

# О некоторых дискретных нелинейных динамических системах

**В. С. СЕКОВАНОВ**

*Костромской государственный университет  
им. Н. А. Некрасова*

e-mail: sekovanovvs@yandex.ru

УДК 517.988.5

**Ключевые слова:** нелинейность, аттрактор, неподвижные точки, периодические точки, нелинейное преобразование, преобразование Эно, преобразование пекаря, фрактал, орбита точки.

## Аннотация

В статье рассматриваются спектры преобразований Эно и преобразований пекаря. Исследуется характер неподвижных точек преобразований Эно и хаотичность преобразований пекаря. Рассмотрены аттракторы модифицированных преобразований Эно и модифицированных преобразований пекаря, выделены случаи, когда аттракторы являются фрактальными множествами.

## Abstract

*V. S. Sekovanov, On some discrete nonlinear dynamical systems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 3, pp. 185—199.*

This paper studies the spectrum of the Hénon map and the spectrum of the baker's map. The character of fixed points of the Hénon map and randomness of the baker's map are analyzed. Attractors of the modified Hénon map and the modified baker's map are considered; cases where attractors are fractal sets are selected.

Динамические системы находят в настоящее время многочисленные приложения. Например, аттракторы классического двумерного нелинейного преобразования Эно, порождающего дискретную нелинейную динамическую систему, могут использоваться в качестве математических моделей объектов и процессов, происходящих в природе и обществе. Исследованию нелинейных преобразований, построению с их помощью математических моделей и методике их изучения посвящены многочисленные работы (см., например, [1—11]).

В настоящей работе мы рассмотрим модифицированные преобразования Эно и модифицированные преобразования пекаря.

## 1. Модификация преобразования Эно

Как известно (см., например, [1, 3, 11]) классическое преобразование Эно задаётся формулой

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - ax^2 + y \\ bx \end{pmatrix}, \quad 0 \leq a \leq 2, \quad |b| < 1,$$

и обладает рядом интересных свойств, например:

- 1) переход к хаосу (рис. 1–3 и [1]);
- 2) фрактальная размерность аттрактора равна 1,26 при  $a = 1,4$ ,  $b = 0,3$  (см. [1]);
- 3) при  $a = 1,4$ ,  $b = 0,3$  в системе Эно наблюдаются признаки хаоса.

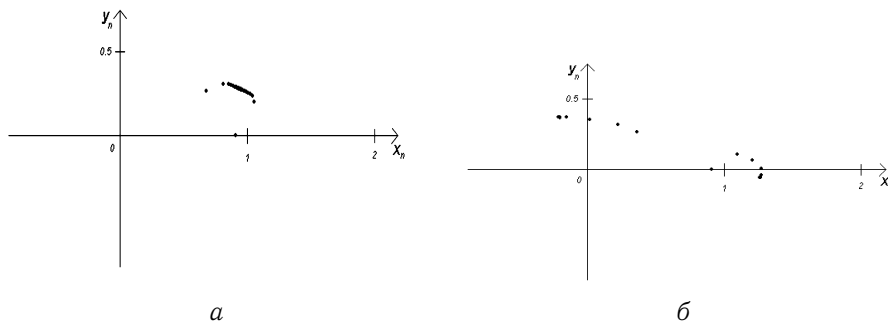


Рис. 1. Орбита точки  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ : а – при  $a = 0,25$ ,  $b = 0,3$ ; б – при  $a = 0,6$ ,  $b = 0,3$

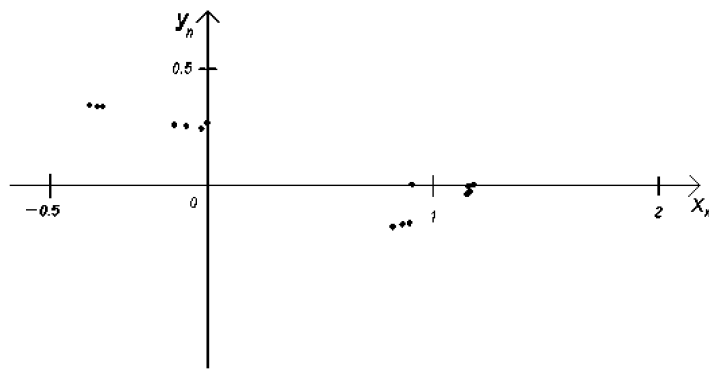


Рис. 2. Орбита точки  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  при  $a = 1$ ,  $b = 0,3$

