Теорема Хавера в категории профильтрованных пространств

И. А. ЖИГУЛИЧ
Белорусский государственный университет
e-mail: irina.zhigulich@gmail.com

УДК 515.124.62

Ключевые слова: профильтрованные пространства и отображения, абсолютный окрестностный экстензор категории профильтрованных пространств, стягиваемое и локально стягиваемое профильтрованное пространство.

Аннотация

Теорема Хавера о характеризации абсолютных экстензоров в классе счётномерных пространств распространена на категорию метрических профильтрованных пространств.

Abstract

I. A. Zhigulich, On Haver's theorem in the category of filtered metric spaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 3, pp. 121—129.

We extend Haver's theorem on the characterization of absolute extensors in the class of countable-dimensional spaces to the category of metric filtered spaces.

Введение

В теории ретрактов и экстензоров важную роль играют результаты, в которых устанавливается связь между размерностными и связностными свойствами пространств. Примерами здесь могут служить классическая теорема Куратовского—Дугунджи [7], которая имеет дело с конечномерными и локально связными в конечной размерности пространствами, а также теорема Хавера [6], в которой эта связь существенно усилена.

Теорема Хавера. *Счётномерное и локально стягиваемое пространство X является абсолютным окрестностным экстензором* (*кратко ANE-пространством*). *Если дополнительно X стягиваемо, то X является абсолютным экстензором* (*кратко AE-пространством*).

Целью данной работы является распространение теоремы Хавера в категорию пространств с фильтрациями (по-другому, категорию $\bar{\mathcal{N}}$-пространств).

Теорема 1. *Если счётномерное $\bar{\mathcal{N}}$-пространство X является локально $\bar{\mathcal{N}}$-стягиваемым, то X является $\bar{\mathcal{N}}$-ANE-пространством. Если дополнительно X является $\bar{\mathcal{N}}$-стягиваемым, то X является $\bar{\mathcal{N}}$-AE-пространством.*

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 3, с. 121—129.
© 2016 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

Предварительные сведения

Обобщённым профильтрованным пространством (или *$\bar{\mathcal{N}}$-пространством*) называется метрическое пространство X, в котором выделена последовательность замкнутых подмножеств $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_\infty = X$, называемая *фильтрацией*. Подмножество $X_i \subset X$ будем называть *i-м элементом фильтрации* $\{X_i\}$ пространства X, подмножество $X^i \rightleftharpoons X_i \setminus X_{i-1} \subset X$, $i < \infty$, — *i-стратом* фильтрации $\{X_i\}$.

Для задания фильтрации пространства X достаточно каждой точке $x \in X$ поставить в соответствие натуральное число (включая ∞), называемое её *степенью* и обозначаемое $\deg x$, таким образом, чтобы для любого $i < \infty$ множество $X_i \rightleftharpoons \{x \in X \mid \deg x \leqslant i\}$ было замкнуто в X. Наоборот, любая фильтрация $\{X_i\}$ $\bar{\mathcal{N}}$-пространства X порождает степень каждой точки $x \in X$: $\deg x$ есть номер страта, содержащего x. Две эти операции взаимно обратны.

Степень произвольного *подмножества* $M \subset X$ определяется как

$$\min\{i \mid M \cap X^i \neq \varnothing\}$$

и обозначается через $\deg M$. Ясно, что

$$\deg X = \min\{i \mid X_i \neq \varnothing\}.$$

Метрическое подпространство $A \subset X$ с индуцированной фильтрацией (т. е. образованной множествами $A_i = A \cap X_i$, $i \in \mathbb{N}$) называется *$\bar{\mathcal{N}}$-подпространством* $\bar{\mathcal{N}}$-пространства X.

Непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ $\bar{\mathcal{N}}$-пространств называется *профильтрованным* (или *$\bar{\mathcal{N}}$-отображением*), если $f(X_n) \subset Y_n$ для всех $n \geqslant 1$, т. е. если $\deg f(x) \leqslant \deg x$ для всех $x \in X$.

