Кольца Безу, аннуляторы и диагонализируемость*

А. А. ТУГАНБАЕВ
Национальный исследовательский университет «МЭИ»,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.55

Ключевые слова: аннулятор модуля, арифметическое кольцо, кольцо Безу, инвариантное кольцо, диагонализируемое кольцо, заменяемое кольцо.

Аннотация

Пусть A — инвариантное справа кольцо. Если A — диагонализируемое кольцо или заменяемое кольцо Безу, то $B+r(M)=r(M/MB)$ для каждого конечно порождённого правого A-модуля M и каждого идеала B кольца A.

Abstract

A. A. Tuganbaev, Bezout rings, annihilators, and diagonalizability, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 2, pp. 253—256.

Let A be a right invariant ring. If A is a diagonalizable ring or an exchange Bezout ring, then $B+r(M)=r(M/MB)$ for every finitely generated right A-module M and any ideal B of the ring A.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули предполагаются правыми и унитарными. Кольцо называется *инвариантным справа* (*слева*), если все его правые (соответственно левые) идеалы являются идеалами. Под «A — инвариантное кольцо» понимаем, что A — инвариантное справа и слева кольцо.

Замечание 1. Если A — кольцо и X — подмножество некоторого правого A-модуля M, то через $r(X)$ обозначается его правый аннулятор

$$\{a\in A \mid Xa=0\}.$$

Ясно, что $B+r(M)\subseteq r(M/MB)$. Кольцо A называется *арифметическим*, если решётка его двусторонних идеалов дистрибутивна, т. е. $(B+C)\cap(B+D) = B+C\cap D$ для любых идеалов B, C, D кольца A. В [2] доказано, что коммутативное кольцо A является арифметическим в точности тогда, когда $B+r(M)=r(M/MB)$ для каждого конечно порождённого A-модуля M и каждого идеала B кольца A.

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект 16-11-10013).

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 2, с. 253—256.
© 2016 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

Кольцо A называется *строго регулярным*, если $a \in a^2 A$ для любого элемента $a \in A$. Хорошо известно, что каждое строго регулярное кольцо является инвариантным арифметическим кольцом, а кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ — инвариантное арифметическое кольцо, не являющееся строго регулярным.

Замечание 2. В [1] доказано, что если A — строго регулярное кольцо, то $B + r(M) = r(M/MB)$ для каждого конечно порождённого A-модуля M и каждого идеала B кольца A.

Прямоугольная матрица B называется *диагонализируемой*, если существуют такие квадратные обратимые матрицы X и Y подходящих размеров, что XBY — диагональная матрица. Кольцо A называется *диагонализируемым*, если каждая прямоугольная матрица над A диагонализируема. Диагонализируемые кольца изучались в большом числе работ, здесь мы выделим только [3].

Замечание 3. Каждое строго регулярное кольцо является инвариантным диагонализируемым кольцом. Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ — инвариантное диагонализируемое кольцо, не являющееся строго регулярным.

Кольцо A называется *правым* (*левым*) *кольцом Безу*, если все его конечно порождённые правые (соответственно левые) идеалы являются главными. Кольцо A называется *заменяемым*, если для любого элемента $a \in A$ существует такой идемпотент $e \in aA$, что $1 - e \in (1 - a)A$.

В связи с замечаниями 1—3 мы докажем теорему 4, которая является основным результатом данной работы.

Теорема 4. *Пусть A — инвариантное справа кольцо.*

1. *Если A — диагонализируемое кольцо, то $B + r(M) = r(M/MB)$ для каждого конечно порождённого правого A-модуля M и каждого идеала B кольца A.*
2. *Если A — заменяемое кольцо Безу, то $B + r(M) = r(M/MB)$ для каждого конечно порождённого правого A-модуля M и каждого идеала B кольца A.*

Замечание 5. Если A — диагонализируемое кольцо, то хорошо известно, что A — кольцо Безу [3, с. 465]. Кольцо целых чисел является примером коммутативного диагонализируемого незаменямого кольцом Безу.

Замечание 6. Пусть A — правое кольцо Безу, у которого все максимальные правые идеалы являются идеалами. Известно, что решётка правых идеалов кольца A дистрибутивна [4, теорема 3.26]. В частности, A — арифметическое кольцо.

