Полные системы собственных функций оператора Владимирова в $L^2(B_r)$ и $L^2(\mathbb{Q}_p)$

А. Х. БИКУЛОВ
Институт химической физики им. Н. Н. Семёнова РАН
e-mail: bikulov1903@rambler.ru

А. П. ЗУБАРЕВ
Самарский государственный аэрокосмический университет,
Самарский государственный университет путей сообщения
e-mail: apzubarev@mail.ru

УДК 512.625+517.518.34+517.983.37+517.984.57

Ключевые слова: p-адический анализ, оператор Владимирова, p-адические псевдодифференциальные операторы, базис функций из $L^2(\mathbb{Q}_p)$.

Аннотация

Построены новые вещественные базисы функций из $L^2(B_r)$ и из $L^2(\mathbb{Q}_p)$. Эти функции являются собственными функциями p-адического псевдодифференциального оператора Владимирова, определённого на компакте $B_r \subset \mathbb{Q}_p$ поля p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ и на всём поле $\mathbb{Q}_p$ соответственно. Установлена связь построенного базиса функций из $L^2(\mathbb{Q}_p)$ с базисом p-адических всплесков из $L^2(\mathbb{Q}_p)$. В качестве приложения рассмотрено решение задачи Коши с начальным условием на компакте для псевдодифференциального уравнения с псевдодифференциальным оператором общего вида, являющимся диагональным в построенном базисе.

Abstract

A. Kh. Bikulov, A. P. Zubarev, Complete systems of eigenfunctions of the Vladimirov operator in $L^2(B_r)$ and $L^2(\mathbb{Q}_p)$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 3, pp. 39—56.

We construct new bases of real functions from $L^2(B_r)$ and from $L^2(\mathbb{Q}_p)$. These functions are eigenfunctions of the p-adic pseudo-differential Vladimirov operator, which is defined on a compact set $B_r \subset \mathbb{Q}_p$ of the field of p-adic numbers $\mathbb{Q}_p$ or, respectively, on the entire field $\mathbb{Q}_p$. A relation between the basis of functions from $L^2(\mathbb{Q}_p)$ and the basis of p-adic wavelets from $L^2(\mathbb{Q}_p)$ is found. As an application, we consider the solution of the Cauchy problem with the initial condition on a compact set for a pseudo-differential equation with a general pseudo-differential operator that is diagonal in the basis constructed.

1. Введение

Теория p-адических псевдодифференциальных операторов была развита В. С. Владимировым в [5] (см. также [20, 25] и ссылки там). В [5] был

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 3, с. 39—56.

определён оператор D^α, который известен в литературе по p-адической математической физике как псевдодифференциальный оператор Владимирова. Псевдодифференциальные уравнения, содержащие оператор Владимирова, в настоящее время находят широкое применение в различных областях математики и физики: p-адические эволюционные уравнения и интегралы по траекториям [11, 12], p-адическизначные случайные процессы [13, 22, 25], p-адическое моделирование конформационной динамики белков [2, 14—16], p-адические моделирование прототипов молекулярных наномашин [1], p-адические модели социально-экономических систем [4] и др.

Оператор Владимирова диагонализуется p-адическим преобразованием Фурье. Имеются также базисы, состоящие из собственных функций оператора Владимирова с компактным носителем. Примеры базисов оператора Владимирова были построены в [6, 7, 22, 24]. В [8] был построен ещё один пример ортонормированного базиса из собственных векторов оператора Владимирова, названный базисом p-адических всплесков. Оператор Владимирова и схожие операторы с трансляционно инвариантными ядрами, которые диагонализуются преобразованием Фурье, также диагонализуются и всплесками, но базис всплесков диагонализует и более общую конструкцию псевдодифференциальных операторов, которую преобразование Фурье уже не диагонализует [8—10].

В разделе 2 данной работы мы излагаем анализ Фурье на компакте, который неоднократно применялся в наших работах, но никогда не был математически формализован. Мы считаем, что этот аппарат, широко применяемый в физических приложениях, заслуживает отдельного систематического изложения. Разложение по дискретному базису характеров на компакте есть не что иное, как аналог дискретного преобразования Фурье. Данный базис характеров является собственным для модифицированного оператора Владимирова на компакте $B_r \subset Q_p$, который имеет вид

$$D^\alpha(B_r)f(x) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-\alpha-1}} \int\limits_{B_r} \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|_p^{\alpha+1}}\, dy.$$

Данный оператор отличен от сужения оператора Владимирова на B_r, которое рассматривалось в [25]. Рассматриваемый оператор является более естественным для применения в приложениях p-адического анализа к физике, в частности к моделированию конформационной динамики белка [1, 2, 14—16]. Разложение функций по рассматриваемому базису, как мы уже отмечали выше, применялось в ряде наших предыдущих работ. Впервые такое разложение было сделано на $\mathbb{Z}_p$ в [3]. В [14] было найдено решение системы уравнений типа «реакция—ультраметрическая диффузия» на B_r в форме разложения по данному базису.

В разделе 3 мы строим новый вещественный базис в $L^2(B_r)$. Этот базис представляет собой полный набор собственных функций оператора Владимирова на B_r и также является полным набором собственных функций для более общих операторов.

В разделе 4 рассматривается расширение данного базиса до базиса в $L^2(\mathbb{Q}_p)$, а также рассматривается связь данного базиса с базисом p-адических всплесков. Здесь же в качестве приложения рассматривается решение задачи Коши с начальным условием на компакте для псевдодифференциального уравнения с псевдодифференциальным оператором общего вида, являющимся диагональным в построенном базисе.

2. Преобразование Фурье, свёртка и спектр оператора Владимирова на B_r

Пусть $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел и p — фиксированное простое число. Любое рациональное число $x \neq 0$ однозначно представимо в виде

$$x = p^\gamma \frac{a}{b}, \tag{1}$$

где $a, b, \gamma \in \mathbb{Z}$ — целые числа, a и b — натуральные числа, не делящиеся на p и не имеющие общих множителей. p-адическая норма $|x|_p$ числа $x \in \mathbb{Q}$ определяется равенствами $|x|_p = p^{-\gamma}$, $|0|_p = 0$. Пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по p-адической норме образует поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Метрика $d(x,y) = |x-y|_p$ превращает $\mathbb{Q}_p$ в полное, сепарабельное, вполне несвязное, локально компактное, ультраметрическое пространство.