Рассмотрим понятия, связанные с продолжением отображений. Если для $\bar{\mathcal{N}}$-отображения $f\colon A \to Y$, заданного на замкнутом $\bar{\mathcal{N}}$-подпространстве A $\bar{\mathcal{N}}$-пространства X (и называемого *частичным $\bar{\mathcal{N}}$-отображением*), существует такое $\bar{\mathcal{N}}$-отображение $\hat{f}\colon X \to Y$, что $\hat{f}\restriction_A = f$, то говорят, что $\hat{f}$ является *$\bar{\mathcal{N}}$-продолжением* f.

Обобщённое профильтрованное пространство Y называется *абсолютным $\bar{\mathcal{N}}$-экстензором*, кратко $Y \in \bar{\mathcal{N}}$-AE (*абсолютным окрестностным $\bar{\mathcal{N}}$-экстензором*, кратко $Y \in \bar{\mathcal{N}}$-ANE), если для любого метрического $\bar{\mathcal{N}}$-пространства X и любого его замкнутого $\bar{\mathcal{N}}$-подпространства A любое частичное $\bar{\mathcal{N}}$-отображение $f\colon A \to Y$ допускает $\bar{\mathcal{N}}$-продолжение $\hat{f}\colon X \to Y$ (допускает *окрестностное* $\bar{\mathcal{N}}$-продолжение $\hat{f}\colon U \to Y$, т. е. $\bar{\mathcal{N}}$-продолжение на некоторую окрестность U множества A в X).

Обобщённое профильтрованное пространство X называется *аппроксимативным абсолютным окрестностным $\bar{\mathcal{N}}$-экстензором* (кратко $X \in \bar{\mathcal{N}}$-A-ANE), если для любого покрытия $\omega \in \operatorname{cov} X$ (запись $\operatorname{cov} X$ обозначает множество всех открытых покрытий метрического пространства X) и для любого частичного $\bar{\mathcal{N}}$-отображения $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{f} X$ существует окрестностное *$\bar{\mathcal{N}}$-ω-продолжение*, т. е. такое $\bar{\mathcal{N}}$-отображение $\hat{f}\colon U \to X$, что для любой точки

$a \in A$ существует элемент покрытия $W \in \omega$, который содержит одновременно $f(a)$ и $\hat{f}(a)$.

Определим понятие гомотопии в $\bar{\mathcal{N}}$-категории. Для этого на отрезке $[0;1]$ будем рассматривать только тривиальную фильтрацию со степенью любой точки, равной 1. Тогда $X \times [0;1]$ — $\bar{\mathcal{N}}$-пространство с фильтрацией $\{X_i \times [0;1]\}$.

Профильтрованные отображения $f, g\colon X \to Y$ называются *$\bar{\mathcal{N}}$-гомотопными*, если существует *$\bar{\mathcal{N}}$-гомотопия*, связывающая отображение f с отображением g, т. е. такое $\bar{\mathcal{N}}$-отображение $F\colon X \times [0;1] \to Y$, что $F_0 = f$ и $F_1 = g$.

Обобщённое профильтрованное пространство X называется *$\bar{\mathcal{N}}$-стягиваемым* (кратко $X \in \bar{\mathcal{N}}$-C), если существует $\bar{\mathcal{N}}$-гомотопия, связывающая Id_X с постоянным отображением, т. е. такое $\bar{\mathcal{N}}$-отображение $H\colon X \times [0;1] \to X$, что $H_0 = \mathrm{Id}_X$ и $H_1(X)$ — некоторая точка $x_0 \in X$ (очевидно, что $x_0 \in X_{\deg X}$).

Обобщённое профильтрованное пространство X называется *локально $\bar{\mathcal{N}}$-стягиваемым в точке* $x_0 \in X$, если

(i) X удовлетворяет условию $\operatorname{Int} X^\infty = \varnothing$, т. е. любое непустое открытое подмножество $U \subset X$ имеет конечную степень;

(ii) для любой окрестности U точки x_0 существует такая окрестность U_0 точки x_0, $U_0 \subset U$, что U_0 $\bar{\mathcal{N}}$-стягиваемо по U, т. е. существует $\bar{\mathcal{N}}$-гомотопия $H\colon U_0 \times I \to U$, связывающая Id_{U_0} с постоянным отображением.