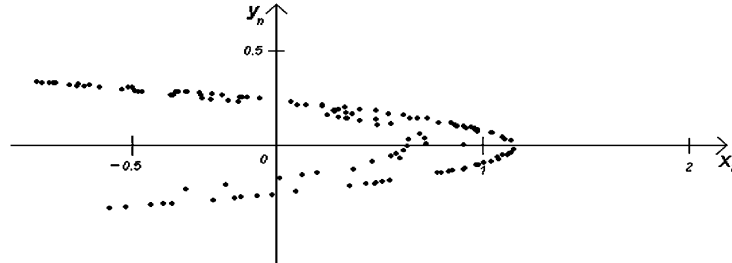


Рис. 3. Признаки хаотичного поведения орбиты точки  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  при  $a = 1,4$ ,  $b = 0,3$

Рассмотрим серию модифицированных преобразований Эно

$$T_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - ax^2 + y^{1/n} \\ bx^n \end{pmatrix}, \quad 0 \leq a \leq 2, \quad |b| < 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При  $n = 1$  мы получаем классическое отображение Эно. Отметим, что при  $n > 1$  обе переменные изменяются по нелинейным законам. Проведём исследование данных отображений в общем виде.

Для нахождения неподвижных точек рассмотрим уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 - ax^2 + y^{1/n} \\ bx^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{cases} 1 - ax^2 + y^{1/n} = x, \\ bx^n = y. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} 1 - ax^2 + b^{1/n}x &= x, \\ ax^2 + (1 - b^{1/n})x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Решая квадратное уравнение, получаем, что

$$x_{\pm n}^* = \frac{-(1 - b^{1/n}) \pm \sqrt{(1 - b^{1/n})^2 + 4a}}{2a}, \quad y_{\pm n}^* = b(x_{\pm n}^*)^n.$$

Таким образом, мы имеем две неподвижные точки при каждом значении  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} x_{+n}^* &= \frac{-(1 - b^{1/n}) + \sqrt{(1 - b^{1/n})^2 + 4a}}{2a}, & y_{+n}^* &= b(x_{+n}^*)^n, \\ x_{-n}^* &= \frac{-(1 - b^{1/n}) - \sqrt{(1 - b^{1/n})^2 + 4a}}{2a}, & y_{-n}^* &= b(x_{-n}^*)^n. \end{aligned}$$

Положим  $\alpha_n = 1 - b^{1/n}$ . Нетрудно убедиться, что  $\alpha_n \in (0, 1)$ . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} x_{+n}^* &= \frac{-\alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 + 4a}}{2a}, & y_{+n}^* &= b(x_{+n}^*)^n, \\ x_{-n}^* &= \frac{-\alpha_n - \sqrt{\alpha_n^2 + 4a}}{2a}, & y_{-n}^* &= b(x_{-n}^*)^n. \end{aligned}$$

Прежде, чем перейти к процессу линеаризации модифицированного преобразования Эно

$$T_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - ax^2 + y^{1/n} \\ bx^n \end{pmatrix},$$

положим

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - ax^2 + y^{1/n} \\ bx^n \end{pmatrix}, \quad 0 \leq a \leq 2, \quad |b| < 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Как известно (см. [1]), элементы матрицы  $A$ , задающей линейное отображение, находятся через значения частных производных

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} & \frac{\partial \tilde{y}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

в неподвижных точках. В нашем случае

$$A_n = \begin{pmatrix} -2xa & \frac{1}{n}(y)^{1/n-1} \\ nb(x)^{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдём собственные значения оператора

$$A_n = \begin{pmatrix} -2xa & \frac{1}{n}(y)^{1/n-1} \\ nb(x)^{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} x = x_{+n}^* &= \frac{-\alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 + 4a}}{2a}, & y = y_{+n}^* &= b(x_{+n}^*)^n, \\ x = x_{-n}^* &= \frac{-\alpha_n - \sqrt{\alpha_n^2 + 4a}}{2a}, & y = y_{-n}^* &= b(x_{-n}^*)^n. \end{aligned}$$

Из уравнения

$$\begin{vmatrix} -2ax_{\pm n}^* - \rho & \frac{1}{n}(y_{\pm n}^*)^{1/n-1} \\ bn(x_{\pm n}^*)^{n-1} & -\rho \end{vmatrix} = 0$$

получим, что

$$\rho^2 + 2ax_{\pm n}^*\rho - \sqrt[n]{b} = 0,$$

поскольку

$$bn(x_{\pm n}^*)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}(y_{\pm n}^*)^{1/n-1} = bn(x_{\pm n}^*)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}(b(x_{\pm n}^*)^n)^{1/n-1} = b^{1/n} = \sqrt[n]{b}.$$

Положим

$$\rho_{\pm n}^i(a) = \frac{-2ax_{\pm n}^* \pm \sqrt{4a^2(x_{\pm n}^*)^2 + 4\sqrt[3]{b}}}{2} = -ax_{\pm n}^* \pm \sqrt{a^2(x_{\pm n}^*)^2 + \sqrt[3]{b}},$$

