid J^{(\alpha,\beta)}x = \{0\}\}.$$

Очевидно, что S — замкнутый подмодуль модуля M. Если $\gamma_1 = \operatorname{top}\operatorname{Ndim} S < \beta$, то существует натуральное число l_1, такое что $\left(J^{(\alpha,\gamma_1)}\right)^{l_1} S = \{0\}$.

Рассмотрим фактор-модуль $\bar{M} = M/S$. Пусть $\bar{C}$ — топологически критический замкнутый подмодуль модуля $\bar{M}$. Пусть $\bar{B}$ — собственный замкнутый подмодуль модуля $\bar{C}$. Тогда $\alpha' = \operatorname{top}\operatorname{Kdim} \bar{C}/\bar{B} < \operatorname{top}\operatorname{Kdim} \bar{C} \leqslant \alpha$. По предположению индукции найдётся такое натуральное число n, что $\left(J^{(\alpha',\beta)}\right)^n (\bar{C}/\bar{B}) = \{0\}$. Таким образом, в силу замкнутости подмодуля B получаем, что $\left[J^{(\alpha,\beta)}\bar{C}\right] \subseteq \bar{B}$. Следовательно, $\left[J^{(\alpha,\beta)}\bar{C}\right]$ — минимально замкнутый подмодуль в $\bar{M}$ и поэтому топологически неприводимый модуль. Получаем, что $J\left[J^{(\alpha,\beta)}\bar{C}\right] = \{0\}$. Пусть

$$C = \{m \in M \mid m + S \in \bar{C}\}.$$

Заметим, что $C \neq S$, так как $\bar{C} \neq \{\bar{0}\}$. Если $\gamma_2 = \operatorname{top}\operatorname{Ndim} C < \beta$, то по предположению индукции существует l_2, такое что $\left(J^{(\alpha,\gamma_2)}\right)^{l_2} C = \{0\}$, но тогда $J^{(\alpha,\beta)}C = \{0\}$, а следовательно, $C \subseteq S$. Итак, $\operatorname{top}\operatorname{Ndim} C = \beta$. Так как $J\left(J^{(\alpha,\beta)}C\right) \subseteq S$, то $J^{(\alpha,\beta)}J\left(J^{(\alpha,\beta)}C\right) = \{0\}$. Итак, мы нашли в M замкнутый подмодуль C, такой что $\left(J^{(\alpha,\beta)}\right)^3 C = \{0\}$ и $\operatorname{top}\operatorname{Ndim} C = \beta$.

Предположим, что для любого натурального числа n справедливо неравенство $\left(J^{(\alpha,\beta)}\right)^n M \neq \{0\}$. Положим $C_0 = C$. Для всякого натурального i найдётся замкнутый подмодуль $\bar{C}_i$ модуля M/C_{i-1}, такой что $\left(J^{(\alpha,\beta)}\right)^3 \bar{C}_i = \{\bar{0}\}$ и $\operatorname{top}\operatorname{Ndim} C_i/C_{i-1} = \beta$. Получили противоречие с тем, что $\operatorname{top}\operatorname{Ndim} M = \beta$. □

Способом, похожим на доказательство теоремы 7, можно доказать дискретный вариант этой теоремы.

Теорема 8. *Пусть M — левый (правый) R-модуль с размерностью Крулля α и дуальной размерностью Крулля β. Тогда $\left(J^{(\alpha,\beta)}\right)^n M = \{0\}$ $\left(M\left(J^{(\alpha,\beta)}\right)^n = \{0\}\right)$ для некоторого натурального числа n, где $J = J(R)$.*

Из последней теоремы очевидным образом получается результат Х. Краузе (теорема 5).

4. Топологическая нётеровость

Напомним, что элемент t кольца называется *топологически квазирегулярным слева*, если для любой окрестности нуля V этого кольца существует элемент s, такой что $t + s + st \in V$.

Теорема 9. *Пусть R — топологически нётерово слева кольцо. Тогда топологический радикал Джекобсона $\operatorname{top} J(R)$ этого кольца является топологически квазирегулярным слева идеалом.*

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{top} J(R)$. Определим регулярный слева левый идеал

$$\rho_x = \{y + yx\colon y \in R\}.$$

Предположим, что этот левый идеал ρ_x не является всюду плотным в R. Тогда, так как кольцо R топологически нётерово слева, существует максимально замкнутый левый идеал ρ, содержащий ρ_x. Так как левый идеал ρ_x регулярен слева (для любого элемента y из R имеем $y-y(-x) \in \rho_x$), то то же самое можно сказать про ρ. Но тогда левый идеал ρ топологически регулярен слева относительно топологии τ, индуцированной в фактор-модуле R/ρ топологией из R (см. [2, определение 4]). Очевидно, что R-модуль R/ρ топологически неприводим. По [2, теорема 3] получаем, что $\operatorname{top} J(R) \subseteq \rho$. Поэтому $x \in \rho$. Таким образом, для любого $y \in R$ имеем $yx \in \rho$, а следовательно, $y \in \rho$, т. е. $\rho = R$. Получили противоречие.