Будем говорить, что $\bar{\mathcal{N}}$-пространство X *локально $\bar{\mathcal{N}}$-стягиваемо* (кратко $X \in \bar{\mathcal{N}}$-LC), если оно локально $\bar{\mathcal{N}}$-стягиваемо в каждой своей точке. Примером локально $\bar{\mathcal{N}}$-стягиваемого пространства служит нормированное $\bar{\mathcal{N}}$-пространство, элементы фильтрации которого являются линейными подпространствами [5].

Далее все пространства предполагаются метрическими с фиксированной на них метрикой. Скажем, что пространство X *счётномерно*, если X представимо в виде счётной суммы нульмерных подпространств, т. е. $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$, где $\dim E_i = 0$ для любого $i \geqslant 1$.

В [2, предложение 2.7] установлено, что если пространство X счётномерно, то для любого частичного отображения $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{\varphi} X$ и для любых покрытий $\omega_i \in \operatorname{cov} X$, $i \geqslant 1$, существует счётное число дизъюнктных открытых семейств $\tilde{\sigma}_i$ в Z, таких что выполняются следующие условия:

а) тело U семейства $\tilde{\sigma} \rightleftharpoons \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{\sigma}_i$ является окрестностью A (*телом* системы открытых множеств ω называется множество $\bigcup \omega \rightleftharpoons \bigcup\{U \mid U \in \omega\}$);

б) $\varphi(\sigma_i) \prec \omega_i$ для всех $i \geqslant 1$, где $\sigma_i \rightleftharpoons \tilde{\sigma}_i \cap A$ (под $\omega \prec \omega_1$ будем понимать *вписанность* покрытия ω в ω_1);

в) семейство $\tilde{\sigma}_i$ однократно для любого $i \geqslant 1$;

г) покрытия σ и $\tilde{\sigma}$ подобны, т. е. $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \tilde{W}_i \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\bigcap\limits_{i=1}^{k} W_i \neq \varnothing$, где $\tilde{W}_i \in \tilde{\sigma}_i$, $W_i \rightleftharpoons \tilde{W}_i \cap A \in \sigma_i$.

Это утверждение допускает следующее уточнение в $\bar{\mathcal{N}}$-категории.

Предложение 1. *Пусть в частичном $\bar{\mathcal{N}}$-отображении $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{\varphi} X$ $\bar{\mathcal{N}}$-пространство X счётномерно. Если $\bar{\mathcal{N}}$-подпространство A обладает свойством* (i), *то дополнительно к* а)—г) *будет выполняться условие*

д) $\deg W = \deg \tilde{W}$.

Доказательство. Поскольку $X = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ и $\dim E_i = 0$ для любого i, то существуют такие открытые в X семейства $\gamma_i \prec \omega_i$ при $i \geqslant 1$, что кратность γ_i равна 1, а объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \gamma_i$ покрывает X. Из непрерывности отображения φ следует, что семейства $\sigma_i \rightleftharpoons \varphi^{-1}(\gamma_i)$ открыты, кратность σ_i равна 1, множество $\sigma \rightleftharpoons \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_i$ покрывает A, а также $\varphi(\sigma_i) \prec \omega_i$.

Построим теперь окрестность U множества A. Для этого определим для каждого $W \in \sigma_i \subset A$ открытые множества

$$W' = \{z \in Z \mid \mathrm{d}(z, W) < \mathrm{d}(z, A \setminus W)\} \subset Z$$

(здесь $\mathrm{d}(x, Y)$ — это расстояние от точки x до множества Y в Z) и рассмотрим их открытые подмножества $\tilde{W} = W' \cap (Z \setminus Z_{\deg W - 1})$. Отметим, что $W \subset \tilde{W} \subset W'$ и, кроме того, каждое из множеств W, $\tilde{W}$, W' имеет конечную степень (см. условие (i)). Получим семейства $\tilde{\sigma}_i \rightleftharpoons \{\tilde{W} \mid W \in \sigma_i\}$, такие что для любого $\tilde{W} \in \tilde{\sigma}_i$ выполняется $\tilde{W} \cap A = W$ и $\deg \tilde{W} = \deg W$. При этом тело $\bigcup \tilde{\sigma} \rightleftharpoons U$ покрытия $\tilde{\sigma} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \tilde{\sigma}_i$ является окрестностью множества A. Кроме того, из нижеприводимой леммы 1 следует, что $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \tilde{W}_i \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\bigcap\limits_{i=1}^{k} W_i \neq \varnothing$. Следовательно, покрытия σ и $\tilde{\sigma}$ подобны и кратность $\tilde{\sigma}_i$ равна 1. □