где  $i = 1, 2$ . Будем считать, что

$$\begin{aligned} \rho_{+n}^1(a) &= -ax_{+n}^* + \sqrt{a^2(x_{+n}^*)^2 + \sqrt[3]{b}}, & \rho_{+n}^2(a) &= -ax_{+n}^* - \sqrt{a^2(x_{+n}^*)^2 + \sqrt[3]{b}}, \\ \rho_{-n}^1(a) &= -ax_{-n}^* + \sqrt{a^2(x_{-n}^*)^2 + \sqrt[3]{b}}, & \rho_{-n}^2(a) &= -ax_{-n}^* - \sqrt{a^2(x_{-n}^*)^2 + \sqrt[3]{b}}. \end{aligned}$$

Исследуем на экстремум каждую из полученных выше функций. Рассмотрим сначала функцию  $\rho_{+n}^1(a)$ . Найдём её производную. Имеем

$$\rho_{+n}^1(a) = -a \frac{-\alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 + 4a}}{2a} + \sqrt{a^2 \left( \frac{-\alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 + 4a}}{2a} \right)^2 + \sqrt[3]{b}}.$$

Преобразовав последнее выражение, получим

$$\begin{aligned} (\rho_{+n}^1(a))' &= \left( \frac{\alpha_n - \sqrt{\alpha_n^2 + 4a}}{2} + \frac{\sqrt{\alpha_n^2 - 2\alpha_n \sqrt{\alpha_n^2 + 4a} + \alpha_n^2 + 4a + 4\sqrt[3]{b}}}{2} \right)' = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\alpha_n^2 + 4a}} + \frac{1}{4\sqrt{\alpha_n^2 - 2\alpha_n \sqrt{\alpha_n^2 + 4a} + \alpha_n^2 + 4a + 4\sqrt[3]{b}}} \cdot \left( 4 - \frac{4\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + 4a}} \right) = \end{aligned}$$

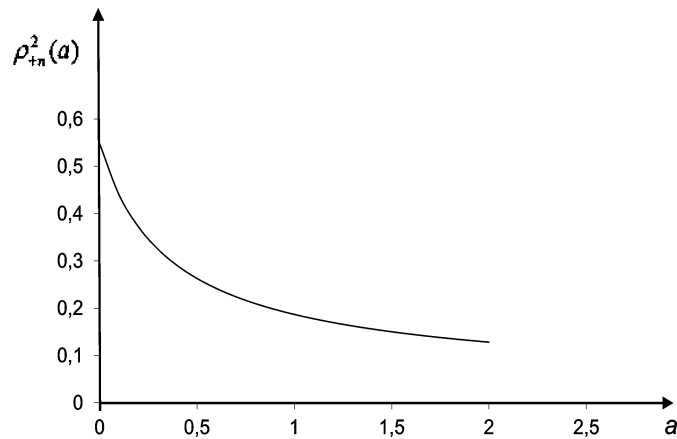


Рис. 4. График функции  $\rho_{+n}^1(a)$  на отрезке  $[0; 2]$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\sqrt{\alpha_n^2 + 4a}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_n^2 - 2\alpha_n\sqrt{\alpha_n^2 + 4a} + \alpha_n^2 + 4a + 4\sqrt[n]{b}}} \cdot \left( \frac{\sqrt{\alpha_n^2 + 4a} - \alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + 4a}} \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\alpha_n^2 + 4a}} \left( \frac{\sqrt{\alpha_n^2 + 4a} - \alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 - 2\alpha_n\sqrt{\alpha_n^2 + 4a} + \alpha_n^2 + 4a + 4\sqrt[n]{b}}} - 1 \right) < 0.
\end{aligned}$$

Пусть, например,  $n = 1$ ,  $a = 1$ ,  $b = 0,3$ . Тогда  $\rho_{+n}^1(1) \approx 0,20$  (рис. 4). Отметим, что  $\rho_{+n}^1(a)$  не превосходит единицы на отрезке  $[0; 2]$ , поскольку

$$\lim_{a \rightarrow 0} \rho_{+n}^1(a) = \sqrt[n]{b} \approx 0,54 < 1$$

и функция  $\rho_{+n}^1(a)$  убывает на отрезке  $[0; 2]$ .