Введём следующие обозначения:

$$B_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p \colon |x-a|_p \leqslant p^r\} \text{ —}$$

шар радиуса p^r с центром в точке a,

$$S_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p \colon |x-a|_p = p^r\} \text{ —}$$

сфера радиуса p^r с центром в точке a, $B_r \equiv B_r(0)$, $S_r \equiv S_r(a)$, $\mathbb{Z}_p \equiv B_0$. Будем также обозначить через $\Omega(|x|_p p^\gamma)$ и $\delta(|x|_p - p^\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{Z}$, функции

$$\Omega(|x|_p p^\gamma) = \begin{cases} 1, & |x|_p p^\gamma \leqslant 1, \\ 0, & |x|_p p^\gamma > 1, \end{cases} \qquad \delta(|x|_p - p^\gamma) = \begin{cases} 1, & |x|_p = p^\gamma, \\ 0, & |x|_p \neq p^\gamma. \end{cases}$$

На $\mathbb{Q}_p$ существует единственная (с точностью до множителя) мера Хаара $d_p x$, инвариантная относительно сдвигов: $d_p(x+a) = d_p x$. Условимся нормировать эту меру так, чтобы

$$\int\limits_{\mathbb{Z}_p} d_p x = 1. \tag{2}$$

При таком соглашении мера $d_p x$ единственна.

Введём класс W_l^α ($\alpha \geqslant 0$) комплекснозначных функций $f(x)$ на $\mathbb{Q}_p$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $|\varphi(x)| \leqslant C(1 + |x|_p^\alpha)$, где C — действительное положительное число;

2) существует натуральное число l, такое что для любых $x \in \mathbb{Q}_p$ и для любых $x' \in \mathbb{Q}_p$, таких что $|x'|_p \leqslant p^l$, имеет место равенство $\varphi(x+x') = \varphi(x)$.

Функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая данному условию, называется локально постоянной, а число l — показателем локального постоянства функции.

Множество финитных функций из W^0 называют основными функциями (функциями Брюа—Шварца) и обозначают через D, а множество всех обобщённых функций на D обозначают через D'. Будем также обозначать через D_r^l множество функций из W_l^0 с носителем в шаре

$$B_r = \{x\colon |x|_p \leqslant p^r\}.$$

Пусть χ — нормированный аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$. Тогда $\chi \in W^0$. Преобразование Фурье функции $\varphi(x) \in L^1(\mathbb{Q}_p, d_p x)$ определяется формулой

$$\tilde{\varphi}(k) = F[\varphi(x)](k) \equiv \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi(kx)\varphi(x)\, d_p x, \quad k \in \mathbb{Q}_p.$$

Обратное преобразование для $\tilde{\varphi}(k) \in L^1(\mathbb{Q}_p, d_p k)$ определяется формулой

$$\varphi(x) = F^{-1}[\tilde{\varphi}(k)](x) \equiv \int\limits_{\mathbb{Q}_p} \chi(-kx)\tilde{\varphi}(k)\, d_p k, \quad x \in \mathbb{Q}_p.$$

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Если $f(x) \in D_r^l(\mathbb{Q}_p)$, то $\tilde{f}(k) \in D_{-l}^{-r}(\mathbb{Q}_p)$.*

Оператор D^α (псевдодифференциальный оператор Владимирова [25]), $\alpha > 0$, определён на функциях $f \in W_l^\beta(\mathbb{Q}_p)$, $0 \leqslant \beta < \alpha$, формулой

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int\limits_{\mathbb{Q}_p} d_p y \frac{f(y) - f(x)}{|x-y|_p^{\alpha+1}}, \tag{3}$$

где

$$\Gamma_p(-\alpha) = \frac{1 - p^{-\alpha-1}}{1 - p^\alpha}$$

есть p-адический аналог гамма-функции.

Мы определяем также аналог оператора (3) на $W^0(B_r)$ следующей формулой:

$$D^\alpha(B_r)\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int\limits_{B_r} d_p y \frac{\varphi(y,t) - \varphi(x,t)}{|y-x|_p^{\alpha+1}}. \tag{4}$$

Теорема 2. *Пусть $\varphi(x) \subset L^1(B_r, d_p x)$. Тогда функция*

$$\tilde{\varphi}(k) = p^{-r/2} \int\limits_{B_r} \chi(kx)\varphi(x) d_p x \tag{5}$$

лежит в W^0_{-r} *(т. е. является функцией от* $k \in \mathbb{Q}_p/B_{-r}$*) и имеет место формула*

$$\varphi(x) = p^{-r/2} \sum_{k \in \mathbb{Q}_p/B_{-r}} \chi(-kx)\tilde{\varphi}(k). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $k' \in \mathbb{Q}_p$, причём $|k'|_p \leqslant p^{-r}$. Тогда $\chi(k'x) = 1$ при $|x|_p \leqslant p^r$, и мы имеем

$$\tilde{\varphi}(k+k') = p^{-r/2} \int\limits_{B_r} \chi(kx)\chi(k'x)\varphi(x)d_px = \tilde{\varphi}(k). \tag{7}$$

Таким образом, и $\tilde{\varphi}(k)$ локальна постоянна с показателем локальной постоянности $l = -r$. Поэтому можно считать, что $k \in \mathbb{Q}_p/B_{-r}$.

Рассмотрим при $s > -r$ функцию

$$\varphi_s(x) = p^{-r/2} \sum_{k \in B_s/B_{-r}} \chi(-kx)\tilde{\varphi}(k) = \\ = p^{-r/2} \sum_{k \in B_s/B_{-r}} \chi(-kx)\Big[p^{-r/2}\int\limits_{B_r} \chi(ky)\varphi(y)\,d_py\Big].$$

Поскольку интеграл равномерно сходится по k, мы имеем

$$\varphi_s(x) = p^{-r} \int\limits_{B_r} \varphi(y)\Big[\sum_{k \in B_s/B_{-r}} \chi\big(k(y-x)\big)\Big]d_py = \\ = \int\limits_{B_r} \varphi(y)\Big[\int\limits_{B_s} \chi(k(y-x))d_pk\Big]d_py = \int\limits_{B_r} \varphi(y)[p^s\Omega(|x-y|_pp^s)]\,d_py.$$

Принимая во внимание

$$\int\limits_{B_r} [p^s\Omega(|x-y|_pp^s)]d_py = 1,$$

получаем

$$\varphi_s(x) - \varphi(x) = \int\limits_{B_r} \big(\varphi(y)-\varphi(x)\big)[p^s\Omega(|x-y|_pp^s)]\,d_py = \\ = \int\limits_{|x-y|_p \leqslant p^{-s}} \big(\varphi(y)-\varphi(x)\big)\,d_py \to 0$$

при $s \to \infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{s\to\infty} \varphi_s(x) = \varphi(x),$$

и мы получаем (6), что завершает доказательство теоремы. □

Из теоремы 2 следует, что функции $\chi(kx)$ образуют полную систему функций в $L^1(B_r, d_p x)$. Данные функции являются взаимно ортогональными в $L^2(B_r, d_p x)$, и ввиду соотношения

$$\int\limits_{B_r} d_p x [p^{-r/2}\chi(-k'x)][p^{-r/2}\chi(kx)] = p^{-r}\int\limits_{B_r} d_p x \chi\big((k-k')x\big) = \delta_{k,k'}$$

мы имеем следующий результат.