Лемма 1 (см. [8]). *Пусть (X, d) — произвольное метрическое пространство, $Y \subset X$. Пусть для каждого открытого подмножества $A \subseteq Y$ определено множество*

$$k(A) = \{x \in X \mid \mathrm{d}(x, A) < \mathrm{d}(x, Y \setminus A)\}.$$

Тогда множество $k(A)$ открыто и для любых открытых подмножеств $A, B \subseteq Y$ выполняется $k(A \cap B) = k(A) \cap k(B)$. В частности, $A \cap B \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $k(A) \cap k(B) \neq \varnothing$. (Считаем, что $\mathrm{d}(x, \varnothing) = \infty$.)

Наконец, приведём определение фильтрации на нерве открытого покрытия $\sigma = \{W_\beta \mid \beta \in B\}$ $\bar{\mathcal{N}}$-пространства Z. Под *нервом покрытия* понимаем полиэдр $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\langle\sigma\rangle$ в слабой топологии Уайтхеда, вершины $\langle W_\beta \rangle$ которого находятся в однозначном соответствии с индексным множеством B и при этом $\langle W_{\beta_0}, \ldots, W_{\beta_s} \rangle$ образуют s-мерный симплекс (под s-мерным *симплексом* с вершинами $\langle W_{\beta_0} \rangle, \ldots, \langle W_{\beta_s} \rangle$ подразумевается множество $\Delta \rightleftharpoons \Big\{ \sum\limits_{i=1}^{s} \tau_i \cdot \langle W_{\beta_i} \rangle \;\Big|\; 0 \leqslant \tau_i \leqslant 1,\ \sum\limits_{i=0}^{s} \tau_i = 1 \Big\}$) в том и только в том случае, когда

$\bigcap\limits_{i=0}^{s} W_{\beta_i} \neq \varnothing$ [4]. Определим степень вершины $\langle W_\beta \rangle \in \mathfrak{N}$ как степень множества $W_\beta \in Z$, а степень $\deg \Delta$ симплекса $\Delta = \langle W_0, \ldots, W_k \rangle$ как $\max\limits_{0 \leqslant i \leqslant k} \{\deg \langle W_i \rangle\}$. Тогда фильтрация на $\mathfrak{N}$ порождается множествами $\mathfrak{N}_i = \bigcup \{\Delta \mid \deg \Delta \leqslant i\} \subset \mathfrak{N}$, которые, очевидно, являются замкнутыми в $\mathfrak{N}$. Тем самым для внутренней точки симплекса $x \in \operatorname{rint}(\Delta)$ (скажем, что точка x принадлежит *относительной внутренности симплекса* $\Delta = \langle W_{\beta_0}, \ldots, W_{\beta_s} \rangle$ (кратко $x \in \operatorname{rint}(\Delta)$), если x не принадлежит никакой грани симплекса Δ, т. е. в разложении $x = \sum\limits_{i=1}^{s} \tau_i \cdot \langle W_{\beta_i} \rangle$ все τ_i больше 0) выполняется

$$\deg x = \deg \Delta \qquad (*)$$

Доказательство теоремы 1

Класс пространств, являющихся счётномерными и локально $\bar{\mathcal{N}}$-стягиваемыми, замкнут относительно умножения на полуотрезок $J = [0; 1)$. Следующая теорема, которая является аналогом теоремы 1.2 из [2] (и имеет аналогичное доказательство) для категории $\bar{\mathcal{N}}$-пространств, позволяет свести задачу выявления $\bar{\mathcal{N}}$-ANE-пространств к более простой задаче выявления аппроксимативных $\bar{\mathcal{N}}$-ANE-пространств.

Теорема 2. *Пусть класс метрических пространств $\mathcal{B}$ замкнут относительно умножения на полуотрезок $J = [0; 1)$. Тогда $\mathcal{B} \subset \bar{\mathcal{N}}$-ANE тогда и только тогда, когда $\mathcal{B} \subset \bar{\mathcal{N}}$-A-ANE.*

Таким образом, доказательство теоремы 1 сводится к следующему факту.

