Псевдодополнения в решётке многообразий мультипликативно идемпотентных полуколец*

Е. М. ВЕЧТОМОВ
Вятский государственный университет
e-mail: vecht@mail.ru

А. А. ПЕТРОВ
Вятский государственный университет
e-mail: apetrov43@mail.ru

УДК 512.558

Ключевые слова: полукольцо, мультипликативно идемпотентное полукольцо, конгруэнция, многообразие полуколец, решётка многообразий, псевдодополнение.

Аннотация

Изучается решётка $L(\mathfrak{M})$ всех подмногообразий многообразия $\mathfrak{M}$ мультипликативно идемпотентных полуколец. Получены некоторые соотношения в $L(\mathfrak{M})$. Доказано, что $L(\mathfrak{M})$ является решёткой с псевдодополнениями. Описаны псевдодополнения в решётке $L(\mathfrak{M})$; показано, что относительно включения они образуют 64-элементную булеву решётку. Показано, что решётка $L(\mathfrak{M})$ бесконечна и не модулярна.

Abstract

E. M. Vechtomov, A. A. Petrov, Pseudocomplements in the lattice of subvarieties of a variety of multiplicatively idempotent semirings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 3, pp. 107—120.

The lattice $L(\mathfrak{M})$ of all subvarieties of the variety $\mathfrak{M}$ of multiplicatively idempotent semirings is studied. Some relations have been obtained. It is proved that $L(\mathfrak{M})$ is a pseudocomplemented lattice. Pseudocomplements in the lattice $L(\mathfrak{M})$ are described. It is shown that they form a 64-element Boolean lattice with respect to the inclusion. It is established that the lattice $L(\mathfrak{M})$ is infinite and nonmodular.

Введение

Статья посвящена структурной теории мультипликативно идемпотентных полуколец и является продолжением работ [2—4]. Исследуется решётка $L(\mathfrak{M})$ подмногообразий многообразия $\mathfrak{M}$ всех мультипликативно идемпотентных полуколец. Отметим, что ранее рядом авторов изучались идемпотентные (мультипликативно и аддитивно идемпотентные) полукольца (см. [11, 12]).

*Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ, проект № 1.1375.2014/К.

© 2016 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

Укажем основные результаты нашей работы. В разделе 2 рассмотрены две универсальные конгруэнции на мультипликативно идемпотентных полукольцах, позволившие доказать, что всякое мультипликативно идемпотентное полукольцо служит подпрямым произведением двух мультипликативно идемпотентных полуколец, удовлетворяющих тождествам $3x = x$ и $3x = 2x$ (теорема 2.1). Описаны атомы (минимальные нетривиальные подмногообразия) решётки $L(\mathfrak{M})$ (следствие 2.1).

В разделе 3 выяснено строение всех 64 псевдодополнений A^* в решётке $L(\mathfrak{M})$. Базовым результатом служит предложение 3.1, в котором найдены псевдодополнения всех 6 атомов решётки $L(\mathfrak{M})$. Доказано, что решётка $L(\mathfrak{M})$ является решёткой с псевдодополнениями (теорема 3.1).

В разделе 4 рассматривается конгруэнция $\sim_m$ на решётке $L(\mathfrak{M})$:

$$A \sim_m B \Longleftrightarrow A^* = B^*.$$

Показано, что фактор-решётка $L(\mathfrak{M})/{\sim_m}$ будет 64-элементной булевой решёткой (теорема 4.1).

Наконец, в разделе 5 доказана немодулярность решётки $L(\mathfrak{M})$ (теорема 5.1) и её подрешётки, порождённой атомами (предложение 5.3).

1. Основные определения и обозначения

Дадим основные определения и обозначения. *Полукольцом* называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$, такая что $\langle S, +\rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа, умножение $\cdot$ дистрибутивно относительно сложения $+$ с обеих сторон.

Полукольцо S называется *мультипликативно идемпотентным* (*аддитивно идемпотентным*), если на нём тождественно $xx = x$ (соответственно $x + x = x$). Полукольцо, одновременно мультипликативно и аддитивно идемпотентное, назовём *идемпотентным*. Будем говорить, что полукольцо *обладает константным сложением*, если оно удовлетворяет тождеству $x+y = u+v$. Полукольцо называется *монополукольцом*, если на нём тождественно $x + y = xy$.

Элемент θ произвольного полукольца S назовём *поглощающим по умножению* (*поглощающим по сложению*), если для всех $x \in S$ выполняется $x \cdot \theta = \theta \cdot x = \theta$ (соответственно $x + \theta = \theta$). Элемент полукольца, поглощающий по сложению и по умножению, называется *поглощающим*. Если в полукольце S существует элемент 0, нейтральный по сложению и поглощающий по умножению, то S называется *полукольцом с нулём* 0. Наконец, если полукольцо S обладает элементом 1, нейтральным по умножению, то S называется *полукольцом с единицей* 1.

Отметим, что к любому полукольцу S можно естественным образом присоединить нулевой элемент 0 или поглощающий элемент ∞. Обозначим полученные полукольца $S \cup \{0\}$ и $S \cup \{\infty\}$ соответственно.

Идеал I полукольца S называется *биидеалом*, если для всех $a \in I$, $s \in S$ выполняется $a+s \in I$. Любой биидеал I определяет *рисовскую конгруэнцию* τ_I на полукольце S: I будет одним из её классов, остальные классы одноэлементны. Обозначим соответствующее фактор-полукольцо S/τ_I.

Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие всех мультипликативно идемпотентных полуколец, $L(\mathfrak{M})$ — решётка всех его подмногообразий. Для семейства мультипликативно идемпотентных полуколец $S_1, \ldots, S_n$ через $\mathfrak{M}(S_1, \ldots, S_n)$ обозначим многообразие полуколец, порождённое этими полукольцами. Для полукольцевого тождества $f = g$ через $\mathfrak{M}(f = g)$ обозначим многообразие мультипликативно идемпотентных полуколец, порождённое данным тождеством. Пусть $\boldsymbol{O} = \mathfrak{M}(x = y)$ — тривиальное многообразие полуколец.

