Канонический ансамбль открытых струн без самопересечений

В. И. АЛХИМОВ
Московский государственный психолого-педагогический университет
e-mail: alvaliv@list.ru

УДК 519.2

Ключевые слова: канонический ансамбль, открытая струна без самопересечений, ренормгруппа, асимптотическое распределение.

Аннотация

Рассмотрены статистические модели одиночной открытой струны, избегающей самопересечения в d-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, $2 \leqslant d < 4$, и ансамбля таких струн. Изложение указанных моделей основано на методе Дарвина—Фаулера, использованном при выводе канонического ансамбля. Конфигурация струны в $\mathbb{R}^d$ описывается посредством её контурной длины L и расстояния R между её концами. Для преобразованной плотности вероятности $W(R, L)$ расстояния R установлено уравнение, аналогичное известному уравнению Дайсона, инвариантное относительно непрерывной группы ренормировочных преобразований, что позволяет применить ренормгрупповой метод для исследования асимптотического поведения указанной плотности, когда $R \to \infty$ и $L \to \infty$. Для модели равновесного ансамбля из M рассматриваемых струн со средней по всем струнам контурной длиной $\bar{L}$ получено наиболее вероятное распределение струн по их длинам в пределе $M \to \infty$. Усреднение плотности вероятности $W(R, L)$ по этому распределению (каноническому ансамблю) даёт в итоге искомую плотность $\langle W(R, L)\rangle$.

Abstract

V. I. Alkhimov, The canonical ensemble of open self-avoiding strings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 3, pp. 3—23.

Statistical models of a single open string avoiding self-intersections in the d-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^d$, $2 \leqslant d < 4$, and the ensemble of strings are considered. The presentation of these models is based on the Darwin–Fowler method, used in statistical mechanics to derive the canonical ensemble. The configuration of the string in space $\mathbb{R}^d$ is described by its contour length L and the spatial distance R between its ends. We establish an integral equation for a transformed probability density $W(R, L)$ of the distance R similar to the known Dyson equation, which is invariant under the continuous group of renormalization transformations. This allows us using the renormalization group method to investigate the asymptotic behavior of this density in the case where $R \to \infty$ and $L \to \infty$. For the model of an ensemble of M open strings with the mean string contour length over the ensemble given by $\bar{L}$, we obtain the most probable distribution of strings over their lengths in the limit as $M \to \infty$. Averaging the probability density $W(R, L)$ over the canonical ensemble eventually gives the sought density $\langle W(R, L)\rangle$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 3, с. 3—23.

1. Введение

Один из наиболее эффективных в статистической механике разделов комбинаторного анализа содержит метод производящих функций. Примером может служить известный подход Дарвина—Фаулера [6], с помощью которого осуществляется вывод канонического ансамбля равновесных макроскопических систем. В данной работе мы воспользуемся этим подходом для описания конфигурационной статистики в d-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, $2 \leqslant d < 4$, как одиночной открытой струны, избегающей самопересечения, так и совокупности таких струн. Однако если в первом случае при выводе канонического ансамбля составляющие его струны являются воображаемыми копиями некоторой открытой струны, которые не взаимодействуют между собой и могут находиться в разных энергетических состояниях, то во втором случае мы имеем дело с ансамблем реальных открытых струн, возможно с разными длинами и тоже не взаимодействующих между собой. Ради простоты изложения мы рассмотрим вначале дискретную модель гибкой растяжимой струны, избегающей самопересечения и находящейся в равновесии с термостатом, а затем перейдём к непрерывной модели струны с помощью предельного процесса.

Пусть исходная модель представляет собой цепь, состоящую из N упорядоченных прямолинейных сегментов, свободное сочленение которых обусловливает её гибкость. Концы сегментов, являющиеся точками их соединения, будем называть элементами рассматриваемой цепи. Принимая один из концов цепи за нулевой элемент, обозначим через $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^d$ радиус-вектор i-го элемента, а через $\mathbf{r}_i = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}$ — i-й сегмент, соединяющий i-й и $(i-1)$-й элементы цепи. Тогда

$$r_{ij} = \left| \sum_{k=i+1}^{j} \mathbf{r}_k \right|, \quad \bar{r}_{ij} = \sum_{k=i+1}^{j} r_k \,—$$

это соответственно пространственное расстояние между i-м и j-м элементами цепи и расстояние по контуру цепи между ними. Мы полагаем, что длины r_k, $1 \leqslant k \leqslant N$, сегментов цепи подчинены одному и тому же распределению, для которого средняя длина каждого сегмента равна h, а среднее значение контурной длины $\bar{r}_{ij}$ равно $\tilde{r}_{ij} = |j-i|h$. Отсюда следует, что $\tilde{r}_{0N} = Nh$ — средняя контурная длина цепи. В дальнейшем при построении непрерывной модели цепи в определении $\tilde{r}_{0N}$ мы перейдём к пределу, устремив длину h к нулю, а число N к бесконечности таким образом, чтобы выполнялось условие

$$0 < L = \lim_{\substack{h\to 0,\\ N\to\infty}} Nh < \infty. \tag{1}$$

Потенциальную энергию U цепи представим в виде суммы двух частей:

$$U = U_{\text{lin}} + U_{\text{vol}}, \quad U_{\text{lin}} = \sum_{k=1}^{N} u(r_k), \quad U_{\text{vol}} = \sum\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} V_{ij},$$

где линейная часть $U_{\rm lin}$ — сумма внутренних энергий всех сегментов, в то время как объёмная часть $U_{\rm vol}$ обозначает сумму энергий их попарных взаимодействий. Если $u(r_k)$ определяет значение упругой энергии k-го сегмента, то величина V_{ij} описывает пространственное взаимодействие i-го и j-го сегментов цепи. Для линейного потенциала $u(r)$ мы примем известное приближение (закон Гука):

$$u(r) = \frac{\sigma}{2h}\, r^2, \tag{2}$$

где σ — параметр упругости. Величина V_{ij} в этой модели определяется как $V_{ij} = h^2 V(r_{ij}, \tilde{r}_{ij})$, где $V(r_{ij}, \tilde{r}_{ij})$ обозначает плотность энергии взаимодействия i-го и j-го сегментов цепи. Таким образом, энергия взаимодействия V_{ij} двух сегментов зависит как от пространственного расстояния r_{ij}, так и от средней контурной длины $\tilde{r}_{ij}$ между ними. Чтобы учесть запрет на самопересечения цепи, определим плотность энергии $V(r,\tilde{r})$ следующим образом:

$$V(r,\tilde{r}) = V_0\, \theta(r_0 - r)\, \theta(\tilde{r} - l), \tag{3}$$

здесь V_0 — постоянное положительное значение функции $V(r,\tilde{r})$ в области $0 \leqslant r \leqslant r_0 \ll l \leqslant \tilde{r}$, где r_0 и l — положительные параметры рассматриваемой модели, а $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

2. Метод Дарвина—Фаулера

Рассмотрим теперь ансамбль M систем, энергия U каждой из которых может принимать любое из заданных положительных значений U_k, где $k \in \mathbb{Z}_+$. Если выбрать единицу измерения величины U достаточно малой, то можно считать U_k целым числом при всех $k \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через m_k число систем с энергией U_k. Тогда набор целых чисел $\{m_k\}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, описывает любое распределение величины U по её возможным значениям. С помощью метода Дарвина—Фаулера найдём наиболее вероятное распределение этой величины при заданном её среднем значении $\bar{U}$ в предельном случае $M \to \infty$. Это значит, что указанные числа должны удовлетворять следующим условиям:

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k \equiv \Xi = M, \quad \sum_{k=0}^{\infty} m_k U_k \equiv \bar{\Xi} = M\bar{U}, \tag{4}$$

где $\bar{U}$ и M — целые числа. Пусть $W\{m_k\}$ обозначает число различных способов распределения значений величины U по системам при соблюдении условий (4). Очевидно, что

$$W\{m_k\} = \frac{M!}{m_0!\, m_1!\, m_2!\, \ldots}. \tag{5}$$

Согласно аксиоме равных априорных вероятностей в данном случае можно утверждать, что все распределения величины U между системами ансамбля имеют одинаковую вероятность, если выполнены условия (4). Тогда среднее значение m_k по всем распределениям величины U определяется как

$$\langle m_k\rangle \equiv \left[\sum_{\{m_j\geqslant 0\}} \delta_{\Xi,M}\,\delta_{\bar\Xi,M\bar U} W\{m_j\}\right]^{-1} \sum_{\{m_j\geqslant 0\}} \delta_{\Xi,M}\,\delta_{\bar\Xi,M\bar U}\, m_k W\{m_j\}, \quad (6)$$

