Геометрия проективных, инъективных и плоских банаховых модулей*

Н. Т. НЕМЕШ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: nemeshnorbert@yandex.ru

УДК 517.986.22

Ключевые слова: проективность, инъективность, плоскость, аннуляторный модуль, свойство Данфорда—Петтиса.

Аннотация

В статье изложены общие результаты о метрически и топологически проективных, инъективных и плоских банаховых модулях. Доказаны теоремы, указывающие на тесную связь метрической и топологической банаховой гомологии с банаховой геометрией. Например, в геометрических терминах дано описание проективных, инъективных и плоских аннуляторных модулей. Доказано, что гомологически тривиальные модули алгебры, являющейся $\mathscr{L}_1$- или $\mathscr{L}_\infty$-пространством, обладают свойством Данфорда—Петтиса.

Abstract

N. T. Nemesh, The geometry of projective, injective, and flat Banach modules, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 3, pp. 161—184.

In this paper, we prove general facts on metrically and topologically projective, injective, and flat Banach modules. We prove theorems pointing to the close connection between metric, topological Banach homology with the geometry of Banach spaces. For example, in geometric terms we give a complete description of projective, injective, and flat annihilator modules. We also show that for an algebra with the geometric structure of an $\mathscr{L}_1$- or $\mathscr{L}_\infty$-space all its homologically trivial modules possess the Dunford—Pettis property.

1. Введение

Понятия проективного, инъективного и плоского модуля — три кита, на которых покоится здание гомологической алгебры. Методы гомологической алгебры в функциональном анализе были внедрены и развиты А. Я. Хелемским и его школой. Точнее, А. Я. Хелемский рассматривал специальную версию относительной гомологии, связывающую воедино алгебру и топологию. Существовали и другие варианты гомологической алгебры в функциональном анализе, например метрическая и топологическая. Активно изучать их стали только сейчас.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-08392).

В данной статье мы докажем несколько теорем, подтверждающих тесную связь метрической и топологической банаховой гомологии с геометрией банаховых пространств.

Несколько слов об обозначениях. Здесь и далее через A будем обозначать не обязательно унитальную банахову алгебру со сжимающим билинейным оператором умножения. Через A_+ мы будем обозначать стандартную унитализацию A как банаховой алгебры. Через $A_\times$ мы будем обозначать условную унитализацию, т. е. $A_\times = A$, если A унитальна, и $A_\times = A_+$ в противном случае. Мы будем рассматривать только банаховы модули со сжимающим билинейным оператором внешнего умножения, обозначаемого точкой $(\cdot)$. Наконец, непрерывные морфизмы A-модулей мы будем называть A-морфизмами. Через $\mathbf{Ban}$ мы будем обозначать категорию банаховых пространств с ограниченными операторами в роли морфизмов. Если рассматривать в роли морфизмов только сжимающие операторы, то мы получим ещё одну категорию обозначаемую $\mathbf{Ban}_1$. Через A-$\mathbf{mod}$ мы обозначим категорию левых банаховых A-модулей с ограниченными A-морфизмами в роли морфизмов. Через A-$\mathbf{mod}_1$ мы обозначим подкатегорию A-$\mathbf{mod}$ с теми же объектами, но только лишь сжимающими морфизмами. В дальнейшем в предложениях мы будем использовать сразу несколько фраз, последовательно перечисляя их и заключая в скобки следующим образом: $\langle \ldots / \ldots \rangle$. Например: число x называется ⟨положительным/неотрицательным⟩, если $\langle x > 0 \,/\, x \geqslant 0 \rangle$.

Напомним пару определений и фактов из относительной банаховой гомологии. Будем говорить, что морфизм $\xi\colon X \to Y$ левых A-модулей X и Y — относительно допустимый эпиморфизм, если он имеет правый обратный ограниченный линейный оператор. Левый A-модуль P называется относительно проективным, если для любого относительно допустимого эпиморфизма $\xi\colon X \to Y$ и любого A-морфизма $\varphi\colon P \to Y$ существует A-морфизм $\psi\colon P \to X$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\xi"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\psi"] \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $\xi\psi = \varphi$. Аналогично будем говорить, что морфизм $\xi\colon Y \to X$ правых A-модулей X и Y — относительно допустимый мономорфизм, если он имеет левый обратный ограниченный линейный оператор. Правый A-модуль J называется относительно инъективным, если для любого относительно допустимого мономорфизма $\xi\colon Y \to X$ и любого A-морфизма $\varphi\colon Y \to J$ существует A-морфизм $\psi\colon X \to J$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \\ J & Y \arrow[l, "\varphi"] \arrow[u, "\xi"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $\psi\xi = \varphi$.

Специальный класс относительно $\langle$проективных/инъективных$\rangle$ A-модулей — это так называемые относительно $\langle$свободные/косвободные$\rangle$ модули. Они имеют вид $\langle A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} E \;/\; \mathcal{B}(A_+, E)\rangle$ для некоторого банахова пространства E. Главное свойство таких модулей состоит в том, A-модуль относительно $\langle$проективен/инъективен$\rangle$ тогда и только тогда, когда он является ретрактом некоторого относительно $\langle$свободного/косвободного$\rangle$ A-модуля.

И метрическая, и топологическая, и относительная банахова гомология могут быть изложены с общекатегорных позиций. В [4] была построена теория оснащённых категорий, позволившая единообразно доказывать многие утверждения о проективных и инъективных банаховых модулях. Мы дадим определения и кратко перечислим некоторые результаты об оснащённых категориях. Через $\mathbf{Set}$ мы будем обозначать категорию множеств. Тот факт, что объекты X и Y категории $\mathbf{C}$ изоморфны, мы будем записывать как $X \underset{\mathbf{C}}{\cong} Y$. Пусть $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ — две фиксированные категории. Упорядоченная пара $(\mathbf{C}, \Box\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D})$, где $\Box$ — точный ковариантный функтор, называется оснащённой категорией. Морфизм ξ в $\mathbf{C}$ называется $\Box$-допустимым эпиморфизмом, если $\Box(\xi)$ — ретракция в $\mathbf{D}$. Объект P в $\mathbf{C}$ называется $\Box$-проективным, если для каждого $\Box$-допустимого эпиморфизма ξ в $\mathbf{C}$ отображение $\operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(P, \xi)$ сюръективно. Объект F в $\mathbf{C}$ называется $\Box$-свободным с базой M в $\mathbf{D}$, если существует изоморфизм функторов $\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}}\big(M, \Box(\text{-})\big) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{C}}(F, \text{-})$. Оснащённая категория $(\mathbf{C}, \Box)$ называется свободолюбивой [4, определение 2.10], если каждый объект в $\mathbf{D}$ является базой некоторого $\Box$-свободного объекта из $\mathbf{C}$. Резюме предложений 2.3, 2.11 и 2.12 из [4] выглядит следующим образом:

i) любой ретракт $\Box$-проективного объекта $\Box$-проективен;
ii) любой $\Box$-допустимый эпиморфизм в $\Box$-проективный объект является ретракцией;
iii) любой $\Box$-свободный объект $\Box$-проективен;
iv) если $(\mathbf{C}, \Box)$ — свободолюбивая оснащённая категория, то любой объект $\Box$-проективен тогда и только тогда, когда он ретракт $\Box$-свободного объекта;
v) копроизведение семейства $\Box$-проективных объектов $\Box$-проективно.

Через $\mathbf{C}^{\mathrm{o}}$ мы будем обозначать категорию, противоположную к $\mathbf{C}$. Противоположной к оснащённой категории $(\mathbf{C}, \Box)$ будем называть оснащённую категорию $(\mathbf{C}^{\mathrm{o}}, \Box^{\mathrm{o}}\colon \mathbf{C}^{\mathrm{o}} \to \mathbf{D}^{\mathrm{o}})$. Здесь $\mathbf{C}^{\mathrm{o}}$ и $\mathbf{D}^{\mathrm{o}}$ обозначают противоположные категории (в противоположной категории объекты те же, но все стрелки направлены в противоположную сторону). Переходя к противоположной оснащённой категории, мы можем определить допустимые мономорфизмы, инъективность и косвободу. Морфизм ξ называется $\Box$-допустимым мономорфизмом, если он $\Box^{\mathrm{o}}$-допустимый эпиморфизм. Объект J из $\mathbf{C}$ называется $\Box$-инъективным, если он $\Box^{\mathrm{o}}$-проективен. Объект F из $\mathbf{C}$ называется $\Box$-косвободным, если он $\Box^{\mathrm{o}}$-свободный. Наконец, категория $(\mathbf{C}, \Box)$ называется косвободолюбивой, если противоположная категория $(\mathbf{C}^{\mathrm{o}}, \Box^{\mathrm{o}})$ свободолюбива. Таким образом, для инъективности и косвободы мы можем сформулировать результаты, аналогичные результатам для проективности и свободы.

Теперь рассмотрим точный функтор $\Box_{\mathrm{rel}}\colon A\text{-}\mathbf{mod} \to \mathbf{Ban}$, который просто «забывает» модульную структуру. Легко убедиться, что $(A\text{-}\mathbf{mod}, \Box_{\mathrm{rel}})$ — оснащённая категория, у которой $\Box_{\mathrm{rel}}$-допустимые ⟨эпиморфизмы/мономорфизмы⟩ — это в точности относительно допустимые ⟨эпиморфизмы/мономорфизмы⟩ и ⟨$\Box_{\mathrm{rel}}$-проективные/$\Box_{\mathrm{rel}}$-инъективные⟩ объекты — это в точности относительно ⟨проективные/инъективные⟩ A-модули. Более того, можно показать, что все ⟨$\Box_{\mathrm{rel}}$-свободные/$\Box_{\mathrm{rel}}$-косвободные⟩ объекты изоморфны в $A\text{-}\mathbf{mod}$ модулям вида $\langle A_+ \widehat{\otimes} E / \mathcal{B}(A_+, E)\rangle$ для некоторого банахова пространства E. Этот пример показывает, что относительная теория прекрасно вписывается в схему оснащённых категорий.