Пусть A — кольцо. Любая прямая сумма изоморфных копий модуля A_A называется *свободным* правым A-модулем. Модуль X называется *конечно представимым*, если $X \cong F/N$, где F — конечно порождённый свободный модуль и N — конечно порождённый подмодуль в F. Правый модуль X над кольцом A называется *циклически представимым*, если $X \cong A_A/aA$ для некоторого элемента $a \in A$.

Лемма 7. *Если A — инвариантное справа правое кольцо Безу и M — конечная прямая сумма некоторых циклических правых A-модулей, то $B + r(M) = r\big(M/(MB)\big)$ для любого идеала B кольца A.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что

$$M = A_1/C_1 \oplus \ldots \oplus A_n/C_n,$$

где $A_1, \ldots, A_n$ — изоморфные копии модуля A_A и $C_1, \ldots, C_n$ — некоторые идеалы кольца A. В нашем случае

$$B + r(M) = B + C_1 \cap \ldots \cap C_n$$

и

$$r\big(M/(MB)\big) = (B + C_1) \cap \ldots \cap (B + C_n).$$

Так как A — инвариантное справа правое кольцо Безу, то A — арифметическое кольцо по замечанию 6. Поскольку A — арифметическое кольцо, то можно использовать индукцию по n, чтобы непосредственно проверить равенство

$$B + C_1 \cap \ldots \cap C_n = (B + C_1) \cap \ldots \cap (B + C_n).$$

Поэтому $B + r(M) = r\big(M/(MB)\big)$. □

Замечание 8. Из доказательства теоремы 9.1 в [3, с. 477] вытекает следующее хорошо известное утверждение: каждый конечно представимый правый или левый модуль над диагонализируемым кольцом является конечной прямой суммой циклически представимых модулей.

Замечание 9 (окончание доказательства теоремы 4). 1. Пусть A — инвариантное справа диагонализируемое кольцо, B — идеал кольца A и M — конечно порождённый правый A-модуль. Надо доказать, что $B + r(M) = r(M/MB)$.

Существует изоморфизм $M \cong F/N$, где F — конечно порождённый свободный A-модуль и N — некоторый подмодуль в F. Пусть $\{N_i\}$ — множество всех конечно порождённых подмодулей в N. Тогда $N = \bigcup_i N_i$ и

$$M/MB \cong F/(N + FB) = F/\bigcup_i (N_i + FB).$$

Для каждого $i \in I$ обозначим через X_i конечно представимый модуль F/N_i. По лемме 7 и замечанию 8 $B + r(X_i) = r(X_i/X_iB)$ для каждого конечно представимого модуля X_i. Кроме того, непосредственно проверяется, что $r(F/N) = \bigcup_i r(F/N_i)$. Поэтому

$$r(M/MB) = r\big(F/(N + FB)\big) = \bigcup_i r\big(F/(N_i + FB)\big) = \bigcup_i \big(B + r(F/N_i)\big) =$$
$$= B + \bigcup_i r(F/N_i) = B + r(F/N) = B + r(M).$$

2. Заметим, что никакое инвариантное справа кольцо не имеет нецентральных идемпотентов. Так как A — заменяемое кольцо Безу без нецентральных идемпотентов, то A — диагонализируемое кольцо [5, теорема 1 (2)]. Теперь применяем пункт 1. $\square$

Литература

[1] Голод Е. С., Туганбаев А. А. Аннуляторы и конечно порождённые модули // Фундамент. и прикл. матем. — 2016. — Т. 21, вып. 1. — С. 79—82.

[2] Golod E. S. A remark on commutative arithmetic rings // J. Math. Sci. — 2016. — Vol. 213, no. 2. — P. 143—144.

[3] Kaplansky I. Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. — 1949. — Vol. 19, no. 2. — P. 21—23.

[4] Tuganbaev A. A. Semidistributive Modules and Rings. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.

[5] Tuganbaev A. A. Bezout rings without non-central idempotents // Discrete Math. Appl. — 2016. — Vol. 26, no. 6. — P. 369—377.