С точностью до изоморфизма существует шесть двухэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец:

— цепь $\mathbb{B} = \{0, 1\}$;
— поле $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$;
— идемпотентное монополукольцо $\mathbb{D} = \{1, \infty\}$ с единицей 1 и поглощающим элементом ∞;
— полукольцо $\mathbb{T} = \{1, \infty\}$ с единицей 1, поглощающим элементом ∞ и константным сложением;
— идемпотентное полукольцо $\mathbb{L} = \{a, b\}$, удовлетворяющее тождеству $xy = x$;
— идемпотентное полукольцо $\mathbb{R} = \{a, b\}$, удовлетворяющее тождеству $xy = y$.

Добавляя к ним 0 или ∞, получаем 12 трёхэлементных мультипликативно идемпотентных полуколец. Среди них

— восемь коммутативны: $\mathbb{B}\cup\{0\}$, $\mathbb{B}\cup\{\infty\}$, $\mathbb{D}\cup\{0\}$, $\mathbb{D}\cup\{\infty\}$, $\mathbb{Z}_2\cup\{0\}$, $\mathbb{Z}_2\cup\{\infty\}$, $\mathbb{T}\cup\{0\}$, $\mathbb{T}\cup\{\infty\}$;
— восемь идемпотентны: $\mathbb{B}\cup\{0\}$, $\mathbb{B}\cup\{\infty\}$, $\mathbb{D}\cup\{0\}$, $\mathbb{D}\cup\{\infty\}$, $\mathbb{L}\cup\{0\}$, $\mathbb{L}\cup\{\infty\}$, $\mathbb{R}\cup\{0\}$, $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$;
— восемь подпрямо неразложимы: $\mathbb{B}\cup\{\infty\}$, $\mathbb{D}\cup\{0\}$, $\mathbb{Z}_2\cup\{\infty\}$, $\mathbb{T}\cup\{0\}$, $\mathbb{L}\cup\{0\}$, $\mathbb{L}\cup\{\infty\}$, $\mathbb{R}\cup\{0\}$, $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$.

2. О многообразии $\mathfrak{M}$ мультипликативно идемпотентных полуколец

Сначала рассмотрим некоторые исходные свойства мультипликативно идемпотентных полуколец.

Лемма 2.1. *В любом мультипликативно идемпотентном полукольце S выполняются следующие тождества:*

1) $x + xy + yx + y = x + y$, *в частности* $x + x + x + x = x + x$ (*или* $4x = 2x$);
2) $x + xy + y = x + yx + y$;
3) $x + 2xy + y = x + y$.

Доказательство. Докажем свойство 1). В самом деле, для любых $x, y \in S$ имеем
$$x + y = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y.$$
Полагая теперь $x = y$, получаем $x + x = x + x + x + x$.

Докажем свойство 2). Учитывая пункт 1), получаем, что
$$x + xy + y = x + 2xy + yx + y = x + 3xy + 2yx + y = x + 2xy + 3yx + y.$$
Аналогичным образом показывается, что $x + yx + y = x + 2xy + 3yx + y$.

Докажем свойство 3). По утверждениям 1) и 2)
$$x + y = x + xy + yx + y = x + y + 2xy.$$
Очевидно также, что $x + y = x + y + 2yx$. □

Обозначим $\leqslant$ следующее рефлексивное и транзитивное бинарное отношение на полукольце S:
$$x \leqslant y \Longleftrightarrow x = y \text{ или найдётся } u \in S, \text{ такой что } x + u = y.$$
Если отношение $\leqslant$ антисимметрично, т. е. является отношением порядка, то полукольцо S назовём *упорядочиваемым*.

Предложение 2.1 [2, предложение 1.2]. *Произвольное мультипликативно идемпотентное полукольцо упорядочиваемо тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет тождеству* $3x = 2x$.

Введём две универсальные конгруэнции на полукольце $S \in \mathfrak{M}$:
— $x \sim y \Longleftrightarrow x \leqslant y$ и $y \leqslant x$;
— $x \sim_{(3)} y \Longleftrightarrow 3x = 3y$.

Для любого мультипликативно идемпотентного полукольца S фактор-полукольцо $S/\!\sim$ обладает тождеством $3x = 2x$, а фактор-полукольцо $S/\!\sim_{(3)}$ удовлетворяет тождеству $3x = x$.

Предложение 2.2. *Для всякого мультипликативно идемпотентного полукольца* S *пересечение конгруэнций* $\sim$ *и* $\sim_{(3)}$ *есть отношение равенства.*

Доказательство. Пусть для элементов $a, b \in S$ выполняется $a \sim b$. Случай $a = b$ очевиден.

Пусть теперь $a + s = b$, $b + t = a$ для некоторых $s, t \in S$ и $a \sim_{(3)} b$, т. е. $3a = 3b$.

Из $3a = 3b$ следует, что $2a = 6a = 6b = 2b$. Учитывая пункт 3) леммы 2.1, получаем
$$a + b = a + 2ab + b = a + 2bb + b = a + 3b = a + 3a = 4a = 2a = 2b.$$
Теперь
$$\begin{aligned} a &= b + t = (a + s) + t = (a + 2as + s) + t = b + (a + b)s + t = \\ &= b + as + bs + t = a + as + bs = a(a + s) + bs = ab + bs = ab + (a + s)s = \\ &= ab + as + s = a(b + s) + s = a((a + s) + s) + s = a + 2as + s = a + s = b. \end{aligned}$$
□

Из предложения 2.2 вытекает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Произвольное мультипликативно идемпотентное полукольцо является подпрямым произведением полуколец, одно из которых обладает тождеством $3x = 2x$, а другое обладает тождеством $3x = x$. Стало быть,*

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(3x = x) \vee \mathfrak{M}(3x = 2x).$$

Заметим, что для коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец эта теорема доказана ранее в [2, предложение 3.1].

