Строение изоморфизмов универсальных гиперграфических автоматов

В. А. МОЛЧАНОВ
Саратовский государственный университет
e-mail: V.Molchanov@inbox.ru

УДК 519.713.8+512.53+514.146

Ключевые слова: автоматы, полугруппы, гиперграфы, изоморфизмы, группы автоморфизмов.

Аннотация

Универсальные гиперграфические автоматы являются универсальными притягивающими объектами в категории автоматов, у которых множество состояний и множество выходных символов наделены алгебраическими структурами гиперграфов. Ранее доказано, что широкий класс автоматов такого вида определяется с точностью до изоморфизма их полугруппами входных символов. В настоящей работе исследуется связь между изоморфизмами универсальных гиперграфических автоматов и изоморфизмами их компонент: полугрупп входных символов и гиперграфов состояний и выходных символов.

Abstract

V. A. Molchanov, The structure of isomorphisms of universal hypergraphical automata, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 3, pp. 141—159.

Universal hypergraphical automata are universally attracted objects in the category of automata, for which the set of states and the set of output symbols are equipped with structures of hypergraphs. It was proved earlier that a wide class of such sort of automata are determined up to isomorphism by their semigroups of input symbols. We investigate a connection between isomorphisms of universal hypergraphical automata and isomorphisms of their components: semigroups of input symbols and hypergraphs of states and output symbols.

1. Введение

Как известно [6], в алгебраической теории автоматов главный объект исследования — автомат — рассматривается как многосортная алгебраическая система $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ с тремя базисными множествами: множеством состояний автомата X, множеством входных символов S, множеством выходных символов Y — и с двумя сигнатурными операциями: функцией переходов $\delta\colon X \times S \to X$ и выходной функцией $\lambda\colon X \times S \to Y$. При таком подходе на теорию автоматов распространяется проблематика и методика исследования универсальной алгебры. В частности, для автоматов естественно определяются

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 3, с. 141—159.

такие понятия, как гомоморфизм автоматов, фактор-автомат, подавтомат и т. д. Более того, в зависимости от рассматриваемых задач автоматы могут структуризироваться в подходящих алгебраических категориях [6], т. е. компоненты автоматов могут быть объектами некоторых специальных категорий. Так, множество входных символов автомата обычно рассматривается с ассоциативным умножением и, следовательно, является объектом категории полугрупп. С другой стороны, множества состояний автомата и его выходных символов могут наделяться некоторой алгебраической структурой и являться объектами категории соответствующих алгебраических систем. Важными примерами таких алгебраических систем являются графы, упорядоченные множества, линейные пространства, вероятностные пространства и др. Исследованию структуризованных в таких категориях автоматов посвящены многочисленные работы известных алгебраистов (см., например, обзор в [6]). При этом многие результаты алгебраической теории автоматов имеют непосредственное отношение к одному из основных разделов современной алгебры — обобщённой теории Галуа, которая посвящена изучению математических объектов путём исследования некоторых производных алгебр отношений, специальным образом связанных с исходными объектами. В нашем случае изучаемым математическим объектом является автомат и производной алгеброй отношений — его полугруппа входных символов (которые рассматриваются как преобразования множества состояний автомата). Например, в таком контексте в [9] изучаются планарные автоматы, т. е. автоматы, структурированные в категории плоскостей [1]. Как следует из [6], в категории планарных автоматов с плоскостью состояний Π и плоскостью выходных символов Π' существует универсальный притягивающий объект $\mathrm{Atm}(\Pi, \Pi')$, который называется универсальным планарным автоматом над плоскостями Π, Π'. Для таких автоматов в [9] приводится решение одной из основных задач обобщённой теории Галуа об определяемости математических объектов производными алгебрами отношений; главный результат этой работы показывает, что универсальные планарные автоматы определяются с точностью до изоморфизма своими полугруппами входных символов. Дальнейшему исследованию задач обобщённой теории Галуа для универсальных планарных автоматов посвящены работы [3—5].

Настоящая работа продолжает исследования в этом направлении. В ней рассматриваются гиперграфические автоматы, т. е. автоматы, структуризованные в категории гиперграфов специального вида, которые называются p-гиперграфами [8]. Как и в случае планарных автоматов, в категории гиперграфических автоматов с гиперграфом состояний H и гиперграфом выходных символов H' существует притягивающий объект $\mathrm{Atm}(H, H')$, который называется универсальным гиперграфическим автоматом над гиперграфами H, H'. Главные результаты работы — описание в лемме 3.1 строения изоморфизмов универсальных гиперграфических автоматов над произвольными p-гиперграфами и установление в теореме 3.3 взаимосвязи между изоморфизмами таких автоматов и изоморфизмами их компонент: полугрупп входных символов, гиперграфов состояний и гиперграфов выходных символов. Отсюда выводится в следствии 3.6, что универсальный гиперграфический автомат $\mathrm{Atm}(H, H')$ над любыми p-гиперграфами H, H' определяется с точностью до изоморфизма своей полугруппой входных символов. Эти результаты позволяют описать в теореме 3.7 строение групп автоморфизмов таких автоматов и их полугрупп входных символов.

2. Предварительные сведения

Напомним некоторые определения и понятия из теории полугрупп [2], теории автоматов [6] и теории гиперграфов [7].

Под *отображением* множества X в множество Y (обозначение $\varphi\colon X \to Y$) понимается однозначное бинарное отношение $\varphi \subset X \times Y$ с областью определения $\mathrm{dom}\,\varphi = X$. Образ элемента $x \in X$ относительно отображения φ обозначается $\varphi(x)$. Для подмножества $A \subset X$ обозначим $\varphi(A) = \{\varphi(x) \mid x \in A\}$.

Под *постоянным отображением* множества X в элемент x понимается отображение $c_x\colon X \to \{x\}$. Отображение множества X в себя называется *преобразованием* X. Тождественное преобразование множества X обозначается через Δ_X. Взаимно-однозначное отображение $\varphi\colon X \to Y$, удовлетворяющее условию $\varphi(X) = Y$, называется *биекцией* X на Y. В этом случае *обратное отображение* $\overset{-1}{\varphi}\colon Y \to X$ определяется по формуле

$$\overset{-1}{\varphi}(y) = x \Longleftrightarrow \varphi(x) = y.$$

Биекция множества X на себя называется *перестановкой* X.

Для отображений $\varphi\colon X \to Y$, $\psi\colon Y \to Z$ композиция $\varphi\psi\colon X \to Z$ определяется по формуле $\varphi\psi(x) = \psi\bigl(\varphi(x)\bigr)$, где $x \in X$. Для отображений φ, ψ множества X в множество Y декартово произведение $\varphi \times \psi\colon X \times X \to Y \times Y$ определяется по формуле $(\varphi \times \psi)(x_1, x_2) = \bigl(\varphi(x_1), \psi(x_2)\bigr)$, где $x_1, x_2 \in X$. Тогда для любого $\varrho \subset X \times X$ имеем, что $(\varphi \times \psi)(\varrho) = \overset{-1}{\varphi}\varrho\psi$. Обозначим $\varphi^2 = \varphi \times \varphi$.

Следуя К. Бержу [7], под *гиперграфом* будем понимать алгебраическую систему $H = (X, R)$, состоящую из непустого множества X и некоторого множества R произвольных подмножеств X. Элементы X и R называются *вершинами* и *рёбрами* соответственно. Вершины $x, y \in X$ называются *смежными*, если они принадлежат некоторому ребру. Говорят, что множество вершин $Y \subseteq X$ является *ограниченным*, если оно включается в некоторое ребро гиперграфа H, и *неограниченным* в противном случае. Минимальное по включению неограниченное подмножество множества X называется *критическим множеством*.

Пусть $H = (X, R)$, $H' = (X', R')$ — произвольные гиперграфы. Отображение $\varphi\colon X \to X'$ называется *гомоморфизмом* гиперграфа H в гиперграф H' (и обозначается $\varphi\colon H \to H'$), если φ отображает ограниченные подмножества гиперграфа H в ограниченные подмножества гиперграфа H', т. е. выполняется условие

$$(\forall\, r \in R)(\exists\, r' \in R')\ (\varphi(r) \subseteq r').$$

Обозначим через $\mathrm{Hom}(H, H')$ множество всех гомоморфизмов гиперграфа H в гиперграф H'. Очевидно, что для каждого непустого ребра $r' \in R'$, любое отображение $\varphi\colon X \to r'$ является гомоморфизмом гиперграфа H в гиперграф H'.