В этой работе мы применим такой же общекатегорный подход к метрической и топологической теории. В этих теориях накладываются значительно более слабые ограничения на допустимые морфизмы.

2. Проективность, инъективность и плоскость

2.1. Метрическая и топологическая проективность

При изучении метрической и топологической проективности мы будем рассматривать два широких класса эпиморфизмов, а именно строго коизометрические и топологически сюръективные A-морфизмы. Через $\langle B_E \ / \ B_E^{\circ}\rangle$ мы будем обозначать ⟨замкнутый/открытый⟩ единичный шар пространства E. Ограниченный линейный оператор $T\colon E \to F$ будем называть ⟨строго коизометрическим/топологически сюръективным⟩, если $\langle B_F = T(B_E) \ / \ B_F^{\circ} \subset cT(B_E^{\circ})$ для некоторого $c > 0\rangle$. В дальнейшем A обозначает необязательно унитальную банахову алгебру.

Определение 2.1 [4, определения 1.2, 1.4]. A-модуль P называется ⟨метрически/топологически⟩ проективным, если для любого ⟨строго коизометрического / топологически сюръективного⟩ A-морфизма $\xi\colon X \to Y$ и любого A-морфизма $\varphi\colon P \to Y$ существует A-морфизм $\psi\colon P \to X$, такой что $\langle \xi\psi = \varphi$ и $\|\psi\| = \|\varphi\| \ / \ \xi\psi = \varphi\rangle$.

Теперь мы применим аппарат оснащённых категорий к этим типам проективности. В [4, 6] были построены два точных функтора:

$$\Box_{\mathrm{met}}\colon A\text{-}\mathbf{mod}_1 \to \mathbf{Set}, \quad \Box_{\mathrm{top}}\colon A\text{-}\mathbf{mod} \to \mathbf{HNor}.$$

Здесь $\mathbf{HNor}$ — категория так называемых полунормированных пространств, введённых С. М. Штейнером. Мы не будем подробно объяснять, как действуют эти функторы. Нам достаточно их существования. В тех же статьях было доказано, что, во-первых, A-морфизм ξ ⟨строго коизометричен / топологически сюръективен⟩ тогда и только тогда, когда он ⟨$\Box_{\mathrm{met}}$-допустимый/$\Box_{\mathrm{top}}$-допустимый⟩ эпиморфизм, и, во-вторых, A-модуль P является ⟨метрически/

топологически⟩ проективным тогда и только тогда, когда он ⟨$\square_{\mathrm{met}}$-проективен/ $\square_{\mathrm{top}}$-проективен⟩. Таким образом, мы немедленно получаем следующее предложение.

Предложение 2.2. *Всякий ретракт ⟨метрически/топологически⟩ проективного модуля в ⟨A-$\mathbf{mod}_1$ / A-$\mathbf{mod}$⟩ снова ⟨метрически/топологически⟩ проективен.*

Помимо этого, в [4, 6] было доказано, что оснащённая категория ⟨$(A\text{-}\mathbf{mod}_1, \square_{\mathrm{met}})$ / $(A\text{-}\mathbf{mod}, \square_{\mathrm{top}})$⟩ свободолюбива и что ⟨$\square_{\mathrm{met}}$-свободные/ $\square_{\mathrm{top}}$-свободные⟩ модули изоморфны в ⟨A-$\mathbf{mod}_1$ / A-$\mathbf{mod}$⟩ модулям вида $A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(\Lambda)$ для некоторого множества Λ. Более того, для любого A-модуля X существует ⟨$\square_{\mathrm{met}}$-допустимый/$\square_{\mathrm{top}}$-допустимый⟩ эпиморфизм

$$\pi_X^+ \colon A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_X) \colon a \mathbin{\widehat{\otimes}} \delta_x \mapsto a \cdot x.$$

Здесь через δ_x мы обозначаем функцию из $\ell_1(B_X)$, равную 1 в точке x и 0 в остальных точках. Как следствие общих результатов об оснащённых категориях мы получаем следующий критерий ⟨метрической /топологической⟩ проективности банахова модуля.

Предложение 2.3. *Модуль P ⟨метрически/топологически⟩ проективен тогда и только тогда, когда π_P^+ — ретракция в ⟨A-$\mathbf{mod}_1$ / A-$\mathbf{mod}$⟩.*

Так как ⟨$\square_{\mathrm{met}}$-свободные/$\square_{\mathrm{top}}$-свободные⟩ модули совпадают с точностью до изоморфизма в A-$\mathbf{mod}$, то из предложения 2.2 следует, что любой метрически проективный A-модуль топологически проективен. Напомним, что каждый относительно проективный модуль — это ретракт в A-$\mathbf{mod}$ модуля вида $A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} E$ для некоторого банахова пространства E. Следовательно, каждый топологически проективный A-модуль будет относительно проективным. Мы резюмируем эти результаты в следующем предложении.

Предложение 2.4. *Каждый метрически проективный модуль топологически проективен, и каждый топологически проективный модуль относительно проективен.*

Заметим, что категория банаховых пространств может рассматриваться как категория левых банаховых модулей над нулевой алгеброй. Как следствие, мы получаем определение ⟨метрически/топологически⟩ проективного банахова пространства. Все результаты, полученные выше, верны для этого типа проективности. Оба типа проективных банаховых пространств уже описаны. В [20] Г. Кёте доказал, что все топологически проективные банаховы пространства топологически изоморфны $\ell_1(\Lambda)$ для некоторого множества Λ. Используя результат А. Гротендика из [17], А. Я. Хелемский показал, что метрически проективные банаховы пространства изометрически изоморфны $\ell_1(\Lambda)$ для некоторого множества Λ [4, предложение 3.2].

Теперь перейдём к обсуждению модулей. Легко доказать по определению, что A-модуль $A_\times$ метрически и топологически проективен, но чаще для доказательства проективности модуля решают задачу ретракции для морфизма π_P^+.

Как показывают следующие два предложения, решение последней задачи иногда можно свести к более простой.

Предложение 2.5. *Пусть P — существенный A-модуль, т. е. линейная оболочка $A \cdot P$ плотна в P. Тогда P $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективен тогда и только тогда, когда отображение $\pi_P \colon A \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_P) \colon a \mathbin{\widehat{\otimes}} \delta_x \mapsto a \cdot x$ является ретракцией в $\langle A\text{-}\mathbf{mod}_1 \ / \ A\text{-}\mathbf{mod}\rangle$.*

Доказательство. Утверждение доказывается так же, как предложение 7.1.14 в [3]. □

Предложение 2.6. *Пусть I — замкнутая подалгебра в A и P — банахов A-модуль, существенный как I-модуль. Тогда*

i) *если I — левый идеал в A и P $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективен как I-модуль, то P $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективен как A-модуль;*
ii) *если I — $\langle$1-дополняемый/дополняемый$\rangle$ правый идеал A и P $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективен как A-модуль, то P $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективен как I-модуль.*

Доказательство аналогично рассуждениям из [25, предложение 2.3.3]. □

Приведём несколько конструкций, сохраняющих проективность модулей. Здесь и далее через $\bigoplus_p\{E_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$ мы будем обозначать ℓ_p-сумму банаховых пространств $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. При $p = 0$ мы будем подразумевать c_0-суммы. Если все пространства E_λ являются банаховыми A-модулями, то на их ℓ_p-сумме можно задать структуру банахова A-модуля с помощью покоординатного умножения. Следует напомнить, что $\langle$произвольное/лишь конечное$\rangle$ семейство модулей обладает категорным копроизведением в $\langle A\text{-}\mathbf{mod}_1 \ / \ A\text{-}\mathbf{mod}\rangle$, которое на самом деле есть их ℓ_1-сумма. Вот почему мы делаем дополнительное предположение во втором пункте следующего предложения.

Предложение 2.7. *Пусть $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство банаховых A-модулей. Тогда*

i) *A-модуль $\bigoplus_1\{P_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$ метрически проективен тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in \Lambda$ банахов A-модуль P_λ метрически проективен;*
ii) *если для некоторого $C > 1$ и всех $\lambda \in \Lambda$ морфизм $\pi^+_{P_\lambda}$ имеет правый обратный морфизм нормы не более C, то A-модуль $\bigoplus_1\{P_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$ топологически проективен.*

Доказательство. Обозначим $P := \bigoplus_1\{P_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$.

Докажем первое утверждение. Если P метрически проективен, то по предложению 2.2 для каждого $\lambda \in \Lambda$ банахов A-модуль P_λ метрически проективен, как ретракт P посредством естественной проекции $p_\lambda \colon P \to P_\lambda$. Обратно, если все модули $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ метрически проективны, то по общекатегорной схеме метрически проективно их категорное копроизведение P в $A\text{-}\mathbf{mod}_1$.

Докажем второе утверждение. Допустим, что P_λ топологически проективен для каждого $\lambda \in \Lambda$. Из предположения следует, что $\bigoplus_1\{\pi^+_{P_\lambda} \colon \lambda \in \Lambda\}$ является ретракцией в A-$\mathbf{mod}$. Как следствие, $\bigoplus_1\{P_\lambda\colon \lambda\in\Lambda\}$ есть ретракт

$$\bigoplus\nolimits_1 \left\{A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_{P_\lambda})\colon \lambda\in\Lambda\right\} \underset{A\text{-}\mathbf{mod}_1}{\cong}$$

$$\underset{A\text{-}\mathbf{mod}_1}{\cong} \bigoplus\nolimits_1 \left\{\bigoplus\nolimits_1\{A_+\colon \lambda'\in B_{P_\lambda}\}\colon \lambda\in\Lambda\right\} \underset{A\text{-}\mathbf{mod}_1}{\cong} \bigoplus\nolimits_1\{A_+\colon \lambda\in\Lambda_0\}$$

в A-$\mathbf{mod}$, где $\Lambda_0 = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} B_{P_\lambda}$. Тогда по предложению 2.2 банахов A-модуль P топологически проективен, как ретракт топологически проективного A-модуля. $\square$

Следствие 2.8. *Пусть P — банахов A-модуль и Λ — произвольное множество. Тогда A-модуль $P \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(\Lambda)$ $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективен тогда и только тогда, когда P $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективен.*

Чтобы понять отличия метрической и топологической банаховой гомологии от относительной, рассмотрим ещё два примера, касающиеся идеалов и циклических модулей.