Следствие 1. *Набор функций* $p^{-r/2}\chi(kx)$,

$$k = \ldots + a_{i-1}p^{i-1} + a_i p^i + a_{i+1}p^{i+1} + \ldots + a_{r-1}p^{r-1} \in \mathbb{Q}_p/B_{-r},$$

$a_- = 0, 1, \ldots, p-1$, *образуют счётный ортонормированный базис на* $L^2(B_r, d_p x)$.

Теорема 3. *Пусть* $f(x), g(x) \in L^2(B_r, d_p x)$ *и*

$$\tilde f(k) = p^{-r/2}\int\limits_{B_r} \chi(kx) f(x)\, d_p x, \quad \tilde g(k) = p^{-r/2}\int\limits_{B_r} \chi(kx) g(x)\, d_p x.$$

Тогда

$$f(x)g(x) = p^{-r/2}\sum_{\zeta\in\mathbb{Q}_p/B_{-r}} \chi(-\zeta x)\widetilde{[fg]}(\zeta), \tag{8}$$

где

$$\widetilde{[fg]}(\zeta) = p^{-r/2}\sum_{k\in\mathbb{Q}_p/B_{-r}} \tilde f(k)\tilde g(\zeta-k) \tag{9}$$

и

$$\int\limits_{B_r} f(y)g(x-y)d_p y = \sum_{k\in\mathbb{Q}_p/B_{-r}} \chi(-kx)\tilde f(k)\tilde g(k). \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим для $s > -r$ функции

$$f_s(x) = p^{-r/2}\sum_{k\in B_s/B_{-r}} \chi(-kx)\tilde f(k), \quad g_s(x) = p^{-r/2}\sum_{k\in B_s/B_{-r}} \chi(-kx)\tilde g(k).$$

Тогда

$$f(x)g(x) = \lim_{s\to\infty} f_s(x)g_s(x).$$

Каждая из сумм в $f_s(x)$и $g_s(x)$ содержит конечное число слагаемых, поэтому, записав

$$f(x)g(x) = p^{-r}\lim_{s\to\infty}\sum_{\xi\in B_s/B_{-r}}\sum_{k\in B_s/B_{-r}} \chi(-(k+\xi)x)\tilde f(k)\tilde g(\xi),$$

можно сделать замену переменной $k+\xi = \zeta \in B_s/B_{-r}$. Тогда после перехода к пределу при $s\to\infty$ получаем

$$f(x)g(x) = p^{-r/2}\sum_{\zeta\in Q_p/B_{-r}} \chi(-\zeta x)p^{-r/2}\sum_{k\in\mathbb{Q}_p/B_{-r}} \tilde f(k)\tilde g(\zeta-k),$$

что завершает доказательство (9).

Для доказательства (10) рассмотрим

$$\int\limits_{B_r} f(y)g(x-y)\,d_px = \lim_{s\to\infty}\int\limits_{B_r} f_s(y)g_s(x-y)\,d_px =$$

$$= p^{-r}\lim_{s\to\infty}\int\limits_{B_r}\Bigg[\sum_{k\in B_s/B_{-r}}\chi(-ky)\tilde f(k)\Bigg]\Bigg[\sum_{k'\in B_s/B_{-r}}\chi\big(-k'(x-y)\big)\tilde g(k')\Bigg]d_px =$$

$$= p^{-r}\lim_{s\to\infty}\int\limits_{B_r}\Bigg[\sum_{k\in B_s/B_{-r}}\ \sum_{k'\in B_s/B_{-r}}\chi\big((k-k')y\big)\tilde f(k)\Bigg][\chi(-k'x)\tilde g(k')]\,d_px.$$

Ввиду конечности сумм можно записать

$$\int\limits_{B_r} f(y)g(x-y)\,d_px =$$

$$= p^{-r}\lim_{s\to\infty}\sum_{k\in B_s/B_{-r}}\ \sum_{k'\in B_s/B_{-r}}\Bigg[\int\limits_{B_r}\chi\big((k-k')y\big)\,d_px\Bigg]\tilde f(k)\tilde g(k')\chi(-k'x).$$

Учитывая соотношение

$$\int\limits_{B_r}\chi\big((k-k')y\big)\,d_px = p^r\delta_{k,k'}$$

и переходя к пределу при $s\to\infty$, получаем

$$\int\limits_{B_r} f(y)g(x-y)\,d_px = \sum_{k\in\mathbb{Q}_p/B_{-r}}\tilde f(k)\tilde g(k)\chi(-kx),$$

что завершает доказательство теоремы. □

Лемма 1. *Функции $p^{-r/2}\chi(kx)$, $k\in\mathbb{Q}_p/B_{-r}$, являются собственными функциями оператора* (4) *с собственными значениями*

$$|k|_p^\alpha - (1-p^{-1})\frac{p^{-\alpha r}}{1-p^{-\alpha-1}}(1-\delta_{k,0}).$$

Доказательство. Рассмотрим действие $D^\alpha(B_r)$ на $\chi(kx)$ при $k\in\mathbb{Q}_p/B_{-r}$ и $x\in B_r$. Если $k=0$, то $D^\alpha(B_r)\chi(kx)=0$. Если $|k|_p>p^{-r}$, то имеем

$$D^\alpha(B_r)\chi(kx) = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\int\limits_{B_r} d_py\frac{\Omega(|y|_pp^{-r})\chi(ky)-\Omega(|x|_pp^{-r})\chi(kx)}{|y-x|_p^{\alpha+1}} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\int\limits_{B_r} d_py\frac{\chi(ky)-\chi(kx)}{|y-x|_p^{\alpha+1}} = \frac{\chi(kx)}{\Gamma_p(-\alpha)}\int\limits_{B_r} d_py\frac{\chi(ky)-1}{|y|_p^{\alpha+1}}.$$

Вычисление интеграла даёт

$$\int\limits_{B_r} d_py\frac{\chi(ky)-1}{|y|_p^{\alpha+1}} = \left(|k|_p^\alpha\Gamma_p(-\alpha) + (1-p^{-1})\frac{p^{-\alpha(r+1)}}{1-p^{-\alpha}}\right).$$

Таким образом, имеем

$$D^{\alpha}(B_r)\chi(kx) = \left(|k|_p^{\alpha} - (1-p^{-1})\frac{p^{-\alpha r}}{1-p^{-\alpha-1}}\right)\chi(kx),$$

что доказывает лемму. □

3. Вещественный базис в $L^2(B_r)$

Из следствия 1 и леммы 1 вытекает следующий результат.