Гомоморфизм $\varphi\colon H \to H'$ называется *изоморфизмом* гиперграфа H на гиперграф H', если φ является биекцией множества X на множество X', которая сохраняет рёбра этих гиперграфов, т. е. выполняется условие

$$(\forall Y \subseteq X)\ (Y \in R \Leftrightarrow f(Y) \in R').$$

Обозначим $\mathrm{Iso}(H, H')$ множество всех изоморфизмов гиперграфа H на гиперграф H'.

Гомоморфизм гиперграфа H в себя называется *эндоморфизмом* H. В частности, эндоморфизмом гиперграфа H является тождественное преобразование Δ_X множества его вершин. Обозначим $\mathrm{End}\, H$ полугруппу всех эндоморфизмов гиперграфа H с операцией композиции.

Эндоморфизм φ гиперграфа H называется *автоморфизмом* H, если φ является перестановкой множества вершин X, которая сохраняет рёбра этого гиперграфа. Обозначим $\mathrm{Aut}\, H$ группу всех автоморфизмов гиперграфа H с операцией композиции.

Следуя [6], для гиперграфов H, H' обозначим через $S(H, H')$ полугруппу $\mathrm{End}\, H \times \mathrm{Hom}(H, H')$ с бинарной операцией

$$(\varphi, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (\varphi\varphi_1, \varphi\psi_1),$$

где $\varphi, \varphi_1 \in \mathrm{End}\, H$ и $\psi, \psi_1 \in \mathrm{Hom}(H, H')$.

Лемма 2.1. *Пусть $H = (X, R)$ — произвольный гиперграф, $H' = (X', R')$ — гиперграф, имеющий непустые рёбра, и s — элемент полугруппы $S(H, H')$. Тогда s в том и только том случае является левой единицей полугруппы $S(H, H')$, если $s = (\Delta_X, \psi)$ для некоторого $\psi \in \mathrm{Hom}(H, H')$.*

Доказательство. Так как гиперграф H' имеет непустые рёбра, то $\mathrm{Hom}(H, H') \neq \varnothing$. Легко убедиться, что для любого гомоморфизма $\psi \in \mathrm{Hom}(H, H')$ упорядоченная пара $s = (\Delta_X, \psi)$ является левой единицей полугруппы $S(H, H')$. Обратно, любая левая единица $s = (\varphi, \psi)$ полугруппы $S(H, H')$ удовлетворяет условию $s \cdot t = t$ для каждого элемента $t = (\varphi_1, \psi_1)$ полугруппы $S(H, H')$. Это означает, что для любых $\varphi_1 \in \mathrm{End}\, H$, $\psi_1 \in \mathrm{Hom}(H, H')$ выполняется равенство $(\varphi, \psi) \cdot (\varphi_1, \psi_1) = (\varphi_1, \psi_1)$. Отсюда следует, что для любого $\psi_1 \in \mathrm{Hom}(H, H')$ выполняется равенство $(\varphi, \psi) \cdot (\Delta_X, \psi_1) = (\Delta_X, \psi_1)$. С другой стороны,

$$(\varphi, \psi) \cdot (\Delta_X, \psi_1) = (\varphi\Delta_X, \varphi\psi_1) = (\varphi, \varphi\psi_1).$$

Следовательно, $(\Delta_X, \psi_1) = (\varphi, \varphi\psi_1)$, $\varphi = \Delta_X$, и значит, $s = (\Delta_X, \psi)$ для $\psi \in \mathrm{Hom}(H, H')$. □

Пусть p — некоторое натуральное число. Гиперграф H называется *p-гиперграфом*, если выполняются следующие три условия:

(A_1) любые p вершин гиперграфа H содержатся в одном и только одном его ребре;
(A_2) любое ребро гиперграфа H содержит по крайней мере $p+1$ вершину;
(A_3) существует $p+1$ вершин в гиперграфе H, которые не принадлежат одновременно ни одному его ребру.

Например, если рассматривать плоскости [1] (в частности, аффинные или проективные) как гиперграфы, для которых вершинами являются точки плоскости и рёбрами являются их прямые, то такие плоскости с более чем четырьмя вершинами являются 2-гиперграфами. С другой стороны, гиперграф $H = (X, R)$ является 1-гиперграфом в том и только том случае, если его рёбра формируют нетривиальное разбиение множества X на собственные подмножества, содержащие по крайней мере два элемента.

Отметим, что для любого p-гиперграфа $H = (X, R)$ из условий (A_1)—(A_3) следует, что $|X| > p$, $R \neq \varnothing$ и каждое ребро $r \in R$ удовлетворяет условию $|r| \geqslant p+1$.

Из определения p-гиперграфа и его критических множеств вытекает справедливость следующего утверждения.

Лемма 2.2. *Каждое критическое множество любого p-гиперграфа состоит из $p+1$ вершин.*

Доказательство. Пусть Y — некоторое критическое множество p-гиперграфа H. Так как по свойству (A_1) любое p-элементное подмножество множества Y является ограниченным, то выполняется условие $|Y| > p$. Рассмотрим p элементов $x_1, \ldots, x_p \in Y$. По свойству (A_1) эти вершины содержатся в некотором ребре r гиперграфа H. Тогда $Y \nsubseteq r$ и для любого $y \in Y \setminus r$ множество $Y_1 = \{x_1, \ldots, x_p, y\}$ является неограниченным подмножеством Y, так как в противном случае $Y_1 \subseteq r_1$ для некоторого $r_1 \in R$ и по свойству (A_1) $r = r_1$, что противоречит выбору элемента $y \notin r$. Поскольку Y является минимальным по включению неограниченным подмножеством X, то выполняется равенство $Y = Y_1$. Следовательно, $|Y| = p+1$. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть $H = (X, R)$, $H' = (X', R')$ — p-гиперграфы. Тогда элемент s полугруппы $S(H, H')$ в том и только том случае является правым нулём полугруппы $S(H, H')$, если найдутся такие элементы $a \in X$, $b \in X'$, что $s = (c_a, c_b)$ для постоянных отображений $c_a \colon X \to \{a\}$, $c_b \colon X \to \{b\}$.*

Доказательство. По свойству (A_1) для любых вершин $a \in X$, $b \in X'$ существуют рёбра $r \in R$, $r' \in R'$, такие что $a \in r$, $b \in r'$. Тогда постоянное отображение c_a является эндоморфизмом гиперграфа H, постоянное отображение c_b является гомоморфизмом гиперграфа H в гиперграф H' и упорядоченная пара $s = (c_a, c_b)$ принадлежит множеству $S(H, H')$. Легко убедиться, что такой элемент s является правым нулём полугруппы $S(H, H')$. Обратно, каждый правый ноль $s = (\varphi, \psi)$ полугруппы $S(H, H')$ удовлетворяет равенству $t \cdot s = s$ для любого элемента $t \in S(H, H')$. В частности, для произвольного элемента

$a_1 \in X$ и его образов $a = \varphi(a_1)$, $b = \psi(a_1)$ постоянные отображения c_a, c_{a_1} принадлежат $\operatorname{End} H$, $c_b \in \operatorname{Hom}(H, H')$, элемент $t = (c_{a_1}, c_b)$ принадлежит $S(H, H')$ и выполняются равенства

$$(\varphi, \psi) = (c_{a_1}, c_b) \cdot (\varphi, \psi) = (c_{a_1}\varphi, c_{a_1}\psi) = (c_{\varphi(a_1)}, c_{\psi(a_1)}) = (c_a, c_b).$$

Отсюда следует, что $s = (c_a, c_b)$ для элементов $a \in X$, $b \in X'$. □

Для гиперграфов H, H' обозначим через $Z(H, H')$ множество всех правых нулей полугруппы $S(H, H')$ и через $U(H, H')$ множество всех левых единиц полугруппы $S(H, H')$. Из лемм 2.1, 2.3 следует, что эти множества определяются в полугруппе $S(H, H')$ формулами элементарной теории полугрупп $\Phi(x) = (\forall\, y)\ (yx = x)$ и $\Psi(x) = (\forall\, y)\ (xy = y)$ соответственно.