где суммирование выполняется по всем наборам $m_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \mathbb{Z}_+$, а символы Кронекера $\delta_{\Xi,M}$ и $\delta_{\bar\Xi,M\bar U}$ можно записать с помощью формул Коши в виде равенств

$$\delta_{\Xi,M} \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\Gamma d\zeta\,\zeta^{\Xi-M-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \Xi = M,\\ 0, & \text{если } \Xi \neq M,\end{cases}$$

$$\delta_{\bar\Xi,M\bar U} \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma dz\,z^{\bar\Xi-M\bar U-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } \bar\Xi = M\bar U,\\ 0, & \text{если } \bar\Xi \neq M\bar U,\end{cases}$$

в которых замкнутые контуры Γ и γ охватывают начала координат в плоскостях комплексных переменных ζ и z соответственно.

Чтобы вычислить величину $\langle m_k\rangle$ с помощью (6), удобно использовать более общее выражение для $W\{m_k\}$:

$$W'\{m_k\} = M!\,\frac{\lambda_0^{m_0}\,\lambda_1^{m_1}\,\lambda_2^{m_2}\ldots}{m_0!\,m_1!\,m_2!\ldots}, \quad (7)$$

где числа λ_k, $k\in\mathbb{Z}_+$, принадлежащие малой окрестности точки $\lambda_k = 1$, в конце вычислений необходимо положить равными единице. Далее определим величину

$$S(M,\bar U) \equiv \sum_{\{m_j\geqslant 0\}} \delta_{\Xi,M}\,\delta_{\bar\Xi,M\bar U}\, W'\{m_j\} \quad (8)$$

и воспользуемся в правой части последнего равенства выражением (7). В результате получим

$$S(M,\bar U) = \frac{M!}{(2\pi i)^2}\oint\limits_\gamma dz\,z^{-M\bar U-1}\oint\limits_\Gamma d\zeta\,\zeta^{-M-1}e^{\zeta h(z)} = \\ = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_\gamma dz\,z^{-M\bar U-1}h^M(z), \quad (9)$$

где

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k z^{U_k}. \quad (10)$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{U_k\}$ — неубывающая последовательность целых чисел, не имеющих общего делителя, и $U_0 = 0$. Отсюда можно найти среднее значение $\langle m_k\rangle$ и дисперсию $\mathbb{D}m_k \equiv \langle m_k^2\rangle - \langle m_k\rangle^2$ по следующим формулам:

$$\langle m_k\rangle = \frac{\partial \ln S(M,\bar U)}{\partial\ln\lambda_k}, \quad \mathbb{D}m_k = \left(\frac{\partial}{\partial\ln\lambda_k}\right)^2 \ln S(M,\bar U).$$

Теперь, используя метод перевала [5] для асимптотической оценки последнего интеграла в (9), когда $M \to \infty$, мы получаем для главного члена его асимптотического разложения выражение

$$\ln S(M, \bar{U}) \approx MH(z_0) - \frac{1}{2}\ln[2\pi MH''(z_0)],$$

где

$$H(z_0) = \ln h(z_0) - \bar{U}\ln z_0, \quad H''(z_0) = \frac{h''(z_0)}{h(z_0)} - \frac{\bar{U}(\bar{U}-1)}{z_0^2},$$

а $z_0 \equiv \exp(-\beta)$ — положительный корень уравнения $H'(z) = 0$. Тогда значение параметра $\beta > 0$ определяется из равенства

$$\langle U \rangle \equiv \left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\beta U_k}\right)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} U_k e^{-\beta U_k} = \bar{U}.$$

В итоге с помощью равенств (7)—(10) приходим к следующим выражениям:

$$\lim_{M\to\infty} \frac{\langle m_k \rangle}{M} \equiv w_k = \left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\beta U_j}\right)^{-1} e^{-\beta U_k}, \tag{11}$$

$$\frac{\mathbb{D}m_k}{M^2} \equiv \frac{1}{M}\frac{\langle m_k\rangle}{M}\left[1 - O\left(\frac{\langle m_k\rangle}{M}\right)\right] \to 0, \quad M \to \infty.$$

Отсюда следует, что в пределе $M \to \infty$ формула (11) является точной, и следовательно, набор $\{\langle m_k\rangle\}$ соответствует максимальному значению величины $W\{m_k\}$, определяемой формулой (5). Таким образом, выражение (11) определяет вероятность найти систему в состоянии с энергией U_k а величину β можно считать обратно пропорциональной абсолютной температуре.

В основу статистического описания равновесной конфигурации цепи согласно формуле (11) положим плотность распределения в пространстве координат

$$w(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N) = \frac{1}{Q}\exp\left[-\frac{1}{T}\,U(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N)\right],$$

где один из концов цепи ($\mathbf{q}_0$) можно считать фиксированным в начале координат, а другой ($\mathbf{q}_N$) — свободным, Q — нормировочный множитель, $U = U(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N)$ — потенциальная энергия цепи, T — энергетический параметр, характеризующий равновесное состояние всей системы. Запишем искомую плотность вероятности расстояния R между концами цепи следующим образом:

$$W_N(\mathbf{R}) = \int d\mathbf{q}_1 \ldots d\mathbf{q}_N\, w(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_N)\delta(\mathbf{R} + \mathbf{q}_0 - \mathbf{q}_N), \tag{12}$$

где $\delta(\mathbf{q})$ — дельта-функция Дирака. Тогда в силу изотропности пространства $\mathbb{R}^d$ плотность распределения $W_N(\mathbf{R})$ зависит лишь от расстояния R свободного конца цепи от начала координат. Далее в интеграле (12) перейдём к новым переменным $\mathbf{r}_i = \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ и воспользуемся преобразованием

Фурье функции $\delta(\mathbf{q})$. В результате получим для $W_N(\mathbf{R})$ выражение

$$W_N(\mathbf{R}) = \frac{1}{Q_N} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \exp(i\,\mathbf{R}\cdot\mathbf{p}) g_N(p), \tag{13}$$

в котором

$$Q_N = \frac{Q}{Q_0^N}, \quad Q_0 = \omega_d \int\limits_0^\infty dr\, r^{2s+1} \exp\left[-\frac{u(r)}{T}\right], \quad s = \frac{d-2}{2},$$

$\omega_d = 2\pi^{s+1}/\Gamma(s+1)$ — площадь поверхности сферы единичного радиуса в $\mathbb{R}^d$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера, а функция $g_N(\mathbf{p})$ определяется как

$$g_N(\mathbf{p}) = \int P_{1N} \prod_{k=1}^{N} Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}_k)\, d\mathbf{r}_k, \tag{14}$$

где

$$P_{1N} = \exp\left[-\frac{h^2}{T} \sum_{1\leqslant i<j\leqslant N} V(r_{ij}, \tilde{r}_{ij})\right], \tag{15}$$

$$Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{Q_0} \exp\left[-i\,\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - \frac{u(r)}{T}\right]. \tag{16}$$

Из формул (14)—(16) следует, что

$$|g_N(\mathbf{p})| \leqslant g_N(\mathbf{0}), \tag{17}$$

где величина $g_N(\mathbf{0})$ удовлетворяет неравенствам

$$\exp\left(-\frac{N^2 h^2 V_0}{2T}\right) \leqslant g_N(\mathbf{0}) \leqslant 1. \tag{18}$$

В отсутствие объёмных взаимодействий, т. е. в случае $V_0 = 0$, функция $g_N(\mathbf{p})$ ввиду равенства (14) преобразуется к виду $g_N^{(0)}(\mathbf{p}) = g^N(\mathbf{p})$, где

$$g(\mathbf{p}) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{r}\, Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{\omega_d}{Q_0} \int\limits_0^\infty dr\, r^{2s+1}\, \Lambda_s(pr) \exp\left[-\frac{u(r)}{T}\right], \tag{19}$$

$\Lambda_s(x) = \Gamma(s+1)(2/x)^s J_s(x)$, $J_s(x)$ — функция Бесселя. Отсюда получаем, что $\Lambda_s(0) = 1$ и $g(0) = 1$. Теперь определим значение указанного выше параметра $l \equiv T/2\sigma$. Используя в формуле (19) выражение (2) в виде $u(r)/T = r^2/4h\,l$, получаем в результате интегрирования равенство

$$g(\mathbf{p}) = \exp(-hlp^2). \tag{20}$$

Отсюда, пользуясь выражением (13), находим, что $Q_N^{(0)} = 1$, и вычисляем предельное выражение для плотности вероятности:

$$W^{(0)}(\mathbf{R}, L) \equiv \lim W_N^{(0)}(\mathbf{R}) = (4\pi lL)^{-d/2} \exp(-R^2/4lL), \tag{21}$$

где предельный переход осуществляется при выполнении условия (1). Найденное с помощью последней формулы значение среднеквадратичного расстояния $\langle R^2\rangle_L^{(0)} = 2dlL$ между концами цепи может служить дополнением к приведённой выше характеристике величины l.

