Изоморфизмы групп обратимых элементов алгебр инцидентности

В. Д. ШМАТКОВ
Рязанский государственный радиотехнический университет
e-mail: shmatkov-vadim@yandex.ru

УДК 512.562

Ключевые слова: алгебра инцидентности, инволюция, трансвекция, частичный порядок.

Аннотация

В работе показано, что из изоморфизма групп обратимых элементов алгебр инцидентности следует изоморфизм частичных порядков, на которых эти алгебры определены.

Abstract

V. D. Shmatkov, Isomorphisms of groups of invertible elements of incidence algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 2, pp. 257—261.

This paper shows that isomorphisms of groups of invertible elements of incidence algebras imply isomorphisms of the partial orders defining the algebras.

Введение

Вопросу о том, следует ли из изоморфизма колец и мультипликативных полугрупп алгебр инцидентности изоморфизм частичных порядков, на которых эти алгебры определены, посвящена обширная литература (см. [2—4]). В данной работе показано, что для изоморфизма частичных порядков достаточно уже изоморфизма групп обратимых элементов алгебр. Доказательство основано на классическом методе инволюций и трансвекций.

1. Основные определения

Пусть $P \neq 0$, $\leqslant$ — частичный порядок на множестве P, K — поле характеристики, отличной от 2. Обозначим через I множество всех функций $f\colon P \times P \to K$, таких что $f(x, y) = 0$, если $x \neq y$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 2, с. 257—261.

На множестве I зададим операции умножения, сложения и умножения на скаляр для $f, q \in I$, $x, y \in P$, $\alpha \in K$:

$$(fq)(xy) = \sum_{x \leqslant z \leqslant y} f(x,y)q(z,y),$$
$$(f+q)(x,y) = f(x,y) + q(x,y),$$
$$(\alpha f)(x,y) = \alpha f(x,y).$$

Определим $e \in I$ следующим образом: $e(x,x) = 1$ для всех $x \in I$, $e(x,y) = 0$, если $x \neq y$. Для всех $f \in I$ выполнено $fe = ef = f$.

Определим $o \in I$ следующим образом: $o(x,y) = 0$ для всех $x, y \in P$. Для всех $f \in I$ справедливо, что $o + f = f + o = f$, $of = fo = 0$.

Назовём функцию $f \in I$ обратимой, если существует $g \in I$, такая что $fg = gf = e$. Заметим, что функция f обратима тогда и только тогда, когда $f(x,x) \neq 0$ для любого $x \in P$. Обозначим множество всех обратимых функций $\mathrm{GI} = \mathrm{GI}(P, \leqslant)$.

Если $n = \operatorname{card} P$, то $\mathrm{GI}(P, \leqslant)$ вкладывается в множество всех обратимых матриц $\mathrm{GM}_n(K)$. При вложении существует соответствие между номерами строк и столбцов и элементами из P.

Для $u \in P$ определим функцию $e_u \in I$ следующим образом: $e_u(u,u) = 1$, $e_u(x,y) = 0$ в остальных случаях. Определим для $u, v \in P$, $u < v$, функцию $e_{u,v} \in I$ следующим образом: $e_{u,v}(u,v) = 1$, $e_{u,v}(x,y) = 0$ в остальных случаях. Если $u \nleqslant v$, то $e_{u,v} = 0$.

Инволюцией назовём матрицу $A \in \mathrm{GM}_n(K)$, такую что $A^2 = e$.

Для $u, v \in P$, $u \leqslant v$, $\alpha \in K$ трансвекцией назовём функцию $b_{u,v}(\alpha) \in I$, такую что $b_{u,v}(\alpha) = e + \alpha e_{u,v}$. Для $u, v \in P$, $u \leqslant v$ обозначим через $B_{u,v}$ класс трансвекций

$$B_{u,v} = \{e + \alpha b_{u,v} \mid \alpha \in K\}.$$

Для $F, H \subset I$ определим коммутант

$$[F, H] = \{fgf^{-1}g^{-1} \mid f \in F,\ g \in H\}.$$

Определим множество диагоналей

$$D = \{f \in \mathrm{GI} | f(u,v) = 0,\ \text{если } u \neq v\}.$$

2. Теорема об изоморфизме

Пусть E_n — множество всех диагональных матриц с ± 1 на диагонали.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.1 [1, предложение 2.3]. *Если A_i, $i = 1, \ldots, r$, — множество попарно перестановочных инволюций, то существует $P \in \mathrm{GM}_n(K)$, такая что $PA_iP^{-1} \in E_n$ для всех $i = 1, \ldots, r$.* □

Пусть $J_{i,j}$ обозначает диагональную матрицу, у которой $J_{i,j}(i,i) = J_{i,j}(j,j) = -1$, $J(x,x) = 1$ для остальных x.