Предложение 2.3. *В многообразии $\mathfrak{M}$ справедливы следующие равенства*:

1) *многообразие полуколец с константным сложением определяется тождеством $3x = 3y$, т. е. $\mathfrak{M}(x + y = u + v) = \mathfrak{M}(3x = 3y)$;*
2) $\mathfrak{M}(3x + y = x + y) = \mathfrak{M}(3x = x) \vee \mathfrak{M}(3x = 3y)$;
3) $\mathfrak{M}(2x + y = x + y) = \mathfrak{M}(2x = x) \vee \mathfrak{M}(3x = 3y)$;
4) $\mathfrak{M}(3x = x) \cap \mathfrak{M}(3x = 2x) = \mathfrak{M}(2x = x)$ — *многообразие всевозможных идемпотентных полуколец*;
5) $\mathfrak{M}(3x + y = x + y) \cap \mathfrak{M}(3x = 2x) = \mathfrak{M}(2x + y = x + y)$.

Доказательство. Докажем первое свойство. Имеем $\mathfrak{M}(x + y = u + v) \subseteq \subseteq \mathfrak{M}(3x = 3y)$. Обратно, возьмём произвольное полукольцо $S \in \mathfrak{M}(3x = 3y)$. Значит, S удовлетворяет тождеству $2x = 2y$. Как и при доказательстве предложения 2.2, $x + y = 2x = 2u = u + v$.

Докажем свойство 2). Пусть S — полукольцо из $\mathfrak{M}(3x + y = x + y)$. Тогда $I = \{3x \mid x \in S\}$ является биидеалом полукольца S, при этом $I \in \mathfrak{M}(3x = x)$ ввиду тождества $9x = 3x$. Рисовское фактор-полукольцо S/I удовлетворяет тождеству, т. е. будет мультипликативно идемпотентным полукольцом с константным сложением, значит, $S/I \in \mathfrak{M}(3x = 3y)$.

Определим отображение $\alpha\colon S \to I$ правилом $\alpha(x) = 3x$. Ясно, что α — гомоморфизм полукольца S на полукольцо I, причём элементы из I — это неподвижные точки для α. Поскольку α разделяет пары из $I \times I$, а канонический гомоморфизм S на S/I разделяет пары из $(S \setminus I) \times S$, то S — подпрямое произведение полуколец I и S/I.

Свойство 3) вытекает из свойства 2).

Утверждения 4) и 5) очевидны. □

Предложение 2.4. *Любое неодноэлементное полукольцо $S \in \mathfrak{M}$ содержит двухэлементное подполукольцо, изоморфное одному из полуколец $\mathbb{B}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{L}$, $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть S — произвольное неодноэлементное полукольцо из многообразия $\mathfrak{M}$, $a, b \in S$, $a \neq b$. Ввиду тождества $4x = 2x$ множество, состоящее из элементов s, $2s$, $3s$ (не обязательно различных между собой), является подполукольцом в S для любого $s \in S$.

Покажем, что S имеет двухэлементное подполукольцо.

Если $3a \neq 2a$, то $\{2a, 3a\}$ — подполукольцо в S, изоморфное $\mathbb{Z}_2$.

Если $3a = 2a \neq a$, то $\{a, 2a\}$ будет подполукольцом в S, изоморфным $\mathbb{T}$.

Пусть теперь S идемпотентно и коммутативно. При $a \neq b$ либо $a \neq ab$, либо $b \neq ab$. Пусть $a \neq ab$. Тогда либо $a + ab \neq a$, либо $a + ab \neq ab$. В первом случае подполукольцом в S будет $\{a, a+ab\} \cong \mathbb{D}$, во втором — $\{ab, a+ab\} \cong \mathbb{B}$. Случай $b \neq ab$ аналогичен.

Пусть S идемпотентно и некоммутативно, т. е. $ab \neq ba$ для некоторых $a \neq b$. Тогда либо $aba \neq ab$, либо $aba \neq ba$. В случае $aba \neq ab$ получаем, что либо $ab + aba \neq aba$ и полукольцо $\{ab + aba, aba\}$ изоморфно $\mathbb{R}$, либо $ab + aba \neq ab$ и $\{ab + aba, ab\} \cong \mathbb{R}$.

Если же $aba \neq ba$, то либо $ba + aba \neq aba$ и полукольцо $\{ba + aba, aba\}$ изоморфно $\mathbb{L}$, либо $ba + aba \neq ba$ и $\{ba + aba, ba\} \cong \mathbb{L}$. □

Положим

$$\mathfrak{X} = \{\mathfrak{M}(\mathbb{B}), \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2), \mathfrak{M}(\mathbb{D}), \mathfrak{M}(\mathbb{T}), \mathfrak{M}(\mathbb{L}), \mathfrak{M}(\mathbb{R})\}.$$

Из предложения 2.4 вытекает следующий результат.

Следствие 2.1. *Элементы множества $\mathfrak{X}$ — это в точности атомы атомной решётки $L(\mathfrak{M})$.*

Минимальные многообразия полуколец описаны С. В. Полиным [8]. Отметим, что атомность решётки подмногообразий произвольного многообразия является общим фактом [7, с. 376, теорема 5].