Предложение 2.9 [1, теорема 1]. *Пусть I — идеал коммутативной банаховой алгебры A и I имеет $\langle$сжимающую/ограниченную$\rangle$ аппроксимативную единицу. Тогда I $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективен как A-модуль тогда и только тогда, когда I имеет $\langle$единицу нормы 1 / единицу$\rangle$.*

Этот результат показывает, что метрически или топологически проективные идеалы с ограниченной аппроксимативной единицей должны иметь компактный спектр. В то же время существует множество примеров относительно проективных идеалов со «всего лишь» паракомпактным спектром [2, теорема 3.7].

Следующее предложение является очевидной модификацией описания алгебраически проективных циклических модулей.

Предложение 2.10. *Пусть I — левый идеал в $A_\times$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

i) *A-модуль $A_\times/I$ $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективен $\langle$и естественное фактор-отображение $\pi\colon A_\times\to A_\times/I$ является строгой коизометрией/ $\rangle$;*
ii) *существует идемпотент $p\in I$, такой что $I = A_\times p$ $\langle$и $\|e_{A_\times} - p\| = 1$/ $\rangle$*

Доказательство. С использованием несколько иной терминологии этот факт доказан в [27, предложение 2.11]. $\square$

2.2. Метрическая и топологическая инъективность

Как легко догадаться, при изучении метрической и топологической инъективности мы будем использовать два широких класса мономорфизмов, а именно топологически инъективные и изометрические A-морфизмы. Напомним, что ограниченный линейный оператор $T\colon E\to F$ называется топологически инъективным, если для некоторого $c>0$ при всех $x\in E$ выполнено $c\|T(x)\|\geqslant\|x\|$. Далее, если не оговорено иначе, мы будем считать все модули правыми.

Определение 2.11 [4, определение 4.3]. A-модуль J называется $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективным, если для любого $\langle$изометрического / топологически инъективного$\rangle$ A-морфизма $\xi\colon Y \to X$ и любого A-морфизма $\varphi\colon Y \to J$ существует A-морфизм $\psi\colon X \to J$, такой что $\langle \psi\xi = \varphi$ и $\|\psi\| = \|\varphi\|$ / $\psi\xi = \varphi\rangle$.

В [4, 6] были построены точные функторы

$$\square^d_{\mathrm{met}}\colon \mathbf{mod}_1\text{-}A \to \mathbf{Set}, \quad \square^d_{\mathrm{top}}\colon \mathbf{mod}\text{-}A \to \mathbf{HNor}.$$

Было доказано, что, во-первых, A-морфизм ξ $\langle$изометричен/топологически инъективен$\rangle$ тогда и только тогда, когда он $\langle\square^d_{\mathrm{met}}$-допустимый/$\square^d_{\mathrm{top}}$-допустимый$\rangle$ мономорфизм, и, во-вторых, A-модуль J $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда он $\langle\square^d_{\mathrm{met}}$-инъективен/$\square^d_{\mathrm{top}}$-инъективен$\rangle$. Таким образом, мы немедленно получаем следующее утверждение.

Предложение 2.12. *Всякий ретракт $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективного модуля в $\langle \mathbf{mod}_1\text{-}A$ / $\mathbf{mod}\text{-}A\rangle$ снова $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен.*

В [4, 6] также было доказано, что оснащённая категория $\langle(\mathbf{mod}_1\text{-}A, \square^d_{\mathrm{met}})$ / $(\mathbf{mod}\text{-}A, \square^d_{\mathrm{top}})\rangle$ косвободолюбива и что $\langle\square^d_{\mathrm{met}}$-косвободные/$\square^d_{\mathrm{top}}$-косвободные$\rangle$ модули изоморфны в $\langle\mathbf{mod}_1\text{-}A$ / $\mathbf{mod}\text{-}A\rangle$ модулям вида $\mathcal{B}\big(A_+, \ell_\infty(\Lambda)\big)$ для некоторого множества Λ. Более того, для любого A-модуля X существует $\langle\square^d_{\mathrm{met}}$-допустимый/$\square^d_{\mathrm{top}}$-допустимый$\rangle$ мономорфизм

$$\rho^+_X\colon X \to \mathcal{B}\big(A_+, \ell_\infty(B_{X^*})\big)\colon x \mapsto \Big(a \mapsto \big(f \mapsto f(x \cdot a)\big)\Big).$$

Как следствие общих результатов об оснащённых категориях мы получаем следующее предложение.

Предложение 2.13. *Модуль J $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда ρ^+_J — коретракция в $\langle\mathbf{mod}_1\text{-}A$ / $\mathbf{mod}\text{-}A\rangle$.*

Как и для проективных модулей, легко доказать следующее предложение.

Предложение 2.14. *Каждый метрически инъективный модуль топологически инъективен, и каждый топологически инъективный модуль относительно инъективен.*

Отождествим банаховы пространства с правыми банаховыми модулями над нулевой алгеброй. Мы получим определение $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективного банахова пространства. Эквивалентное определение говорит, что банахово пространство $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективно, если оно $\langle$1-дополняемо/дополняемо$\rangle$ в любом объемлющем банаховом пространстве. На данный момент полностью описаны только метрически инъективные банаховы пространства: эти пространства изометрически изоморфны $C(K)$-пространствам для некоторого экстремально несвязного компактного хаусдорфова пространства K [21, теорема 3.11.6]. Обычно такие топологические пространства называются стоуновыми. В частности, метрически инъективно всякое L_∞-пространство. Самые последние достижения в изучении топологически инъективных банаховых пространств можно найти в [19, гл. 40].

Теперь перейдём к обсуждению модулей. Снова простой факт: A-модуль $A^*_\times$ метрически и топологически инъективен. Это легко доказать по определению с использованием теоремы Хана—Банаха. По аналогии с проективными модулями проверку инъективности модулей часто можно свести к рассмотрению чуть более простых задач ретракции.

Предложение 2.15. *Пусть J — точный A-модуль, т. е. из равенства $x \cdot A = \{0\}$ следует, что $x = 0$. Тогда J $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда отображение*

$$\rho_J \colon J \to \mathcal{B}\big(A, \ell_\infty(B_{J^*})\big) \colon x \mapsto \Big(a \mapsto \big(f \mapsto f(x \cdot a)\big)\Big)$$

является коретракцией в $\langle \mathbf{mod}_1\text{-}A \,/\, \mathbf{mod}\text{-}A\rangle$.

Доказательство аналогично рассуждениям из [12, предложение 1.7]. □

Предложение 2.16. *Пусть I — замкнутая подалгебра в A и J — правый банахов A-модуль, точный как I-модуль. Тогда*

i) *если I — левый идеал в A и J — $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективный I-модуль, то J $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен как A-модуль*;

ii) *если I — $\langle$1-дополняемый/дополняемый$\rangle$ правый идеал A и J $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен как A-модуль, то J $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен как I-модуль.*

Доказательство незначительно отличается от доказательства предложения 2.3.4 из [25]. □

Теперь обсудим конструкции, которые сохраняют метрическую и топологическую инъективность. Следует напомнить, что $\langle$произвольное/лишь конечное$\rangle$ семейство объектов в $\langle \mathbf{mod}_1\text{-}A \,/\, \mathbf{mod}\text{-}A\rangle$ обладает категорным произведением, которое на самом деле есть ℓ_∞-сумма этих объектов. Именно поэтому мы делаем дополнительное предположение во втором пункте следующего предложения.

Предложение 2.17. *Пусть $(J_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство банаховых A-модулей. Тогда*

i) *A-модуль $\bigoplus_\infty \{J_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$ метрически инъективен тогда и только тогда, когда для всех $\lambda \in \Lambda$ банахов A-модуль J_λ метрически инъективен*;

ii) *если для некоторого $C > 1$ и всех $\lambda \in \Lambda$ морфизм $\rho^+_{J_\lambda}$ имеет левый обратный морфизм нормы не более C, то A-модуль $\bigoplus_\infty \{J_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$ топологически инъективен.*

Доказательство. Доказательство мало отличается от рассуждений предложения 2.7. Нужно лишь использовать другой изоморфизм:

$$\mathcal{B}\big(A_+, \ell_\infty(\Lambda)\big) \underset{\mathbf{mod}_1\text{-}A}{\cong} \bigoplus_\infty \{A_+^* \colon \lambda \in \Lambda\}. \qquad \square$$

Следствие 2.18. *Пусть J — банахов A-модуль и Λ — произвольное множество. Тогда A-модуль $\bigoplus_\infty \{J : \lambda \in \Lambda\}$ $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда J $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен.*

В отличие от случая проективности, имеется ещё один способ конструирования инъективных модулей.

Предложение 2.19. *Пусть J — банахов A-модуль и Λ — произвольное множество. Тогда A-модуль $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда J $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен.*

Доказательство. Допустим, что $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен. Зафиксируем $\lambda \in \Lambda$ и рассмотрим сжимающие A-морфизмы

$$i_\lambda \colon J \to \mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J) \colon x \mapsto (f \mapsto f(\lambda)x)$$

и

$$p_\lambda \colon \mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J) \to J \colon T \mapsto T(\delta_\lambda).$$

Очевидно, $p_\lambda i_\lambda = 1_J$, т. е. J — это ретракт $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ в $\langle \mathbf{mod}_1\text{-}A \,/\, \mathbf{mod}\text{-}A \rangle$. Из предложения 2.12 следует, что A-модуль J $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен.