Следствие 2. *Пусть $\phi_\gamma(k)$ — некоторый набор функций из $L^1(\mathbb{Q}_p/B_{-r})$, $\gamma \leqslant r$, причём $\phi_\gamma(k) = \phi_\gamma^*(-k)$. Тогда функции*

$$f_\gamma(x) = \sum_{k\in\mathbb{Q}_p/B_{-r}} \delta(|k|_p - p^{-\gamma+1})\phi_\gamma(k)\chi(kx), \quad \gamma \leqslant r,$$

являются ортогональными вещественными собственными функциями оператора (4) *с собственными значениями*

$$\lambda_\gamma = p^{-\alpha(\gamma-1)} - (1-p^{-1})\frac{p^{-\alpha r}}{1-p^{-\alpha-1}}. \tag{11}$$

В частности, выбирая

$$\phi_\gamma(k) = p^{-r+\gamma-1}$$

и используя соотношение

$$\sum_{k\in\mathbb{Q}_p/B_{-r}} \delta(|k|_p - p^{-\gamma+1})\chi(-kx) = p^{r-\gamma+1}(1-p^{-1})\Omega(|x|_p p^{-\gamma+1}) - p^{r-\gamma}\delta(|x|_p - p^{\gamma}),$$

получаем, что

$$f_\gamma(x) = (1-p^{-1})\Omega(|x|_p p^{-\gamma+1}) - p^{-1}\delta(|x|_p - p^{\gamma}) \tag{12}$$

или

$$f_\gamma(x) = \Omega(|x|_p p^{-\gamma+1}) - p^{-1}\Omega(|x|_p p^{-\gamma}). \tag{13}$$

Из соотношений

$$\int_{B_r} [\Omega(|x|_p p^{-\gamma+1}) - p^{-1}\Omega(|x|_p p^{-\gamma})]^2\, d_p x = p^{\gamma-1}(1-p^{-1}), \tag{14}$$

$$\int_{B_r} [\Omega(|x|_p p^{-\gamma+1}) - p^{-1}\Omega(|x|_p p^{-\gamma})][\Omega(|x|_p p^{-\delta+1}) - p^{-1}\Omega(|x|_p p^{-\delta})]\, d_p x =$$

$$= p^{\gamma-1}(1-p^{-1})\delta_{\gamma\delta} \tag{15}$$

вытекает, что набор функций (13) является ортогональным набором собственных функций оператора (4) с собственными значениями (11).

Поскольку оператор Владимирова $D^\alpha(B_r)$ инвариантен относительно сдвигов координат и любой шар из B_r радиуса γ может быть получен из шара B_γ сдвигом $x \to x - n$, где $n \in B_r/B_\gamma$, то функции

$$f_{\gamma,n}(x) = f_\gamma(x-n) = [\Omega(|x-n|_p p^{-\gamma+1}) - p^{-1}\Omega(|x-n|_p p^{-\gamma})], \quad \gamma \leqslant r, \ \ n \in B_r/B_\gamma, \tag{16}$$

полученные из функций (13) сдвигом $x \to x - n$, являются собственными функциями оператора (4) с собственными значениями (11). Далее, сдвиг $x \to x - ap^{-\gamma}$, $a = 0, 1, \ldots, p-1$, оставляет функцию $\Omega(|x-n|_p p^{-\gamma})$ инвариантной, но изменяет функцию $\Omega(|x-n|_p p^{-\gamma+1})$. Поэтому функции

$$\begin{aligned} f_{\gamma,n,a}(x) = f_{\gamma,n}(x - ap^{-\gamma}) = f_\gamma(x - n - ap^{-\gamma}) = \\ = [\Omega(|x - n^{-\gamma} - ap^{-\gamma}|_p p^{-\gamma+1}) - p^{-1}\Omega(|x-n|_p p^{-\gamma})], \end{aligned} \tag{17}$$

где $\gamma \leqslant r$ и $n \in B_r/B_\gamma$, также являются собственными функциями оператора (4) с собственными значениями (11).

Теорема 4. *Функции* (17) *и постоянная функция*

$$f_r(x) = p^{-r} \tag{18}$$

образуют полную систему векторов в пространстве $L^2(B_r)$.

Доказательство. Поскольку множество характеристических функций всех шаров образуют базис в $L^2(B_r)$, то достаточно доказать, что характеристическая функция $\Omega(|y-n'|_p p^{-\gamma'})$ любого шара $B_{\gamma'}(n')$, $\gamma' \leqslant r$, $n' \in B_r/B_{\gamma'}$, из B_r может быть представлена в виде линейной комбинации функций из (17):

$$C_r f_r(x) + \sum_{\gamma=-\infty}^{r} \sum_{n \in B_r/B_\gamma} \sum_{b=1}^{p-1} C_{\gamma,n,b} f_{\gamma,n,b}(x) = \Omega(|x-n'|_p p^{-\gamma'}). \tag{19}$$

Поскольку множество функций $f_{\gamma,n,b}(x)$ инвариантно относительно преобразований $x \to p^{-\gamma'}(x-n)'$, то достаточно проверить (19) для фиксированных γ' и n', например для $\gamma' = 0$, $n' = 0$, т. е. для $\Omega(|x|)$. Нетрудно убедиться, что

$$\Omega(|x|_p) = f_r(x) + \sum_{\gamma=1}^{r} p^{-\gamma+1} f_{\gamma,0,0}(x), \tag{20}$$

что завершает доказательство теоремы. □

Замечание 1. Полная система функций $\{f_r, \{f_{\gamma,n,a}(x)\}\}$ является переполненной в $L^2(B_r)$, поскольку из набора p функций $f_{\gamma,n,a}(x)$ для $a = 0, 1, \ldots, p-1$ при фиксированных i и n только $p-1$ функций являются линейно независимыми вследствие соотношения

$$\sum_{a=0}^{p-1} f_{\gamma,n,a}(x) = 0.$$

Следующая теорема даёт конструкцию ортонормированного базиса в $L^2(B_r)$.