3. Основное уравнение

Приступим теперь к поиску асимптотики плотности вероятности

$$W(\mathbf{R}, L) = \lim W_N(\mathbf{R}), \quad \frac{R}{l} \to \infty, \quad \frac{L}{l} \to \infty, \tag{22}$$

при условии (1). С этой целью обратимся к формулам (13), (14) и в дополнение к определению в (15) введём следующие обозначения:

$$P_{mn} = \prod_{m\leqslant i<j\leqslant n} (1 + \varepsilon_{ij}), \quad \varepsilon_{ij} = \exp\left(-\frac{V_{ij}}{T}\right) - 1. \tag{23}$$

Разложим произведение P_{1N} в ряд по ε_{ij}:

$$P_{1N} = 1 + \sum_{k\geqslant 1}\left(\sum_{i_1<j_1}\sum_{i_2<j_2}\cdots\sum_{i_k<j_k}\varepsilon_{i_1j_1}\,\varepsilon_{i_2j_2}\ldots\varepsilon_{i_kj_k}\right), \tag{24}$$

где индексы в каждом из сомножителей $\varepsilon_{i_1j_1}, \varepsilon_{i_2j_2}, \ldots, \varepsilon_{i_kj_k}$ расположены в порядке возрастания, т. е. $i_k < j_k$ для $k \geqslant 1$, причём первые индексы этих сомножителей в каждом члене указанной суммы образуют неубывающую последовательность, $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_k$, и $(i_lj_l) \neq (i_mj_m)$ при $l \neq m$. Сомножители $\varepsilon_{i_mj_m}$ и $\varepsilon_{i_nj_n}$ называются связанными, если контурные участки цепи $\{\mathbf{r}_{i_m}, \ldots, \mathbf{r}_{j_m}\}$ и $\{\mathbf{r}_{i_n}, \ldots, \mathbf{r}_{j_n}\}$ содержат по крайней мере один общий сегмент, т. е. $i_m \leqslant i_n \leqslant j_n \leqslant j_m$ или $i_m \leqslant i_n \leqslant j_m \leqslant j_n$, и несвязанными в противном случае, при $i_m \leqslant j_m < i_n \leqslant j_n$. Любое произведение сомножителей в (24), расположенных в порядке неубывания их первых индексов, назовём комплексом, если в этом произведении каждый сомножитель начиная со второго связан по крайней мере с одним из предшествующих сомножителей. Тогда любой член суммы в (24) либо является комплексом, либо распадается на произведение некоторого числа комплексов. Обозначим через f_{ij} сумму всех комплексов, зависящих от векторов $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{i+1}, \ldots, \mathbf{r}_j$, где $i < j$, и назовём её блоком. Это означает, что

$$\begin{aligned} f_{ij} = {} & \varepsilon_{ij}P_{ij} + \sum_{i<k<l<j}\varepsilon_{il}\varepsilon_{kj}P_{ik}P_{kl}P_{lj} + \\ & + \sum_{i<k<l<m<n<j}(\varepsilon_{il}\varepsilon_{kn}\varepsilon_{mj} + \varepsilon_{in}\varepsilon_{km}\varepsilon_{lj} + \varepsilon_{im}\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ln} + \varepsilon_{im}\varepsilon_{kn}\varepsilon_{lj}) \times \\ & \times P_{ik}P_{kl}P_{lm}P_{mn}P_{nj} + \ldots, \end{aligned} \tag{25}$$

где в правой части под знаком первой суммы фигурирует всего лишь один представитель комплексов второго порядка по ε_{ij}, в то время как под знаком второй суммы находятся четыре неэквивалентных представителя комплексов третьего порядка относительно ε_{ij}. Для полного числа N_n неэквивалентных представителей комплексов n-го порядка по ε_{ij} имеет место асимптотическая оценка $N_n = O\big((2n-1)!!\big)$ при $n \to \infty$. Нетрудно заметить, что произведение P_{1N} можно разложить по блокам f_{ij} так, что каждый член суммы является либо блоком, либо произведением некоторого числа блоков:

$$P_{1N} = 1 + \sum_{i<j} f_{ij} + \sum_{i_1<j_1<i_2<j_2}\sum f_{i_1j_1} f_{i_2j_2} + \dots .$$

Подставляя это разложение в формулу (14) и выполняя надлежащее интегрирование в каждом её члене, получаем следующее выражение:

$$g_N(\mathbf{p}) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{N} \frac{(N-n+m)!}{(N-n)!\,m!}\, g^{N-n}(\mathbf{p}) F_n^{(m)}(\mathbf{p}), \tag{26}$$

здесь

$$F_n^{(0)}(\mathbf{p}) \equiv 0, \quad F_n^{(m)}(\mathbf{p}) = \sum_{n_1+\ldots+n_m=n} f_{n_1}(\mathbf{p}) \cdots f_{n_m}(\mathbf{p}), \quad m \geqslant 1, \tag{27}$$

$$f_1(\mathbf{p}) \equiv 0, \quad f_n(\mathbf{p}) = \int f_{1n} \prod_{k=1}^{n} Y_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}_k)\, d\mathbf{r}_{\mathbf{k}}, \quad n > 1, \tag{28}$$

и f_{1n}, как указано выше, обозначает блок, который состоит из всех комплексов, зависящих от векторов $\{\mathbf{r}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а множитель $(N-n+m)!/(N-n)!\,m!$ равен числу способов размещения m частичных отрезков, состоящих последовательно из $n_1, n_2, \ldots, n_m$ звеньев (общее их число равно n) и расположенных внутри одного отрезка из N звеньев, при условии, что сохраняется последовательность расположения частичных отрезков.

Воспользуемся формулой Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} dz\, z^{n_1+\ldots+n_m-n-1} = \begin{cases} 1, & \text{если } n_1+\ldots+n_m = n, \\ 0, & \text{если } n_1+\ldots+n_m \neq n, \end{cases}$$

в которой замкнутый контур γ охватывает начало координат на плоскости комплексной переменной z, и перепишем соотношение (26) в виде

$$F_n^{(m)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{dz}{z^{n+1}}\, f^m(\mathbf{p}, z), \tag{29}$$

где

$$f(\mathbf{p}, z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} z^n f_n(\mathbf{p}). \tag{30}$$

Далее подставим выражение (29) в (26) и распространим суммирование по n от $-\infty$ до N, что не оказывает влияния на конечный результат. Используя формулу

$$(1-x-y)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,x^m y^n, \quad |x+y|<1,$$

приведём выражение (26) к виду

$$g_N(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}[1-zg(\mathbf{p})-f(\mathbf{p},z)]^{-1}\frac{dz}{z^{N+1}}, \tag{31}$$