Рассмотрим функцию

$$\rho_{+n}^2(a) = -ax_{+n}^* - \sqrt{a^2(x_{+n}^*)^2 + \sqrt[n]{b}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\rho_{+n}^2(a) &= -a \frac{-\alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 + 4a}}{2a} - \sqrt{a^2 \left( \frac{-\alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 + 4a}}{2a} \right)^2 + \sqrt[n]{b}} = \\
&= \frac{\alpha_n - \sqrt{\alpha_n^2 + 4a}}{2} - \sqrt{\frac{\alpha_n^2 - 2\alpha_n\sqrt{\alpha_n^2 + 4a} + \alpha_n^2 + 4a + 4\sqrt[n]{b}}{4}} = \\
&= \frac{\alpha_n - \sqrt{\alpha_n^2 + 4a}}{2} - \frac{\sqrt{\alpha_n^2 - 2\alpha_n\sqrt{\alpha_n^2 + 4a} + \alpha_n^2 + 4a + 4\sqrt[n]{b}}}{2}.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
(\rho_{+n}^2(a))' &= \left( \frac{\alpha_n - \sqrt{\alpha_n^2 + 4a}}{2} - \frac{\sqrt{\alpha_n^2 - 2\alpha_n\sqrt{\alpha_n^2 + 4a} + \alpha_n^2 + 4a + 4\sqrt[n]{b}}}{2} \right)' = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\alpha_n^2 + 4a}} - \frac{1}{4\sqrt{\alpha_n^2 - 2\alpha_n\sqrt{\alpha_n^2 + 4a} + \alpha_n^2 + 4a + 4\sqrt[n]{b}}} \cdot \left( 4 - \frac{4\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + 4a}} \right) = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\alpha_n^2 + 4a}} - \frac{1}{\sqrt{\alpha_n^2 - 2\alpha_n\sqrt{\alpha_n^2 + 4a} + \alpha_n^2 + 4a + 4\sqrt[n]{b}}} \cdot \left( \frac{\sqrt{\alpha_n^2 + 4a} - \alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + 4a}} \right) = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\alpha_n^2 + 4a}} \left( \frac{\sqrt{\alpha_n^2 + 4a} - \alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 - 2\alpha_n\sqrt{\alpha_n^2 + 4a} + \alpha_n^2 + 4a + 4\sqrt[n]{b}}} + 1 \right) < 0.
\end{aligned}$$

Найдём значение  $a_n$ , при котором  $\rho_{+n}^2(a_n) = -1$ , т. е.

$$-1 = -a_n x_{+n}^* - \sqrt{a_n^2 (x_{+n}^*)^2 + \sqrt[n]{b}}.$$

Имеем

$$1 - 2a_n x_{+n}^* + a_n^2 (x_{+n}^*)^2 = a_n^2 (x_{+n}^*)^2 + \sqrt[n]{b}.$$

Проведя несложные преобразования, получим

$$\begin{aligned} 1 - 2a_n \cdot \frac{-\alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 + 4a_n}}{2a_n} &= \sqrt[n]{b}, \\ 1 + \alpha_n - \sqrt{\alpha_n^2 + 4a_n} &= \sqrt[n]{b}, \\ \alpha_n^2 + 4a_n &= \left(1 + \alpha_n - \sqrt[n]{b}\right)^2, \\ a_n &= \frac{\left(1 + \alpha_n - \sqrt[n]{b}\right)^2 - \alpha_n^2}{4}. \end{aligned}$$

В классическом случае при  $n = 1$ ,  $b = 0,3$ ,  $\alpha_1 = 0,7$  находим, что

$$a_1 = \frac{(1 + 0,7 - 0,3)^2 - 0,49}{4} = 0,3675,$$

что согласуется с результатом, приведённым в [1]. При  $n = 2$ ,  $b = 0,3$ ,  $\alpha_2 \approx 0,45$  имеем

$$a_2 \approx \frac{(1 + 0,45 - 0,55)^2 - 0,2025}{4} \approx 0,152.$$

На рис. 5 видно, что при  $a > a_n$   $|\rho_{+n}^2(a)| > 1$  (здесь рассмотрен случай  $n = 1$ ,  $b = 0,3$ ,  $\alpha_1 = 0,7$ ,  $a_1 = 0,3675$ ).

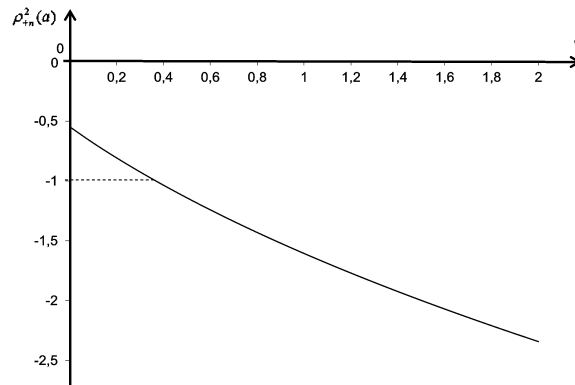


Рис. 5. График функции  $\rho_{+n}^2(a)$  на отрезке  $[0; 2]$

Таким образом, можно сделать вывод, что аттрактором модифицированного преобразования Эно при  $0 < a < a_n$  является устойчивая точка с координатами

$$\begin{pmatrix} x_{+n}^* \\ y_{+n}^* \end{pmatrix},$$

где

$$x_{+n}^* = \frac{-\alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 + 4a}}{2a}, \quad y_{+n}^* = b(x_{+n}^*)^n.$$

При  $a > a_n$  устойчивость точки с координатами

$$\begin{pmatrix} x_{+n}^* \\ y_{+n}^* \end{pmatrix}$$

теряется.