Обратно, поскольку J $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен, то по предложению 2.13 морфизм ρ_J^+ является коретракцией в $\langle \mathbf{mod}_1\text{-}A \,/\, \mathbf{mod}\text{-}A \rangle$. Применим функтор $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), -)$ к этой коретракции, чтобы получить другую коретракцию $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), \rho_J^+)$. Заметим, что

$$\mathcal{B}\big(\ell_1(\Lambda), \ell_\infty(B_{J^*})\big) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \big(\ell_1(\Lambda) \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_{J^*})\big)^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_1(\Lambda \times B_{J^*})^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_\infty(\Lambda \times B_{J^*}),$$

поэтому мы получаем изометрически изоморфизм банаховых модулей

$$\mathcal{B}\Big(\ell_1(\Lambda), \mathcal{B}\big(A_+, \ell_\infty(B_{J^*})\big)\Big) \underset{\mathbf{mod}_1\text{-}A}{\cong} \\ \underset{\mathbf{mod}_1\text{-}A}{\cong} \mathcal{B}\big(A_+, \mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), \ell_\infty(B_{J^*})\big) \underset{\mathbf{mod}_1\text{-}A}{\cong} \mathcal{B}\big(A_+, \ell_\infty(\Lambda \times B_{J^*})\big).$$

Значит, $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ — ретракт $\mathcal{B}\big(A_+, \ell_\infty(\Lambda \times B_{J^*})\big)$ в $\langle \mathbf{mod}_1\text{-}A \,/\, \mathbf{mod}\text{-}A \rangle$, т. е. ретракт $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективного A-модуля. По предложению 2.12 A-модуль $\mathcal{B}(\ell_1(\Lambda), J)$ $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен. $\square$

2.3. Метрическая и топологическая плоскость

Чтобы сохранить единый стиль обозначений, мы будем называть метрически плоскими A-модули статьи [18], где они назывались экстремально плоскими. Через $\widehat{\otimes}_A$ мы будем обозначать проективное модульное тензорное произведение банаховых модулей. Так же мы будем обозначать и соответствующий функтор.

Определение 2.20 [18, I]. A-модуль F называется $\langle$метрически/топологически$\rangle$ плоским, если для каждого $\langle$изометрического / топологически инъективного⟩ A-морфизма $\xi\colon X \to Y$ правых A-модулей линейный оператор

$$\xi \mathbin{\widehat{\otimes}_A} 1_F\colon X \mathbin{\widehat{\otimes}_A} F \to Y \mathbin{\widehat{\otimes}_A} F$$

⟨изометричен / топологически инъективен⟩.

Прежде чем переходить к примерам, мы дадим определение $\mathscr{L}_1$-пространства. Пусть E и F — два изоморфных банаховых пространства. Тогда расстояние Банаха—Мазура между ними определяется по формуле

$$d_{BM}(E, F) := \inf\{\|T\|\|T^{-1}\|\colon T \in \mathcal{B}(E, F) \text{ — изоморфизм}\}.$$

Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое семейство конечномерных банаховых пространств. Будем говорить, что банахово пространство E имеет $\mathcal{F}$-локальную структуру, если для некоторого $C \geqslant 1$ и для каждого конечномерного подпространства F в E существует содержащее F конечномерное подпространство G в E, такое что $d_{BM}(G, H) \leqslant C$ для некоторого H из $\mathcal{F}$. Один из самых важных примеров такого типа — это так называемые $\mathscr{L}_p$-пространства. Впервые они были определены в новаторской работе [22] и стали незаменимым инструментом в локальной теории банаховых пространств. Для заданного $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ мы будем говорить, что банахово пространство E является $\mathscr{L}_p$-пространством, если оно имеет $\mathcal{F}$-локальную структуру для класса $\mathcal{F}$ конечномерных ℓ_p-пространств. Наибольший интерес для нас будут представлять $\mathscr{L}_1$- и $\mathscr{L}_\infty$-пространства.

Снова в качестве примера мы рассмотрим категорию банаховых пространств как категорию модулей над нулевой алгеброй. Из [17] следует, что любое метрически плоское банахово пространство есть L_1-пространство. Для топологически плоских банаховых пространств, в отличие от топологически инъективных, мы также имеем критерий [26, теорема V.1]: банахово пространство топологически плоское тогда и только тогда, когда оно является $\mathscr{L}_1$-пространством.

Хорошо известно, что A-модуль F относительно плоский тогда и только тогда, когда F^* относительно инъективный [3, теорема 7.1.42]. Следующее предложение — очевидный аналог данного результата. Доказательство незначительно отличается от доказательства критерия относительной плоскости.

Предложение 2.21. *A-модуль F ⟨метрически/топологически⟩ плоский тогда и только тогда, когда F^* ⟨метрически/топологически⟩ инъективен.*

Комбинируя предложение 2.21 с предложениями 2.12 и 2.14, мы получаем следующее утверждение.

Предложение 2.22. *Всякий ретракт ⟨метрически/топологически⟩ плоского модуля в ⟨A-$\mathbf{mod}_1$ / A-$\mathbf{mod}$⟩ снова ⟨метрически/топологически⟩ плоский.*

Предложение 2.23. *Каждый метрически плоский модуль топологический плоский, и каждый топологически плоский модуль относительно плоский.*

Отметим ещё одно полезное следствие предложения 2.21.

Предложение 2.24. *Пусть I — замкнутая подалгебра в A и F — банахов A-модуль, существенный как I-модуль. Тогда*

i) *если* I — *левый идеал в* A *и* F — $\langle$*метрически/топологически*$\rangle$ *плоский* I*-модуль, то* F $\langle$*метрически/топологически*$\rangle$ *плоский* A*-модуль*;

ii) *если* I — $\langle$*1-дополняемый/дополняемый*$\rangle$ *правый идеал* A *и* F — $\langle$*метрически/топологически*$\rangle$ *плоский* A*-модуль, то* F — $\langle$*метрически/топологически*$\rangle$ *плоский* I*-модуль.*

Доказательство. Заметим, что модуль, сопряжённый к существенному модулю, будет точным. Теперь все результаты следуют из предложений 2.21 и 2.16. □

Предложение 2.25. *Пусть* P — $\langle$*метрически/топологически*$\rangle$ *проективный* A*-модуль и* Λ — *произвольное множество. Тогда* A*-модуль* $\mathcal{B}\big(P, \ell_\infty(\Lambda)\big)$ $\langle$*метрически/топологически*$\rangle$ *инъективен как* A*-модуль. В частности,* P^* $\langle$*метрически/топологически*$\rangle$ *инъективен как* A*-модуль.*

Доказательство. По предложению 2.3 π_P^+ — ретракция в $\langle A\text{-}\mathbf{mod}_1 / A\text{-}\mathbf{mod}\rangle$. Тогда A-морфизм $\rho^+ = \mathcal{B}\big(\pi_P^+, \ell_\infty(\Lambda)\big)$ — коретракция в $\langle \mathbf{mod}_1\text{-}A \,/\, \mathbf{mod}\text{-}A\rangle$. Заметим, что

$$\mathcal{B}\big(A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_P), \ell_\infty(\Lambda)\big) \underset{\mathbf{mod}_1\text{-}A}{\cong} \\ \underset{\mathbf{mod}_1\text{-}A}{\cong} \mathcal{B}\Big(A_+, \mathcal{B}\big(\ell_1(B_P), \ell_\infty(\Lambda)\big)\Big) \underset{\mathbf{mod}_1\text{-}A}{\cong} \mathcal{B}\big(A_+, \ell_\infty(B_P \times \Lambda)\big).$$

Итак, мы показали, что существует коретракция из $\mathcal{B}\big(P, \ell_\infty(\Lambda)\big)$ в $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективный A-модуль. По предложению 2.12 банахов A-модуль $\mathcal{B}\big(P, \ell_\infty(\Lambda)\big)$ является $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективным. Чтобы доказать последнее утверждение, достаточно взять в качестве Λ одноточечное множество. □

Как следствие предложений 2.21 и 2.25 мы получаем следующий важный факт.

Предложение 2.26. *Каждый* $\langle$*метрически/топологически*$\rangle$ *проективный модуль является* $\langle$*метрически/топологически*$\rangle$ *плоским.*

Позже мы убедимся, что $\langle$метрическая/топологическая$\rangle$ плоскость — это более слабое свойство, чем $\langle$метрическая/топологическая$\rangle$ проективность.

По аналогии с проективностью теперь легко показать, что копроизведения сохраняют метрическую, а иногда и топологическую плоскость модулей.

Предложение 2.27. *Пусть* $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — *семейство банаховых* A*-модулей. Тогда*

i) A*-модуль* $\bigoplus_1\{F_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$ *метрически плоский тогда и только тогда, когда для всех* $\lambda \in \Lambda$ *модуль* F_λ *метрически плоский*;

ii) *если для некоторого* $C > 1$ *и всех* $\lambda \in \Lambda$ *морфизм* $\rho^+_{F_\lambda^*}$ *имеет левый обратный морфизм нормы не более* C*, то* A*-модуль* $\bigoplus_1\{F_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$ *топологически плоский.*

Доказательство. По предложению 2.21 A-модуль F $\langle$метрически/топологически$\rangle$ плоский тогда и только тогда, когда F^* $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен. Осталось применить предложение 2.17 с $J_\lambda = F_\lambda^*$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и вспомнить, что

$$\left(\bigoplus\nolimits_1 \{F_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}\right)^* \underset{\mathbf{mod}_1\text{-}A}{\cong} \bigoplus\nolimits_\infty \{F_\lambda^* \colon \lambda \in \Lambda\}. \qquad \square$$

Теперь мы обсудим условия, при которых идеалы и циклические модули будут метрически и топологически плоскими. Доказательство следующего предложения практически не отличается от своего «относительного аналога» [3, предложение 7.1.45].