Теорема 5. *Функции*

$$\varphi_{\gamma,n,b}(x) = \frac{p^{-(\gamma-1)/2}}{k}\big(f_{\gamma,n,0}(x) + kf_{\gamma,n,b}(x)\big), \quad \gamma \leqslant r, \quad b = 1, \ldots, p-1, \tag{21}$$

и функция

$$\varphi_r(x) = p^{-r/2} \tag{22}$$

при $k = -1 \pm \sqrt{p}$ образуют ортонормированный базис в $L^2(B_r)$.

Доказательство. Поскольку функции $f_{\gamma,n,a}(x)$ и $f_r = p^{-r}$ при различных i и n ортогональны, то ортогональны при различных i и n также и функции $\varphi_{\gamma,n,b}(x)$ и $\varphi_r(x)$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{B_r} d_px\varphi_{\gamma,n,b}(x)\varphi_{\gamma,n,b'}(x) = \\
&\quad = \frac{p^{-\gamma+1}}{k^2}\int\limits_{B_r} d_px[f_{\gamma,n,0}(x) + kf_{\gamma,n,b}(x)][f_{\gamma,n,0}(x) + kf_{\gamma,n,b'}(x)] = \\
&\quad = \frac{p^{-\gamma+1}}{k^2}\int\limits_{B_r} d_px[f_{\gamma,n,0}(x)f_{\gamma,n,0}(x) + kf_{\gamma,n,b}(x)f_{\gamma,n,0}(x) + \\
&\quad + kf_{\gamma,n,b'}(x)f_{\gamma,n,0}(x) + k^2f_{\gamma,n,b}(x)f_{\gamma,n,b'}(x)].
\end{aligned}$$

С учётом того, что

$$\begin{aligned}
&\int d_pxf_{\gamma,n,a}(x)f_{\gamma,n,b}(x) = \\
&\quad = \int\limits_{B_r} d_px[\Omega(|x-n-ap^{-\gamma}|_pp^{-\gamma+1}) - p^{-1}\Omega(|x-n|_pp^{-\gamma})] \times \\
&\quad \times [\Omega(|x-n-bp^{-\gamma}|_pp^{-\gamma+1}) - p^{-1}\Omega(|x-n|_pp^{-\gamma})] = \\
&\quad = (p^{\gamma-1}\delta_{ab} - 2p^{-1}p^{\gamma-1} + p^{-2}p^{\gamma}) = p^{\gamma-1}(\delta_{ab} - p^{-1}),
\end{aligned}$$

получаем, что

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_r} d_px\varphi_{\gamma,n,b}(x)\varphi_{\gamma,n,b'}(x) &= \frac{p^{-\gamma+1}}{k^2}p^{\gamma-1}(1 - p^{-1} - 2p^{-1}k + (\delta_{b,b'} - p^{-1})k^2) = \\
&= \frac{1}{k^2}(p^{-1}(p-1-2k-k^2) + \delta_{b,b'}k^2) = \delta_{b,b'},
\end{aligned}$$

поскольку $k = -1 \pm \sqrt{p}$ является корнем уравнения $p - 1 - 2k - k^2 = 0$. Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Замечание 2. Имеют место следующие формулы обратного перехода от $\varphi_{\gamma,n,b}(x)$ к $f_{\gamma,n,a}(x)$:

$$f_{\gamma,n,0}(x) = \frac{kp^{(\gamma-1)/2}}{p-k-1}\sum_{b=1}^{p-1}\varphi_{\gamma,n,b}(x),$$

$$f_{\gamma,n,b}(x) = p^{(\gamma-1)/2}\left(\varphi_{\gamma,n,b}(x) - \frac{1}{p-k-1}\sum_{b'=1}^{p-1}\varphi_{\gamma,n,b'}(x)\right), \quad b = 1,\ldots,p-1.$$

Для демонстрации удобства применения построенного выше базиса (21), (22) рассмотрим задачу Коши уравнения Владимирова

$$\frac{d}{dt}f(x,t) = -D^\alpha(B_r)f(x) \tag{23}$$

с начальным условием

$$f(x,0) = \Omega(|x|_p).$$

Формально решение уравнения (23) можно записать в форме

$$f(x,t) = \exp(-D^\alpha(B_r)t)f(x,0).$$

Поскольку имеет место разложение (20) , то легко находим решение:

$$f(x,t) = \exp(-D^\alpha(B_r)t)\left(f_r(x) + \sum_{\gamma=1}^{r}p^{-\gamma+1}f_{\gamma,0,0}(x)\right) =$$

$$= \frac{1}{p^r} + \sum_{i=0}^{r-1}p^{-i}\big(\Omega(|x|_p p^{-i}) - p^{-1}\Omega(|x|_p p^{-i-1})\big) \times$$

$$\times \exp\left(-\left(p^{-i\alpha} - (1-p^{-1})\frac{p^{-r\alpha}}{1-p^{-\alpha-1}}\right)t\right). \tag{24}$$

4. Вещественный базис в $L^2(\mathbb{Q}_p)$ и его связь с базисом всплесков

Имеет место следующая теорема.

Теорема 6. *Функции*

$$f_{\gamma,n,a}(x) = [\Omega(|x - np^{-\gamma} - ap^{-\gamma}|_p p^{-\gamma+1}) - p^{-1}\Omega(|x - np^{-\gamma}|_p p^{-\gamma})], \tag{25}$$

при $\gamma \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Q}_p/Z_p$ *и* $a = 0, 1, \ldots, p-1$ *являются собственными функциями оператора Владимирова на* $\mathbb{Q}_p$ (3) *с собственными значениями*

$$\lambda_\gamma = p^{-\alpha(\gamma-1)} \tag{26}$$

и образуют полную систему векторов в пространстве $L^2(\mathbb{Q}_p)$.

Доказательство. Поскольку $\mathbb{Q}_p$ можно рассматривать как предельный случай B_r при $r \to \infty$, то, повторяя рассуждения предыдущего раздела, нетрудно убедится, что функции (25) являются собственными функциями оператора (3) с собственными значениями (26).