Рассуждая аналогично, можно показать, что вторая неподвижная точка модифицированного преобразования Эно

$$\begin{pmatrix} x_{-n}^* \\ y_{-n}^* \end{pmatrix},$$

где

$$x_{-n}^* = \frac{-\alpha_n - \sqrt{\alpha_n^2 + 4a}}{2a}, \quad y_{-n}^* = b(x_{-n}^*)^n,$$

неустойчива при любом  $a \in (0; 2]$ .

Дадим полученным результатам геометрическую интерпретацию. Заметим, что при достаточно малых по абсолютной величине  $\alpha$  и  $\beta$  приращение значений отображения  $T_n$  выражается в виде

$$\begin{aligned} T_n \begin{pmatrix} x_{+n}^* + \alpha \\ y_{+n}^* + \beta \end{pmatrix} - T_n \begin{pmatrix} x_{+n}^* \\ y_{+n}^* \end{pmatrix} &= \\ &= T_n \begin{pmatrix} x_{+n}^* + \alpha \\ y_{+n}^* + \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{+n}^* \\ y_{+n}^* \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2x_{+n}^*a & \frac{1}{n}(y_{+n}^*)^{1/n-1} \\ nb(x_{+n}^*)^{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Линейное отображение

$$A_{+n} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_{+n}^*a & \frac{1}{n}(y_{+n}^*)^{1/n-1} \\ nb(x_{+n}^*)^{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

имеет два собственных вектора:

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Оно представимо по данным направлениям в виде (рис. 6)

$$A_{+n} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \rho_{+n}^1 \cdot \vec{P}_1, \quad A_{+n} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \rho_{+n}^2 \cdot \vec{P}_2.$$

Как уже отмечалось, модуль  $\rho_{+n}^1(a)$  не превосходит единицы на отрезке  $[0; 2]$ . При  $0 < a < a_n$  имеем  $|\rho_{+n}^2(a)| < 1$ . Таким образом, при  $a \in [0; a_n]$  неподвижная точка

$$\begin{pmatrix} x_{+n}^* \\ y_{+n}^* \end{pmatrix}$$

устойчива (оба направления притягивающие, рис. 6).



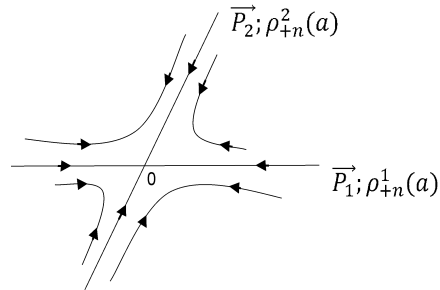


Рис. 6

Положим  $n = 2, b = 0,3$ . Компьютерные эксперименты дают результаты, согласующиеся с нашими аналитическими исследованиями при различных значениях параметра  $a$  в случае  $n = 2, b = 0,3$ . Суть компьютерного эксперимента в том, что рассматривается точка  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  и исследуется её орбита. Оказывается, что данная орбита притягивается к аттрактору, состоящему из нескольких точек (рис. 7:  $a = 0,2, b = 0,3$ ; рис. 8:  $a = 0,4, b = 0,3$ ). На рис. 9 при  $a = 0,94, b = 0,3$  орбита точки  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  притягивается к аттрактору, имеющему фрактальную размерность.

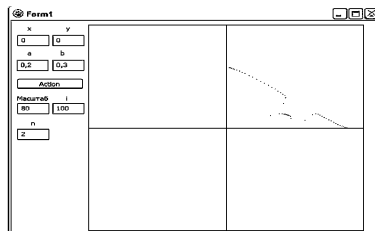


Рис. 7. Орбита точки  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  при  $a = 0,2, b = 0,3$



Рис. 8. Орбита точки  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  при  $a = 0,4, b = 0,3$

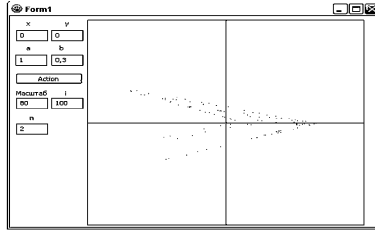


Рис. 9. Наличие признаков хаоса орбиты точки  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  при  $a = 0,94, b = 0,3$

Отметим, что в классическом случае при  $n = 1, a = 1, b = 0,3$  признаков хаоса не наблюдается (см. рис. 2).