Предложение 2.28. *Пусть I — левый идеал в $A_\times$ и I имеет правую $\langle$сжимающую/ограниченную$\rangle$ аппроксимативную единицу. Тогда A-модуль I $\langle$метрически/топологически$\rangle$ плоский.*

Теперь, кстати, мы можем дать пример метрически плоского модуля, который не является даже топологически проективным. Очевидно, $\ell_\infty(\mathbb{N})$-модуль $c_0(\mathbb{N})$ не унитален как идеал алгебры $\ell_\infty(\mathbb{N})$, но имеет сжимающую аппроксимативную единицу. По теореме 2.9 этот модуль не является топологически проективным, но он метрически плоский по предложению 2.28.

Вторая часть следующего предложения есть небольшая переформулировка предложения 4.11 из [27]. Случай топологической плоскости идеалов был изучен в [2, теорема VI.1.20].

Предложение 2.29. *Пусть I — левый собственный идеал в $A_\times$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

i) *A-модуль $A_\times/I$ $\langle$метрически/топологически$\rangle$ плоский;*
ii) *I имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу $(e_\nu)_{\nu\in N}$, $\langle$такую что $\sup_{\nu\in N}\|e_{A_\times} - e_\nu\| \leqslant 1$ / $\rangle$.*

Следует сказать, что всякая операторная алгебра A (не обязательно самосопряжённая), обладающая сжимающей аппроксимативной единицей, имеет сжимающую аппроксимативную единицу $(e_\nu)_{\nu\in N}$ со свойством $\sup_{\nu\in N}\|e_{A_\#} - e_\nu\| \leqslant 1$ и даже $\sup_{\nu\in N}\|e_{A_\#} - 2e_\nu\| \leqslant 1$. Здесь $A_\#$ — унитализация A как операторной алгебры. Подробности можно найти в [8, 9].

Сравним эти результаты о метрической и топологической плоскости циклических модулей с их относительными аналогами. А. Я. Хелемский и М. В. Шейнберг показали [2, теорема VII.1.20], что циклический модуль будет относительно плоским, если I имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу. В случае когда $I^\perp$ дополняемо в $A_\times^*$, верна и обратная импликация. В топологической теории это требование излишне, поэтому удаётся получить критерий. Метрическая плоскость циклических модулей — слишком сильное свойство из-за специфических ограничений на норму аппроксимативной единицы. Как мы увидим в следующем разделе, оно настолько ограничительное, что не позволяет построить ни одного ненулевого аннуляторного метрически проективного, инъективного или плоского модуля над ненулевой банаховой алгеброй.

3. Влияние банаховой геометрии

3.1. Гомологически тривиальные аннуляторные модули

В этом разделе мы сконцентрируем наше внимание на метрической и топологической проективности, инъективности и плоскости аннуляторных модулей, т. е. модулей с нулевым внешним умножением. Если не оговорено противное, все банаховы пространства в этом разделе рассматриваются как аннуляторные модули. Отметим очевидный факт: всякий ограниченный линейный оператор между аннуляторными A-модулями является A-морфизмом.

Предложение 3.1. *Пусть X — ненулевой аннуляторный A-модуль. Тогда $\mathbb{C}$ является ретрактом X в A-$\mathbf{mod}_1$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $x_0 \in X$ нормы 1. Используя теорему Хана—Банаха, выберем функционал $f_0 \in X^*$ так, чтобы $\|f_0\| = f_0(x_0) = 1$. Рассмотрим линейные операторы

$$\pi\colon X \to \mathbb{C}\colon x \mapsto f_0(x), \quad \sigma\colon \mathbb{C} \to X\colon z \mapsto zx_0.$$

Легко проверить, что π и σ — сжимающие A-морфизмы и, более того, $\pi\sigma = 1_{\mathbb{C}}$. Другими словами, $\mathbb{C}$ является ретрактом X в A-$\mathbf{mod}_1$. $\square$

Напомним, что любая банахова алгебра A может рассматриваться как собственный максимальный идеал в A_+, причём $\mathbb{C} \underset{A\text{-}\mathbf{mod}_1}{\cong} A_+/A$. Если рассматривать $\mathbb{C}$ как правый аннуляторный A-модуль, то имеет место ещё один изоморфизм: $\mathbb{C} \underset{\mathbf{mod}_1\text{-}A}{\cong} (A_+/A)^*$.

Предложение 3.2. *Аннуляторный A-модуль $\mathbb{C}$ $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективен тогда и только тогда, когда $\langle A = \{0\}$ / A имеет правую единицу$\rangle$.*

Доказательство. Достаточно исследовать $\langle$метрическую/топологическую$\rangle$ проективность модуля A_+/A. Естественное фактор-отображение $\pi\colon A_+ \to A_+/A$ является строгой коизометрией, поэтому по предложению 2.10 $\langle$метрическая/топологическая$\rangle$ проективность A_+/A эквивалентна существованию $p \in A$, такого что $A = A_+p$ $\langle$и $\|e_{A_+} - p\| = 1$ / $\rangle$. $\langle$Осталось заметить, что $\|e_{A_+} - p\| = 1$ тогда и только тогда, когда $p = 0$, что эквивалентно $A = A_+p = \{0\}$ / $\rangle$. $\square$

Предложение 3.3. *Пусть P — ненулевой аннуляторный A-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

i) *P — $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективный A-модуль;*

ii) *$\langle A = \{0\}$ / A имеет правую единицу$\rangle$ и P — $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективное банахово пространство, т. е. $\langle P \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_1(\Lambda)$ / $P \underset{\mathbf{Ban}}{\cong} \ell_1(\Lambda)\rangle$ для некоторого множества Λ.*

Доказательство. Докажем импликацию i) $\Longrightarrow$ ii). Из предложений 2.2 и 3.1 следует, что A-модуль $\mathbb{C}$ $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективен как ретракт $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективного модуля P. Предложение 3.2 даёт, что $\langle A = \{0\}$ / A имеет правую единицу$\rangle$. По следствию 2.8 аннуляторный A-модуль $\mathbb{C} \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_P) \underset{A\text{-}\mathbf{mod}_1}{\cong} \ell_1(B_P)$ $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективен. Рассмотрим строгую коизометрию $\pi\colon \ell_1(B_P) \to P$, корректно определённую равенством $\pi(\delta_x) = x$. Так как P $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективен, то A-морфизм π имеет правый обратный морфизм σ в $\langle A\text{-}\mathbf{mod}_1$ / $A\text{-}\mathbf{mod}\rangle$. Таким образом, $\sigma\pi$ — $\langle$сжимающий/ограниченный$\rangle$ проектор из $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективного банахова пространства $\ell_1(B_P)$ на P, т. е. P — $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективное банахово пространство. Теперь из $\langle$[4, предложение 3.2]/результатов [20]$\rangle$ следует, что P изоморфно $\ell_1(\Lambda)$ в $\langle \mathbf{Ban}_1$ / $\mathbf{Ban}\rangle$ для некоторого множества Λ.

Докажем импликацию ii) $\Longrightarrow$ i). По предложению 3.2 аннуляторный A-модуль $\mathbb{C}$ $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективен. По следствию 2.8 аннуляторный A-модуль $\mathbb{C} \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(\Lambda) \underset{A\text{-}\mathbf{mod}_1}{\cong} \ell_1(\Lambda)$ также $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективен. $\square$

Предложение 3.4. *Правый аннуляторный A-модуль $\mathbb{C}$ $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен тогда и только тогда, когда $\langle A = \{0\}$ / A имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу$\rangle$.*

Доказательство. Благодаря предложению 2.21 достаточно изучить $\langle$метрическую/топологическую$\rangle$ плоскость модуля A_+/A. По предложению 2.29 это эквивалентно существованию правой ограниченной аппроксимативной единицы $(e_\nu)_{\nu\in N}$ в A $\langle$со свойством $\sup_{\nu\in N}\|e_{A_+} - e_\nu\| \leqslant 1\rangle$. $\langle$Осталось заметить, что $\|e_{A_+} - e_\nu\| \leqslant 1$ тогда и только тогда, когда $e_\nu = 0$, что эквивалентно $A = \{0\}$ / $\rangle$. $\square$

Предложение 3.5. *Пусть J — ненулевой правый аннуляторный A-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

i) *J — $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективный A-модуль;*

ii) *$\langle A = \{0\}$ / A имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу$\rangle$ и J — $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективное банахово пространство, $\langle$т. е. $J \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} C(K)$ для некоторого стоунова пространства K / $\rangle$.*

Доказательство. Докажем импликацию i) $\Longrightarrow$ ii). По предложениям 2.12 и 3.1 мы получаем, что A-модуль $\mathbb{C}$ $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен как ретракт $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективного модуля J. Предложение 3.4 даёт нам, что $\langle A = \{0\}$ / A имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу$\rangle$. Из предложения 2.19 следует, что аннуляторный

A-модуль $\mathcal{B}(\ell_1(B_{J^*}), \mathbb{C}) \underset{\mathbf{mod}_1\text{-}A}{\cong} \ell_\infty(B_{J^*})$ $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен. Рассмотрим изометрию $\rho\colon J \to \ell_\infty(B_{J^*})$, корректно определённую равенством $\rho(x)(f) = f(x)$. Поскольку J $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен, ρ имеет левый обратный морфизм τ в $\langle \mathbf{mod}_1\text{-}A$ / $\mathbf{mod}\text{-}A\rangle$. Тогда $\rho\tau$ — $\langle$сжимающий/ограниченный$\rangle$ проектор из $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективного банахова пространства $\ell_\infty(B_{J^*})$ на J, поэтому J также является $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективным банаховым пространством. $\langle$По [21, теорема 3.11.6] J изометрически изоморфно $C(K)$ для некоторого стоунова пространства $K\rangle$.