Лемма 2.4. *Пусть H, H' — p-гиперграфы и $s = (\varphi, \psi)$, $t = (\varphi_1, \psi_1)$ — элементы полугруппы $S(H, H')$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *выполняется равенство $\varphi = \varphi_1$;*
2) *$s \cdot e = t \cdot e$ для некоторого элемента $e \in U(H, H')$;*
3) *$s \cdot e = t \cdot e$ для каждого элемента $e \in U(H, H')$.*

Доказательство. Пусть для элементов $s = (\varphi, \psi)$, $t = (\varphi_1, \psi_1)$ полугруппы $S(H, H')$ выполняется равенство $\varphi = \varphi_1$ и $e \in U(H, H')$. По лемме 2.1 элемент e удовлетворяет условию $e = (\Delta_X, \psi_2)$ для некоторого $\psi_2 \in \operatorname{Hom}(H, H')$. Тогда выполняются следующие равенства:

$$s \cdot e = (\varphi, \psi) \cdot (\Delta_X, \psi_2) = (\varphi\Delta_X, \varphi\psi_2) = (\varphi, \psi_1) \cdot (\Delta_X, \psi_2) = t \cdot e.$$

Следовательно, 1) влечёт 3). Очевидно, что 3) влечёт 2). Предположим, что $s \cdot e = t \cdot e$ для некоторого $e \in U(H, H')$. Так как по лемме 2.1 $e = (\Delta_X, \psi_2)$ при некотором $\psi_2 \in \operatorname{Hom}(H, H')$, то выполняются равенства

$$s \cdot e = (\varphi, \psi) \cdot (\Delta_X, \psi_2) = (\varphi\Delta_X, \varphi\psi_2) = (\varphi, \varphi\psi_2),$$
$$t \cdot e = (\varphi_1, \psi_1) \cdot (\Delta_X, \psi_2) = (\varphi_1\Delta_X, \varphi_1\psi_2) = (\varphi_1, \varphi_1\psi_2).$$

Отсюда следует, что $(\varphi, \varphi\psi_2) = (\varphi_1, \varphi_1\psi_2)$ и, в частности, $\varphi = \varphi_1$. Значит, 2) влечёт 1). □

Следствие 2.5. *Пусть $H = (X, R)$, $H' = (X', R')$ — p-гиперграфы. Тогда формула элементарной теории полугрупп*

$$\Sigma(x, y) = \Phi(x) \wedge \Phi(y) \wedge (\forall e)\ (\Psi(e) \Rightarrow xe = ye)$$

определяет на подмножестве $Z(H, H')$ полугруппы $S(H, H')$ бинарное отношение $\varepsilon_{(H,H')}$, для которого справедливы следующие утверждения:

1) *$\varepsilon_{(H,H')}$ является эквивалентностью на множестве $Z(H, H')$, такой что для любых элементов $s, s_1 \in Z(H, H')$ условие $s \equiv s_1(\varepsilon_{(H,H')})$ выполняется тогда и только тогда, когда $s = (c_a, c_x)$, $s_1 = (c_a, c_y)$ для некоторых $a \in X$ и $x, y \in X'$;*
2) *для любого правого нуля $s = (c_a, c_b)$ полугруппы $S(H, H')$ $\varepsilon_{(H,H')}(s) = \{(c_a, c_x) \colon x \in X'\}$.*

Для гиперграфов $H = (X, R)$, $H' = (X', R')$ множество вершин $B \subseteq X'$ называется *H-универсальным*, если любое отображение $\varphi\colon X \to B$ является гомоморфизмом H в H'.

Лемма 2.6. *Для любых p-гиперграфов $H = (X, R)$, $H' = (X', R')$ справедливы следующие утверждения*:

1) *каждое множество вершин $B \subseteq X'$, удовлетворяющее условию $|B| \leqslant p$, является H-универсальным*;
2) *существует такое H-универсальное множество вершин $B \subseteq X'$, для которого $|B| = p + 1$*;
3) *существует такое множество вершин $B \subset X'$, что $|B| = p + 1$ и B не является H-универсальным.*

Доказательство. Легко убедиться, что 1) следует из (A_1) и 2) следует из (A_2). Более того, 3) следует из (A_1), (A_3), так как $(p + 1)$-элементные неограниченные множества вершин p-гиперграфа H' не являются H-универсальными. □

Лемма 2.7. *Пусть $H = (X, R)$, $H' = (X', R')$ — p-гиперграфы и множество вершин $B \subseteq X'$ состоит из $p + 1$ элементов. Тогда B будет ограниченным в том и только том случае, когда оно является H-универсальным.*

Доказательство. Очевидно, что любое ограниченное множество вершин $B \subset X'$ является H-универсальным. С другой стороны, пусть множество вершин $B \subset X'$ — H-универсальное множество, состоящее из $p + 1$ элементов. По свойствам (A_1), (A_2) в p-гиперграфе H существует ограниченное множество вершин $A \subset X$, состоящее из $p + 1$ элементов. Пусть φ будет таким отображением X на B, что $\varphi(A) = B$. По определению H-универсального множества отображение φ будет гомоморфизмом H в H'. Следовательно, множество B является ограниченным. □

Следуя [6], под *автоматом* будем понимать алгебраическую систему $A = (X, S, X', \delta, \lambda)$, состоящую из множества *вершин* X, полугруппы *входных символов* S, множества *выходных символов* X', *функции переходов* $\delta\colon X \times S \to X$ и *функции выходов* $\lambda\colon X \times S \to X'$, таких что для любых $x \in X$, $s, t \in S$ выполняются следующие равенства: $\delta(x, st) = \delta(\delta(x, s), t)$, $\lambda(x, st) = \lambda(\delta(x, s), t)$. Определим для каждого $s \in S$ отображения $\delta_s\colon X \to X$, $\lambda_s\colon X \to X'$ по следующим формулам: $\delta_s(x) = \delta(x, s)$, $\lambda_s(x) = \lambda(x, s)$, где $x \in X$.

Автомат $A = (X, S, X', \delta, \lambda)$ называется *гиперграфическим*, если его множество состояний X и множество выходных символов X' наделены структурами гиперграфов $H = (X, R)$ и $H' = (X', R')$, так что для любого $s \in S$ отображение δ_s является эндоморфизмом гиперграфа H и отображение λ_s является гомоморфизмом гиперграфа H в гиперграф H'. В этом случае автомат обозначается $A = (H, S, H', \delta, \lambda)$.

Под *гомоморфизмом* гиперграфического автомата $A = (H, S, H', \delta, \lambda)$ в гиперграфический автомат $A_1 = (H_1, S_1, H'_1, \delta_1, \lambda_1)$ понимается упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$, состоящая из гомоморфизмов $f\colon H \to H_1$, $\pi\colon S \to S_1$, $g\colon H' \to H'_1$, таких что для любых $x \in X$, $s \in S$, выполняются следующие условия:

$$f\big(\delta(x,s)\big) = \delta_1\big(f(x), \pi(s)\big), \quad g\big(\lambda(x,s)\big) = \lambda_1\big(f(x), \pi(s)\big). \tag{1}$$

Гомоморфизм $\gamma = (f, \pi, g)$ автомата A в автомат A_1 называется *изоморфизмом* автомата A на автомат A_1, если все отображения $f\colon H \to H_1$, $\pi\colon S \to S_1$, $g\colon H' \to H'_1$ являются изоморфизмами. Обозначим через $\mathrm{Iso}(H, H')$ множество всех изоморфизмов автомата A на автомат A_1.

Изоморфизм φ автомата A на себя называется *автоморфизмом* автомата A. Обозначим $\mathrm{Aut}\, A$ группу всех автоморфизмов автомата A с операцией композиции.

Важный пример гиперграфического автомата даёт алгебраическая система $\mathrm{Atm}(H, H') = (H, S(H, H'), H', \delta^\circ, \lambda^\circ)$, где $H = (X, R)$, $H' = (X', R')$ — гиперграфы и для всех $x \in X$, $(\varphi, \psi) \in S(H, H')$ выполняются равенства $\delta^\circ\big(x, (\varphi, \psi)\big) = \varphi(x)$, $\lambda^\circ\big(x, (\varphi, \psi)\big) = \psi(x)$. Легко проверить, что такой автомат $\mathrm{Atm}(H, H')$ удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любого гиперграфического автомата $A = (H, S, H', \delta, \lambda)$ существует, и притом единственный, гомоморфизм $\pi\colon S \to S(H, H')$, такой что упорядоченная тройка $\gamma = (\Delta_X, \pi, \Delta_{X'})$ является гомоморфизмом автомата A в автомат $\mathrm{Atm}(H, H')$. Это означает [6], что автомат $\mathrm{Atm}(H, H')$ является универсальным притягивающим объектом в категории всех гиперграфических автоматов с фиксированными гиперграфом состояний H и гиперграфом выходных символов H'. По этой причине автомат $\mathrm{Atm}(H, H')$ называется *универсальным гиперграфическим автоматом* над гиперграфами H, H'.