Итак, идеал ρ_x всюду плотен в R. Тогда для любой окрестности V нуля из R существует элемент z, такой что $-x \in z + zx + V$, т. е. $x + z + zx \in V$. Поэтому элемент x является топологически квазирегулярным слева. □

В завершение статьи предлагается следующее усиление теоремы Левицкого.

Теорема 10. *Если в кольце R можно задать топологию так, чтобы R стало топологически нётеровым справа кольцом, тогда в этом кольце всякий односторонний ниль-идеал нильпотентен.*

Доказательство. Предположим, что R содержит односторонний ниль-идеал A, не являющийся нильпотентным. В силу топологической нётеровости слева кольца R и того, что замыкание нильпотентного идеала — нильпотентный идеал и сумма любых двух нильпотентных идеалов — нильпотентный идеал, в R существует наибольший замкнутый нильпотентный идеал N. Без потери общности можем считать, что $N = \{0\}$. В противном случае можно было бы заменить R на R/N, а A — на A/N, принимая во внимание тот факт, что фактор-кольцо топологически нётерова слева кольца по произвольному замкнутому идеалу также топологически нётерово слева кольцо. Итак, R не содержит односторонних нильпотентных идеалов.

Пусть $a \in A$. Определим $U = Ra \neq \{0\}$. Очевидно, что если A — левый ниль-идеал, то U — левый ниль-идеал в R. Если A — правый ниль-идеал, то рассмотрим произвольный элемент u из U. Тогда существует элемент $x \in R$, такой что $u = xa$. Найдётся натуральное n, такое что $(ax)^n = 0$. В таком случае $u^{n+1} = x(ax)^n a = 0$. Итак, в любом случае U — левый ниль-идеал.

Для каждого $u \in U$ определим ненулевой замкнутый правый идеал

$$r(u) = \{x \in R\colon ux = 0\}.$$

Найдётся элемент $u_0 \neq 0$, такой что замкнутый правый идеал $r(u_0)$ максимален. Так как $r(xu_0) \supseteq r(u_0)$ для любого $x \in R$, то в случае, когда $xu_0 \neq 0$, получаем, что $r(xu_0) = r(u_0)$. Пусть $y \in R$. Предположим, что $yu_0 \neq 0$. Тогда существует натуральное число $k > 1$, такое что $(yu_0)^k = 0$ и $(yu_0)^{k-1} \neq 0$.

Положим $x = (yu_0)^{k-2}y$. Тогда $r\big((yu_0)^{k-1}\big) = r(u_0)$. Но $yu_0 \in r\big((yu_0)^{k-1}\big)$. Таким образом, $yu_0 \in r(u_0)$. Значит, $u_0(yu_0) = 0$. Если же $yu_0 = 0$, то также $u_0(yu_0) = 0$. Итак, u_0R — нильпотентный правый идеал кольца R. Следовательно, $u_0R = \{0\}$. Идеал $\big\{t \in R\colon tR = \{0\}\big\}$ является ненулевым нильпотентным идеалом. Получили противоречие. □

Литература

[1] Арнаутов В. И. К теории топологических колец // ДАН СССР. — 1964. — Т. 157, № 1.

[2] Главацкий С. Т., Михалёв А. В., Тензина В. В. Топологический радикал Джекобсона колец. I // Фундамент. и прикл. матем. — 2010. — Т. 16, вып. 8. — С. 49—68.

[3] Главацкий С. Т., Михалёв А. В., Тензина В. В. Топологический радикал Джекобсона колец. I // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 1. — С. 53—64.

[4] Тензина В. В. Топологическая размерность Крулля // Фундамент. и прикл. матем. — 2004. — Т. 10, вып. 3. — С. 215—230.

[5] Тензина В. В. Некоторые свойства топологического радикала Бэра колец с топологической размерностью Крулля // УМН. — 2005. — Т. 60, № 2 (362). — С. 175—176.

[6] Jacobson N. The radical and the semi-simplicity for arbitrary rings // Amer. J. Math. — 1945. — No. 67. — P. 300—320.

[7] Krause H. On the nilpotency of the Jacobson radical for Noetherian rings // Arch. Math. — 1998. — Vol. 70, no. 6. — P. 435—437.