Докажем импликацию ii) $\Longrightarrow$ i). По предложению 3.4 аннуляторный A-модуль $\mathbb{C}$ $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен. По предложению 2.19 аннуляторный A-модуль $\mathcal{B}(\ell_1(B_{J^*}), \mathbb{C}) \underset{\mathbf{mod}_1\text{-}A}{\cong} \ell_\infty(B_{J^*})$ также $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен. Так как J — $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективное банахово пространство и существует изометрическое вложение $\rho\colon J \to \ell_\infty(B_{J^*})$, то J является ретрактом $\ell_\infty(B_{J^*})$ в $\langle \mathbf{Ban}_1$ / $\mathbf{Ban}\rangle$. Напомним, что J и $\ell_\infty(B_{J^*})$ — аннуляторные модули, поэтому данная ретракция также является ретракцией в $\langle \mathbf{mod}_1\text{-}A$ / $\mathbf{mod}\text{-}A\rangle$. По предложению 2.12 A-модуль J $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективен. □

Предложение 3.6. *Пусть F — ненулевой аннуляторный A-модуль. Тогда следующие условия эквивалентны:*

i) *F — $\langle$метрически/топологически$\rangle$ плоский A-модуль;*

ii) *$\langle A = \{0\}$ / A имеет правую ограниченную аппроксимативную единицу$\rangle$ и F — $\langle$метрически/топологически$\rangle$ плоское банахово пространство, т. е. F является $\langle L_1$-пространством/$\mathscr{L}_1$-пространством$\rangle$.*

Доказательство. По $\langle$[17, теорема 1] / [26, теорема VI.6]$\rangle$ банахово пространство F^* $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективно тогда и только тогда, когда F — $\langle L_1$-пространство/$\mathscr{L}_1$-пространство$\rangle$. Теперь эквивалентность следует из предложений 3.5 и 2.21. □

Сравним эти результаты с их аналогами из относительной теории. По $\langle$[25, предложение 2.1.7] / [25, предложение 2.1.10]$\rangle$ аннуляторный модуль над банаховой алгеброй A относительно $\langle$проективный/плоский$\rangle$ тогда и только тогда, когда A имеет $\langle$правую единицу / правую ограниченную аппроксимативную единицу$\rangle$. В метрической и топологической теории, в отличие от относительной, гомологическая тривиальность аннуляторных модулей налагает ограничения не только на алгебру, но и на геометрию самого модуля. Эти геометрические ограничения запрещают существование некоторых гомологически лучших банаховых алгебр. Одно из важных свойств относительно $\langle$стягиваемых/аменабельных$\rangle$ банаховых алгебр — $\langle$проективность/плоскость$\rangle$ всех (и, в частности, аннуляторных) левых банаховых модулей над ней. Резкое отличие метрической и топологической теории в том, что в них подобных алгебр не может быть.

Предложение 3.7. *Не существует такой банаховой алгебры A, что все A-модули $\langle$метрически/топологически$\rangle$ плоские. Тем более не существует таких банаховых алгебр, что все A-модули $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективны.*

Доказательство. Рассмотрим бесконечномерное $\mathscr{L}_2$-пространство X (например, $\ell_2(\mathbb{N})$) как аннуляторный A-модуль. По [13, следствие 23.3 (4)] пространство X не является $\mathscr{L}_1$-пространством. Следовательно, по предложению 3.6 модуль X не является топологически плоским. По предложению 2.23 он также и не метрически плоский. Наконец, из предложения 2.26 следует, что X не является ни метрически, ни топологически проективным. $\square$

3.2. Гомологически тривиальные модули над банаховыми алгебрами со специальной геометрией

Цель данного раздела — убедить читателя в том, что гомологически тривиальные модули над некоторыми банаховыми алгебрами имеют с этими алгебрами схожие геометрические свойства. Результаты следующего предложения в случае метрической теории были получены А. Гравеном в [16].

Предложение 3.8. *Пусть A — банахова алгебра, изоморфная в $\langle \mathbf{Ban}_1 / \mathbf{Ban} \rangle$ пространству $L_1(\Theta, \nu)$ для некоторого пространства с мерой (Θ, Σ, ν). Тогда*

i) *если P — $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективный A-модуль, то P — $\langle L_1$-пространство / ретракт L_1-пространства$\rangle$;*
ii) *если J — $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективный A-модуль, то J — $\langle C(K)$-пространство для некоторого стоунова пространства K / топологически инъективное банахово пространство$\rangle$;*
iii) *если F — $\langle$метрически/топологически$\rangle$ плоский A-модуль, то F — $\langle L_1$-пространство/$\mathscr{L}_1$-пространство$\rangle$.*

Доказательство. Через (Θ', Σ', ν') обозначим пространство с мерой (Θ, Σ, ν) с одним добавленным атомом. Тогда $A_+ \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_1(\Theta', \nu')$.

Докажем утверждение i). Так как P $\langle$метрически/топологически$\rangle$ проективен как A-модуль, то по предложению 2.3 он является ретрактом $A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_P)$ в $\langle A\text{-}\mathbf{mod}_1 \ / \ A\text{-}\mathbf{mod} \rangle$. Пусть μ_c — считающая мера на B_P. Тогда по теореме Гротендика [5, теорема 2.7.5]

$$A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_P) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_1(\Theta', \nu') \mathbin{\widehat{\otimes}} L_1(B_P, \mu_c) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_1(\Theta' \times B_P, \nu' \times \mu_c).$$

Следовательно, P — ретракт L_1-пространства в $\langle \mathbf{Ban}_1 \ / \ \mathbf{Ban} \rangle$. Осталось заметить, что любой ретракт L_1-пространства в $\mathbf{Ban}_1$ является снова L_1-пространством [21, теорема 6.17.3].

Докажем утверждение ii). Так как J $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективный A-модуль, то по предложению 2.13 он является ретрактом $\mathcal{B}\big(A_+, \ell_\infty(B_{J^*})\big)$

в $\langle \mathbf{mod}_1\text{-}A \,/\, \mathbf{mod}\text{-}A\rangle$. Пусть μ_c — считающая мера на B_{J^*}. Тогда

$$\mathcal{B}\big(A_+, \ell_\infty(B_{J^*})\big) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \big(A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_{J^*})\big)^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \big(L_1(\Theta', \nu') \mathbin{\widehat{\otimes}} L_1(B_P, \mu_c)\big)^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \\ \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_1(\Theta' \times B_P, \nu' \times \mu_c)^* \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} L_\infty(\Theta' \times B_P, \nu' \times \mu_c).$$

Следовательно, J — ретракт L_∞-пространства в $\langle \mathbf{Ban}_1 \,/\, \mathbf{Ban}\rangle$. Поскольку L_∞-пространства $\langle$метрически/топологически$\rangle$ инъективны, то таковы же и их ретракты J. Осталось напомнить, что каждое метрически инъективное банахово пространство является $C(K)$-пространством для некоторого стоунова пространства K [21, теорема 3.11.6].

Докажем утверждение iii). По $\langle$[17, теорема 1]/[26, теорема VI.6]$\rangle$ банахово пространство F^* инъективно в $\langle \mathbf{Ban}_1 \,/\, \mathbf{Ban}\rangle$ тогда и только тогда, когда F является $\langle L_1$-пространством/$\mathscr{L}_1$-пространством$\rangle$. Остаётся применить результаты пункта ii) и предложение 2.21. □

Предложение 3.9. *Пусть A — банахова алгебра, изоморфная как банахово пространство некоторому $\mathscr{L}_1$-пространству. Тогда любой топологически $\langle$проективный/инъективный/плоский$\rangle$ A-модуль является $\langle\mathscr{L}_1$-пространством/$\mathscr{L}_\infty$-пространством/$\mathscr{L}_1$-пространством$\rangle$.*

Доказательство. Если алгебра A — $\mathscr{L}_1$-пространство, то такова же и A_+.

Пусть P — топологически проективный A-модуль. Тогда по предложению 2.3 P — ретракт $A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_P)$ в A-$\mathbf{mod}$ и тем более в $\mathbf{Ban}$. Поскольку $\ell_1(B_P)$ — $\mathscr{L}_1$-пространство, то таково же и $A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_P)$, как проективное тензорное произведение $\mathscr{L}_1$-пространств [15, предложение 1]. Следовательно, P является $\mathscr{L}_1$-пространством, как ретракт $\mathscr{L}_1$-пространства [10, предложение 1.28].

Пусть J — топологически инъективный A-модуль. Тогда по предложению 2.13 J — ретракт $\mathcal{B}\big(A_+, \ell_\infty(B_{J^*})\big) \underset{\mathbf{mod}_1\text{-}A}{\cong} \big(A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_{J^*})\big)^*$ в $\mathbf{mod}$-A и тем более в $\mathbf{Ban}$. Как мы показали выше, пространство $A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_{J^*})$ является $\mathscr{L}_1$-пространством. Тогда сопряжённое пространство $\mathcal{B}\big(A_+, \ell_\infty(B_{J^*})\big)$ является $\mathscr{L}_\infty$-пространством [10, предложение 1.27]. Осталось заметить, что любой ретракт $\mathscr{L}_\infty$-пространства есть $\mathscr{L}_\infty$-пространство [10, предложение 1.28].

Наконец, пусть F — топологически плоский A-модуль. Тогда F^* топологически инъективен по предложению 2.21. Из предыдущего абзаца следует, что F^* — это $\mathscr{L}_\infty$-пространство. По [26, теорема VI.6] пространство F является $\mathscr{L}_1$-пространством. □

Перейдём к обсуждению свойства Данфорда—Петтиса для гомологически тривиальных банаховых модулей. Напомним, что банахово пространство E обладает свойством Данфорда—Петтиса, если любой слабо компактный оператор из E в произвольное банахово пространство F вполне непрерывен. Существует простое внутреннее описание этого свойства [7, теорема 5.4.4]: банахово пространство E обладает свойством Данфорда—Петтиса, если $\lim\limits_n f_n(x_n) = 0$ для любых слабо сходящихся к 0 последовательностей $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ и $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E^*$.