Пусть P_i обозначает диагональную матрицу, у которой $P_i(i,i) = -1$, $P_i(j,j) = 1$ для остальных j.

Типом инволюции назовём пару $(t, n-t)$, если инволюция сопряжена с диагональной матрицей, у которой в t-позициях стоят -1 и в $(n-t)$-позициях стоят 1. Из равенства характеристических многочленов у сопряжённых матриц следует, что инволюции сопряжены тогда и только тогда, когда имеют один тип.

Предложение 2.2. *Пусть φ — автоморфизм* GI. *Тогда существует $f \in$ GI, такая что для всех пар i, j, $i = j$, $f\varphi(J_{i,j})f^{-1} = J_{\tau(i),\tau(j)}$, где τ — биекция, $\tau\colon P \to P$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала инволюции типа $(1, n-1)$, скажем $P_1, \ldots, P_n$. Всего их n, они попарно перестановочны. Поэтому n инволюций $\varphi P_1, \ldots, \varphi P_n$ также сопряжены, перестановочны и имеют один тип, скажем $(t, n-t)$. Мы хотим показать, что $t = 1$ или $t = n-1$. Очевидно, $t \neq 0$, $t \neq n$. Допустим, что $1 < t < n-1$. Мы можем считать, что $n > 3$. Случаи $n \leqslant 3$ тривиальны. Так как $C_n^1 < C_n^t$, то существует по крайней мере одна инволюция B типа $(t, n-t)$, которая не лежит в множестве $\varphi P_1, \ldots, \varphi P_n$, но сопряжена и перестановочна со всеми φP_i. Тогда $\varphi^{-1}B$ перестановочна со всеми P_i, но отлична от них и сопряжена с ними. Это, однако, невозможно, так как $\{P_i\}$ — максимальное коммутативное множество инволюций типа $(1, n-1)$. Таким образом, $t = 1$ или $t = n-1$. Поэтому существует обратимая матрица Q, такая что $Q(\varphi P_i)Q^{-1} = \alpha P_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\alpha = \pm 1$.

Пусть $Q(\varphi P_i)Q^{-1} = P_i$ для всех i. Так как $P_i = e - 2e_i$, то

$$\varphi P_i = Q^{-1}(P_i)Q = Q^{-1}(e - 2e_i)Q = e - 2Q^{-1}e_iQ.$$

Учитывая, что $\varphi P_i \in$ GI, имеем $Q^{-1}e_iQ \in I$.

Определим отображение $\tau\colon P \to P$ следующим образом: $\tau(i) = x$, если $Q^{-1}e_iQ(x,x) \neq 0$. Так как ранг $Q^{-1}e_iQ$ равен 1 и $Q^{-1}e_iQ \in I$, то существует единственный $x \in P$, такой что $Q^{-1}e_iQ(x,x) \neq 0$. Поэтому отображение τ определено корректно. Для любых $i \neq j$ $(Q^{-1}e_iQ)(Q^{-1}e_jQ) = 0$. Поэтому отображение τ взаимно-однозначно.

Рассмотрим матрицы $e_{i,x}$, $e_{x,i}$, такие что $e_{i,x}(i,x) = e_{x,i}(x,i) = 1$, $e_{i,x}(u,v) = e_{x,i}(u,v) = 0$ в остальных случаях. Тогда $Q^{-1}e_iQ = (Q^{-1}e_{i,x})(e_{x,i}Q)$, где $(Q^{-1}e_{i,x})$ — x-столбец, $(e_{x,i}Q)$ — x-строка. Так как $(Q^{-1}e_iQ)(x,x) \neq 0$, то $(Q^{-1}e_{i,x})(x,x) \neq 0$ и $(e_{x,i}Q)(x,x) \neq 0$. Если $(Q^{-1}e_{i,x})(y,x) \neq 0$, то $Q^{-1}e_iQ(y,x) = (Q^{-1}e_{i,x})(y,x)(e_{x,i}Q)(x,x) \neq 0$ и, так как $Q^{-1}e_iQ \neq I$, $y \leqslant x$ и $Q^{-1}e_{i,x} \in I$. Аналогично показывается, что $e_{x,i}Q \in I$.