Теорема 3. *Если счётномерное $\bar{\mathcal{N}}$-пространство X является локально $\bar{\mathcal{N}}$-стягиваемым, то X является $\bar{\mathcal{N}}$-A-ANE-пространством.*

Для доказательства теоремы 3 достаточно показать, что для любого частичного $\bar{\mathcal{N}}$-отображения $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{f} X \in \bar{\mathcal{N}}$-LC выполняется следующее свойство:

для любого покрытия $\omega \in \operatorname{cov} X$ существует окрестностное $\bar{\mathcal{N}}$-ω-продолжение $\hat{f} \colon U \to X$ отображения f. $\quad (**)$

Оказывается, достаточно доказать этот факт в частном случае, когда $\bar{\mathcal{N}}$-подпространство A обладает свойством (i). В самом деле, по теореме Куратовского—Войдыславского для $\bar{\mathcal{N}}$-пространств [1] существует замкнутое $\bar{\mathcal{N}}$-вложение $\bar{\mathcal{N}}$-пространства X в некоторое линейное нормированное $\bar{\mathcal{N}}$-пространство $L \in \bar{\mathcal{N}}$-AE. Так как $X \in \bar{\mathcal{N}}$-LC, то X обладает свойством (i) и, следовательно, в силу нижеприводимой теоремы 4 для частичного $\bar{\mathcal{N}}$-отображения $L \hookleftarrow X \xrightarrow{\mathrm{Id}} X$ существует $\bar{\mathcal{N}}$-ω-продолжение $r \colon L \to X$ отображения Id_X.

Поскольку известно, что $L \in \bar{\mathcal{N}}$-AE, то существует $\bar{\mathcal{N}}$-продолжение $F \colon Z \to L$ частичного $\bar{\mathcal{N}}$-отображения $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{f} X \hookrightarrow L$. Тогда композиция

$\hat{f} \rightleftharpoons r \circ F\colon Z \to X$ является искомым ω-продолжением отображения $f\colon A \to X$. Действительно, для любой точки $a \in A$ имеем $\hat{f}(a) = r\big(F(a)\big) = r\big(f(a)\big)$. А поскольку r является $\bar{\mathcal{N}}$-ω-отображением, то $\hat{f}(a)$ и $f(a)$ являются ω-близкими.

Таким образом, теорема 3 редуцируется к следующему результату.

Теорема 4. *Если в частичном $\bar{\mathcal{N}}$-отображении $Z \hookleftarrow A \xrightarrow{f} X \in \bar{\mathcal{N}}$-LC $\bar{\mathcal{N}}$-подпространство A обладает свойством* (i), *то имеет место свойство* $(**)$.

Доказательство. Поскольку $X \in \bar{\mathcal{N}}$-LC, то для любого натурального числа $i \geqslant 0$ и для любой точки $x \in X$ можно выбрать такие $\bar{\mathcal{N}}$-окрестности $\ldots \subset V_{i+1}(x) \subseteq U_{i+1}(x) \subseteq V_i(x) \subset \ldots$, что

покрытие $\{U_0(x) \mid x \in X\}$ будет вписано в ω; (1)

покрытие $\{U_i(x) \mid x \in X\}$ звёздно вписано в покрытие $\{V_{i-1}(x) \mid x \in X\}$ при $i > 0$ (2)

(*звездой покрытия* ω относительно другого покрытия ω' назовём покрытие $\mathrm{St}(\omega;\omega') = \{\mathrm{St}(U;\omega') \mid U \in \omega\}$, где $\mathrm{St}(A;\nu) \rightleftharpoons \bigcup\{V \in \nu \mid V \cap A \neq \varnothing\}$ — это *звезда множества* $A \subset X$ относительно покрытия $\nu \in \operatorname{cov} X$; в [3] показано, что в любое открытое покрытие метрического пространства можно звёздно вписать открытое покрытие); а также можно выбрать $\bar{\mathcal{N}}$-стягивания $F^{x,i}\colon V_i(x) \times I \to U_i(x)$ окрестности $V_i(x)$ по окрестности $U_i(x)$ в некоторую точку $y_x \in U_i(x)$, удовлетворяющую условию

$$\deg y_x \leqslant \deg V_i(x) < \infty, \tag{3}$$

такие что выполняется

$$F^{x,i}\restriction_{(V_i(x)\times\{0\})} = \mathrm{Id}, \quad F^{x,i}\restriction_{(V_i(x)\times\{1\})} = y_x. \tag{4}$$