Теперь легко доказать, что если банахово пространство E^* обладает свойством Данфорда—Петтиса, то им обладает и E. Любое $\mathscr{L}_1$-пространство и любое $\mathscr{L}_\infty$-пространство обладает свойством Данфорда—Петтиса [10, предложение 1.30]. В частности, все L_1-пространства и $C(K)$-пространства обладают этим свойством. Свойство Данфорда—Петтиса наследуется дополняемыми подпространствами [14, предложение 13.44].

Ключевым для нас будет результат Ж. Бурга о банаховых пространствах со специальной локальной структурой. В [11, теорема 5] доказано, что первое, второе и т. д. сопряжённые пространства банахова пространства с E_p-локальной структурой обладают свойством Данфорда—Петтиса. Здесь E_p обозначает класс всех ℓ_∞-сумм p копий p-мерных ℓ_1-пространств для некоторого натурального p. Через $\mathcal{L}_{\infty,1}$ мы обозначим класс конечных ℓ_∞-сумм конечномерных ℓ_1-пространств. Легко проверить, что результат Ж. Бурга верен для банаховых пространств с $\mathcal{L}_{\infty,1}$-локальной структурой.

Предложение 3.10. *Пусть $\{(\Omega_\lambda, \Sigma_\lambda, \mu_\lambda)\colon \lambda \in \Lambda\}$ — семейство пространств с мерой. Тогда банахово пространство $\bigoplus_0\{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)\colon \lambda \in \Lambda\}$ имеет $\mathcal{L}_{\infty,1}$-локальную структуру.*

Доказательство. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ через $L_1^0(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)$ обозначим плотное подпространство в $L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)$, натянутое на характеристические функции измеримых множеств из Σ_λ. Обозначим $E := \bigoplus_0\{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)\colon \lambda \in \Lambda\}$. Пусть $E_0 := \bigoplus_{00}\{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)\colon \lambda \in \Lambda\}$ — не обязательно замкнутое подпространство в E, состоящее из векторов с конечным числом ненулевых координат.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и конечномерное подпространство F в E. Так как F конечномерно, то существует ограниченный проектор $Q\colon E \to E$ на F. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\delta\|Q\| < 1$ и $(1+\delta\|Q\|)(1-\delta\|Q\|)^{-1} < 1+\varepsilon$. Заметим, что B_F компактно, потому что F конечномерно. Следовательно, существует конечная $\delta/2$-сеть $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_n} \subset E_0$ для B_F. Здесь через $\mathbb{N}_n$ мы обозначаем множество первых n натуральных чисел. Для каждого $k \in \mathbb{N}_n$ имеем

$$x_k = \bigoplus\nolimits_0\{x_{k,\lambda}\colon \lambda \in \Lambda\},$$

где

$$x_{k,\lambda} = \sum_{j=1}^{m_{k,\lambda}} d_{k,j,\lambda}\chi_{D_{j,k,\lambda}}$$

для некоторых комплексных чисел $(d_{j,k,\lambda})_{j\in\mathbb{N}_{m_{k,\lambda}}}$ и измеримых множеств $(D_{j,k,\lambda})_{j\in\mathbb{N}_{m_{k,\lambda}}}$ конечной меры. Здесь χ_S обозначает индикаторную функцию множества S. Пусть $(C_{i,\lambda})_{i\in\mathbb{N}_{m_\lambda}}$ — множество всех попарных пересечений элементов из $(D_{j,k,\lambda})_{j\in\mathbb{N}_{m_{k,\lambda}}}$ за исключением множества меры 0. Тогда $x_{k,\lambda} = \sum_{i=1}^{m_\lambda} c_{i,k,\lambda}\chi_{C_{i,\lambda}}$ для некоторых комплексных чисел $(c_{j,k,\lambda})_{j\in\mathbb{N}_{m_\lambda}}$. Обозначим $\Lambda_k = \{\lambda \in \lambda\colon x_{k,\lambda} \neq 0\}$. По определению множества E_0 множество Λ_k конечно для каждого $k \in \mathbb{N}_n$. Рассмотрим конечное множество $\Lambda_0 = \bigcup_{k\in\mathbb{N}_n} \Lambda_k$. Для каждого $\lambda \in \Lambda_0$ корректно определён проектор

$$P_\lambda\colon L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) \to L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)\colon x_\lambda \mapsto \sum_{i=1}^{m_\lambda} \left(\mu(C_{i,\lambda})^{-1} \int\limits_{C_{i,\lambda}} x_\lambda(\omega)\, d\mu_\lambda(\omega) \right) \chi_{C_{i,\lambda}}.$$

Легко проверить, что $P(\chi_{C_{i,\lambda}}) = \chi_{C_{i,\lambda}}$ для всех $i \in \mathbb{N}_{m_\lambda}$. Следовательно, $P(x_{k,\lambda}) = x_{k,\lambda}$ для всех $k \in \mathbb{N}_n$. Так как множества $(C_{i,\lambda})_{i \in \mathbb{N}_{m_\lambda}}$ не пересекаются и имеют положительную меру, то $\operatorname{Im}(P_\lambda) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \ell_1(\mathbb{N}_{m_\lambda})$. Для $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_0$ мы положим $P_\lambda = 0$ и рассмотрим проектор $P := \bigoplus_0 \{P_\lambda\colon \lambda \in \Lambda\}$. По построению он сжимающий с образом

$$\operatorname{Im}(P) \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \bigoplus\nolimits_0 \{\ell_1(\mathbb{N}_{m_\lambda})\colon \lambda \in \Lambda_0\} \in \mathcal{L}_{\infty,1}.$$

Рассмотрим произвольный вектор $x \in B_F$. Тогда существует номер $k \in \mathbb{N}_n$, такой что $\|x - x_k\| \leqslant \delta/2$. Тогда

$$\|P(x) - x\| = \|P(x) - P(x_k) + x_k - x\| \leqslant \|P\|\, \|x - x_k\| + \|x_k - x\| \leqslant \delta.$$

Построив проекторы P и Q, рассмотрим оператор $I := 1_E + PQ - Q$. Очевидно, $\|1_E - I\| = \|PQ - Q\| \leqslant \delta\|Q\|$. Следовательно, I — изоморфизм по стандартному трюку с рядами фон Неймана [7, предложение A.2]. Более того, $I^{-1} = \sum\limits_{p=0}^{\infty} (1_E - I)^p$, поэтому

$$\|I^{-1}\| \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \|1_E - I\|^p \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} (\delta\|Q\|)^p = (1 - \delta\|Q\|)^{-1},$$
$$\|I\| \leqslant \|1_E\| + \|I - 1_E\| \leqslant 1 + \delta\|Q\|.$$

Заметим, что $PI = P + P^2Q - PQ = P + PQ - PQ = P$, поэтому для всех $x \in F$ выполнено

$$I(x) = x + P\bigl(Q(x)\bigr) - Q(x) = x + P(x) - x = P(x) = P\bigl(P(x)\bigr) = P\bigl(I(x)\bigr)$$

и $x = (I^{-1}PI)(x)$. Последнее означает, что F содержится в образе ограниченного проектора $R = I^{-1}PI$. Обозначим этот образ через F_0 и рассмотрим биограничение изоморфизма $I_0 = I|_{F_0}^{\operatorname{Im}(P)}$. Так как

$$\|I_0\|\, \|I_0^{-1}\| \leqslant \|I\|\, \|I^{-1}\| \leqslant (1 + \delta\|Q\|)(1 - \delta\|Q\|)^{-1} < 1 + \varepsilon,$$

то $d_{BM}\bigl(F_0, \operatorname{Im}(P)\bigr) < 1 + \varepsilon$. Таким образом, мы показали, что для любого конечномерного подпространства в E существует подпространство F_0 в E, содержащее F, такое что $d_{BM}(F_0, U) < 1 + \varepsilon$ для некоторого $U \in \mathcal{L}_{\infty,1}$. Это значит, что E имеет $\mathcal{L}_{\infty,1}$-локальную структуру. □

Предложение 3.11. *Пусть* $\{(\Omega_\lambda, \Sigma_\lambda, \mu_\lambda)\colon \lambda \in \Lambda\}$ — *семейство пространств с мерой. Тогда банахово пространство* $\bigoplus_\infty \{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)\colon \lambda \in \Lambda\}$ *обладает свойством Данфорда—Петтиса.*

Доказательство. По предложению 3.10 пространство

$$F := \bigoplus\nolimits_0 \{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) \colon \lambda \in \Lambda\}$$

имеет $\mathcal{L}_{\infty,1}$-локальную структуру. Тогда по [11, теорема 5] первое, второе и т. д. сопряжённые пространства пространства F обладают свойством Данфорда—Петтиса. Как следствие, мы получаем, что

$$F^{**} = \Big(\bigoplus\nolimits_0 \{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) \colon \lambda \in \Lambda\}\Big)^{**} \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \bigoplus\nolimits_\infty \{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)^{**} \colon \lambda \in \Lambda\}$$

обладает свойством Данфорда—Петтиса. По [13, предложение B10] каждое L_1-пространство 1-дополняемо в своём втором сопряжённом. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ через P_λ обозначим соответствующий проектор в $L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)^{**}$. Таким образом, $\bigoplus_\infty \{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) \colon \lambda \in \Lambda\}$ 1-дополняемо в $F^{**} \underset{\mathbf{Ban}_1}{\cong} \bigoplus_\infty \{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda)^{**} \colon \lambda \in \Lambda\}$ посредством проектора $\bigoplus_\infty \{P_\lambda \colon \lambda \in \Lambda\}$. Так как F^{**} обладает свойством Данфорда—Петтиса, то по [14, предложение 13.44] это свойство имеет и дополняемое в F^{**} подпространство $\bigoplus_\infty \{L_1(\Omega_\lambda, \mu_\lambda) \colon \lambda \in \Lambda\}$. $\square$