Предложение 2.5. *Для любого мультипликативно идемпотентного полукольца S решётка $\operatorname{Id} S$ всех его идеалов дистрибутивна.*

Доказательство. Пусть $A, B, C \in \operatorname{Id} S$. Положим

$$A + B = \{a + b\colon a \in A,\ b \in B\}, \quad AB = \{ab\colon a \in A,\ b \in B\}.$$

В решётке $\operatorname{Id} S$

$$A \wedge B = A \cap B = AB, \quad A \vee B = (A + B) \cup A \cup B.$$

Поэтому дистрибутивный закон принимает вид

$$\big((A + B) \cup A \cup B\big)C = (AC + BC) \cup AC \cup BC.$$

Очевидно, что $AC \cup BC = (A \cup B)C$ и $(A + B)C \subseteq AC + BC$.

Обратно, возьмём $x \in AC+BC$. Тогда $x = ac+bd$ для подходящих элементов $a \in A$, $b \in B$, $c, d \in C$ и $ac \in A$, $bd \in B$, $x = ac + bd \in C$. Поэтому $x = x^2 = (ac + bd)x \in (A + B)C$. □

Замечание 2.1. Решётка конгруэнций $\operatorname{Con} S$ мультипликативно идемпотентного полукольца S не обязана быть модулярной. Например, рассмотрим булеан $B(\{a, b\})$ как моноплукольцо с операцией $\cup$. Легко проверить, что решётка $\operatorname{Con}\langle B(\{a, b\}), \cup, \cup\rangle$ содержит семь элементов и не модулярна.

3. Строение псевдодополнений в решётке $L(\mathfrak{M})$

Для произвольной решётки $\langle L, \vee, \wedge\rangle$ с 0 элемент a^* называется *псевдодополнением* элемента a, если a^* — наибольший элемент в L, для которого $a \wedge a^* = 0$. Ясно, что псевдодополнение элемента единственно (если существует). Элемент решётки L будем называть просто *псевдодополнением*, если он является псевдодополнением a^* некоторого элемента $a \in L$. Если каждый элемент решётки L с нулём имеет псевдодополнение, то L называется *решёткой с псевдодополнениями*. Легко убедиться, что любая решётка с псевдодополнениями 0-*дистрибутивна*, т. е. для любых $a, b, c \in L$ из $a \wedge c = 0 = b \wedge c$ следует $(a \vee b) \wedge c = 0$.

Перечислим основные свойства псевдодополнений в решётках с псевдодополнениями [5, с. 74—75].

Лемма 3.1. *Пусть $\langle L, \vee, \wedge, 0\rangle$ — решётка с псевдодополнениями. Для любых элементов $a, b \in L$ верны следующие соотношения*:

1) $a \leqslant a^{**}$;
2) $a \leqslant b$ *тогда и только тогда, когда* $b^* \leqslant a^*$;
3) $a^{***} = a^*$;
4) *элемент a решётки будет псевдодополнением тогда и только тогда, когда* $a = a^{**}$;
5) $(a \vee b)^* = a^* \wedge b^*$.

Доказательство. Утверждения 1)—4) очевидны. Докажем утверждение 5). Так как $a \leqslant a \vee b$ и $b \leqslant a \vee b$, то по утверждению 2) $(a \vee b)^* \leqslant a^* \wedge b^*$. Поскольку $a \wedge a^* \wedge b^* = 0 = b \wedge a^* \wedge b^*$, то в силу 0-дистрибутивности L $(a \vee b) \wedge (a^* \wedge b^*) = 0$, откуда следует, что $a^* \wedge b^* = (a \vee b)^*$. □

Базовое утверждение работы следующее.

Предложение 3.1. *Для решётки $L(\mathfrak{M})$ справедливы следующие утверждения*:

1) $\mathfrak{M}(\mathbb{B})^* = \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2xyx)$;
2) $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)^* = \mathfrak{M}(3x = 2x)$;
3) $\mathfrak{M}(\mathbb{D})^* = \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2x)$;
4) $\mathfrak{M}(\mathbb{T})^* = \mathfrak{M}(3x = x)$;
5) $\mathfrak{M}(\mathbb{L})^* = \mathfrak{M}(2yx + 2xyx = 2yx)$;
6) $\mathfrak{M}(\mathbb{R})^* = \mathfrak{M}(2xy + 2xyx = 2xy)$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Отметим, что

$$\mathfrak{M}(\mathbb{B}) \cap \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2xyx) = \boldsymbol{O}.$$

Если $S \notin \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2xyx)$, то для некоторых $a, b \in S$ выполняется $2a + 2aba \neq 2aba$. В этом случае $\{2aba, 2a + 2aba\} \cong \mathbb{B}$ — подполукольцо в S.

Докажем утверждение 2). Ясно, что

$$\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2) \cap \mathfrak{M}(3x = 2x) = \boldsymbol{O}.$$

Если $S \notin \mathfrak{M}(3x = 2x)$, то $3a \neq 2a$ для некоторого $a \in S$ и $\{2a, 3a\}$ является подполукольцом в S, изоморфным $\mathbb{Z}_2$.

Докажем утверждение 3). Нетрудно убедиться, что

$$\mathfrak{M}(\mathbb{D}) \cap \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2x) = \boldsymbol{O}.$$

Пусть $S \notin \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2x)$, т. е. $2a + 2aba \neq 2a$ для некоторых $a, b \in S$. Получаем подполукольцо $\{2a, 2a + 2aba\}$ в S, изоморфное $\mathbb{D}$.

Проверим утверждение 4). Заметим, что

$$\mathfrak{M}(\mathbb{T}) \cap \mathfrak{M}(3x = x) = \boldsymbol{O}.$$

Пусть $S \notin \mathfrak{M}(3x = x)$. Тогда для некоторого элемента a полукольца S выполняется $3a \neq a$. Значит, разбиение подполукольца $\{a, 2a, 3a\}$ на два класса $\{a\}$ и $\{2a, 3a\}$ будет конгруэнцией этого подполукольца. Факторизуя $\{a, 2a, 3a\}$ по этой конгруэнции, получаем полукольцо, изоморфное полукольцу $\mathbb{T}$.