Так как пространство X счётномерно и обладает свойством (i), то существуют открытые в Z семейства $\tilde{\sigma}_i$, $i \geqslant 2$, удовлетворяющие условиям а)—д) предложения 1. Считаем при этом, что $f(\sigma_i) \prec \{V_i(x) \mid x \in X\}$, $\sigma_i = \tilde{\sigma}_i \cap A$.

Рассмотрим профильтрованный нерв $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\langle\tilde{\sigma}\rangle$ покрытия $\tilde{\sigma}$ и поставим в соответствие каждой вершине $\langle\tilde{W}\rangle \in \mathfrak{N}$ номер $\alpha = \alpha(\tilde{W})$ семейства $\tilde{\sigma}_\alpha$, такой что $\tilde{W} \in \tilde{\sigma}_\alpha$. При этом для произвольного k-мерного симплекса $\Delta = \langle\tilde{W}_0, \ldots, \tilde{W}_k\rangle$, $\tilde{W}_i \in \tilde{\sigma}_{\alpha(\tilde{W}_i)}$, из условия $\bigcap\limits_{i=0}^{k} \tilde{W}_i \neq \varnothing$ и однократности систем $\tilde{\sigma}_{\alpha(\tilde{W}_i)}$ следует, что все числа $\alpha(\tilde{W}_i)$ различны. Поэтому вершины каждого симплекса нерва можно упорядочить таким образом, что номера $\alpha(\tilde{W}_i)$ систем $\tilde{\sigma}_{\alpha(\tilde{W}_i)}$ будут образовывать строго возрастающую последовательность $\alpha(\tilde{W}_0) < \alpha(\tilde{W}_1) < \ldots < \alpha(\tilde{W}_k)$. В дальнейшем упорядочивание вершин симплексов нерва $\mathfrak{N}$ будет осуществляться описанным выше образом.

Рассмотрим каноническое отображение $\theta\colon U \to \mathfrak{N}$, подчинённое открытому семейству $\tilde{\sigma}$ (при каноническом отображении $\theta\colon X \to \mathfrak{N}\langle\omega\rangle$, подчинённом открытому покрытию $\omega = \{U_\beta \mid \beta \in B\} \in \operatorname{cov} X$, точке $x \in X$, содержащейся только

в $U_{\beta_1}, \ldots, U_{\beta_s} \in \omega$, ставится в соответствие точка $\theta(x) = \sum\limits_{i=1}^{s} \tau_i(x) \cdot \langle U_{\beta_i} \rangle \in \mathfrak{N}$, причём $0 \leqslant \tau_i(x) \leqslant 1$ и $\sum\limits_{i=0}^{s} \tau_i(x) = 1$; известно, что для любого открытого покрытия паракомпакта существует каноническое отображение [7]), и покажем, что оно является профильтрованным. Действительно, пусть $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} \tilde{W}_i$. Тогда $\deg x \geqslant \deg \tilde{W}_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k$. Если $\theta(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \tau_i \cdot \langle \tilde{W}_i \rangle$, где все τ_i больше 0, то

$$\deg \theta(x) = \deg \langle \tilde{W}_1, \ldots, \tilde{W}_k \rangle = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \{\deg \langle \tilde{W}_i \rangle\}.$$

С учётом неравенства $\deg x \geqslant \deg \tilde{W}_i$ получаем, что $\deg \theta(x) \leqslant \deg x$.

Искомое $\bar{\mathcal{N}}$-отображение $\hat{f}$ есть композиция θ и строящегося далее $\bar{\mathcal{N}}$-отображения $g\colon \mathfrak{N} \to X$.