3. Основные результаты

Пусть $H_i = (X_i, R_i)$, $H'_i = (X'_i, R'_i)$ — произвольные гиперграфы и $A_i = \mathrm{Atm}(H_i, H'_i)$ — универсальные гиперграфические автоматы над гиперграфами H_i, H'_i (где $i = 1, 2$). В этом разделе исследуется связь между изоморфизмами автоматов A_1, A_2 и их компонент: гиперграфов состояний H_1, H_2, полугрупп входных символов $S_1 = S(H_1, H'_1)$, $S_2 = S(H_2, H'_2)$ и гиперграфов выходных символов H'_1, H'_2.

Лемма 3.1. *Пусть $H_i = (X_i, R_i)$, $H'_i = (X'_i, R'_i)$ $(i = 1, 2)$ — произвольные гиперграфы и $f\colon H_1 \to H_2$, $g\colon H'_1 \to H'_2$ — изоморфизмы этих гиперграфов. Тогда упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$ в том и только том случае является изоморфизмом автомата $A_1 = \mathrm{Atm}(H_1, H'_1)$ на автомат $A_2 = \mathrm{Atm}(H_2, H'_2)$, когда отображение $\pi\colon S_1 \to S_2$ определяется для любых элементов $(\varphi, \psi) \in S_1$ по следующей формуле:*

$$\pi(\varphi, \psi) = \big(f^2(\varphi), (f \times g)(\psi)\big). \tag{2}$$

Доказательство. Если $\gamma = (f, \pi, g)$ является изоморфизмом автомата $A_1 = \mathrm{Atm}(H_1, H_1')$ на автомат $A_2 = \mathrm{Atm}(H_2, H_2')$, то по формуле (1) для любых элементов $x \in X_1$ и $s = (\varphi, \psi) \in S_1$ выполняется условие

$$f\big(\delta_1^\circ(x, s)\big) = \delta_2^\circ\big(f(x), \pi(s)\big), \quad g\big(\lambda_1^\circ(x, s)\big) = \lambda_2^\circ\big(f(x), \pi(s)\big).$$

По определению универсального гиперграфического автомата это означает, что образ $\pi(s) = (\varphi', \psi') \in S_2$ удовлетворяет условиям

$$f\big(\varphi(x)\big) = \varphi'\big(f(x)\big), \;\; g\big(\psi(x)\big) = \psi'\big(f(x)\big), \;\; \text{где} \;\; x \in X.$$

Отсюда следует, что $\varphi f = f\varphi'$, $\psi g = f\psi'$, и значит, $\varphi' = \overset{-1}{f}\varphi f = f^2(\varphi)$, $\psi' = \overset{-1}{f}\psi g = (f \times g)(\psi)$. Следовательно, $\pi(\varphi, \psi) = \big(f^2(\varphi), (f \times g)(\psi)\big)$ и выполняется равенство (2).

С другой стороны, пусть изоморфизмы $f\colon H_1 \to H_2$, $g\colon H_1' \to H_2'$ определяют отображение $\pi\colon S_1 \to S_2$ по формуле (2). Так как для любой упорядоченной пары $(\varphi, \psi) \in S_1$ первая компонента φ является эндоморфизмом гиперграфа H_1 и вторая компонента ψ является гомоморфизмом гиперграфа H_1 в гиперграф H_2, то по определению $f^2(\varphi) = \overset{-1}{f}\varphi f$ является эндоморфизмом гиперграфа H_2 и $(f \times g)(\psi) = \overset{-1}{f}\psi g$ является гомоморфизмом гиперграфа H_2 в гиперграф H_2'. Следовательно, $\pi(\varphi, \psi) \in S_2$. Легко проверить, что π — биекция множества S_1 на множество S_2.

Более того, для любых элементов $s = (\varphi, \psi)$, $s' = (\varphi', \psi')$ полугруппы S_1 в силу $f\overset{-1}{f} = \Delta_{X_1}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}\pi(s) \cdot \pi(s') &= \big(f^2(\varphi), (f \times g)(\psi)\big) \cdot \big(f^2(\varphi'), (f \times g)(\psi')\big) = \\ &= \big(f^2(\varphi) f^2(\varphi'), f^2(\varphi)(f \times g)(\psi')\big) = \big(f^2(\varphi\varphi'), (f \times g)(\varphi\psi')\big) = \pi(ss').\end{aligned}$$

Следовательно, π является изоморфизмом полугруппы S_1 на полугруппу S_2. Кроме того, для любых $x \in X_1$ и $s = (\varphi, \psi) \in S_1$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}\delta_2^\circ\big(f(x), \pi(s)\big) &= \delta_2^\circ\Big(f(x), \big(f^2(\varphi), (f \times g)(\psi)\big)\Big) = f^2(\varphi)\big(f(x)\big) = \\ &= \Big(\overset{-1}{f}\varphi f\Big)\big(f(x)\big) = f\Big(\varphi\Big(\overset{-1}{f}\big(f(x)\big)\Big)\Big) = f\big(\varphi(x)\big) = f\big(\delta_1^\circ(x, s)\big), \\ \lambda_2^\circ\big(f(x), \pi(s)\big) &= \lambda_2^\circ\Big(f(x), \big(f^2(\varphi), (f \times g)(\psi)\big)\Big) = (f \times g)(\psi)\big(f(x)\big) = \\ &= \Big(\overset{-1}{f}\psi g\Big)\big(f(x)\big) = g\Big(\psi\Big(\overset{-1}{f}\big(f(x)\big)\Big)\Big) = g\big(\psi(x)\big) = g\big(\lambda_1^\circ(x, s)\big).\end{aligned}$$

Таким образом, выполняются равенства (1) и упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$ является изоморфизмом автомата A_1 на автомат A_2. □

Следствие 3.2. *Для любых гиперграфов* $H_i = (X_i, R_i)$, $H'_i = (X'_i, R'_i)$ $(i = 1, 2)$ *формула* $F(\gamma) = (f, g)$ (*где* $\gamma = (f, \pi, g) \in \mathrm{Iso}(A_1, A_2)$) *определяет биекцию* F *множества* $\mathrm{Iso}(A_1, A_2)$ *на декартово произведение множеств* $\mathrm{Iso}(H_1, H_2) \times \mathrm{Iso}(H'_1, H'_2)$.

С другой стороны, в общем случае для гиперграфов $H_i = (X_i, R_i)$, $H'_i = (X'_i, R'_i)$ $(i = 1, 2)$ множество изоморфизмов $\mathrm{Iso}(S_1, S_2)$ полугрупп входных символов $S_1 = S(H_1, H'_1)$, $S_2 = S(H_2, H'_2)$ автоматов $A_1 = \mathrm{Atm}(H_1, H'_1)$, $A_2 = \mathrm{Atm}(H_2, H'_2)$ значительно сложнее множества изоморфизмов $\mathrm{Iso}(A_1, A_2)$ этих автоматов A_1, A_2. Например, пусть $H = (X, R)$ — некоторый 1-гиперграф и α — произвольная нетождественная перестановка множества X, которая для некоторого ребра $r \in R$ действует тождественно на элементы множества $X \setminus r$. Пусть отображение $\pi\colon S(H, H) \to S(H, H)$ для любых $(\varphi, \psi) \in S(H, H)$ определяется по формуле $\pi(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi')$, где $\psi'(x) = \psi(x)$, если $\varphi(x) \in r$, и $\psi'(x) = \alpha\big(\psi(x)\big)$ в противном случае. Легко проверить, что π является автоморфизмом полугруппы $S(H, H)$ и не существует автоморфизма автомата $\mathrm{Atm}(H, H)$ вида $\gamma = (f, \pi, g)$ для некоторых $(f, g) \in \mathrm{Iso}(H, H) \times \mathrm{Iso}(H, H)$.

Главный результат этой статьи описывает строение изоморфизмов полугрупп входных символов S_1, S_2 универсальных гиперграфических автоматов $A_1 = \mathrm{Atm}(H_1, H'_1)$, $A_2 = \mathrm{Atm}(H_2, H'_2)$ для произвольных p-гиперграфов H_i, H'_i, $(i = 1, 2)$.

Теорема 3.3. *Пусть* p_i — *некоторые натуральные числа,* $H_i = (X_i, R_i)$, $H'_i = (X'_i, R'_i)$ — p_i*-гиперграфы* $(i = 1, 2)$ *и* π — *изоморфизм полугруппы* $S_1 = S(H_1, H'_1)$ *на полугруппу* $S_2 = S(H_2, H'_2)$. *Тогда* $p_1 = p_2$ *и существуют изоморфизм* f *гиперграфа* H_1 *на гиперграф* H_2 *и семейство* g_x $(x \in X_1)$ *изоморфизмов гиперграфа* H'_1 *на гиперграф* H'_2, *такие что справедливы следующие утверждения*:

1) *для всех* $(\varphi, \psi) \in S_1$ *выполняется равенство*
$$\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), \psi^{\varphi}), \tag{3}$$
где $\psi^{\varphi}(x) = g_{\varphi(\overset{-1}{f}(x))}\left(\psi\left(\overset{-1}{f}(x)\right)\right)$ *для каждого* $x \in X_2$;

2) *для любых смежных вершин* $x, y \in X_1$ *выполняется* $g_x = g_y$.