где замкнутый контур γ, охватывающий начало координат $z=0$, выбран так, чтобы выполнялось неравенство

$$|zg(\mathbf{p})+f(\mathbf{p},z)|<1.$$

Наконец, если определить производящую функцию

$$g(\mathbf{p},z) \equiv \sum_{N\geqslant 0} z^N g_N(\mathbf{p}), \tag{32}$$

то из равенства (31) следует основное уравнение [1]:

$$g^{-1}(\mathbf{p},z) = g_0^{-1}(\mathbf{p},z) - f(\mathbf{p},z), \tag{33}$$

в котором $g_0^{-1}(\mathbf{p},z) = 1 - zg(\mathbf{p})$. Однако для того чтобы уравнение (33) было замкнутым, необходимо установить связь между производящими функциями $f(\mathbf{p},z)$ и $g(\mathbf{p},z)$. С этой целью подставим выражение для f_{1n} из общей формулы (25) в равенство (28) и представим ε_{mn} в виде

$$\varepsilon_{mn} = \varepsilon\left(\left|\sum_{k=m+1}^{n}\mathbf{r}_k\right|, |m-n|\,h\right) = \\ = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{dz}{z^{n-m}}\int\frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d}\exp\left[-i\mathbf{p}\cdot\sum_{j=m+1}^{n}\mathbf{r}_j\right]\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p},z),$$

где

$$\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p},z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int d\mathbf{r}\,\exp(i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\left\{\exp\left[-\frac{h^2}{T}\,V(r,nh)\right]-1\right\} \tag{34}$$

в соответствии с определением ε_{mn} в (23). Если в уравнении (28) выполнить интегрирование по всем $\{\mathbf{r}_k\}$, $1\leqslant k\leqslant n$, и полученный результат подставить в (30), то после надлежащего суммирования мы получим выражение

$$f(\mathbf{p},z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{dz_1}{z_1}\int\frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d}\,\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_1,z_1)g\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1,\frac{z}{z_1}\right) + \\ + \frac{1}{(2\pi i)^2}\oint\limits_{\gamma}\frac{dz_1}{z_1}\oint\limits_{\gamma}\frac{dz_2}{z_2}\int\frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d}\int\frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^d}\,\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_1,z_1)\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}_2,z_2)\,\times \\ \times\, g\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1,\frac{z}{z_1}\right)g\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2,\frac{z}{z_1 z_2}\right)g\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}_2,\frac{z}{z_2}\right)+\ldots,$$

определяющее искомую связь между функциями $f(\mathbf{p}, z)$ и $g(\mathbf{p}, z)$. Полученный ряд в правой части последнего равенства удобно представить в символической форме

$$f(\mathbf{p}, z) = \sum_{n\geqslant 1} N_n \oint_\gamma \left\{\frac{dz'}{2\pi i z'}\right\}^n \int \left\{\frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^d}\right\}^n \{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{p}', z')\}^n \left\{g\left(\mathbf{p}-\mathbf{p}', \frac{z}{z'}\right)\right\}^{2n-1}$$

с целью продемонстрировать инвариантность уравнения (27) относительно мультипликативных преобразований

$$g \to g' = \alpha g, \quad g_0 \to g_0' = \alpha g_0, \quad \tilde{\varepsilon} \to \tilde{\varepsilon}' = \alpha^{-2}\tilde{\varepsilon}, \quad f \to f' = \alpha^{-1} f, \tag{35}$$

где α — отличный от нуля параметр, изменяющийся непрерывно. Эти преобразования образуют непрерывную группу, называемую ренормгруппой, а свойство (35) является исходной точкой для применения метода ренормгруппы в исследуемой задаче.

4. Переход к непрерывной модели

Чтобы осуществить переход от дискретной модели цепи к непрерывной, называемой в дальнейшем моделью открытой струны, введём новую переменную E посредством равенства

$$z = z(E) \equiv \exp(-Eh), \quad \operatorname{Re} E > 0, \tag{36}$$

и, применяя свойство инвариантности ренормгруппы (35), запишем уравнение (33) в форме

$$\big[hg\big(\mathbf{p}, z(E)\big)\big]^{-1} = h^{-1}(1-\exp[-h(E+lp^2)]) - h^{-1} f\big(\mathbf{p}, z(E)\big). \tag{37}$$

Тогда в силу неравенства

$$\big|g\big(\mathbf{p}, z(E)\big)\big| < \frac{1}{1-\exp(-h\operatorname{Re} E)}, \tag{38}$$

вытекающего из соотношений (17), (18), (33) и (36), функция $(1-z)g(\mathbf{p}, z)$, аналитическая в области $|z|<1$, является ограниченной внутри этой области, и поэтому существует предел [4]

$$\lim_{h\to 0} hg\big(\mathbf{p}, z(E)\big) \equiv \varphi(\mathbf{p}, E). \tag{39}$$

Из формул (38) и (39) следует неравенство

$$|\varphi(\mathbf{p}, E)| \leqslant \frac{1}{\operatorname{Re} E}. \tag{40}$$

Принимая во внимание соотношения (36), (37), (39) и определение

$$\lim_{h\to 0} h^{-1}\tilde{\varepsilon}\big(\mathbf{p}, z(E)\big) \equiv v(\mathbf{p}, E) = -\frac{1}{T}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{r} \int_0^\infty d\tilde{r}\, \exp[i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r} - E\tilde{r}] V(r, \tilde{r}), \tag{41}$$

мы получим для функции $\varphi(\mathbf{p},E)$ уравнение

$$\varphi^{-1}(\mathbf{p},E)=\varphi_0^{-1}(\mathbf{p},E)-F(\mathbf{p},E;\upsilon;\varphi), \tag{42}$$

где $\varphi_0^{-1}(\mathbf{p},E)=E+lp^2$, а функция $F(\mathbf{p},E;\upsilon;\varphi)$ определяется с помощью ряда

$$\begin{aligned}F(\mathbf{p},E;\upsilon;\varphi)=\int\frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d}\int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty}\frac{dE_1}{2\pi i}\upsilon(\mathbf{p}_1,E_1)\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1,E-E_1)+\\+\int\frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d}\int\frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^d}\int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty}\frac{dE_1}{2\pi i}\int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty}\frac{dE_2}{2\pi i}\,\upsilon(\mathbf{p}_1,E_1)\upsilon(\mathbf{p}_2,E_2)\times\\\times\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1,E-E_1)\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2,E-E_1-E_2)\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}_2,E-E_2)+\ldots\,.\end{aligned} \tag{43}$$

Согласно равенству (41) фигурирующая в (43) функция $\upsilon(\mathbf{p},E)$ есть $(d{+}1)$-мерная спектральная плотность функции $-V(r,\tilde{r})/T$. Используя выражение (3) в равенстве (41), находим, что

$$\upsilon(\mathbf{p},E)=-\upsilon(r_0p)E^{-1}\exp(-lE),\quad \upsilon(r_0p)=\upsilon_0\Lambda_{s+1}(r_0p), \tag{44}$$

где $\upsilon_0=\vartheta V_0/T$, $\vartheta=(\pi r_0^2)^{s+1}/\Gamma(s+2)$ — это d-мерный объём шара радиуса r_0. Подставим теперь выражение (44) во все члены ряда (43) и выполним в них соответствующие интегрирования по переменным E_k, $k=1,2,\ldots$. С этой целью в комплексной плоскости каждой из переменных E_k, $k=1,2,\ldots$, проведём разрез вдоль положительной части вещественной оси и сместим вертикальный контур интегрирования $(C-i\infty,C+i\infty)$ по переменной E_k, $k=1,2,\ldots$, бесконечно далеко в правую полуплоскость, обходя при этом особые точки подынтегральных функций. Если теперь выбрать значение параметра l достаточно большим, то из соотношений (40) и (44) следует, что основной вклад в интегралы вносят особые точки $E_k=0$, $k=1,2,\ldots$. Тогда, удерживая вклад в значения интегралов в (43) от указанных особых точек, мы приходим к равенству

$$\begin{aligned}F(\mathbf{p},E;\upsilon;\varphi)=-\upsilon_0\int\frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d}\Lambda_{s+1}(r_0p_1)\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1,E)+\\+\upsilon_0^2\int\frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi)^d}\int\frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^d}\Lambda_{s+1}(r_0p_1)\Lambda_{s+1}(r_0p_2)\times\\\times\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1,E)\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2,E)\varphi(\mathbf{p}-\mathbf{p}_2,E)-\ldots\,.\end{aligned} \tag{45}$$