Поскольку множество характеристических функций всех шаров образуют базис в $L^2(\mathbb{Q}_p)$, то достаточно доказать, что характеристическая функция $\Omega(|x-n'p^{-\gamma'}|_p p^{-\gamma'})$ любого шара $B_{\gamma'}(n'p^{-\gamma'})$, $\gamma'\in\mathbb{Z}$, $n'\in\mathbb{Q}_p/Z_p$, из $\mathbb{Q}_p$ может быть разложена по функциям (17). Поскольку множество функций $f_{\gamma,n,b}(x)$ инвариантно относительно преобразований $x\to p^{-\gamma'}x-n'$, то достаточно проверить, что такое разложение имеет место для любых фиксированных γ' и n', например для $\gamma'=0$, $n'=0$, т. е.

$$\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Q}_p/Z_p}\sum_{b=1}^{p-1}C_{\gamma,n,b}f_{\gamma,n,b}(x)=\Omega(|x|). \tag{27}$$

Рассмотрим функцию $g(x)$, представленную равномерно сходящимся по x рядом:

$$g(x)=\sum_{\gamma=1}^{\infty}p^{-\gamma+1}f_{\gamma,0,0}(x). \tag{28}$$

Рассмотрим квадрат нормы

$$\|g(x)-\Omega(|x|)\|^2=\int\limits_{\mathbb{Q}_p}d_px\big(g(x)-\Omega(|x|)\big)^2.$$

Ввиду равномерной сходимости (28), используя (14) и (15), получаем, что

$$\begin{aligned}
&\|g(x)-\Omega(|x|)\|^2=\\
&=\sum_{\gamma=1}^{\infty}p^{-\gamma+1}\sum_{\delta=1}^{\infty}p^{-\delta+1}\int\limits_{\mathbb{Q}_p}d_pxf_{\gamma,0,0}(x)f_{\delta,0,0}(x)-\\
&-2\sum_{\gamma=1}^{\infty}p^{-\gamma+1}\int\limits_{\mathbb{Q}_p}d_pxf_{\gamma,0,0}(x)\Omega(|x|)+\int\limits_{\mathbb{Q}_p}d_px\Omega(|x|)=\\
&=\sum_{\gamma=1}^{\infty}p^{-\gamma+1}\ \sum_{\delta=1}^{\infty}p^{-\delta+1}(p^{\gamma-1}(1-p^{-1})\delta_{\gamma\delta})-2\sum_{\gamma=1}^{\infty}p^{-\gamma+1}(1-p^{-1})+1=\\
&=(1-p^{-1})\sum_{\gamma=1}^{\infty}p^{-\gamma+1}-2(1-p^{-1})\sum_{\gamma=1}^{\infty}p^{-\gamma+1}+1=\\
&=-(1-p^{-1})\sum_{\gamma=0}^{\infty}p^{-\gamma}+1=0.
\end{aligned}$$

Из равенства нулю нормы следует, что $g(x)=\Omega(|x|)$. Таким образом,

$$\Omega(|x|)=\sum_{\gamma=1}^{\infty}p^{-\gamma+1}f_{\gamma,0,0}(x), \tag{29}$$

и имеет место (27). Это завершает доказательство теоремы. □

Теорема 7. *Функции*

$$\varphi_{\gamma,n,b}(x) = \frac{p^{-(\gamma-1)/2}}{k}\bigl(f_{\gamma,n,0}(x) + kf_{\gamma,n,b}(x)\bigr),$$
$$\gamma \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Q}_p/Z_p, \quad b = 1,\dots,p-1, \quad (30)$$

при $k = -1 \pm \sqrt{p}$ *образуют ортонормированный базис в* $L^2(\mathbb{Q}_p)$.

Доказательство теоремы 7 проводится аналогично доказательству теорем 5 и 6.

Установим связь введённого базиса с базисом p-адических всплесков в $L^2(\mathbb{Q}_p)$, который был получен в [8—10]. Базис p-адических всплесков образован функциями

$$\psi_{\gamma,n,j}(x) = p^{-\gamma/2}\chi\bigl(p^{\gamma-1}j(x - p^{-\gamma}n)\bigr)\Omega(|p^\gamma x - n|_p),$$
$$\gamma \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \quad j = 1,\dots,p-1. \quad (31)$$

Суммирование (31) по j даёт

$$\sum_{j=1}^{p-1}\psi_{\gamma,n,j}(x) = p^{-\gamma/2}\Omega(|p^\gamma x - n|_p)\sum_{j=1}^{p-1}\chi\bigl(p^{\gamma-1}j(x - p^{-\gamma}n)\bigr) =$$
$$= p^{-\gamma/2}\bigl(\Omega(|x - p^{-\gamma}n|p^{-\gamma+1}) - \delta(|x - p^{-\gamma}n| - p^\gamma)\bigr)\sum_{j=1}^{p-1}\chi\bigl(p^{\gamma-1}j(x - p^{-\gamma}n)\bigr) =$$
$$= p^{-\gamma/2+1}\bigl((1 - p^{-1})\Omega(|x - p^{-\gamma}n|p^{-\gamma+1}) - p^{-1}\delta(|x - p^{-\gamma}n| - p^\gamma)\bigr) =$$
$$= p^{-\gamma/2+1}\bigl(\Omega(|x - p^{-\gamma}n|p^{-\gamma+1}) - p^{-1}\Omega(|x - p^{-\gamma}n|p^{-\gamma})\bigr) = p^{-\gamma/2+1}f_{\gamma,n,0}(x).$$

Отсюда выражаем

$$f_{\gamma,n,0}(x) = p^{\gamma/2-1}\sum_{j=1}^{p-1}\psi_{\gamma,n,j}(x)$$

и находим функции $f_{\gamma,n,a}(x)$ и $\varphi_{\gamma,n,b}(x)$ для $\gamma \leqslant r$, $a = 0,1,\dots,p-1$, $b = 1,\dots,p-1$:

$$f_{\gamma,n,a}(x) = p^{\gamma/2-1}\sum_{j=1}^{p-1}\psi_{\gamma,n,j}(x - ap^{-\gamma}),$$
$$\varphi_{\gamma,n,b}(x) = \frac{p^{-1/2}}{k}\sum_{j=1}^{p-1}\bigl(\psi_{\gamma,n,j}(x) + k\psi_{\gamma,n,j}(x - bp^{-\gamma})\bigr).$$