Из условия $f(\sigma_i) \prec \{V_i(x) \mid x \in X\}$ следует, что для каждого $\tilde{W} \in \tilde{\sigma}_i$ множество $f(W) = f(\tilde{W} \cap A)$ содержится в некотором элементе покрытия $\{V_i(x)\}$, скажем S. Так как для каждых $i \geqslant 0$, $x \in X$ справедливо $V_i(x) \subseteq \subseteq U_i(x)$ и покрытие $\{U_i(x)\}$ звёздно вписано в покрытие $\{V_{i-1}(x)\}$, то существует такая точка $x_W \in X$, что $\mathrm{St}(S; \{U_i(x)\}) \subseteq V_{i-1}(x_W)$, тем более $\mathrm{St}(f(W); \{U_i(x)\}) \subseteq V_{i-1}(x_W)$. Так как f — $\bar{\mathcal{N}}$-отображение, то $\deg f(W) \leqslant \leqslant \deg W = \deg \langle \tilde{W} \rangle$. С другой стороны, $f(W) \subset V_{i-1}(x_W)$, и следовательно, $\deg f(W) \geqslant \deg V_{i-1}(x_W) \geqslant \deg y_{x_W}$ (см. (3)). Учитывая, что $\deg \langle \tilde{W} \rangle = \deg W$ (см. условие д) предложения 1), получаем

$$\deg \langle \tilde{W} \rangle \geqslant \deg y_{x_W}. \tag{5}$$

Отображение $g_0\colon \mathfrak{N}^{(0)} \to X$ зададим формулой $g_0(\langle \tilde{W} \rangle) = y_{x_W}$. Заметим, что из (5) следует, что отображение g_0 сохраняет фильтрацию. Отображение g_0 последовательно продолжается до отображений $g_i\colon \mathfrak{N}^{(i)} \to X$, $i = 1, \ldots, k-1$, заданных на i-остове нерва так, чтобы для любого $k > 1$ выполнялось условие

$$f(W_0) \cup g_{k-1}(\langle \tilde{W}_0, \ldots, \tilde{W}_{k-1} \rangle) \subseteq U_{\alpha(\tilde{W}_0)-1}(x_{W_0}). \tag{6}$$

Построим отображение

$$g_k\colon \mathfrak{N}^{(k)} \to X, \quad g_k{\restriction}_{\mathfrak{N}^{(k-1)}} = g_{k-1},$$

если уже построено $\bar{\mathcal{N}}$-отображение $g_{k-1}\colon \mathfrak{N}^{(k-1)} \to X$, удовлетворяющее условию (6). Каждая точка $x \in \Delta^k = \langle \tilde{W}_0, \tilde{W}_1, \ldots, \tilde{W}_k \rangle$ представляется в виде

$$x = t \cdot \langle \tilde{W}_0 \rangle + (1-t) \cdot v, \quad \text{где} \quad v \in \langle \tilde{W}_1, \ldots, \tilde{W}_k \rangle = \Delta^{k-1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

С учётом этого определим отображение $g_k{\restriction}_{\Delta^k}$, положив

$$g_k(t \cdot \langle \tilde{W}_0 \rangle + (1-t) \cdot v) = F^{x_{W_0}, \alpha(\tilde{W}_0)-1}(g_{k-1}(v), t).$$

Согласно условию $g_{k-1}(\Delta^{k-1}) \subseteq V_{\alpha(\tilde{W}_0)-1}(x_{W_0})$ (см. [2, лемма 4.4]) такое определение корректно.

Кроме того, из включения

$$\operatorname{Im} F^{x_{W_0},\alpha(\tilde{W}_0)-1} \subseteq U_{\alpha(\tilde{W}_0)-1}(x_{W_0})$$

легко следует, что

$$f(W_0) \cup g_k(\Delta^k) \subseteq U_{\alpha(\tilde{W}_0)-1}(x_{W_0}),$$

т. е. отображение g_k удовлетворяет условию (6). Отображение g_k продолжает отображение g_{k-1} в силу условия $g_k\restriction_{\partial\Delta^k} = g_{k-1}$ (см. [2, лемма 4.6]).