Последнее выражение представим в символической форме

$$F(\mathbf{p},E;\upsilon;\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}N_n(-\upsilon_0)^n\int\left\{\frac{d\tilde{\mathbf{p}}}{(2\pi)^d}\right\}^n\{\Lambda_{s+1}(r_0\tilde{p})\}^n\{\varphi(\mathbf{p}-\tilde{\mathbf{p}},E)\}^{2n-1}, \tag{46}$$

из которой легко вывести инвариантность ренормгруппы уравнения (42):

$$\varphi\to\varphi'=\alpha\varphi,\quad \varphi_0\to\varphi_0'=\alpha\varphi_0,\quad \upsilon_0\to\upsilon_0'=\alpha^{-2}\upsilon_0,\quad F\to F'=\alpha^{-1}F.$$

С помощью соотношений (18), (32), (36) и (40) нетрудно доказать, что величина $F(0,E;\upsilon;\varphi)$ удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re}E \leqslant |E - F(0,E;\upsilon;\varphi)| \leqslant L^{-1}\exp\left(\frac{L^2V_0}{6T} + \frac{L}{2}\operatorname{Re}E\right). \tag{47}$$

Отсюда следует, что ряд в правой части равенства (45) сходится при $p = 0$, что обусловливает также сходимость интегралов в членах этого ряда. Тогда, принимая во внимание асимптотические формулы

$$\Lambda_{s+1}(z) = 1 - \frac{z^2}{4(s+2)} + O(z^4), \quad z \to 0,$$
$$\Lambda_{s+1}(|z|) = O(|z|^{-s-3/2}), \quad |z| \to \infty,$$

можно описать асимптотическое поведение функции $\varphi(\mathbf{p},0)$ на концах интервала $0 < p < \infty$. Действительно, пусть E_0 — наиболее удалённая вправо особая точка функции $\varphi(0,E)$, определяемая согласно (42) равенством

$$\varphi^{-1}(0,E_0) \equiv 0 \tag{48}$$

или, что эквивалентно, уравнением $E_0 - F(0,E_0;\upsilon;\varphi) \equiv 0$. Но из неравенств (47) и уравнения (48) вытекает, что $E_0 = 0$, и следовательно, $F(0,0;\upsilon;\varphi) = 0$. С другой стороны, уравнение (42) при $E = 0$ принимает вид

$$\varphi^{-1}(\mathbf{p},0) = lp^2 - F(\mathbf{p},0;\upsilon;\varphi). \tag{49}$$

Отсюда можно заключить, что запрет на самопересечения струны приведёт к распределению её размера, существенно отличному от нормального только в том случае, когда поведение функции $\varphi^{-1}(\mathbf{p},0)$ на интервале $0 < p < \infty$ будет определяться главным образом зависимостью функционала $F(\mathbf{p},0;\upsilon;\varphi)$ от p. Последнее условие означает, что при $p \to 0$ $F(\mathbf{p},0;\upsilon;\varphi) = O\big(p^{2(1-\mu)}\big)$ или $\varphi(\mathbf{p},0) = O(p^{2(\mu-1)})$, где $0 < \mu < 1$, а при $p \to \infty$ $p^{-2}F(\mathbf{p},0;\upsilon;\varphi) \to \infty$ или $p^2\varphi(\mathbf{p},0) \to 0$. Но из формул (45) и (46) следует, что при $E = 0$ и $p = 0$ всякий переход от одного члена ряда к следующему сопровождается добавлением интеграла вида

$$I(\mathbf{p}_1) = -\upsilon_0 \int \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi)^d}\Lambda_{s+1}(r_0p_2)\varphi(\mathbf{p}_2,0)\varphi(\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_1,0).$$

Вычисление последнего интеграла по малому объёму шара радиуса $p_2 = p_0$ с центром в точке $\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ при фиксированном значении $\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$ даёт величину порядка $O(p_0^{4\mu+2s-2})$ при $p_0 \to 0$. Отсюда вытекает следующее условие сходимости указанного интеграла: $1 - s < 2\mu$. Очевидно, что последнее условие содержательно лишь при $s \leqslant 1$. Таким образом, запрет на самопересечения открытой струны приводит в асимптотическом случае к распределению расстояния между её концами, существенно отличающемуся от нормального распределения при $d \leqslant 4$ ($s \leqslant 1$).

5. Уравнения ренормгруппы

Воспользуемся теперь формулой обращения для производящей функции (32) с целью выразить функцию $g_N(\mathbf{p})$ через $g(\mathbf{p}, z)$ и затем перейдём к пределу в (22), принимая во внимание равенства (36) и (39). В результате получим

$$W(\mathbf{R}, L) = \int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} \frac{dE}{2\pi i} \exp(LE)\psi(\mathbf{R}, E), \tag{50}$$

$$\psi(\mathbf{R}, E) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \exp(-i\mathbf{R}\cdot\mathbf{p})\varphi(\mathbf{p}, E). \tag{51}$$

Более реалистичной задачей является поиск асимптотики функции $W(\mathbf{R}, L)$ при $R/l \to \infty$ и $L/l \to \infty$. В этом случае из формул (50) и (51) следует, что для её решения необходимо знать поведение функции $\varphi(\mathbf{p}, E)$ при малых значениях p и $|E|$. Обозначим через $p_\pm \equiv \pm i\eta$ (здесь $\operatorname{Re}\eta > 0$) ближайшие к началу координат $p = 0$ корни уравнения $\varphi^{-1}(\mathbf{p}, E) = 0$. Полагая $p = p_+$ в уравнении (42), получаем тождество

$$\varphi^{-1}(i\eta, E) \equiv 0, \tag{52}$$

которое вместе с тождеством (48) определяет связь между переменными E и η^2:

$$E - E_0 \equiv l\eta^2 + F(i\eta, E; \upsilon; \varphi) - F(0, E_0; \upsilon; \varphi). \tag{53}$$

Наконец, с помощью тождества (52) преобразуем уравнение (42) к виду

$$\varphi^{-1} = l\chi^2 + F(i\eta, E; \upsilon; \varphi) - F(p, E; \upsilon; \varphi), \tag{54}$$

где $\chi^2 \equiv p^2 + \eta^2$. Система уравнений (53) и (54) составляет основу для получения указанной выше асимптотики как функции $W(\mathbf{R}, L)$, так и плотности вероятности $\mathcal{W}(\mathbf{R}, L)$ расстояния R между концами струны, контурная длина которой равна L. Однако, чтобы вывести выражение для $\mathcal{W}(\mathbf{R}, L)$, необходимо выполнить нормировку функции $W(\mathbf{R}, L)$. В результате с помощью равенств (50) и (51) мы получим для плотности вероятности $\mathcal{W}(\mathbf{R}, L)$ следующую формулу:

$$\mathcal{W}(\mathbf{R}, L) = \left[\int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} dE \exp[L(E - E_0)]\varphi(0, E)\right]^{-1} \times \\ \times \int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} dE \exp[L(E - E_0)]\psi(\mathbf{R}, E). \tag{55}$$

Поиск указанной асимптотики плотности $\mathcal{W}(\mathbf{R}, L)$ сводится, по существу, к вычислению показателя степени μ, $0 < \mu < 1$, в асимптотическом поведении функции φ,

$$\varphi = O\big(\chi^{2(\mu-1)}\big), \quad \chi \to 0, \tag{56}$$

и установлению асимптотической зависимости между переменными η и $E-E_0$,

$$E-E_0=O(\eta^{2\nu}),\quad \eta\to 0,$$

где $0<\nu<1$. Для реализации этого подхода воспользуемся инвариантностью ренормгруппы уравнения (54). С этой целью разделим обе части уравнения (54) на $l\chi^2$ и представим искомую функцию φ в виде

$$\varphi=\frac{X}{l\,\chi^2}, \tag{57}$$

где новая неизвестная функция X удовлетворяет уравнению

$$X^{-1}=1+\frac{\Psi(\chi^2,\eta^2;\upsilon;\varphi)}{l\,\chi^2}, \tag{58}$$

в котором

$$\Psi(\chi^2,\eta^2;\upsilon;\varphi)=F(i\eta,E;\upsilon;\varphi)-F(p,E;\upsilon;\varphi). \tag{59}$$