Докажем утверждение 5). Легко убедиться, что

$$\mathfrak{M}(\mathbb{L}) \cap \mathfrak{M}(2yx + 2xyx = 2yx) = \boldsymbol{O}.$$

Если $S \notin \mathfrak{M}(2yx + 2xyx = 2yx)$, то $2ba + 2aba \neq 2ba$ для некоторых $a, b \in S$. Тогда $\{2ba + 2aba, 2ba\}$ является подполукольцом в S, изоморфным $\mathbb{L}$.

Убедимся в справедливости утверждения 6). Заметим, что

$$\mathfrak{M}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{M}(2xy + 2xyx = 2xy) = \boldsymbol{O}.$$

Пусть $S \notin \mathfrak{M}(2xy + 2xyx = 2xy)$. Тогда $2ab + 2aba \notin 2ab$ для некоторых $a, b \in S$. Значит, $\{2ab, 2ab + 2aba\}$ будет подполукольцом в S, изоморфным $\mathbb{R}$. □

Для многообразия $A \in L(\mathfrak{M})$ через $m(A)$ обозначим множество атомов решётки $L(\mathfrak{M})$, содержащихся в A. По предложению 3.1 для любого $C \in \mathfrak{X}$ имеем $m(C^*) = \mathfrak{X} \setminus \{C\}$.

Лемма 3.2. *Для произвольных $A \in L(\mathfrak{M})$ и $C \in \mathfrak{X}$ $C \in m(A)$ тогда и только тогда, когда $A \nsubseteq C^*$.*

Доказательство. Действительно,

$$C \in m(A) \Longleftrightarrow C \subseteq A \Longleftrightarrow C \cap A \neq \boldsymbol{O} \Longleftrightarrow A \nsubseteq C^*. \qquad \square$$

Лемма 3.3. *Для любых $A, B \in L(\mathfrak{M})$ справедливы следующие равенства:*

1) $m(A \cap B) = m(A) \cap m(B)$;
2) $m(A \vee B) = m(A) \cup m(B)$;
3) $m(A^*) = \mathfrak{X} \setminus m(A)$.

Доказательство. Соотношения $m(A \cap B) = m(A) \cap m(B)$ и $m(A) \cup m(B) \subseteq$ $\subseteq m(A \vee B)$ очевидны. Проверим включение $m(A \vee B) \subseteq m(A) \cup m(B)$. Для этого возьмём $C \in \mathfrak{X} \setminus \big(m(A) \cup m(B)\big)$. Имеем $C \notin m(A)$ и $C \notin m(B)$. Тогда по лемме 3.2 $A \subseteq C^*$, $B \subseteq C^*$, $A \vee B \subseteq C^*$, $C \notin m(A \vee B)$. Таким образом, $m(A \vee B) \subseteq m(A) \cup m(B)$.

По лемме 3.2 для любого $C \in \mathfrak{X}$

$$C \subseteq A^* \iff C \cap A = \boldsymbol{O} \iff A \subseteq C^* \iff C \notin m(A). \qquad \square$$

Теорема 3.1. *Решётка $L(\mathfrak{M})$ является решёткой с псевдодополнениями, при этом для произвольного многообразия $A \in L(\mathfrak{M})$*

$$A^* = \bigcap_{C \in m(A)} C^*.$$

Доказательство. По предложению 3.1 многообразия $C \in \mathfrak{X}$ имеют псевдодополнения. Остаётся заметить, что для всякого $B \in L(\mathfrak{M})$ справедливы следующие эквивалентности:

$$A \cap B = \boldsymbol{O} \iff \text{для любых } C \in m(A)\ C \cap B = \boldsymbol{O} \iff$$
$$\iff \text{для любых } C \in m(A)\ B \subseteq C^* \iff B \subseteq \bigcap_{C \in m(A)} C^*. \qquad \square$$

Следствие 3.1. *Решётка $L(\mathfrak{M})$ 0-дистрибутивна.*

Следствие 3.2. *Для любых $A, B \in L(\mathfrak{M})$ $A^* = B^*$ тогда и только тогда, когда $m(A) = m(B)$.*

Из теоремы 3.1 и леммы 3.3 вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.2. *Для любого $A \in L(\mathfrak{M})$*

$$A^{**} = \bigcap_{C \in \mathfrak{X} \setminus m(A)} C^* \text{ —}$$

наибольшее среди подмногообразий $B \subseteq \mathfrak{M}$ с условием $m(B) = m(A)$.

Предложение 3.3. *Относительно включения подмногообразий псевдодополнения решётки $L(\mathfrak{M})$ образуют 64-элементную булеву решётку, изоморфную булеану $B(\mathfrak{X})$.*

Это утверждение носит общий характер [9, с. 153]. В нашем случае получаем 64 псевдодополнения A^* по числу $m(A) \in \mathfrak{X}$, включая $\boldsymbol{O}^* = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^* = \boldsymbol{O}$.

Примеры.

1. Пусть на множестве $L = \{a, b, \infty\}$ операции сложения и умножения заданы следующим образом: $xx = x$, $x + y = \infty$, $x \cdot \infty = \infty \cdot x$ для всех $x, y \in L$, $ab = a$, $ba = b$. Получаем трёхэлементное некоммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо L с константным сложением. Полукольцо L подпрямо неразложимо, имеет наименьшую ненулевую конгруэнцию $\big\{\{a, b\}, \{\infty\}\big\}$, фактор-полукольцо по которой изоморфно $\mathbb{T}$. Двойственным образом определяется мультипликативно идемпотентное полукольцо $R = \{c, d, \infty\}$ с константным сложением ($cd = d$, $dc = c$).