Доказательство. Рассмотрим p_i-гиперграфы $H_i = (X_i, R_i)$, $H'_i = (X'_i, R'_i)$ $(i = 1, 2)$ и изоморфизм π полугруппы $S_1 = S(H_1, H'_1)$ на полугруппу $S_2 = S(H_2, H'_2)$. Хорошо известно, что любой изоморфизм сохраняет выполнимость формул элементарной теории полугрупп. В частности, изоморфизм π сохраняет выполнимость формул $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ и $\Sigma(x, y)$. Отсюда следует, что π отображает множество $Z(H_1, H'_1)$ всех правых нулей полугруппы S_1 на множество $Z(H_2, H'_2)$ всех правых нулей полугруппы S_2 и множество $U(H_1, H'_1)$ всех левых единиц полугруппы S_1 на множество $U(H_2, H'_2)$ всех левых единиц полугруппы S_2. Более того, по следствию 2.5 декартова степень π^2 отображает эквивалентность $\varepsilon_1 = \varepsilon_{(H_1, H'_1)}$, определённую на полугруппе S_1 формулой

$\Sigma(x, y)$, на эквивалентность $\varepsilon_2 = \varepsilon_{(H_2, H_2')}$, определённую на полугруппе S_2 формулой $\Sigma(x, y)$. По лемме 2.3 для любых элементов $a \in X_1$, $a' \in X_1'$ существуют такие элементы $b \in X_2$, $b' \in X_2'$, что $\pi(c_a, c_{a'}) = (c_b, c_{b'})$. Более того, π отображает класс эквивалентности $\varepsilon_1(c_a, c_{a'})$ на класс эквивалентности $\varepsilon_2(c_b, c_{b'})$. Отсюда следует, что формулы $f(a) = b$ и $g_a(a') = b'$ определяют отображения $f\colon X_1 \to X_2$ и $g_a\colon X_1' \to X_2'$ ($a \in X_1$), такие что выполняется равенство

$$\pi(c_a, c_{a'}) = \big(c_{f(a)}, c_{g_a(a')}\big). \tag{4}$$

Легко проверить, что отображение f является биекцией множества X_1 на множество X_2 и для каждого элемента $a \in X_1$ отображение g_a является биекцией множества X_1' на множество X_2'.

Рассмотрим $(\varphi, \psi) \in S_1$ и $a \in X_1$. Обозначим $\pi(\varphi, \psi) = (\varphi', \psi')$ и

$$\varphi(a) = b, \quad \psi(a) = d. \tag{5}$$

По определению полугруппы S_1 для произвольного $y \in X_1'$ выполняются равенства

$$(c_a, c_y) \cdot (\varphi, \psi) = (c_a\varphi, c_a\psi) = \big(c_{\varphi(a)}, c_{\psi(a)}\big).$$

Тогда из (5) следует, что $(c_a, c_y) \cdot (\varphi, \psi) = (c_b, c_d)$ и для изоморфизма π выполняется равенство

$$\pi(c_a, c_y) \cdot \pi(\varphi, \psi) = \pi(c_b, c_d). \tag{6}$$

По определению отображений f, g_x ($x \in X_1$) и формуле (4) выполняются равенства

$$\pi(c_a, c_y) = \big(c_{f(a)}, c_{g_a(y)}\big), \quad \pi(c_b, c_d) = \big(c_{f(b)}, c_{g_b(d)}\big).$$

С другой стороны,

$$\pi(c_a, c_y) \cdot \pi(\varphi, \psi) = \big(c_{f(a)}, c_{g_a(y)}\big) \cdot (\varphi', \psi') = \\ = \big(c_{f(a)}\varphi', c_{f(a)}\psi'\big) = \big(c_{\varphi'(f(a))}, c_{\psi'(f(a))}\big).$$

Тогда из (6) следует равенство

$$\big(c_{\varphi'(f(a))}, c_{\psi'(f(a))}\big) = \big(c_{f(b)}, c_{g_b(d)}\big),$$

равносильное выполнению равенств

$$\varphi'\big(f(a)\big) = f(b) = f\big(\varphi(a)\big) \ \text{ и } \ \psi'\big(f(a)\big) = g_b(d) = g_{\varphi(a)}\big(\psi(a)\big).$$

Ввиду произвольности выбора элемента $a \in X_1$ это означает, что выполняются равенства $\varphi' f = f\varphi$, $\varphi' = f^2(\varphi)$ и

$$\psi' = \Big\{\Big(f(a), g_{\varphi(a)}\big(\psi(a)\big)\Big) \colon a \in X_1\Big\} = \\ = \left\{\left(x, g_{\varphi(\overset{-1}{f}(x))}\left(\psi\left(\overset{-1}{f}(x)\right)\right)\right) \colon x \in X_2\right\} = \psi^{\varphi}.$$

Следовательно, для любого элемента $(\varphi, \psi) \in S_1$ выполняется (3).

Легко проверить, что отображение $\pi_1 = f^2$ является биекцией множества эндоморфизмов $\operatorname{End} H_1$ на множество эндоморфизмов $\operatorname{End} H_2$ и для любых $\varphi, \varphi_1 \in \operatorname{End} H_1$ выполняется равенство $\pi_1(\varphi\varphi_1) = \pi_1(\varphi) \cdot \pi_1(\varphi_1)$. Это означает, что отображение π_1 является изоморфизмом полугруппы $\operatorname{End} H_1$ на полугруппу $\operatorname{End} H_2$. Следовательно, по [8, теорема 4.1] отображение f является изоморфизмом гиперграфа H_1 на гиперграф H_2 и выполняется равенство $p_1 = p_2$. Обозначим $p = p_1$.

Проверим, что для любого элемента $a \in X_1$ отображение $g_a \colon X_1' \to X_2'$ является изоморфизмом p-гиперграфа H_1' на p-гиперграф H_2'. Пусть $r \subset X_1'$ — некоторое ребро гиперграфа H_1', которое по свойствам (A_1), (A_2) определяется некоторыми p вершинами $b_1, \ldots, b_p$. Тогда p вершин $g_a(b_1), \ldots, g_a(b_p)$ определяют в p-гиперграфе H_2' единственное ребро r'. По свойствам (A_1), (A_2) в p-гиперграфе H_1 существует $(p+1)$-элементное ограниченное множество $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_p\}$. Так как f — изоморфизм гиперграфа H_1 на гиперграф H_2, то $f(A) = \{f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_p)\}$ является ограниченным множеством гиперграфа H_2. Для произвольной вершины $b \in X_1'$ определим отображение $\psi_b \colon X_1 \to X_1'$ по следующей формуле:

$$\psi_b(x) = \begin{cases} b_i, & \text{если } x = x_i \text{ для некоторого } 1 \leqslant i \leqslant p, \\ b & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad (x \in X_1).$$

Так как $\psi_b(A) = \{b_1, \ldots, b_p, b\}$ и множество A ограниченное, то отображение ψ_b в том и только том случае является гомоморфизмом гиперграфа H_1 в гиперграф H_1', если множество $\{b_1, \ldots, b_p, b\}$ ограниченное. Это свойство эквивалентно условию $b \in r$ в силу свойства (A_1) и условия $b_1, \ldots, b_p \in r$. Следовательно, согласно равенству (3) по свойству (A_1) следующие условия эквивалентны:

1) $b \in r$;
2) отображение ψ_b является гомоморфизмом гиперграфа H_1 в гиперграф H_1';
3) упорядоченная пара (c_a, ψ_b) принадлежит множеству S_1;
4) образ $\pi(c_a, \psi_b) = (f^2(c_a), {\psi_b}^{c_a})$ принадлежит множеству S_2, где

$$ {\psi_b}^{c_a}(x) = \begin{cases} g_a(b_i), & \text{если } x = f(x_i) \text{ для некоторого } 1 \leqslant i \leqslant p, \\ g_a(b) & \text{в противном случае} \end{cases} \qquad (x \in X_2);$$

5) отображение ${\psi_b}^{c_a}$ является гомоморфизмом гиперграфа H_2 в гиперграф H_2';
6) $g_a(b) \in r'$.