Предположим теперь, что при некотором не равном нулю значении $\chi^2=\lambda$ выполняется равенство $\Psi(\lambda,\eta^2;\upsilon;\varphi)=0$, где $\lambda=\lambda(\eta^2;\upsilon_0)$ — так называемая точка нормировки. Тогда уравнение (58) можно переписать в эквивалентной форме

$$X^{-1}=1+\left(\frac{\lambda}{\chi^2}\right)\tilde{\Psi}\left(\frac{\chi^2}{\lambda},\frac{\eta^2}{\lambda};\frac{\upsilon_0}{l^2\lambda^{1-s}};\frac{\lambda}{\chi^2}X\right).$$

Отсюда следует, что безразмерная величина X может быть представлена в окрестности точек $p=0$ и $E=0$ как функция $X=X(x,y;b)$ от безразмерных переменных

$$x=\frac{\chi^2}{\lambda},\quad y=\frac{\eta^2}{\lambda},\quad b=\frac{\upsilon_0}{l^2\lambda^{1-s}},$$

где число b представляет собой безразмерную комбинацию величин λ, l и υ_0. При этом в точке $x=1$ выполняется условие нормировки $X(1,y;b)=1$. Отсюда, учитывая свойство ренормгруппы уравнения (58), нетрудно вывести, что умножение функции $X=X(x,y;b)$ на отличное от нуля число a^{-1} приводит к изменению её точки нормировки, $\chi^2=\lambda'(\eta^2,\upsilon_0')$, и параметра b, $b'=a^{-2}\tau^{s-1}b$, где $\upsilon_0'=a^{-2}\upsilon_0$, $\tau=\lambda'/\lambda$, т. е. $aX(x,y;b)=X(x/\tau,y/\tau;b')$. Полагая $x=\tau$ в последнем равенстве и учитывая условие нормировки $X(1,y/\tau;b')=1$, мы получаем, что $a^{-1}=X(\tau,y;b)$, а указанное равенство преобразуется к виду

$$X(x,y;b)=X(\tau,y;b)X\left(\frac{x}{\tau},\frac{y}{\tau};b\,\tau^{s-1}X^2(\tau,y;b)\right).$$

Далее возведём в квадрат обе части данного уравнения и полученный результат умножим на bx^{s-1}. Тогда мы приходим к заключению, что величина

$$B(x,y;b)=bx^{s-1}X^2(x,y;b), \tag{60}$$

которую мы назовём инвариантным параметром ренормгруппы, удовлетворяет уравнению

$$B(x,y;b)=B\left(\frac{x}{\tau},\frac{y}{\tau};B(\tau,y;b)\right) \tag{61}$$

с условием нормировки

$$B(1, y; b) = b. \tag{62}$$

Уравнение (61) замкнуто и может быть решено в общем виде [2,3]. Однако для практических целей более удобно иметь дело с дифференциальным уравнением Ли, соответствующим непрерывной ренормгруппе,

$$x\frac{\partial B(x, y; b)}{\partial x} = \beta\left(\frac{y}{x}; B(x, y; b)\right), \tag{63}$$

где

$$\beta(y; b) = \left.\frac{\partial B(x, y; b)}{\partial x}\right|_{x=1},$$

а равенство (62) играет роль граничного условия для уравнения (63). В частном случае, когда $y \to 0$, уравнение для функции

$$B(x; b) = \lim_{y\to 0} B(x, y; b)$$

приводится к уравнению

$$x\frac{\partial B(x; b)}{\partial x} = \beta\big(B(x; b)\big)$$

или к уравнению в интегральной форме [8]:

$$\int\limits_b^{B(x;b)} \frac{da}{\beta(a)} = \ln x, \quad \beta(b) = \left.\frac{\partial B(x; b)}{\partial x}\right|_{x=1}.$$

При этом соответствующее граничное условие преобразуется к виду $B(1; b) = b$.

Таким образом, инвариантный параметр B является эффективным параметром, характеризующим объёмный эффект в малой окрестности точек $p = 0$ и $\eta = 0$. Его определение позволит описать асимптотическое поведение функции φ в соответствии с формулой (56). Обычно для этой цели используется теория возмущений, с помощью которой удаётся получить информацию о поведении функции $\beta(b)$ лишь в малой окрестности точки $b = 0$, где $\beta(b) = 0$. В самом деле, если в этой окрестности значение $\beta(b)$ положительно, то $B(x; b) \to 0$ при $x \to 0$, т. е. точка $b = 0$ является устойчивым нулём. Если же $\beta(b)$ принимает отрицательные значения вблизи нуля, то величина $B(x; b)$ возрастает при $x \to 0$ и теория возмущений становится неприменимой. Используя равенства (60) и (58), мы заключаем, что $B(x; b) \to 0$ при $x \to 0$, если $X(x, b) = o\big(x^{(1-s)/2}\big)$ при $x \to 0$. Отсюда следует, что если $X(x, b) = O(x^{\mu})$ при $x \to 0$, то в силу соотношений (56) и (57) неравенство

$$1 - s < 2\mu \tag{64}$$

является необходимым условием для определения функции $\beta(b)$ в окрестности точки $b = 0$.

Выше было показано, что условие (64) также необходимо для сходимости интегралов во всех членах ряда, представляющего функцию $F(\mathbf{p}, E; v; \varphi)$

в окрестности точек $\mathbf{p} = 0$ и $E = 0$. Но, поскольку значение μ не зависит от безразмерной переменной y, поведение функции $X(x, y; b)$ при $x \to 0$ тоже должно описываться подобным образом: $X(x, y; b) = O(x^{\mu})$. Тогда согласно асимптотике (56) для искомой функции φ мы имеем $\varphi = O(x^{\mu-1})$ при $x \to 0$. Таким образом, задача сводится к оценке функции $F(\mathbf{p}, 0; \upsilon; \varphi)$ в малой окрестности точки $p = 0$.

6. Асимптотика плотности вероятности

Выше было отмечено, что в случае $d < 4$ условие отсутствия самопересечений струны приводит к тому, что величина $\Psi(\chi^2, \eta^2; \upsilon; \varphi)$, определённая в (59), должна вносить основной вклад в правую часть уравнения (54). Поскольку в окрестностях точек $p = 0$ и $\eta = 0$ переменные p и η присутствуют в (54) лишь в виде комбинации $p^2 + \eta^2 \equiv \chi^2$, естественно предположить, что функция $\Psi(\chi^2, \eta^2; \upsilon; \varphi)$ в окрестности точек $p_{\pm} \equiv \pm i\eta$, т. е. вблизи $\chi = 0$, ведёт себя как $O\big(\chi^{2(1-\mu)}\big)$, где $0 < \mu < 1$, и растёт быстрее чем χ^2, когда $\chi^2 \to \infty$. Подобное асимптотическое поведение функции $\Psi(\chi^2, \eta^2; \upsilon; \varphi)$ можно качественно описать с помощью функции Макдональда $K_{\kappa}(z)$ следующим образом:

$$\Psi(\chi^2, \eta^2; \upsilon; \varphi) \sim O\big[\chi^{(1-\mu)} K_{1-\mu}^{-1}(l\chi)\big]$$

как при $\chi \to 0$, так и при $|\chi| \to \infty$. Функция $K_{\kappa}(z)$, $0 < \kappa < 1$, используется здесь благодаря своим асимптотическим свойствам

$$\frac{2^{1-\kappa}}{\Gamma(\kappa)} z^{\kappa} K_{\kappa}(z) = 1 - \frac{\Gamma(1-\kappa)}{\Gamma(1+\kappa)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\kappa} + \frac{1}{(1-\kappa)} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + O\big(z^{2(1+\kappa)}\big), \quad z \to 0,$$

$$K_{\kappa}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp(-z)[1 + O(z^{-1})], \quad |z| \to \infty,$$