## 2. Модификация преобразования пекаря

Рассмотрим модифицированное преобразование пекаря, исследуем его хаотичность и вычислим размерность Минковского его аттрактора. Рассмотрим на множестве  $X = [0; 1] \times [0; 1]$  модифицированное преобразование пекаря

$$T_m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx \pmod 1 \\ \begin{cases} \frac{y}{m}, & 0 \leq x < \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} + \frac{y}{m}, & \frac{1}{m} \leq x < \frac{2}{m} \\ \dots & \dots \\ \frac{m-1}{m} + \frac{y}{m}, & \frac{m-1}{m} \leq x \leq 1 \end{cases} \end{pmatrix}.$$

Данное отображение преобразует вертикальные полосы шириной  $1/m$  в горизонтальные полосы высотой  $1/m$ . На рис. 10 показано модифицированное преобразование пекаря (для  $m = 3$ ), первые три итерации.

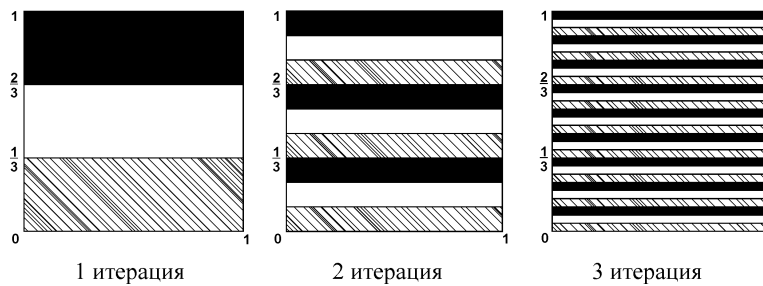


Рис. 10

Найдём неподвижные точки преобразования

$$T_m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим первый случай:  $0 \leq x < 1/m$ . Тогда  $0 \leq mx < 1$ , и мы имеем, что  $mx \bmod 1 = mx$ . Следовательно,  $mx = x$ . Откуда находим, что  $x = 0$ . Следовательно,  $y/m = y$ . Из последнего равенства находим, что  $y = 0$ . Нетрудно проверить, что

$$T_m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим второй случай:  $1/m \leq x < 2/m$ . Тогда  $1 \leq mx < 2$  и  $mx \bmod 1 = mx - 1$ . Таким образом,  $mx - 1 = x$ . Из последнего равенства находим, что  $x = 1/(m-1)$ . Поскольку  $1/m \leq 1/(m-1) < 2/m$ , то  $y = 1/(m-1)$ . Нетрудно проверить, что

$$T_m \begin{pmatrix} \frac{1}{m-1} \\ \frac{1}{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m-1} \\ \frac{1}{m-1} \end{pmatrix}.$$

Рассуждая аналогично, можно найти оставшиеся неподвижные точки. Модифицированное преобразование пекаря удобно исследовать с помощью  $m$ -ичной системы счисления. Действительно, пусть

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots_{(m)}, \quad y = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n \dots_{(m)}.$$

Найдём

$$T_m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots_{(m)} \\ 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n \dots_{(m)} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим  $m$  случаев.

1.  $0 \leq x < 1/m$ . В данном случае  $\alpha_1 = 0$ . Тогда

$$T_m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_m \begin{pmatrix} 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots_{(m)} \\ 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n \dots_{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots_{(m)} \\ 0, \alpha_1 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots_{(m)} \end{pmatrix}.$$

2.  $1/m \leq x < 2/m$ . В данном случае  $\alpha_1 = 1$  ( $1/m_{(10)} = 0,1_m$ ), и мы имеем

$$T_m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T_m \begin{pmatrix} 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots_{(m)} \\ 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n \dots_{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots_{(m)} \\ 0, \alpha_1 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots_{(m)} \end{pmatrix}.$$

Продолжая аналогичные рассуждения, мы получим, что для каждого

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots_{(m)}, \quad y = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n \dots_{(m)},$$

где  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,

$$T_m \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots_{(m)} \\ 0, \alpha_1 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots_{(m)} \end{pmatrix}.$$

Укажем периодические точки преобразования  $T_m$ . Пусть

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots_{(m)}, \quad y = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n \dots_{(m)}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = T_m^{(1)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_n \dots (m) \\ 0, \alpha_1 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots (m) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