Предложение 3.12. *Пусть E — $\mathscr{L}_\infty$-пространство и Λ — произвольное множество. Тогда банахово пространство $\bigoplus_\infty \{E^* \colon \lambda \in \Lambda\}$ обладает свойством Данфорда—Петтиса.*

Доказательство. Поскольку E — $\mathscr{L}_\infty$-пространство, то E^* дополняемо в некотором L_1-пространстве [22, предложение 7.4], т. е. существует ограниченный линейный проектор $P \colon L_1(\Omega, \mu) \to L_1(\Omega, \mu)$ с образом, изоморфным в $\mathbf{Ban}$ пространству E. В этом случае $\bigoplus_\infty \{E^* \colon \lambda \in \Lambda\}$ дополняемо в $\bigoplus_\infty \{L_1(\Omega, \mu) \colon \lambda \in \Lambda\}$ посредством проектора $\bigoplus_\infty \{P \colon \lambda \in \Lambda\}$. Пространство $\bigoplus_\infty \{L_1(\Omega, \mu) \colon \lambda \in \Lambda\}$ обладает свойством Данфорда—Петтиса по предложению 3.11. Тогда по [14, предложение 13.44] этим свойством обладает и его дополняемое подпространство $\bigoplus_\infty \{E^* \colon \lambda \in \Lambda\}$. $\square$

Теорема 3.13. *Пусть A — банахова алгебра, являющаяся как банахово пространство $\mathscr{L}_1$- или $\mathscr{L}_\infty$-пространством. Тогда топологически проективные, инъективные и плоские A-модули обладают свойством Данфорда—Петтиса.*

Доказательство. Предположим, что A — $\mathscr{L}_1$-пространство. Заметим, что $\mathscr{L}_1$- и $\mathscr{L}_\infty$-пространства обладают свойством Данфорда—Петтиса [10, предложение 1.30]. Теперь результат следует из предложения 3.9.

Предположим, что A является $\mathscr{L}_\infty$-пространством. Тогда такова же и A_+. Пусть J — топологически инъективный A-модуль. Тогда по предложению 2.13 он ретракт

$$\begin{aligned}\mathcal{B}\big(A_+, \ell_\infty(B_{J^*})\big) &\underset{\mathbf{mod}_1\text{-}A}{\cong} \big(A_+ \mathbin{\widehat{\otimes}} \ell_1(B_{J^*})\big)^* \underset{\mathbf{mod}_1\text{-}A}{\cong} \\ &\underset{\mathbf{mod}_1\text{-}A}{\cong} \Big(\bigoplus\nolimits_1 \{A_+ \colon \lambda \in B_{J^*}\}\Big)^* \underset{\mathbf{mod}_1\text{-}A}{\cong} \bigoplus\nolimits_\infty \{A_+^* \colon \lambda \in B_{J^*}\}\end{aligned}$$

в $\mathbf{mod}$-A и тем более в $\mathbf{Ban}$. По предложению 3.12 последний модуль обладает свойством Данфорда—Петтиса. Так как J — его ретракт, то он тоже обладает этим свойством [14, предложение 13.44].

Если F — топологически плоский A-модуль, то F^* топологически инъективен по предложению 2.21. Рассуждения предыдущего абзаца показывают, что тогда F^* обладает свойством Данфорда—Петтиса, и, как следствие, этим свойством обладает сам модуль F.

Пусть P — топологически проективный A-модуль. По предложению 2.26 он топологически плоский, и тогда по рассуждениям предыдущего абзаца P обладает свойством Данфорда—Петтиса. $\square$

Следствие 3.14. *Пусть A — банахова алгебра, являющаяся как банахово пространство $\mathscr{L}_1$- или $\mathscr{L}_\infty$-пространством. Тогда не существует топологически проективного, инъективного или плоского бесконечномерного рефлексивного A-модуля. Тем более не существует метрически проективного, инъективного или плоского бесконечномерного рефлексивного A-модуля.*

Доказательство. По теореме 3.13 любой топологически инъективный A-модуль обладает свойством Данфорда—Петтиса. С другой стороны, не существует бесконечномерного рефлексивного банахова пространства с этим свойством [14, примечание после предложения 13.42]. Итак, мы получили желаемый результат в контексте топологической инъективности. Так как пространство, сопряжённое к рефлексивному, снова рефлексивно, то из предложения 2.21 следует результат для топологической плоскости. Осталось вспомнить, что по предложению 2.26 каждый топологически проективный модуль является топологически плоским. Чтобы доказать последнее утверждение, вспомним, что по предложению $\langle 2.4/2.14/2.23 \rangle$ метрическая $\langle$проективность/инъективность/плоскость$\rangle$ влечёт топологическую $\langle$проективность/инъективность/плоскость$\rangle$. $\square$

Стоит сказать, что в относительной теории существуют примеры рефлексивных бесконечномерных относительно проективных, инъективных и плоских модулей над банаховыми алгебрами, являющимися $\mathscr{L}_1$- или $\mathscr{L}_\infty$-пространствами. Приведём два примера. Первый связан со свёрточной алгеброй $L_1(G)$ локально компактной группы G с мерой Хаара. Эта алгебра является $\mathscr{L}_1$-пространством. В [12, § 6] и [24] было доказано, что для для $1 < p < +\infty$ банахов $L_1(G)$-модуль $L_p(G)$ является относительно $\langle$проективным/инъективным/плоским$\rangle$ тогда и только тогда, когда группа G $\langle$компактна/аменабельна/аменабельна$\rangle$. Заметим, что любая компактная группа аменабельна [23, предложение 3.12.1], и поэтому для компактной группы G модуль $L_p(G)$ будет относительно проективным инъективным и плоским для всех $1 < p < +\infty$. Второй пример связан с алгеброй $c_0(\Lambda)$ для бесконечного множества Λ. Это $\mathscr{L}_\infty$-пространство. Алгебра $c_0(\Lambda)$ относительно бипроективна и аменабельна, поэтому $c_0(\Lambda)$-модули $\ell_p(\Lambda)$ для $1 < p < \infty$ всегда являются относительно проективными, инъективными и плоскими.

Литература

[1] Немеш Н. Т. Метрически и топологически проективные идеалы банаховых алгебр // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99, № 4. — С. 529—539.

[2] Хелемский А. Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.

[3] Хелемский А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. — М.: Наука, 1989.

[4] Хелемский А. Я. Метрическая свобода и проективность для классических и квантовых нормированных модулей // Матем. сб. — 2013. — Т. 204, № 7. — С. 127—158.

[5] Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу. — М.: МЦНМО, 2015.

[6] Штейнер С. М. Топологическая свобода для классических и квантовых нормированных модулей // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. — 2013. — № 9/1 (110). — С. 49—57.

[7] Albiac F., Kalton N. J. Topics in Banach Space Theory. — Springer, 2006. — (Grad. Texts Math.; Vol. 233).

[8] Blecher D. P., Ozawa N. Real positivity and approximate identities in Banach algebras // Pacific J. Math. — 2015. — Vol. 277, no. 1. — P. 1—59.

[9] Blecher D. P., Read C. J. Operator algebras with contractive approximate identities // J. Funct. Anal. — 2011. — Vol. 261, no. 1. — P. 188—217.

[10] Bourgain J. New Classes of $\mathscr{L}_p$-Spaces. — Springer, 1981.

[11] Bourgain J. On the Dunford—Pettis property // Proc. Am. Math. Soc. — 1981. — Vol. 81, no. 2. — P. 265—272.

[12] Dales H. G., Polyakov M. E. Homological properties of modules over group algebras // Proc. London Math. Soc. — 2004. — Vol. 89, no. 2. — P. 390—426.

[13] Defant A., Floret K. Tensor Norms and Operator Ideals. — Elsevier, 1992. — (North-Holland Math. Stud.; Vol. 176).

[14] Fabian M., Habala P. Banach Space Theory. — Springer, 2011.

[15] González M., Gutiérrez J. The Dunford—Pettis property on tensor products // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 2001. — Vol. 131, no. 1. — P. 185—192.

[16] Graven A. W. M. Injective and projective Banach modules // Indag. Math. — 1979. — Vol. 82, no. 1. — P. 253—272.

[17] Grothendieck A. Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L_1 // Can. J. Math. — 1955. — Vol. 7. — P. 552—561.

[18] Helemskii A. Ya. Metric version of flatness and Hahn—Banach type theorems for normed modules over sequence algebras // Stud. Math. — 2011. — Vol. 206, no. 2. — P. 135—160.

[19] Johnson W. B., Lindenstrauss J. Handbook of the Geometry of Banach Spaces. Vol. 2. — Elsevier, 2001.

[20] Köthe G. Hebbare lokalkonvexe Räume // Math. Ann. — 1996. — Vol. 165, no. 3. — P. 181—195.

[21] Lacey H. E. The Isometric Theory of Classical Banach Spaces. — Springer, 1974.

[22] Lindenstrauss J., Pelczynski A. Absolutely summing operators in $\mathscr{L}_p$-spaces and their applications // Stud. Math. — 1968. — Vol. 29, no. 3. — P. 275—326.

[23] Pier J.-P. Amenable Locally Compact Groups. — Wiley—Interscience, 1984.

[24] Racher G. Injective modules and amenable groups // Comment. Math. Helv. — 2013. — Vol. 88, no. 4. — P. 1023—1031.

[25] Ramsden P. Homological Properties of Semigroup Algebras: Thesis. — University of Leeds, 2009.

[26] Stegall C. P., Retherford J. R. Fully nuclear and completely nuclear operators with applications to $\mathscr{L}_1$- and $\mathscr{L}_\infty$-spaces // Trans. Am. Math. Soc. — 1972. — Vol. 163. — P. 457—492.

[27] White M. C. Injective modules for uniform algebras // Proc. London Math. Soc. — 1996. — Vol. 3, no. 1. — P. 155—184.