адекватно передающим предполагаемое поведение функции Ψ. Кроме того, функция $K_{\kappa}(z) = K_{-\kappa}(z)$ при каждом фиксированном значении $z \neq 0$ является целой функцией от индекса κ, функционально связанного с размерностью d пространства $\mathbb{R}^d$. Поэтому, исходя из уравнения (54), соотношения (56) и описанного выше поведения функции Ψ, мы примем в качестве исходного приближения для искомой функции $\varphi(\mathbf{p}, E)$ выражение

$$\tilde{\varphi}(p, \eta) = A\chi^{2(\mu-1)} \bar{K}_{1-\mu}(l\chi), \tag{65}$$

в котором $\bar{K}_{\kappa}(z) = z^{\kappa} K_{\kappa}(z)$, а значения параметров A и $\mu = \mu(d)$, где $(1 - s)/2 < \mu < 1$ для $2 \leqslant d < 4$ $(0 \leqslant s < 1)$, ещё следует найти. Тогда согласно формулам (51) и (65) соответствующее приближение для функции $\psi(\mathbf{R}, E)$ имеет вид

$$\tilde{\psi}(R, \eta) = (2\pi)^{-d/2} A \varrho^{-2\nu} \bar{K}_{\nu}(\eta\varrho), \tag{66}$$

где $\varrho^2 = l^2 + R^2$, $\nu \equiv \mu + s$, при этом $(s + 1)/2 < \nu < s + 1$. Чтобы найти значение параметра μ, воспользуемся следующим способом. В соответствии с формулой (55), а также принятым приближением (65) и, как следствие, приближением (66) запишем для плотности вероятности $\mathcal{W}(\mathbf{R},L)$ приближение

$$\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R},L) = \\ = \left[\int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} dE\,\exp[L(E-E_0)]\tilde{\varphi}(0,\eta)\right]^{-1} \int\limits_{C-i\infty}^{C+i\infty} dE\,\exp[L(E-E_0)]\tilde{\psi}(\mathbf{R},\eta), \quad (67)$$

для которого получим асимптотическую оценку, когда $(L/l) \to \infty$, но значение (R/l) при этом остаётся фиксированным. Поскольку плотность $\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R},L)$ положительна и, следовательно,

$$\operatorname{Im}\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R},L) = 0, \quad (68)$$

условие (68) имеет место и для её асимптотики. Для реализации предложенного подхода обратимся к уравнению (53) и рассмотрим функцию $F(p,E;\upsilon;\varphi)$ в окрестностях точек $p=0$ и $E=E_0$ (при $\eta=0$), используя исходное приближение $\tilde{\varphi}(p,\eta)$ в равенстве (45). Принимая во внимание условие $r_0 \ll l$, приходим к соотношению

$$F(p,E;\upsilon;\tilde{\varphi}) = -\omega V_0 T^{-1} \int\limits_0^{r_0} dr\, r^{2s+1}\Lambda_s(pr)\,\tilde{\psi}(r,\eta) + \\ + \omega\upsilon^2(r_0 p)\int\limits_0^{\infty} dr\, r^{2s+1}\Lambda_s(pr)\tilde{\psi}^3(r,\eta) - \ldots . \quad (69)$$

Последнее выражение после оценки интегралов в нём подставим в равенство (53). В результате получим

$$E - E_0 = k_0[(l\eta)^{2\nu} + O(l^2\eta^2)], \quad \eta \to 0, \quad (70)$$

где $k_0 = kA_l\upsilon_l$, $A_l = Al^{-2\mu}$, $\upsilon_l = \upsilon_0 l^{-2s}$, k — определённая постоянная. Теперь в интегралах формулы (67) введём новую переменную интегрирования ξ:

$$E - E_0 = k_0\xi, \quad \xi \sim (l\eta)^{2\nu}, \quad \eta \to 0. \quad (71)$$

Далее проведём разрез в комплексной плоскости переменной ξ вдоль её отрицательной вещественной оси и в обоих интегралах формулы (67) сдвинем контур интегрирования $(C-i\infty, C+i\infty)$ по ξ бесконечно далеко в левую полуплоскость, обходя при этом особые точки подынтегральных функций, среди которых точка $\xi=0$ имеет наибольшую вещественную часть. Поэтому максимальный вклад в $\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R},L)$ при $L\to\infty$ вносит результат интегрирования в (67) по той части контура интегрирования, которая охватывает указанный разрез $(-\infty,0]$. Обозначим через $\xi_- = z\exp(-i\pi)$ и $\xi_+ = z\exp(i\pi)$ (где $z>0$) значения переменной ξ соответственно на нижнем и на верхнем берегах разреза $(-\infty,0]$. В формуле (67) учтём результат интегрирования лишь по контуру, охватывающему этот разрез. В итоге получим

$$\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R},L)\sim$$
$$\sim\left[\int\limits_0^\infty dz\,\exp(-Lk_0z)\Delta\tilde{\varphi}(\eta)\right]^{-1}\int\limits_0^\infty dz\,\exp(-Lk_0z)\Delta\tilde{\psi}(\mathbf{R},\eta),\quad L\to\infty,\quad (72)$$

где
$$\Delta\tilde{\varphi}(\eta)\equiv\tilde{\varphi}(0,\eta_+)-\tilde{\varphi}(0,\eta_-),\quad \Delta\tilde{\psi}(R,\eta)\equiv\tilde{\psi}(R,\eta_+)-\tilde{\psi}(R,\eta_-),$$
а переменные $\eta_-=\eta_-(z)$ и $\eta_+=\eta_+(z)$ согласно формуле (71) связаны с z вблизи точки $z=0$ на нижнем и верхнем берегах разреза $(-\infty,0]$:
$$z\exp(-i\pi)\sim(l\eta_-)^{2\nu},\quad \eta_-\to 0,$$
$$z\exp(i\pi)\sim(l\eta_+)^{2\nu},\quad \eta_+\to 0.$$
Асимптотическая оценка интегралов в (85) при $L\to\infty$ даёт
$$\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R},L)\sim\frac{C_0}{l^{4\nu}}\frac{(l^2+R^2)^{1-\nu}}{(k_0L)^{(2-\mu)/\nu}}\left[\frac{\exp(i\pi/\nu)-\exp(-i\pi/\nu)}{\exp[i\pi(\mu-1)/\nu]-\exp[-i\pi(\mu-1)/\nu]}\right],\quad (73)$$
где C_0 — вполне определённая положительная постоянная. Согласно условию (68) величина в квадратных скобках в правой части асимптотического выражения (73) должна быть положительной. Последнее требование соблюдается при выполнении равенства
$$\frac{\pi}{\nu}+\frac{\pi}{\nu}(1-\mu)=2\pi n,\quad n=1,2,\ldots,$$
которое совместно с условием $\nu=\mu+s$ лишь при $n=1$. Отсюда находим, что
$$\mu=\frac{2}{3}(1-s)=\frac{4-d}{3},\quad \nu=\frac{s+2}{3}=\frac{d+2}{6}.$$
Таким образом, искомая асимптотика плотности $\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R},L)$ при $L\to\infty$ имеет следующий вид:
$$\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R},L)\sim C_0l^{-d}(k_0L)^{-2}\left(1+\frac{R^2}{l^2}\right)^{(1-s)/3}.\quad (74)$$
Отметим, что различие в поведении функций $\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R},L)$ в (74) и асимптотики плотности в формуле (21) при $L\to\infty$ уменьшается, когда размерность d растёт, приближаясь к $d=4$. Этот факт объясняется ослаблением эффекта от запрета на самопересечения струны с ростом размерности пространства.