тогда и только тогда, когда

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \dots \alpha_1 \dots (m), \quad y = 0, \alpha_1 \alpha_1 \alpha_1 \dots \alpha_1 \dots (m).$$

Пусть

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = T_m^{(2)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \dots \alpha_n \dots (m) \\ 0, \alpha_2 \alpha_1 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots (m) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что  $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  тогда и только тогда, когда

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_2 \dots (m), \quad y = 0, \alpha_2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1 \dots (m).$$

Нетрудно убедиться, что

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = T_m^{(n)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, \alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \dots (m) \\ 0, \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_1 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots (m) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

тогда и только тогда, когда

$$x = 0, (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n)_{(n)}, \quad y = 0, (\alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_2 \alpha_1)_{(n)}.$$

Покажем, что множество периодических точек плотно в множестве  $X = [0; 1] \times [0; 1]$ . Пусть

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X,$$

где

$$u = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots (m), \quad v = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n \dots (m).$$

Рассмотрим последовательность вида

$$\begin{pmatrix} u_{2.1} \\ v_{2.1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{2.2} \\ v_{2.2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_{2.3} \\ v_{2.3} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u_{2.n} \\ v_{2.n} \end{pmatrix}, \dots,$$

такую что

$$\begin{pmatrix} u_{2.1} \\ v_{2.1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, \alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \beta_1 \dots (m) \\ 0, \beta_1 \alpha_1 \beta_1 \alpha_1 \dots (m) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_{2.2} \\ v_{2.2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_4 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, \alpha_1 \alpha_2 \beta_2 \beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \beta_2 \beta_1 \dots (m) \\ 0, \beta_1 \beta_2 \alpha_2 \alpha_1 \beta_1 \beta_2 \alpha_2 \alpha_1 \dots (m) \end{pmatrix}, \dots$$

Нетрудно проверить, что

$$T_m^{(2n)} \begin{pmatrix} u_{2n} \\ v_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{2n} \\ v_{2n} \end{pmatrix}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_m^{(2n)} \begin{pmatrix} u_{2n} \\ v_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Покажем, что преобразование пекаря  $T_m$  обладает существенной зависимостью от начальных условий. Пусть

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in X,$$

где

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots (m), \quad y = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n \dots (m),$$

$X = [0; 1] \times [0; 1]$ . Рассмотрим  $\varepsilon = 1/(m+1)$  и некоторое  $\delta > 0$ . Покажем, что существуют такие точка

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \in X$$

и натуральное число  $n_\delta$ , что

$$\rho \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right) < \delta,$$

но

$$\rho \left( T_m^{(n_\delta)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, T_m^{(n_\delta)} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right) > \frac{1}{m+1}.$$

Действительно, рассмотрим числа

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n_\delta} \gamma \alpha_{n_\delta+2} \alpha_{n_\delta+3} \dots (m),$$

где  $|\gamma - \alpha_{n_\delta+1}| \geq 1$ , и  $\bar{y} = y$ . Будем считать натуральное число  $n_\delta$  настолько большим, что выполняется неравенство

$$\rho \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right) < \delta$$

Вычислим значение отображения  $T_m^{(n_\delta)}$  в точках

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$T_m^{(n_\delta)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, \alpha_{n_\delta+1} \alpha_{n_\delta+2} \dots (m) \\ 0, \alpha_{n_\delta} \alpha_{n_\delta-1} \dots \alpha_1 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots (m) \end{pmatrix},$$

$$T_m^{(n_\delta)} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, \gamma \alpha_{n_\delta+2} \dots (m) \\ 0, \alpha_{n_\delta} \alpha_{n_\delta-1} \dots \alpha_1 \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots (m) \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\rho\left(T_m^{(n_\delta)}\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right), T_m^{(n_\delta)}\left(\begin{matrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{matrix}\right)\right) = \frac{|\gamma - \alpha_{n_\delta+1}|}{m} \geq \frac{1}{m} > \frac{1}{m+1}.$$

Существенная зависимость от начальных условий установлена.

Покажем, что для модернизированного преобразования пекаря  $T_m$  выполняется транзитивность. Пусть  $U, V$  — открытые множества в  $X$ . Пусть

$$x = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots_{(m)}, \quad y = 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots \beta_n \dots_{(m)} —$$

такие вещественные числа, что

$$\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) \in V.$$

Пусть

$$\bar{x} = 0, \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3 \dots \bar{\alpha}_n \dots_{(m)}, \quad \bar{y} = 0, \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\beta}_3 \dots \bar{\beta}_n \dots_{(m)}$$

такие, что

$$\left(\begin{matrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{matrix}\right) \in U.$$