Покажем, что отображение g сохраняет фильтрацию, т. е. что для любого $x \in \mathfrak{N}$ выполняется неравенство $\deg x \geqslant \deg g(x)$. Воспользуемся индукцией по размерности остова нерва. База индукции установлена ранее (см. (5)). Допустим, что отображение g_{k-1} сохраняет фильтрацию, и покажем, что таким же свойством обладает отображение g_k. Рассмотрим k-мерный симплекс $\Delta = \langle \tilde{W}_0, \tilde{W}_1, \ldots, \tilde{W}_k \rangle$ и произвольную точку $x \in \operatorname{rint}(\Delta)$. Тогда

$$x = t_x \cdot \langle \tilde{W}_0 \rangle + (1 - t_x) \cdot v, \quad \text{где} \quad 0 < t_x < 1, \ v \in \operatorname{rint}(\langle \tilde{W}_1, \ldots, \tilde{W}_k \rangle).$$

Из свойства $(*)$ следуют равенства

$$\deg x = \deg\langle \tilde{W}_0, \tilde{W}_1, \ldots, \tilde{W}_k \rangle, \quad \deg v = \deg\langle \tilde{W}_1, \ldots, \tilde{W}_k \rangle.$$

Из определения степени симплекса следует, что

$$\deg\langle \tilde{W}_0, \tilde{W}_1, \ldots, \tilde{W}_k \rangle \geqslant \deg\langle \tilde{W}_1, \ldots, \tilde{W}_k \rangle,$$

откуда получаем, что

$$\deg x \geqslant \deg v. \tag{7}$$

Так как $g(x) = F^{x_{W_0},\alpha(\tilde{W}_0)-1}(g_{k-1}(v), t_x)$ и отображение $F^{x_{W_0},\alpha(\tilde{W}_0)-1}$ есть $\bar{\mathcal{N}}$-отображение, то $\deg g(x) = \deg F^{x_{W_0},\alpha(\tilde{W}_0)-1}(g_{k-1}(v), t_x) \leqslant \deg g_{k-1}(v)$. По предположению индукции отображение g_{k-1} сохраняет фильтрацию, поэтому $\deg v \geqslant \deg g_{k-1}(v)$. С учётом последних двух неравенств и (7) получаем следующую цепочку неравенств

$$\deg x \geqslant \deg v \geqslant \deg g_{k-1}(v) \geqslant \deg g(x),$$

которая доказывает шаг индукции.

Покажем, что $\hat{f} = g \circ \theta \colon U \to X$ — искомое $\bar{\mathcal{N}}$-ω-продолжение отображения f. Действительно, для точки $x \in A$, такой что $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} \tilde{W}_i$ и $\theta(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \tau_i \cdot \langle \tilde{W}_i \rangle$, по условию (6), применённому к симплексу $\langle \tilde{W}_0, \ldots, \tilde{W}_k \rangle$, имеем, что

$$f(W_0) \cup g\big(\theta(x)\big) \subseteq U_{\alpha(\tilde{W}_0)-1}(x_{W_0}) \subseteq V_{\alpha(\tilde{W}_0)-2}(x_{W_0}).$$

А поскольку $\{V_{\alpha(\tilde{W}_0)-2}(x)\} \prec \omega$ при $\alpha(\tilde{W}_0) \geqslant 2$, то $f(a)$ и $\hat{f}(a)$ являются ω-близкими. Следовательно, построенное нами отображение $\hat{f}$ действительно является ω-продолжением отображения f. Кроме того, отображение $\hat{f}$ очевидно является и $\bar{\mathcal{N}}$-отображением как композиция двух $\bar{\mathcal{N}}$-отображений. $\square$

Литература

[1] Агеев С. М., Жигулич И. А., Силаева З. Н. Инъективные объекты категории стратифицированных пространств // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2017. — № 2. — С. 3—13.

[2] Агеев С. М., Реповш Д. Метод аппроксимативного продолжения отображений в теории экстензоров // Сиб. матем. журн. — 2002. — Т. 43, № 4. — С. 739—756.

[3] Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. — М.: Наука, 1975.

[4] Борсук К. Теория ретрактов. — М.: Мир. 1971.

[5] Силаева З. Н. Теорема Куратовского—Дугунджи для пространств с фильтрациями // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. — 2009. — № 3. — С. 89—94.

[6] Haver W. E. Locally contractible spaces that are absolute neighborhood retracts // Proc. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 40. — P. 280—284.

[7] Hu S.-T. Theory of Retracts. — Wayne State Univ. Press, 1965.

[8] Van Mill J. The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces. — North-Holland, 2001. — (North-Holland Math. Library; Vol. 64).