Поскольку

$$\psi_{\gamma,n,j}(x - bp^{-\gamma}) = \psi_{\gamma,n,j}(x)\chi(p^{-1}jb),$$

имеем

$$f_{\gamma,n,a}(x) = p^{\gamma/2-1}\sum_{j=1}^{p-1}\chi(p^{-1}ja)\psi_{\gamma,n,j}(x), \tag{32}$$

$$\varphi_{\gamma,n,b}(x) = \frac{p^{-1/2}}{k}\sum_{j=1}^{p-1}\bigl(1+k\chi(p^{-1}jb)\bigr)\psi_{\gamma,n,j}(x). \tag{33}$$

Сделаем обратное преобразование от $\varphi_{\gamma,n,b}(x)$ к $\psi_{\gamma,n,j}(x)$. Поскольку

$$\sum_{a=0}^{p-1}\chi(p^{-1}ja)\chi(-p^{-1}j'a) = \sum_{a=0}^{p-1}\chi\bigl(p^{-1}a(j-j')\bigr) = p\delta_{j,j'},$$

то

$$\sum_{a=0}^{p-1}\chi(-p^{-1}j'a)f_{\gamma,n,a}(x) =$$
$$= p^{\gamma/2-1}\sum_{a=0}^{p-1}\sum_{j=1}^{p-1}\chi(-p^{-1}j'a)\chi(p^{-1}ja)\psi_{\gamma,n,j}(x) = p^{\gamma/2}\psi_{\gamma,n,j'}(x).$$

Отсюда следует, что

$$\psi_{\gamma,n,j}(x) = p^{-\gamma/2}\sum_{a=0}^{p-1}\chi(-p^{-1}j'a)f_{\gamma,n,a}(x). \tag{34}$$

Выражая в (34) $f_{\gamma,n,a}(x)$ через $\varphi_{\gamma,n,b}(x)$, получаем

$$\begin{aligned}
\psi_{\gamma,n,j}(x) &= p^{-\gamma/2}f_{\gamma,n,0}(x) + p^{-\gamma/2}\sum_{b=1}^{p-1}\chi(-p^{-1}jb)f_{\gamma,n,a}(x) = \\
&= \frac{kp^{-1/2}}{p-k-1}\sum_{b=1}^{p-1}\varphi_{\gamma,n,b}(x) + \\
&+ p^{-1/2}\sum_{b=1}^{p-1}\chi(-p^{-1}jb)\left(\varphi_{\gamma,n,b}(x) - \frac{1}{p-k-1}\sum_{b'=1}^{p-1}\varphi_{\gamma,n,b'}(x)\right) = \\
&= \frac{kp^{-1/2}}{p-k-1}\sum_{b=1}^{p-1}\varphi_{\gamma,n,b}(x) + \\
&+ p^{-1/2}\left(\sum_{b=1}^{p-1}\chi(-p^{-1}jb)\varphi_{\gamma,n,b}(x) + \frac{1}{p-k-1}\sum_{b=1}^{p-1}\varphi_{\gamma,n,b}(x)\right).
\end{aligned}$$

Окончательно запишем

$$\psi_{\gamma,n,j}(x) = p^{-1/2}\sum_{b=1}^{p-1}\left(\frac{k+1}{p-k-1} + \chi(-p^{-1}jb)\right)\varphi_{\gamma,n,b}(x). \tag{35}$$

Формулы (32)—(35) дают связь рассматриваемого в статье базиса с базисом всплесков в $L^2(\mathbb{Q}_p)$.

В [8, 9] было показано, что базис всплесков диагонализует не только псевдодифференциальный оператор Владимирова, но и класс псевдодифференциальных операторов вида

$$Tf(x) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} T(x,y)\big(f(y) - f(x)\big)\,dy, \tag{36}$$

где ядро $T(x,y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $T(x,y) = T(y,x)$,
2) $T(x,y) = \mathrm{const}$ на множестве точек, удовлетворяющих уравнению $|x-y|_p = \mathrm{const}$.

Такое ядро можно представить в общей форме

$$T(x,y) = \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Q}_p/Z_p} T^{(\gamma,n)}\delta(|x-y|_p - p^{\gamma})\Omega(|x-np^{-\gamma}|_p p^{-\gamma}). \tag{37}$$

В [8, 9] также показано, что всплески (31) являются собственными функциями оператора (36) с ядром (37) с собственными значениями

$$\lambda_{\gamma n} = -p^{\gamma}T^{(\gamma,n)} - (1-p^{-1})\sum_{\gamma'=\gamma+1}^{\infty} p^{\gamma'}T^{(\gamma',p^{\gamma'-\gamma}n)}. \tag{38}$$

Из формул (32) и (33), выражающих связь переполненной системы функций $f_{\gamma,n,a}(x)$ и ортонормированного базиса $\varphi_{\gamma,n,b}(x)$ через функции базиса всплесков $\psi_{\gamma,n,j}(x)$, следует, что функции (25) и (30) также являются собственными функциями псевдодифференциального оператора (36) с ядром (37) с собственными значениями (38).

Для демонстрации использования базиса (30) рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{d}{dt}f(x,t) = Tf(x) \tag{39}$$

с псевдодифференциальным оператором (36) с ядром (37) и начальным условием

$$f(x,0) = \Omega(|x|_p).$$

Формальное решение уравнения (39) можно записать в форме

$$f(x,t) = \exp(Tt)f(x,0).$$

Тогда, используя разложение (29), можно представить данное решение в виде ряда

$$
\begin{aligned}
f(x,t) &= \exp(Tt)\left(\sum_{\gamma=1}^{\infty} p^{-\gamma+1} f_{\gamma,0,0}(x)\right) = \\
&= \sum_{\gamma=1}^{\infty} p^{-\gamma+1}\big(\Omega(|x|_p p^{-\gamma+1}) - p^{-1}\Omega(|x|_p p^{-\gamma})\big) \times \\
&\times \exp\left(-\left(p^{\gamma} T^{(\gamma,n)} + (1-p^{-1})\sum_{\gamma'=\gamma+1}^{\infty} p^{\gamma'} T^{(\gamma', p^{\gamma'-\gamma} n)}\right) t\right). \qquad (40)
\end{aligned}
$$