Далее рассмотрим для каждого натурального  $n$  точки

$$\bar{\bar{x}} = 0, \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3 \dots \bar{\alpha}_n \beta_n \beta_{n-1} \dots \beta_1 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots_{(m)}, \quad \bar{\bar{y}} = 0, \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\beta}_3 \dots \bar{\beta}_n \dots_{(m)}.$$

Выберем  $n$  настолько большим, чтобы

$$\left(\begin{matrix} \bar{\bar{x}} \\ \bar{\bar{y}} \end{matrix}\right) \in U.$$

Замечаем, что

$$T_m^{(2n)}\left(\begin{matrix} \bar{\bar{x}} \\ \bar{\bar{y}} \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots_{(m)} \\ 0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \bar{\alpha}_n \bar{\alpha}_{n-1} \dots \bar{\alpha}_1 \bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \bar{\beta}_3 \dots_{(m)} \end{matrix}\right).$$

Следовательно, при  $n \rightarrow \infty$  последовательность

$$\left\{ T_m^{(2n)}\left(\begin{matrix} \bar{\bar{x}} \\ \bar{\bar{y}} \end{matrix}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

стремится к точке

$$\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) \in V.$$

Таким образом, существует такое достаточно большое натуральное число  $n_0$ , что  $T_m^{(2n_0)}(U) \cap V$  непусто. Транзитивность установлена.

Видоизменим отображение  $T_m$ . Положим

$$\bar{T}_m\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right) = \left(\begin{matrix} mx \pmod{1} \\ \left\{ \begin{matrix} \frac{y}{m+1}, & 0 \leq x < \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} + \frac{y}{m+1}, & \frac{1}{m} \leq x < \frac{2}{m} \\ \dots & \dots \\ \frac{m-1}{m} + \frac{y}{m+1}, & \frac{m-1}{m} \leq x \leq 1 \end{matrix} \right. \end{matrix}\right).$$

Положим вновь  $X = [0; 1] \times [0; 1]$ . Обозначим через  $P$  аттрактор, полученный путём бесконечного воздействия отображения  $\bar{T}_m$  на множество  $X$ . Данный аттрактор — бесконечная последовательность горизонтальных линий, расположенных внутри множества  $X$ . Найдём размерность Минковского множества  $P$ . Возьмём  $\varepsilon = 1/(m+1)$ . Заметим, что множество  $\bar{T}_m^{(n)}(X)$  ( $n$ -я итерация множества  $X$ ) будет иметь  $m^n$  полосок шириной  $1/(m+1)^n$ . Одну полоску шириной  $1/(m+1)^n$  можно покрыть минимальным числом  $(m+1)^n$  квадратных клеток со стороной  $1/(m+1)^n$ . Таким образом, минимальное число клеток  $N(\varepsilon)$ , покрывающих  $n$ -ю итерацию  $\bar{T}_m^{(n)}(X)$  множества  $X$ , будет равно  $(m^2 + m)^n$ . Следовательно,

$$\dim_M(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(N(\varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln((m^2 + m)^n)}{\ln((m+1)^n)} = 1 + \log_{m+1} m.$$

Поскольку величина  $1 + \log_{m+1} m$  является дробной, то в данном случае множество  $P$  является фракталом.

Отметим, что  $P$  является самоподобным множеством, размерность самоподобия которого также равна  $1 + \log_{m+1} m$ .

## Литература

- [1] Гринченко В. Т., Мацibuра В. Т., Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. — М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
- [2] Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. — М.: Постмаркет, 2000.
- [3] Малинецкий Г. Г. Математические основы синергетики. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. — М.: КомКнига, 2005.
- [4] Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — М.—Ижевск: Институт компьютерных исследований, РХД, 2010.
- [5] Секованов В. С. О множествах Жюлиа некоторых рациональных функций // Вестн. КГУ им. Н. А. Некрасова. — 2012. — Т. 18, № 2. — С. 23—28.
- [6] Секованов В. С. Отображение «Кошка Арнольда» и методика его изучения // Вестн. КГУ им. Н. А. Некрасова. — 2013. — Т. 19, № 2. — С. 143—149.
- [7] Секованов В. С. Элементы теории фрактальных множеств. — М.: ЛИБРОКОМ, 2013.
- [8] Секованов В. С. Что такое фрактальная геометрия? — М.: ЛЕНАНД, 2016. — (Синергетика: от прошлого к будущему. Сер. 75. Вып. 114).
- [9] Секованов В. С., Козырев С. Б. Преодоление стереотипов мышления при рассмотрении понятия «фрактальная размерность множества» // Вестн. КГУ им. Н. А. Некрасова. — 2006. — Т. 12, № 7. — С. 87—93.
- [10] Шрёдер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. — Ижевск: РХД, 2005.
- [11] Шустер Г. Детерминированный хаос. — М.: Мир, 1988.