2. Многообразие $\mathfrak{M}(xy = yx)$ не является псевдодополнением никакого многообразия в $L(\mathfrak{M})$, поскольку по предложению 3.2, пункту 5) леммы 3.1 и [12, следствие 2]

$$\mathfrak{M}(xy = yx)^{**} = \mathfrak{M}(\mathbb{L})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{R})^* = \big(\mathfrak{M}(\mathbb{L}) \vee \mathfrak{M}(\mathbb{R})\big)^* = \mathfrak{M}(xyx = x)^*.$$

Некоммутативное полукольцо L с константным сложением принадлежит $\mathfrak{M}(xyx = x)^*$. Поэтому $\mathfrak{M}(xy = yx)^{**} \neq \mathfrak{M}(xy = yx)$, т. е. по пункту 4) леммы 3.1 многообразие $\mathfrak{M}(xy = yx)$ не является псевдодополнением в $L(\mathfrak{M})$.

3. Многообразие $\mathfrak{M}(2x = x)$ идемпотентных полуколец будет псевдодополнением, так как

$$\mathfrak{M}(2x = x) = \mathfrak{M}(3x = x) \cap \mathfrak{M}(3x = 2x) = \mathfrak{M}(\mathbb{T})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)^* = \big(\mathfrak{M}(\mathbb{T}) \vee \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)\big)^*.$$

4. Поскольку $\mathbb{T} \cup \{0\} \notin \mathfrak{M}(3x + y = x + y)$, то $\mathfrak{M}(3x + y = x + y) \neq \mathfrak{M}$. Поэтому многообразия $\mathfrak{M}(3x = x)$ и $\mathfrak{M}(3x = 3y)$, являясь псевдодополнениями друг друга, не имеют дополнений в решётке $L(\mathfrak{M})$.

4. Конгруэнция $\sim_m$ на решётке $L(\mathfrak{M})$

На решётке $L(\mathfrak{M})$ введём отношение эквивалентности $\sim_m$:

$$A \sim_m B \Longleftrightarrow m(A) = m(B).$$

Теорема 4.1. *Бинарное отношение $\sim_m$ является конгруэнцией на решётке $L(\mathfrak{M})$, фактор-решётка $L(\mathfrak{M})/{\sim_m}$ по которой будет 64-элементной булевой решёткой.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\mu\colon L(\mathfrak{M}) \to B(\mathfrak{X})$, $A \mapsto m(A)$. По лемме 3.3 μ — гомоморфизм решётки $L(\mathfrak{M})$ на булеан $B(\mathfrak{X})$, при этом отношение $\sim_m$ служит отношением равнообразности для μ. Поэтому $\sim_m$ — конгруэнция и фактор-решётка $L(\mathfrak{M})/{\sim_m}$ изоморфна булеану $B(\mathfrak{X})$. □

Лемма 4.1. *В решётке $L(\mathfrak{M})$ выполняются следующие равенства*:

1) $\mathfrak{M}(\mathbb{L})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{R})^* = \mathfrak{M}(2xy = 2yx)$;
2) $\mathfrak{M}(\mathbb{B})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{D})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{R})^* = \mathfrak{M}(2xy = 2x)$;
3) $\mathfrak{M}(\mathbb{B})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{D})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{L})^* = \mathfrak{M}(2yx = 2x)$.

Доказательство. Докажем первое равенство. По предложению 3.1

$$\mathfrak{M}(2xy = 2yx) \subseteq \mathfrak{M}(2yx + 2xyx = 2yx) \cap \mathfrak{M}(2xy + 2xyx = 2xy) = \mathfrak{M}(\mathbb{L})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{R})^*.$$

Обратно, возьмём полукольцо

$$S \in \mathfrak{M}(2yx + 2xyx = 2yx) \cap \mathfrak{M}(2xy + 2xyx = 2xy).$$

Тогда в S

$$\begin{aligned} 2xy &= 2xy + 2xyx = 2xyx + 2xyxy = 2xy \cdot x + 2xy \cdot x \cdot xy = \\ &= 2xy \cdot x = (2xy + 2yxy)x = 2xyx + 2yx = 2yx. \end{aligned}$$

Докажем равенство 2). По предложению 3.1

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}(2xy = 2x) \subseteq \\
&\quad \subseteq \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2xyx) \cap \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2x) \cap \mathfrak{M}(2xy + 2xyx = 2xy) = \\
&\quad = \mathfrak{M}(\mathbb{B})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{D})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{R})^*.
\end{aligned}$$

Рассмотрим полукольцо

$$S \in \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2xyx) \cap \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2x) \cap \mathfrak{M}(2xy + 2xyx = 2xy).$$

Тогда для S справедливо $2xyx = 2x$ и

$$2xy = 2xy + 2xyx = 2xyx + 2xyxy = 2xy \cdot x + 2xy \cdot x \cdot xy = 2xy \cdot x = 2x.$$

Пункт 3) доказывается аналогично пункту 2). □

Каждый класс $[A]_{\sim_m}$ конгруэнции $\sim_m$ представляет собой отрезок $[\vee m(A), A^{**}]$.

Предложение 4.1. *В решётке $L(\mathfrak{M})$ классы $[\mathfrak{M}(\mathbb{B})]_{\sim_m}$, $[\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)]_{\sim_m}$, $[\mathfrak{M}(\mathbb{D})]_{\sim_m}$, $[\mathfrak{M}(\mathbb{L})]_{\sim_m}$, $[\mathfrak{M}(\mathbb{R})]_{\sim_m}$ одноэлементны.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $C \in \mathfrak{X} \setminus \{\mathfrak{M}(\mathbb{T})\}$ выполняется $\mathfrak{M}(C)^{**} = \mathfrak{M}(C)$. Воспользуемся результатами предложений 2.4, 3.2 и леммы 4.1.