Составим матрицы f^{-1} и f. Матрица f^{-1} состоит из столбцов $Q^{-1}e_{i,x}$, а матрица f из строк $e_{x,i}Q$. Как показано выше, $f^{-1}, f \in I$. Рассмотрим произведение ff^{-1}:

$$ff^{-1}(i,j) = (e_{\tau(i),i}Q)(Q^{-1}e_{j,\tau(j)}).$$

Так как произведение i-й строки Q на j-й столбец Q^{-1} при $i \neq j$ равно нулю, то $ff^{-1}(i,j) = 0$ при $i \neq j$. Ясно также, что $ff^{-1}(i,i) = 1$. Поэтому $ff^{-1} = e$ и $f, f^{-1} \in \mathrm{GI}$. Имеем $Q^{-1}e_iQ = f^{-1}e_{\tau(i)}f$. Получаем, что для любого $i \in P$ $\varphi P_i = f^{-1}P_{\varphi(i)}f$.

Если для всех $i = 1, \ldots, n$ выполнено $Q\varphi P_iQ^{-1} = -P_i$, то, так как $-P_i = 2e_i - e$, получаем, что существует $f \in \mathrm{GI}$, такая что $f(\varphi P_i)f^{-1} = -P_{\tau(i)}$ для всех i. Таким образом, $f(\varphi P_i)f^{-1} = \alpha P_i$, $\alpha = \pm 1$ для всех i. Так как $P_iP_j = J_{i,j}$, то

$$f\big(\varphi(J_{i,j})\big)f^{-1} = f\big(\varphi(P_iP_j)\big)f^{-1} = \\ = (f\varphi(P_i)f^{-1})(f\varphi(P_j)f^{-1}) = (\alpha P_{\tau(i)})(\alpha P_{\tau(j)}) = J_{\tau(i),\tau(j)}. \qquad \square$$

Обозначим $\mathrm{G'I} = [\mathrm{GI}, \mathrm{GI}]$. Отметим следующие свойства коммутантов.

Предложение 2.3. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если $f \in G'I$, то для любого $x \in P$ выполнено $f(x,x) = 1$;*
2) *все трансвекции лежат в* $\mathrm{G'I}$;
3) $[b_{u,v}(\alpha), b_{v,w}(\beta)] = b_{u,w}(\alpha, \beta)$;
4) *если $v \neq w$, то $[b_{u,v}(\alpha), b_{w,t}(\beta)] = e$;*
5) $[B_{u,v}, B_{v,w}] = B_{u,w}$;
6) *если $v \neq w$, то $[B_{u,v}, B_{w,t}] = e$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно.

Докажем утверждение 2). Для $b_{u,v}(\alpha)$ рассмотрим диагональ d, такую что $d(x,x) = 1$, если $x \neq u$ или $x \neq v$, и $d(u,u)d(v,v)^{-1} = 2$. Тогда непосредственное вычисление показывает, что $[d, b_{u,v}] = b_{u,v}$.

Непосредственные вычисления показывает справедливость утверждений 3)—6). $\square$

Предложение 2.4. *Существуют $f \in \mathrm{GI}$ и биекция $\tau\colon P \to P$, такие что $f\varphi(B_{u,v})f^{-1} = B_{\tau(u),\tau(v)}$ для всех классов трансвекций $B_{u,v}$.*

Доказательство. По предложению 2.3 все трансвекции лежат в $\mathrm{G'I}$. Любая $h \in \mathrm{G'I}$ перестановочна с какой-то $J_{i,j}$, только если $J_{i,j}$ — трансвекция. По предложению 2.2 существуют $f \in \mathrm{GI}$ и биекция $\tau\colon P \to P$, такие что $f\varphi(J_{i,j})f^{-1} = J_{\tau(i),\tau(j)}$ для всех пар i, j, $i \neq j$. Трансвекция $b_{u,v}(\alpha)$ перестановочна с $J_{i,j}$ тогда и только тогда, когда $i = u$, $j \neq v$ или $i \neq u$, $j = v$. Так как $f\varphi f^{-1}$ сохраняет перестановочность, то классы трансвекций переходят в классы трансвекций и $f\big(\varphi(B_{u,v})\big)f^{-1} = B_{\tau(u),\tau(v)}$. $\square$

Обозначим через $B = \{B_{u,v} \mid u, v \in P\}$ множество классов трансвекций. Можно считать, что если $u \nleq v$, то $B_{u,v} = e$.