5. Заключение

В настоящей работе мы ввели новый вещественный базис, который образован собственными оператора Владимирова на компакте $B_r \subset \mathbb{Q}_p$ и на поле $\mathbb{Q}_p$. Следует отметить, что все базисы оператора Владимирова, найденные в предшествующих работах [6—10, 22, 24], выражались через характеры поля $\mathbb{Q}_p$ как аддитивной группы. Подобную конструкцию можно использовать только на ультраметрических пространствах, обладающих структурой группы. К таким пространствам относятся поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, кольцо m-адических чисел $\mathbb{Q}_m$ [19], кольцо a-адических чисел [21], являющиеся однородными ультраметрическими пространствами, т. е. пространствами, в которых для любого фиксированного радиуса шара r существует такое число $N(r)$, что любой шар $B_r(a)$ может быть представлен как объединение $N(r)$ шаров радиуса $r' < r$. Предложенный в настоящей работе базис не содержит характеров поля $\mathbb{Q}_p$ как аддитивной группы и целиком выражается через характеристические функции шаров в $\mathbb{Q}_p$. По этой причине такую конструкцию можно использовать для построения базисов в неоднородных бесконечных ультраметрических пространствах, в которых отсутствует групповая структура. Подобные базисы на конечных ультраметрических пространствах произвольной топологии изучались в [17,23]. В связи с этим использование данного типа базисов может стать отправной точкой решения спектральной задачи аналога оператора Владимирова в ультраметрическом пространстве, не обладающем групповой структурой, путём её сведения к спектральной задаче некоторой модификации оператора Владимирова в $\mathbb{Q}_p$. Решению последней задачи будет посвящена отдельная публикация [18].

Работа частично поддержана Минобрнауки РФ в рамках Программы повышения конкурентоспособности СГАУ на 2013—2020 гг.

Литература

[1] Аветисов В. А., Бикулов А. Х., Зубарев А. П. О математическом моделировании молекулярных «нано-машин» // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2011. — Т. 1, № 22. — С. 9—15.

[2] Аветисов В. А., Бикулов А. Х., Зубарев А. П. Ультраметрическое случайное блуждание и динамика белковых молекул // Тр. МИАН. — 2014. — Т. 285. — С. 9—32.

[3] Бикулов А. Х., Волович И. В. p-адическое броуновское движение // Изв. РАН. Сер. матем. — 1997. — Т. 61, № 3. — С. 75—90.

[4] Бикулов А. Х., Зубарев А. П., Кайдалова Л. В. Иерархическая динамическая модель финансового рынка вблизи точки обвала и p-адический математический анализ // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2006. — Т. 42. — С. 135—140.

[5] Владимиров В. С. Обобщённые функции над полем p-адических чисел // УМН. — 1989. — Т. 43. — С. 17—53.

[6] Владимиров В. С. О спектре некоторых псевдодифференциальных операторов над полем p-адических чисел // Алгебра и анализ. — 1990. — Т. 2, № 6. — С. 107—124.

[7] Владимиров В. С. О разветвлённых характерах группы иделей одноклассных квадратичных полей // Тр. МИАН. — 1999. — Т. 224. — С. 122—129.

[8] Козырев С. В. Анализ всплесков как p-адический спектральный анализ // Изв. РАН. Сер. Матем. — 2002. — Т. 66, № 2. — С. 149—158.

[9] Козырев С. В. p-адические псевдодифференциальные операторы и p-адические всплески // Теор. и матем. физ. — 2004. — Т. 138, № 3. — С. 383—394.

[10] Козырев С. В., Хренников А. Ю. Псевдодифференциальные операторы на ультраметрических пространствах и ультраметрические всплески // Изв. РАН. Сер. матем. — 2005. — Т. 69, № 5. — С. 133—148.

[11] Смолянов О. Г., Шамаров Н. Н. Формулы Фейнмана и интегралы по траекториям для эволюционных уравнений с оператором Владимирова // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2009. — Т. 265. — С. 229—240.

[12] Смолянов О. Г., Шамаров Н. Н. Гамильтоновы формулы Фейнмана для уравнений, содержащих оператор Владимирова с переменными коэффициентами // Докл. РАН. — 2011. — Т. 440, № 5. — С. 597—602.

[13] Albeverio S., Khrennikov A. Yu., Shelkovich V. M. Theory of p-Adic Distributions: Linear and Nonlinear Models. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.

[14] Avetisov V. A. , Bikulov A. Kh., Kozyrev S. V., Osipov V. A. p-adic models of ultrametric diffusion constrained by hierarchical energy landscapes // J. Phys. A: Math. Gen. — 2002. — Vol. 35. — P. 177—189.

[15] Avetisov V. A., Bikulov A. Kh., Osipov V. A. p-adic description of characteristic relaxation in complex systems // J. Phys. A: Math. Gen. — 2003. — Vol. 36. — P. 4239—4246.

[16] Avetisov V. A., Bikulov A. Kh., Zubarev A. P. First passage time distribution and the number of returns for ultrametric random walks // J. Phys. A: Math. Theor. — 2009. — Vol. 42. — P. 085003—085020.

[17] Bachas C. P., Huberman B. A. Complexity and the relaxation of hierarchical structures // Phys. Rev. Lett. — 1986. — Vol. 57. — P. 1965—1969.

[18] Bikulov A. Kh., Zubarev A. P. Application of p-adic analysis methods in describing Markov processes on ultrametric spaces isometrically embedded into Q_p // p-Adic Numbers Ultrametric Analysis Appl. — 2015. — Vol. 7, no. 2. — P. 111—122.

[19] Dolgopolov M. V., Zubarev A. P. Some aspects of m-adic analysis and its applications to m-adic stochastic processes // p-Adic Numbers Ultrametric Analysis Appl. — 2011. — Vol. 3, no. 1. — P. 39—51.

[20] Dragovich B., Khrennikov A. Yu., Kozyrev S. V., Volovich I. V. On p-adic mathematical physics // p-Adic Numbers Ultrametric Analysis and Appl. — 2009. — Vol. 1, no. 1. — P. 1—17.

[21] Hewitt E., Ross K. A. Abstract Harmonic Analysis. — Berlin: Springer, 1987.

[22] Kochubei A. N. Pseudodifferential Equations and Stochastics over Non-Archimedean Fields. — New York: CRC Press, 2001.

[23] Motyl W. G. Dynamics on random ultrametric spaces // J. Phys. A: Math. Gen. — 1987. — Vol. 20. — P. 5481—5488.

[24] Vladimirov V. S. p-Adic Analysis and p-Adic Quantum Mechanics. — (Ann. New York Acad. Sci.: Symp. Frontiers Math.). — 1988.

[25] Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E. I. p-Adic Analysis and Mathematical Physics. — Singapure: World Scientific, 1994.