Имеем

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}(\mathbb{B})^{**} &= \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{D})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{T})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{L})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{R})^* = \\
&= \mathfrak{M}(3x = 2x) \cap \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2x) \cap \mathfrak{M}(3x = x) \cap \\
&\cap \mathfrak{M}(2yx + 2xyx = 2yx) \cap \mathfrak{M}(2xy + 2xyx = 2xy) = \\
&= \mathfrak{M}(2x = x) \cap \mathfrak{M}(xy = yx) \cap \mathfrak{M}(x + xy = x) = \mathfrak{M}(\mathbb{B}).
\end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо, поскольку многообразие $\mathfrak{M}(\mathbb{B})$ есть многообразие всех дистрибутивных решёток.

Имеем

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)^{**} = \mathfrak{M}(\mathbb{B})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{D})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{T})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{L})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{R})^* = \\
&\quad = \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2xyx) \cap \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2x) \cap \mathfrak{M}(3x = x) \cap \\
&\quad \cap \mathfrak{M}(2yx + 2xyx = 2yx) \cap \mathfrak{M}(2xy + 2xyx = 2xy) = \\
&\quad = \mathfrak{M}(2xy = 2yx) \cap \mathfrak{M}(2x = 2xy) \cap \mathfrak{M}(3x = x) = \\
&\quad = \mathfrak{M}(2xy = 2yx) \cap \mathfrak{M}(2x = 2y) \cap \mathfrak{M}(3x = x) = \mathfrak{M}(x + 2y = x) = \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2).
\end{aligned}$$

Легко убедиться, что в классе $\mathfrak{M}$ тождество $x+2y = x$ определяет многообразие $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)$ всех булевых колец.

Имеем

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}(\mathbb{D})^{**} &= \mathfrak{M}(\mathbb{B})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{T})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{L})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{R})^* = \\
&= \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2xyx) \cap \mathfrak{M}(3x = 2x) \cap \mathfrak{M}(3x = x) \cap \\
&\cap \mathfrak{M}(2yx + 2xyx = 2yx) \cap \mathfrak{M}(2xy + 2xyx = 2xy) = \\
&= \mathfrak{M}(2x = x) \cap \mathfrak{M}(xy = yx) \cap \mathfrak{M}(x + xy = xy) = \mathfrak{M}(\mathbb{D}).
\end{aligned}$$

Последнее равенство вытекает из [2, предложение 4.1], причём $\mathfrak{M}(\mathbb{D})$ — многообразие всех идемпотентных монополуколец.

Имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(\mathbb{L})^{**} &= \mathfrak{M}(\mathbb{B})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{D})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{T})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{R})^* = \\ &= \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2xyx) \cap \mathfrak{M}(3x = 2x) \cap \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2x) \cap \\ &\cap \mathfrak{M}(3x = x) \cap \mathfrak{M}(2xy + 2xyx = 2xy) = \\ &= \mathfrak{M}(2x = x) \cap \mathfrak{M}(2xy = 2x) = \mathfrak{M}(\mathbb{L}).\end{aligned}$$

Последнее равенство вытекает из [3, следствие 5].

Имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(\mathbb{R})^{**} &= \mathfrak{M}(\mathbb{B})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{D})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{T})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{L})^* = \\ &= \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2xyx) \cap \mathfrak{M}(3x = 2x) \cap \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2x) \cap \\ &\cap \mathfrak{M}(3x = x) \cap \mathfrak{M}(2yx + 2xyx = 2yx) = \\ &= \mathfrak{M}(2x = x) \cap \mathfrak{M}(2xy = 2y) = \mathfrak{M}(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

Последнее равенство вытекает из [3, следствие 5]. □

5. Немодулярность решётки $L(\mathfrak{M})$

Рассмотрим полукольцо

$$\mathbb{L} \times \mathbb{T} = \{(a,1), (b,1), (a,\infty), (b,\infty)\}.$$

Факторизуя его по конгруэнции

$$\big\{\{(a,1)\}, \{(b,1)\}, \{(a,\infty),(b,\infty)\}\big\},$$

получаем полукольцо L из примера 1. Имеем

$$\mathfrak{M}(\mathbb{T}) \subset \mathfrak{M}(L) \subset \mathfrak{M}(\mathbb{L}) \vee \mathfrak{M}(\mathbb{T}),$$
$$\mathfrak{M}(\mathbb{L}) \vee \mathfrak{M}(L) = \mathfrak{M}(\mathbb{L}, \mathbb{T}) = \mathfrak{M}(\mathbb{L}) \vee \mathfrak{M}(\mathbb{T}), \quad \mathfrak{M}(\mathbb{L}) \cap \mathfrak{M}(L) = \boldsymbol{O}.$$

Значит, $L(\mathfrak{M})$ содержит подрешётку

$$\{\boldsymbol{O}, \mathfrak{M}(\mathbb{L}), \mathfrak{M}(\mathbb{T}), \mathfrak{M}(L), \mathfrak{M}(\mathbb{L}) \vee \mathfrak{M}(\mathbb{T})\},$$

изоморфную пентагону.

Теорема 5.1. *Решётка $L(\mathfrak{M})$ не является модулярной.*

В [2, теорема 3] доказано, что $L\big(\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T})\big)$ — 16-элементная булева решётка.

Предложение 5.1. *Решётка $L\big(\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{L}, \mathbb{R})\big)$ будет 32-элементной булевой решёткой.*

Доказательство. Б. М. Верников и М. В. Волков [1] изучали многообразия, удовлетворяющие следующему условию (VV): в каждой алгебре многообразия у каждой нетривиальной конгруэнции есть неодноэлементный класс, являющийся подалгеброй. Заметим, что многообразие $\mathfrak{M}(3x = x)$ удовлетворяет условию (VV). Действительно, у мультипликативно идемпотентного полукольца любой класс любой конгруэнции является мультипликативной подполугруппой; аддитивная же полугруппа полукольца с тождеством $3x = x$ инверсна, а у любой нетривиальной конгруэнции на инверсной полугруппе есть неодноэлементный класс, являющийся подполугруппой [6, теорема 7.38].