Далее определим для X приближение $\tilde{X}$ с помощью равенства
$$\tilde{\varphi}=\frac{\tilde{X}}{l\chi^2},\quad (75)$$
аналогичного (58), и выясним, в каком смысле функцию $\tilde{X}$ можно рассматривать в качестве решения уравнения
$$\tilde{X}^{-1}=1+\frac{\Psi(\chi^2,\eta^2;\upsilon;\tilde{\varphi})}{l\chi^2}.\quad (76)$$

Для этого рассмотрим асимптотическое поведение функции $\tilde{X}^{-1}$ в точке $\eta = 0$ при $p \to 0$. С одной стороны, из уравнений (65) и (75) следует, что в точке нормировки $p^2 = \lambda$ ($\lambda l^2 \ll 1$), где $\tilde{X}(p,0)|_{p^2=\lambda} = 1$ или $\Psi(\lambda, 0; \upsilon; \tilde{\varphi}) = 0$, мы имеем

$$\left.\frac{\partial \tilde{X}(p,0)}{\partial \ln p^2 l^2}\right|_{p^2=\lambda} = \mu - O\big[(\lambda l^2)^{(d-1)/3}\big]. \tag{77}$$

С другой стороны, если для описания асимптотики правой части равенства (76) в точке $\eta = 0$ при $p \to 0$ воспользоваться выражениями в (59) и (69), то

$$\begin{aligned}\Psi(p^2, 0; \upsilon; \tilde{\varphi}) &= \\ &= a\upsilon_l A_l[\Lambda_{s+1}(r_0 p) - 1] + c\upsilon_l^2 l^2 A_l^3[1 - \Lambda_{s+1}^2(r_0 p)\bar{K}_1(lp)] + O[\upsilon_l A_l r_0^2 p^2],\end{aligned} \tag{78}$$

где a и c — известные постоянные,

$$\bar{K}_1(z) = 1 + \frac{z^2}{2}\ln\frac{z}{2} + (2\gamma - 1)\left(\frac{z}{2}\right)^2 + O(z^4 \ln z), \quad z \to 0,$$

здесь γ — постоянная Эйлера—Маскерони. Тогда из уравнения (76) и выражения (78) следует, что

$$\left.\frac{\partial \tilde{X}(p,0)}{\partial \ln p^2 l^2}\right|_{p^2=\lambda} = \frac{c}{4l} A^3 \upsilon_0^2 + O\left[\frac{r_0^2}{l^2}\right]. \tag{79}$$

Сравнивая правые части равенств (77) и (79), мы получаем, что $A = C_A(l\upsilon_0^{-2})^{1/3}$, где C_A — вполне определённая положительная постоянная. Таким образом, значения всех параметров задачи определены, и мы можем выписать искомую асимптотику плотности вероятности $\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R}, L)$ в пространстве $\mathbb{R}^d$ при $2 \leqslant d < 4$, когда $(R/l) \to \infty$ и $(L/l) \to \infty$, но их отношение R/L фиксировано и мало. Используя формулы (65)—(67) и (70), находим главный член асимптотического разложения функции $\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R}, L)$:

$$\tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R}, L) \sim C_d \langle \varrho \rangle^{-d} \mathcal{Z}^{(4-d)D/6} \exp(-c_d \mathcal{Z}^D),$$

где

$$\langle \varrho \rangle = (k_0 L)^{3/(d+2)}, \quad \mathcal{Z} \equiv \frac{\varrho}{\langle \varrho \rangle} = \frac{\sqrt{l^2 + R^2}}{(k_0 L)^{3/(d+2)}}, \quad D = \frac{d+2}{d-1},$$

а c_d и C_d — вполне определённые постоянные. Случай $d = 4$ особый, и его следует рассматривать отдельно. Тем не менее полученный результат позволяет предположить, что в случае $d > 4$ асимптотика плотности вероятности при рассмотренных выше условиях будет иметь форму нормального распределения. Это означает, что в этом случае избегание самопересечений оказывает несущественное влияние на распределения расстояния между концами струны [7, 9].

7. Канонический ансамбль открытых струн

Рассмотрим теперь ансамбль из M струн, средняя длина которых по всем струнам равна заданной величине $\bar{L}$, и найдём наиболее вероятное распределение струн по их длинам в предельном случае $M \to \infty$. Допустим, что струны в ансамбле могут принимать любое из значений длин $L_k = kL$, где $k \in \mathbb{Z}_+$, а L — масштабная длина струны. Если в ансамбле m_k струн имеют длину L_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, то набор целых чисел $\{m_k\}$ описывает любое распределение их длин. При этом указанные числа должны удовлетворять следующим условиям:

$$\sum_{k=0}^{\infty} m_k = M, \quad \sum_{k=0}^{\infty} k m_k = M\bar{N}, \tag{80}$$

где $\bar{N} \equiv (\bar{L}/L) \gg 1$ и M — целые числа. Пусть $W\{m_k\}$ обозначает число различных способов распределения длин по струнам при соблюдении условий (80). Очевидно, что для $W\{m_k\}$ имеет место равенство (5), а для среднего значения m_k по всем распределениям длин справедлива формула (6). Тогда, следуя приведённому выше выводу канонического распределения, мы получим

$$\lim_{M\to\infty} \frac{\langle m_k \rangle}{M} \equiv \mathsf{P}(k) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \exp\{-\xi n\}\right]^{-1} \exp\{-\xi k\}, \tag{81}$$

где положительный параметр ξ определяется из уравнения

$$\bar{N} = \mathsf{E}k \equiv \sum_{k=0}^{\infty} k\mathsf{P}(k), \tag{82}$$

из которого находим, что $\xi = \ln(1 + 1/\bar{N})$. Учитывая равенство (82), усредним выражение (50) по распределению (81):

$$\mathsf{E}W(\mathbf{R}, L) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} W(\mathbf{R}, L_k)\mathsf{P}(k) = \left(\frac{1}{\bar{L}}\right) \psi\left(\mathbf{R}, \frac{1}{\bar{L}}\right). \tag{83}$$

Далее мы определим плотность распределения

$$\langle W(\mathbf{R}, L)\rangle \equiv \left[\int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathsf{E}W(\mathbf{R}, L)\, d\mathbf{R}\right]^{-1} \mathsf{E}W(\mathbf{R}, L). \tag{84}$$

Тогда из формул в (51), (83) следует, что

$$\langle W(\mathbf{R}, L)\rangle = \left[\varphi\left(0, \frac{1}{\bar{L}}\right)\right]^{-1} \psi\left(\mathbf{R}, \frac{1}{\bar{L}}\right). \tag{85}$$

Аналогично изложенному выше подходу воспользуемся исходным приближением (65) в равенстве (85) и получим соответствующее приближение для $\langle W(\mathbf{R}, L)\rangle$ в форме

$$\langle \tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R}, L)\rangle = [\tilde{\varphi}(0, \eta)]^{-1} \tilde{\psi}(R, \eta), \tag{86}$$

где связь между η и $\bar{L}$ определяется как

$$\frac{1}{\bar{L}} = k_0(\eta l)^{2\nu} + O(l\eta^2), \quad \eta \to 0,$$

в соответствии с равенством (70). В результате получим, что

$$\langle \tilde{\mathcal{W}}(\mathbf{R}, L) \rangle = \tilde{C}_d \ \varrho^{-\alpha} \tilde{L}^{-\beta} K_\nu \left(\frac{\varrho}{\tilde{L}} \right), \tag{87}$$

где $\tilde{C}_d$ — определённая положительная постоянная,

$$\varrho = \sqrt{l^2 + R^2}, \quad \tilde{L} = (k_0 \bar{L})^{1/2\nu}, \quad \alpha = \frac{d-1}{3}, \quad \beta = \frac{2d+1}{3}, \quad \nu = \frac{d+2}{6}.$$

Из формулы (87) находим для среднеквадратичного расстояния $\langle R^2 \rangle_{\bar{L}}$ между концами струн рассматриваемого ансамбля выражение

$$\langle R^2 \rangle_{\bar{L}} = \tilde{L}^2 \phi \left(\frac{l}{\tilde{L}} \right),$$

где $\phi(t)$ — вполне определённая положительная функция, почти постоянная в области $0 < t \ll 1$. Таким образом, формула (87) описывает искомое распределение канонического ансамбля открытых струн, избегающих самопересечений в $\mathbb{R}^d$ для $2 \leqslant d < 4$.

Литература

[1] Алхимов В. И. d-мерная модель канонического ансамбля открытых струн // Теор. и матем. физ. — 2014. — Т. 180, № 1. — С. 140—160.

[2] Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. — М.: Наука, 1976.

[3] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.

[4] Титчмарш Е. Теория функций. — М.: Наука, 1980.

[5] Федорюк М. В. Метод перевала. — М.: Наука, 1977.

[6] Хуанг К. Статистическая механика. — М.: Мир, 1966.

[7] Bridges D., Spencer T. Self-avoiding walk in 5 or more dimensions // Comm. Math. Phys. — 1985. — Vol. 97. — P. 125—148.

[8] Gell-Mann M., Low F. Quantum electrodynamics at small distances // Phys. Rev. — 1954. — Vol. 95. — P. 1300—1312.

[9] Hara T., Slade G. The lace expansion for self-avoiding walk in five or more dimensions // Rev. Math. Phys. — 1992. — Vol. 4. — P. 235—327.