Предложение 2.5. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *для любых $B_{u,v}, B_{u,w}, H \in B$ равенство $[H, B_{u,v}] = e$ равносильно $[H, B_{u,w}] = e$;*

2) *для любых* $B_{u,v}, B_{w,v}, H \in B$ *равенство* $[B_{u,v}, H] = e$ *равносильно* $[B_{w,v}, H] = e$;
3) *для любых* $B_{u,v}$, $B_{t,w}$, где $u \neq t$, $u \neq 1$ — *наибольший элемент* P, *существует* $H \in B$, *такой что* $[H, B_{u,v}] \neq e$, $[H, B_{t,w}] = e$;
4) *для любых* $B_{u,v}$, $B_{t,w}$, *где* $v \neq w$, $v \neq 1$ — *наименьший элемент* P, *существует* $H \in B$, *такой что* $[B_{u,v}, H] \neq e$, $[B_{t,w}, H] = e$.

Доказательство следует из свойств коммутирования трансвекций предложения 2.3.

Теорема. *Пусть* $(P_1, \leqslant_1)$, $(P_2, \leqslant_2)$ — *частичные порядки с наименьшими и наибольшими элементами. Если изоморфны группы* $I_1 = \mathrm{GI}(P_1, \leqslant_1)$, $I_2 = \mathrm{GI}(P_2, \leqslant_2)$, *то изоморфны частичные порядки* $(P_1, \leqslant_1)$, $(P_2, \leqslant_2)$.

Доказательство. Можно считать, что φ — изоморфизм I_1, I_2. По предложению 2.4 при изоморфизме $f^{-1}\varphi f$ классы трансвекций переходят в классы трансвекций.

Определим в I_1 на классах трансвекций отношение $\sim_1$: $H_1 \sim_1 H_2$ тогда и только тогда, когда $[H, H_1] = e$ равносильно $[H, H_2] = e$. По предложению 2.5 если $H_1 \sim_1 H_2$, то существует такое $u \in P$, что $H_1 = B_{u,v}$, $H_2 = B_{u,w}$ для $v, w \in P$. Таким образом, отношение эквивалентности $\sim_1$ ставит в соответствие эквивалентным классам трансвекций элемент из P.

Определим в I_1 на классах трансвекций отношение $\sim_2$: $H_1 \sim_2 H_2$ тогда и только тогда, когда $[H_1, H] = e$ равносильно $[H_2, H] = e$. Если $H_1 \sim_2 H_2$, то существует такой $v \in P$, что $H_1 = B_{u,v}$, $H_2 = B_{w,v}$ для $u, w \in P$.

Заметим, что $u \leqslant_1 v$ равносильно $B_{u,v} \neq e$. Поэтому коммутирование на классах трасвекций в I_1 определяет частичный порядок $(P_1, \leqslant_1)$. Так как при изоморфизме сохраняется коммутирование классов трансвекций, то частичные порядки $(P_1, \leqslant_1)$, $(P_2, \leqslant_2)$ изоморфны. □

Литература

[1] Помфре Ж., Макдональд Б. Автоморфизмы группы GL_n над локальным кольцом // Автоморфизмы классических групп / Под ред. Ю. И. Мерзлякова — М.: Мир, 1976.

[2] Шматков В.Д. Изоморфизмы алгебр инцидентности // Дискрет. матем. — 1991. — Т. 3, № 1. — С. 133—144.

[3] Abrams G., Haefner J., del Rio A. The isomorphism problem for incidence rings // Pacific J. Math. — 1999. — Vol. 187, no. 2. — P. 201—214.

[4] Spiegel E., O'Donnell C. Incidence Algebras. — CRC Press, 1997. — (Chapman & Hall/CRC Pure Appl. Math.; Vol. 206).