Остаётся применить предложение 2.4 и теорему из [1] о том, что любые n атомов (минимальных нетривиальных многообразий), содержащихся в многообразии с условием (VV), порождают в решётке его подмногообразий булеву решётку из 2^n элементов. $\square$

Предложение 5.2. *Класс* $[\mathfrak{M}(\mathbb{T})]_{\sim_m}$ *совпадает с отрезком* $[\mathfrak{M}(\mathbb{T}), \mathfrak{M}(3x{=}3y)]$, *являющимся счётной дистрибутивной подрешёткой в* $L(\mathfrak{M})$.

Доказательство. Покажем, что $\mathfrak{M}(\mathbb{T})^{**} = \mathfrak{M}(3x = 3y)$. Воспользуемся результатами предложений 2.4, 3.2 и леммы 4.1. Имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}(\mathbb{T})^{**} &= \mathfrak{M}(\mathbb{B})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{D})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{L})^* \cap \mathfrak{M}(\mathbb{R})^* = \\ &= \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2xyx) \cap \mathfrak{M}(3x = 2x) \cap \mathfrak{M}(2x + 2xyx = 2x) \cap \\ &\cap \mathfrak{M}(2yx + 2xyx = 2yx) \cap \mathfrak{M}(2xy + 2xyx = 2xy) = \\ &= \mathfrak{M}(2xy = 2yx) \cap \mathfrak{M}(2xy = 2x) \cap \mathfrak{M}(3x = 2x) = \mathfrak{M}(3x = 3y).\end{aligned}$$

Последнее равенство вытекает из [2, предложение 4.2].

Следовательно,

$$[\mathfrak{M}(\mathbb{T})]_{\sim_m} = [\mathfrak{M}(\mathbb{T}), \mathfrak{M}(3x = 3y)].$$

Каждое нетривиальное подмногообразие многообразия $\mathfrak{M}(3x = 3y)$ всех мультипликативно идемпотентных полуколец с константным сложением задаётся каким-то одним гомотопным (мультипликативным) полугрупповым тождеством в классе идемпотентных полугрупп (см. [10, с. 8]). Поэтому класс $[\mathfrak{M}(\mathbb{T})]_{\sim_m}$ счётен. Известно, что решётка многообразий идемпотентных полугрупп дистрибутивна [10, с. 8]. Значит, дистрибутивна и решётка $L\big(\mathfrak{M}(3x = 3y)\big)$, изоморфная её подрешётке. $\square$

Из предложения 5.2 вытекает, что решётка $L(\mathfrak{M})$ бесконечна.

Предложение 5.3. *Решётка* $L\big(\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T}, \mathbb{L}, \mathbb{R})\big)$ *не модулярна.*

Доказательство. Как и в теореме 5.1, данная решётка содержит пентагон

$$\{\boldsymbol{O}, \mathfrak{M}(\mathbb{L}), \mathfrak{M}(\mathbb{T}), \mathfrak{M}(L), \mathfrak{M}(\mathbb{L}) \vee \mathfrak{M}(\mathbb{T})\}. \qquad \square$$

Замечание 5.1. Многообразие $\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T}, \mathbb{L}, \mathbb{R})$ удовлетворяет тождеству $3x + y = x + y$ и тождеству нормальности $xyzx = xzyx$. По предложению 5.1 многообразие

$$\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T}, \mathbb{L}, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{M}(3x = x)$$

содержит 32 подмногообразия, а многообразие

$$\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{D}, \mathbb{T}, \mathbb{L}, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{M}(3x = 3y) = \mathfrak{M}(xyzx = xzyx) \cap \mathfrak{M}(3x = 3y)$$

имеет ровно 5 подмногообразий: $\boldsymbol{O}$, $\mathfrak{M}(\mathbb{T})$, $\mathfrak{M}(L)$, $\mathfrak{M}(R)$ и само себя.

Литература

[1] Верников Б. М., Волков М. В. Дополнения в решётках многообразий и квазимногообразий // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1982. — № 11. — С. 17—20.

[2] Вечтомов Е. М., Петров А. А. Мультипликативно идемпотентные полукольца // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, № 4. — С. 41—70.

[3] Вечтомов Е. М., Петров А. А. Мультипликативно идемпотентные полукольца с тождеством $x + 2xyx = x$ // Вестн. Сыктывкар. ун-та. Сер 1: Математика, механика, информатика. — 2013. — Вып. 17. — С. 44—52.

[4] Вечтомов Е. М., Петров А. А. Многообразие полуколец, порождённое двухэлементными полукольцами с коммутативным идемпотентным умножением // Чебышёвский сб. — 2014. — Т. 15, № 3. — С. 12—30.

[5] Гретцер Г. Общая теория решёток. — М.: Мир, 1982.

[6] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 2. — М.: Мир, 1972.

[7] Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.

[8] Полин С. В. Минимальные многообразия полуколец // Матем. заметки. — 1980. — Т. 27, № 4. — С. 527—537.

[9] Скорняков Л. А. Элементы теории структур. — М.: Наука, 1982.

[10] Шеврин Л. Н., Верников Б. М., Волков М. В. Решётка многообразий полугрупп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2009. — № 3. — С. 3—36.

[11] Pastijn F. Varieties generated by ordered bands. II // Order. — 2005. — Vol. 22. — P. 129—143.

[12] Pastijn F., Romanowska A. Idempotent distributive semirings. I // Acta Sci. Math. — 1982. — Vol. 44. — P. 239—253.