В самом деле, ${\psi_b}^{c_a}\big(f(A)\big) = \{g_a(b_1), \ldots, g_a(b_p), g_a(b)\}$ и отображение ${\psi_b}^{c_a}$ в том и только том случае является гомоморфизмом гиперграфа H_2 в гиперграф H_2', когда множество $\{g_a(b_1), \ldots, g_a(b_p), g_a(b)\}$ ограниченное. Это свойство эквивалентно условию $g_a(b) \in r'$ согласно свойству (A_1) и условию $g_a(b_1), \ldots, g_a(b_p) \in r'$.

Таким образом, $g_a(r) = r'$. По аналогии можно доказать, что для любого ребра r p-гиперграфа H_2' прообраз $\overset{-1}{g_a}(r)$ является ребром p-гиперграфа H_1'. Следовательно, g_a является изоморфизмом гиперграфа H_1' на гиперграф H_2', что завершает доказательство справедливости утверждения 1).

Далее покажем, что для любых смежных вершин $x, y \in X_1$ изоморфизм π определяет равные отображения $g_x = g_y$. Предположим, что найдутся две такие смежные вершины $x_1, x_2 \in X_1$, что $g_{x_1} \neq g_{x_2}$, т. е. для некоторого элемента $a \in X_1'$ образы $g_{x_1}(a) = c_1$, $g_{x_2}(a) = c_2$ удовлетворяют условию $c_1 \neq c_2$. По свойствам (A_1), (A_2) вершины x_1, x_2 содержатся в некотором $(p+1)$-элементном ограниченном множестве $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}\}$ p-гиперграфа H_1. Так как f является изоморфизмом гиперграфа H_1 на гиперграф H_2, образ $f(A)$ является ограниченным множеством гиперграфа H_2. По свойству (A_3) и лемме 2.2 вершины c_1, c_2 содержатся в некотором $(p+1)$-элементном критическом множестве $A' = \{c_1, c_2, \ldots, c_{p+1}\}$ p-гиперграфа H_2'. Обозначим $a_i = \overset{-1}{g}_{x_i}(c_i)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant p+1$ и определим отображения $\varphi\colon X_1 \to X_1$, $\psi\colon X_1 \to X_1'$ по формулам

$$\varphi(x) = \begin{cases} x_i, & \text{если } x = x_i \text{ для некоторого } 1 \leqslant i \leqslant p, \\ x_{p+1} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} a_i, & \text{если } x = x_i \text{ для некоторого } 1 \leqslant i \leqslant p, \\ a_{p+1} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $x \in X_1$. Так как $\varphi\colon X_1 \to A$ и по свойству $a_1 = a_2 = a$ выполняется условие $|\psi(X_1)| \leqslant p$, то отображение φ — эндоморфизм гиперграфа H_1, и по свойству (A_1) отображение ψ — гомоморфизм гиперграфа H_1 в гиперграф H_1'. Следовательно, $(\varphi, \psi) \in S_1$, и по формуле (3) $\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), \psi^\varphi) \in S_2$, $\psi^\varphi \in \mathrm{Hom}(H_2, H_2')$. С другой стороны, по определению ψ^φ для любого $x \in X_1$ выполняется равенство $\psi^\varphi\big(f(x)\big) = g_{\varphi(x)}\big(\psi(x)\big)$. В частности, для каждого $1 \leqslant i \leqslant p+1$

$$\psi^\varphi\big(f(x_i)\big) = g_{\varphi(x_i)}\big(\psi(x_i)\big) = g_{x_i}(a_i) = g_{x_i}\Big(\overset{-1}{g}_{x_i}(c_i)\Big) = c_i.$$

Отсюда следует, что ψ^φ отображает ограниченное множество $f(A)$ гиперграфа H_2 на неограниченное множество A' гиперграфа H_2'. Но это противоречит определению гомоморфизма $\psi^\varphi\colon H_2 \to H_2'$. Следовательно, для любых смежных вершин $x, y \in X_1$ выполняется равенство $g_x = g_y$. Таким образом, справедливо утверждение 2). □

Следствие 3.4. *Пусть p_i — такие натуральные числа, что $p_i > 1$, и H_i, H_i' — p_i-гиперграфы ($i = 1, 2$). Тогда отображение π будет изоморфизмом полугруппы $S(H_1, H_1')$ на полугруппу $S(H_2, H_2')$ в том и только том случае, когда существуют изоморфизм f гиперграфа H_1 на гиперграф H_2 и изоморфизм g гиперграфа H_1' на гиперграф H_2', такие что для любых $(\varphi, \psi) \in S(H_1, H_1')$ выполняется равенство*

$$\pi(\varphi, \psi) = \big(f^2(\varphi), (f \times g)(\psi)\big). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть отображение π является изоморфизмом полугруппы $S(H_1, H_1')$ на полугруппу $S(H_2, H_2')$. Если $p_1 > 1$, то по свойству (A_1) в p-гиперграфе H_1 любые две вершины смежны. Значит, по теореме 3.3 изоморфизм π определяет изоморфизм f гиперграфа H_1 на гиперграф H_2 и для всех вершин $x \in X_1$ определяет один и тот же изоморфизм $g_x = g$ гиперграфа H_1' на гиперграф H_2', такие что для любых $(\varphi, \psi) \in S(H_1, H_1')$ выполняется равенство (3). Так как при любом $x \in X_2$ $\psi^\varphi(x) = g\Big(\psi\Big(\overset{-1}{f}(x)\Big)\Big) = (f \times g)(\psi)(x)$, то в данном случае $\psi^\varphi = (f \times g)(\psi)$. Следовательно, выполняется равенство (7). □

Следствие 3.5. *Пусть p_i — натуральные числа, одно из которых равно 1, и $H_i = (X_i, R_i)$, $H_i' = (X_i', R_i')$ — p_i-гиперграфы $(i = 1, 2)$. Тогда отображение π в том и только том случае будет изоморфизмом полугруппы $S(H_1, H_1')$ на полугруппу $S(H_2, H_2')$, если существуют изоморфизм f гиперграфа H_1 на гиперграф H_2 и семейство g_r $(r \in R_1)$ изоморфизмов гиперграфа H_1' на гиперграф H_2', такие что для всех $(\varphi, \psi) \in S(H_1, H_1')$ выполняется равенство*

$$\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), \psi^\varphi), \tag{8}$$

где $\psi^\varphi(x) = g_r\Big(\psi\Big(\overset{-1}{f}(x)\Big)\Big)$ для каждого $x \in X_1'$ и такого $r \in R_1$, что $\varphi\Big(\overset{-1}{f}(x)\Big) \in r$.

Доказательство. Пусть $H_i = (X_i, R_i)$, $H_i' = (X_i', R_i')$ $(i = 1, 2)$ — такие p_i-гиперграфы, что $p_1 = 1$, и π — изоморфизм полугруппы $S_1 = S(H_1, H_1')$ на полугруппу $S_2 = S(H_2, H_2')$. Тогда по теореме 3.3 существуют изоморфизм f гиперграфа H_1 на гиперграф H_2 и семейство g_x $(x \in X_1)$ изоморфизмов гиперграфа H_1' на гиперграф H_2', такие что справедливы утверждения 1), 2) теоремы 3.3. В частности, $p_1 = p_2 = 1$, и из 2) следует, что изоморфизм π определяет для всех вершин $x \in X_1$, принадлежащих некоторому фиксированному ребру $r \in R_1$, один и тот же изоморфизм $g_x = g_r$ гиперграфа H_1' на гиперграф H_2'. Тогда для любых $(\varphi, \psi) \in S(H_1, H_1')$ и $x \in X_2$ значение $\varphi\Big(\overset{-1}{f}(x)\Big)$ по свойству (A_1) принадлежит единственному ребру $r \in R_1$ и выполняются равенства

$$\psi^\varphi(x) = g_{\varphi(\overset{-1}{f}(x))}\Big(\psi\Big(\overset{-1}{f}(x)\Big)\Big) = g_r\Big(\psi\Big(\overset{-1}{f}(x)\Big)\Big).$$

Следовательно, справедливо равенство (8).

С другой стороны, любой изоморфизм f гиперграфа H_1 на гиперграф H_2 и любое семейство g_r $(r \in R_1)$ изоморфизмов гиперграфа H_1' на гиперграф H_2' определяют по формуле (8) отображение $\pi\colon S_1 \to S_2$. В самом деле, для любого элемента $(\varphi, \psi) \in S_1$ отображение $f^2(\varphi) = \overset{-1}{f}\varphi f$ является эндоморфизмом гиперграфа H_2. Далее, для любого ребра $r \in R_2$ прообраз $r_1 = \overset{-1}{f}(r)$ является ребром гиперграфа H_1 и $\varphi(r_1) \subset r_2$, $\psi(r_1) \subset r_1'$ для некоторых $r_2 \in R_1$, $r_1' \in R_1'$.

Кроме того, для изоморфизма g_{r_2} образ $g_{r_2}(r_1') = r_2'$ ребра r_1' является ребром гиперграфа H_2'. Тогда для любого элемента $x \in r$

$$\overset{-1}{f}(x) \in r_1, \quad \varphi\Big(\overset{-1}{f}(x)\Big) \in r_2, \quad \psi\Big(\overset{-1}{f}(x)\Big) \in r_1',$$

и по определению

$$\psi^{\varphi}(r) = \{\psi^{\varphi}(x)\colon x \in r\} = \left\{g_{\varphi(\overset{-1}{f}(x))}\bigg(\psi\Big(\overset{-1}{f}(x)\Big)\bigg)\colon x \in r\right\} \subseteq g_{r_2}(r_1') \subseteq r_2'.$$

Следовательно, отображение ψ^{φ} является гомоморфизмом гиперграфа H_2 в гиперграф H_2' и $\pi(\varphi, \psi) \in S_2$.

Далее, для любого элемента $(\varphi', \psi') \in S_2$ определим отображение $\psi\colon X_1 \to X_1'$ по формуле $\psi(x) = \overset{-1}{g}_r\Big(\psi'\big(f(x)\big)\Big)$ для каждого $x \in X_1$ и такого $r \in R_1$, что $\overset{-1}{f}\Big(\varphi'\big(f(x)\big)\Big) \in r$. Легко проверить, что отображение ψ является гомоморфизмом гиперграфа H_1 в гиперграф H_1', отображение $\varphi = f\varphi'\overset{-1}{f}$ является эндоморфизмом гиперграфа H_1, $(\varphi, \psi) \in S_1$ и $\pi(\varphi, \psi) = (\varphi', \psi')$.

Рассмотрим различные элементы $(\varphi, \psi), (\varphi_1, \psi_1) \in S_1$. Если $\varphi \neq \varphi_1$, то из того, что $f^2(\varphi) \neq f^2(\varphi_1)$, следует, что $\pi(\varphi, \psi) \neq \pi(\varphi_1, \psi_1)$. Пусть $\varphi = \varphi_1$ и $\psi \neq \psi_1$. Тогда $\psi(a) \neq \psi_1(a)$ для некоторого $a \in X_1$. Так как по свойству (A_1) $\varphi(a) \in r$ для некоторого $r \in R_1$, то для элемента $b = f(a)$ выполняется

$$\psi^{\varphi}(b) = g_r\big(\psi(a)\big) \neq g_r\big(\psi_1(a)\big) = \psi_1^{\varphi}(b).$$

Отсюда следует, что $\psi^{\varphi} \neq \psi_1^{\varphi}$ и $\pi(\varphi, \psi) \neq \pi(\varphi_1, \psi_1)$. Следовательно, π является биекцией множества S_1 на множество S_2.

Покажем, что для любых $(\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2) \in S_1$ выполняется равенство

$$\pi\big((\varphi_1, \psi_1) \cdot (\varphi_2, \psi_2)\big) = \pi(\varphi_1, \psi_1) \cdot \pi(\varphi_2, \psi_2). \tag{9}$$

В самом деле, по определению $(\varphi_1, \psi_1) \cdot (\varphi_2, \psi_2) = (\varphi_1\varphi_2, \varphi_1\psi_2)$ и по формуле (3) выполняются равенства

$$\begin{aligned}
&\pi\big((\varphi_1, \psi_1) \cdot (\varphi_2, \psi_2)\big) = \pi(\varphi_1\varphi_2, \varphi_1\psi_2) = (f^2(\varphi_1\varphi_2), (\varphi_1\psi_2)^{\varphi_1\varphi_2}),\\
&\pi(\varphi_1, \psi_1) \cdot \pi(\varphi_2, \psi_2) = (f^2(\varphi_1), {\psi_1}^{\varphi_1}) \cdot (f^2(\varphi_2), {\psi_2}^{\varphi_2}) =\\
&\quad = (f^2(\varphi_1)f^2(\varphi_2), f^2(\varphi_1){\psi_2}^{\varphi_2}).
\end{aligned}$$

Ясно, что $f^2(\varphi_1\varphi_2) = f^2(\varphi_1)f^2(\varphi_2)$. Проверим равенство

$$(\varphi_1\psi_2)^{\varphi_1\varphi_2} = f^2(\varphi_1)\psi_2^{\varphi_2}.$$

Для произвольного элемента $a \in X_1$ обозначим $\varphi_1(a) = b$, $\varphi_2(b) = c$, $\psi_2(b) = d$. Тогда по свойству (A_1) $c \in r$ для некоторого $r \in R_1$ и выполняются равенства

$$(\varphi_1\varphi_2)(a) = \varphi_2\big(\varphi_1(a)\big) = \varphi_2(b) = c, \quad (\varphi_1\psi_2)(a) = \psi_2\big(\varphi_1(a)\big) = \psi_2(b) = d.$$

Значит, по определению отображения π по формуле (8) выполняются следующие равенства:

$$(\varphi_1\psi_2)^{\varphi_1\varphi_2}\big(f(a)\big) = g_r\big(\varphi_1\psi_2(a)\big) = g_r(d),$$
$$(f^2(\varphi_1)\psi_2^{\varphi_2})\big(f(a)\big) = \psi_2^{\varphi_2}\Big(f^2(\varphi_1)\big(f(a)\big)\Big) = \psi_2^{\varphi_2}\big(f(b)\big) = g_r\big(\psi_2(b)\big) = g_r(d).$$

Таким образом, выполняется (9) и π является изоморфизмом полугруппы S_1 на полугруппу S_2. □

Из теоремы 3.3 следует, что универсальные гиперграфические автоматы над любыми p-гиперграфами определяются с точностью до изоморфизма своими полугруппами входных символов.

Следствие 3.6. *Пусть p_i — некоторые натуральные числа, $H_i = (X_i, R_i)$, $H'_i = (X'_i, R'_i)$ — p_i-гиперграфы ($i = 1, 2$) и полугруппы $S(H_1, H'_1)$, $S(H_2, H'_2)$ изоморфны. Тогда $p_1 = p_2$ и универсальные гиперграфические автоматы $\mathrm{Atm}(H_1, H'_1)$, $\mathrm{Atm}(H_2, H'_2)$ изоморфны.*

Пусть H, H' — некоторые p-гиперграфы и $\mathrm{Atm}(H, H')$ — универсальный гиперграфический автомат над этими гиперграфами H, H'. Полученные выше результаты позволяют исследовать взаимосвязь между группами автоморфизмов автомата $\mathrm{Atm}(H, H')$ и группами автоморфизмов его компонент: гиперграфа состояний H, полугруппы входных символов $S(H, H')$ и гиперграфа выходных символов H'.

Теорема 3.7. *Пусть p — некоторое натуральное число, $H = (X, R)$, $H' = (X', R')$ — p-гиперграфы и $\mathrm{Atm}(H, H')$ — универсальный гиперграфический автомат над гиперграфами H, H'. Тогда группа автоморфизмов G_A автомата $\mathrm{Atm}(H, H')$, группа автоморфизмов G_S полугруппы входных символов $S(H, H')$ и группы автоморфизмов G_H, $G_{H'}$ гиперграфов H, H' обладают следующими свойствами:*

1) $G_A \cong G_H \times G_{H'}$;
2) *если $p > 1$, то $G_S \cong G_A$;*
3) *если $p = 1$, то группа G_S изоморфна алгебре $G_H \times G_{H'}^R$ с бинарной операцией*
$$(f, (g_r)_{r\in R}) \cdot (f', (g'_r)_{r\in R}) = \big(ff', \big(g_r g'_{f(r)}\big)_{r\in R}\big),$$
где $f, f' \in G_H$ и $(g_r)_{r\in R}, (g'_r)_{r\in R} \in G_{H'}^R$.

Доказательство. Пусть $H = (X, R)$, $H' = (X', R')$ — p-гиперграфы для некоторого натурального числа p.

Из следствия 3.2 вытекает, что $G_A \cong G_H \times G_{H'}$ и выполняется 1).

Предположим, что $p > 1$. Тогда по следствию 3.4 каждый автоморфизм π полугруппы $S(H, H')$ определяет автоморфизм f гиперграфа H и автоморфизм g гиперграфа H', такие что для каждого элемента $(\varphi, \psi) \in S(H, H')$ выполняется условие (7).

Следовательно, формула $F(\pi) = (f, g)$ ($\pi \in G_S$) определяет отображение $F\colon G_S \to G_H \times G_{H'}$. По лемме 3.1 и следствию 3.2 F — биекция множества G_S на декартово произведение $G_H \times G_{H'}$. Легко проверить, что для любых

$\pi, \pi' \in G_S$ выполняется равенство $F(\pi\pi') = F(\pi)F(\pi')$. Таким образом, F является изоморфизмом группы G_S на группу $G_H \times G_{H'}$ и выполняется 2).

Предположим, что $p = 1$. Тогда по следствию 3.5 каждый автоморфизм π полугруппы $S(H, H')$ определяет автоморфизм f гиперграфа H и семейство g_r ($r \in R$) автоморфизмов гиперграфа H', такие что для любого элемента $(\varphi, \psi) \in S(H, H')$ выполняется условие (8). Следовательно, формула $F(\pi) = (f, (g_r)_{r\in R})$ ($\pi \in G_S$) определяет отображение $F\colon G_S \to G_H \times G^R_{H'}$. Более того, по следствию 3.5 F является биекцией множества G_S на множество $G_H \times G^R_{H'}$.

Проверим, что для любых элементов $\pi, \pi' \in G_S$ и их образов $F(\pi) = (f, (g_r)_{r\in R})$, $F(\pi') = (f', (g'_r)_{r\in R})$ выполняется равенство

$$F(\pi) \cdot F(\pi') = F(\pi\pi'), \tag{10}$$

где по определению бинарной операции на множестве $G_H \times (G_{H'})^R$

$$F(\pi) \cdot F(\pi') = (f, (g_r)_{r\in R}) \cdot (f', (g'_r)_{r\in R}) = \big(ff', \big(g_r g'_{f(r)}\big)_{r\in R}\big).$$

Обозначим $h = ff'$ и $p_r = g_r g'_{f(r)}$ для каждого $r \in R$. Пусть $(\varphi, \psi) \in S(H, H')$ и $\pi(\varphi, \psi) = (\varphi', \psi')$. По следствию 3.5 для элемента (φ, ψ) значение $\pi(\varphi, \psi)$ вычисляется по формуле (8) следующим образом: $\pi(\varphi, \psi) = (f^2(\varphi), \psi^\varphi)$, где $\psi^\varphi(x) = g_r\Big(\psi\Big(\overset{-1}{f}(x)\Big)\Big)$ для каждого $x \in X'$ и такого $r \in R$, что $\varphi\Big(\overset{-1}{f}(x)\Big) \in r$. Таким образом, выполняются равенства

$$\varphi' = f^2(\varphi), \quad \psi' = \psi^\varphi. \tag{11}$$

Аналогично по следствию 3.5 для элемента (φ', ψ') значение $\pi'(\varphi', \psi')$ вычисляется по формуле (8) следующим образом: $\pi'(\varphi', \psi') = ({f'}^2(\varphi'), {\psi'}^{\varphi'})$, где ${\psi'}^{\varphi'}(x) = g_r\Big(\psi'\Big(\overset{-1}{f'}(x)\Big)\Big)$ для каждого $x \in X'$ и такого $r \in R$, что $\varphi'\Big(\overset{-1}{f'}(x)\Big) \in r$.

Из равенств (11) ввиду $ff' = h$ следует, что

$${f'}^2(\varphi') = {f'}^2\big(f^2(\varphi)\big) = \overset{-1}{f'}(\overset{-1}{f}\varphi f)f' = \Big(\overset{-1}{f'}\,\overset{-1}{f}\Big)\varphi(ff') = \overset{-1}{h}\varphi h = h^2(\varphi).$$

Далее, из равенств (11) следует, что для любого $x \in X$ выполняется

$$\varphi'\Big(\overset{-1}{f'}(x)\Big) = f^2(\varphi)\Big(\overset{-1}{f'}(x)\Big) = \Big(\overset{-1}{f}\varphi f\Big)\Big(\overset{-1}{f'}(x)\Big) =$$
$$= \Big(\overset{-1}{f'}\,\overset{-1}{f}\varphi f\Big)(x) = \Big(\overset{-1}{h}\varphi f\Big)(x) = f\Big(\varphi\Big(\overset{-1}{h}(x)\Big)\Big).$$

Аналогично для любого $x \in X$ выполняются равенства

$$\psi'\Big(\overset{-1}{f'}(x)\Big) = \psi^{\varphi}\Big(\overset{-1}{f'}(x)\Big) = g_r\left(\psi\left(\overset{-1}{f}\Big(\overset{-1}{f'}(x)\Big)\right)\right) = \\ = g_r\left(\Big(\overset{-1}{f'}\overset{-1}{f}\psi\Big)(x)\right) = g_r\left(\Big(\overset{-1}{h}\psi\Big)(a)\right) = g_r\left(\psi\Big(\overset{-1}{h}(a)\Big)\right),$$

где r — ребро гиперграфа H, содержащее вершину

$$\varphi\left(\overset{-1}{f}\Big(\overset{-1}{f'}(x)\Big)\right) = \Big(\overset{-1}{f'}\overset{-1}{f}\varphi\Big)(x) = \Big(\overset{-1}{h}\varphi\Big)(x) = \varphi\Big(\overset{-1}{h}(x)\Big).$$

Тогда из полученных выше свойств следует, что выполняются следующие равенства:

$$(\pi\pi')(\varphi,\psi) = \pi'\big(\pi(\varphi,\psi)\big) = \pi'(\varphi',\psi') = ({f'}^2(\varphi'), {\psi'}^{\varphi'}) = \\ = \big({f'}^2\big(f^2(\varphi)\big), {\psi'}^{\varphi'}\big) = \big((ff')^2(\varphi), {\psi'}^{\varphi'}\big) = (h^2(\varphi), {\psi'}^{\varphi'}),$$

где для любого $x \in X$

$$ {\psi'}^{\varphi'}(x) = g'_{f(r)}\left(\psi'\Big(\overset{-1}{f'}(x)\Big)\right) = g'_{f(r)}\left(g_r\left(\psi\Big(\overset{-1}{h}(x)\Big)\right)\right) = \\ = (g_r g'_{f(r)})\left(\psi\Big(\overset{-1}{h}(x)\Big)\right) = p_r\left(\psi\Big(\overset{-1}{h}(x)\Big)\right),$$

так как вершина $\varphi\Big(\overset{-1}{h}(x)\Big)$ принадлежит ребру r, вершина $\varphi'\Big(\overset{-1}{f'}(x)\Big) = f\left(\varphi\Big(\overset{-1}{h}(x)\Big)\right)$ принадлежит ребру $f(r)$ и $g_r g'_{f(r)} = p_r$.

Ясно, что h является автоморфизмом гиперграфа H и каждый элемент p_r ($r \in R$) является автоморфизмом гиперграфа H'. По определению отображения F это означает, что $F(\pi\pi') = (h, (p_r)_{r\in R})$, где $h = ff'$ и $p_r = g_r g'_{f(r)}$ для каждого $r \in R$. Следовательно, $F(\pi) \cdot F(\pi') = \big(ff', (g_r g'_{f(r)})_{r\in R}\big) = F(\pi\pi')$ и выполняется равенство (10).

Таким образом, F является изоморфизмом группы G_S на алгебру $G_H \times G_{H'}^R$ и выполняется 3). □

Следствие 3.8. *Для любых 1-гиперграфов H, H' группа автоморфизмов G_S полугруппы $S(H,H')$ изоморфна подгруппе сплетения групп $(X', G_{H'}) \wr (X, G_H)$, состоящей из всех таких упорядоченных пар (g,f), что $f \in G_H$, $g \in G_{H'}^X$ и $g(x) = g(y)$ для всех смежных вершин $x, y \in X$ гиперграфа H.*

Литература

[1] Картеси Ф. Введение в конечные геометрии. — М.: Наука, 1980.

[2] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. — М.: Мир, 1972.

[3] Молчанов В. А. Конкретная характеризация универсальных планарных автоматов // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 3. — С. 139—148.

[4] Молчанов В. А. Представление универсальных планарных автоматов автономными входными сигналами // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2013. Т. 13, № 2, ч. 2. — С. 31—37.

[5] Молчанов В. А. Абстрактная характеризация полугрупп входных сигналов универсальных планарных автоматов // Изв. Саратов. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15, № 1. — С. 113—121.

[6] Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. — М.: Высшая школа, 1994.

[7] Berge C. Graphs et hypergraphs. — Paris: Dunod, 1970.

[8] Molchanov A. V. On definability of hypergraphs by their semigroups of homomorphisms // Semigroup Forum. — 2001. — Vol. 62. — P. 53—65.

[9] Molchanov V. A. A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols // Semigroup Forum. — 2011. — Vol. 82. — P. 1—9.