Исследование распространения упругопластической границы в трубе из идеального упругопластического материала под действием динамических нагрузок различного вида

П. В. ТИШИН
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: pvtishin@mech.math.msu.su

УДК 539.375

Ключевые слова: упругость, пластичность, динамика, труба.

Аннотация

В работе проведено исследование динамики распространения границы между областями упругости и пластичности для полого толстостенного цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления, приложенного мгновенно. Дано обоснование точности получаемого численного решения. Рассмотрен более общий режим нагружения трубы.

Abstract

P. V. Tishin, A study of elastic-plastic boundary propagation in a tube of elastic-perfectly plastic material under dynamic loadings of different types, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 3, pp. 201—216.

The research of dynamics of the distribution of the border between areas of elasticity and plasticity for a hollow thick-walled cylinder under the influence of the internal pressure applied instantly is conducted in this work. The proof of the accuracy of the obtained numerical solution is provided. A more general regime of loading a tube is examined.

1. Введение

Задача о нагружении трубы внутренним давлением является классической для механики сплошных сред. Для упругого и пластического случая она рассмотрена, например, в [5—7]. Для упругопластического материала данная задача рассматривалась в [8]. Как правило, задача рассматривается в статической постановке. Влияние мгновенных напряжений на деформирование металлов исследовалось Б. Гопкинсоном [11, 12]. Динамика распространения границы между областями упругости и пластичности была рассмотрена в работе

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 3, с. 201—216.

Е. В. Ломакина [4]. Для того чтобы оценить влияние запаздывания текучести на распространение пластической области, Е. В. Ломакиным было получено численное решение задачи о динамическом распространении границы между областями трубы, находящимися в состоянии упругости и пластичности. Целью данной работы является рассмотрение более общего режима нагружения, а также обоснование точности полученного численного решения.

Рассматривается задача о динамическом деформировании толстостенной трубы под действием внутреннего давления в условиях плоской деформации. В работе принимается модель идеального упругопластического тела.

Запишем уравнения для связи между перемещениями и деформациями, а также дифференциальные уравнения движения в полярной системе координат:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r}\,\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{\theta}, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + F_r = \rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ &\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r}\sigma_{r\theta} + F_\theta = \rho\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Запишем обобщённый закон Гука для изотропной среды:

$$\sigma_{ij} = \lambda I_1(\varepsilon) g_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}, \tag{3}$$

где $I_1(\varepsilon) = \varepsilon_{ii}$ — первый инвариант тензора деформаций.

2. Постановка задачи в модели идеального упругопластического тела

2.1. Упругая деформация

Обозначим через a внутренний радиус трубы, через b — внешний радиус трубы. Будем считать трубу изготовленной из несжимаемого материала и длинной, вследствие чего осевые деформации примем равными нулю ($I_1(\varepsilon) = 0$). По принципу Сен-Венана будем утверждать, что поперечные сечения трубы останутся плоскими и напряжённое состояние в них будет одинаково. Искомые функции зависят только от радиуса r. Тогда из уравнений (1), (2) получим уравнение движения для трубы:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

где $U = u_r$ — размерные переменные. Условие несжимаемости имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} = 0.$$

Запишем деформации:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{U}{r}.$$

Введём безразмерный радиус

$$\bar{r} = \frac{r}{a}.$$

Тогда уравнение движения запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \bar{r}} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\bar{r}} = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} a.$$

Виртуальное перемещение имеет вид

$$U = a\frac{C(t)}{\bar{r}}$$

(из уравнения несжимаемости). Из закона Гука (3) в случае несжимаемости

$$\sigma_r = p + 2\mu\varepsilon_r = 2\mu\varepsilon_r, \quad \sigma_\theta = p + 2\mu\varepsilon_\theta = 2\mu\varepsilon_\theta$$

следует, что

$$\sigma_r - \sigma_\theta = s_r - s_\theta = 2\mu(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta),$$

где s_r и s_θ — девиаторы напряжений. Условие несжимаемости при безразмерном $\bar{r}$ имеет вид

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{U}}{\bar{r}} = 0,$$

где

$$\bar{U} = \frac{U(r,t)}{a} = \frac{C(t)}{\bar{r}}.$$

Запишем деформации:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{a\partial \bar{r}} = -\frac{C(t)}{\bar{r}^2},$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{U}{a\bar{r}} = \frac{C(t)}{\bar{r}^2}.$$

Разность имеет вид

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2\mu(\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) = -4\mu\frac{C(t)}{\bar{r}^2}. \tag{4}$$

Инерционный член имеет вид

$$\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \rho a\frac{C''(t)}{\bar{r}}.$$

Можно перейти к безразмерному времени

$$\bar{t} = \frac{t}{t_*},$$

где

$$t_* = \frac{a}{C_0}, \quad C_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

C_0 — скорость волны сдвига. Тогда

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} a = \rho a^2 \frac{C''(\bar{t})}{\bar{r}} \frac{C_0^2}{a^2} = C_0^2 \rho \frac{C''(\bar{t})}{\bar{r}} = \mu \frac{C''(\bar{t})}{\bar{r}}.$$

Тогда уравнение движения можно представить в виде

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial \bar{r}} = \mu \left[\frac{C''(\bar{t})}{\bar{r}} + 4 \frac{C(\bar{t})}{\bar{r}^3} \right].$$

Запишем граничные условия:

$$\bar{r} = \frac{b}{a} = \bar{r}_*, \quad \sigma_r = 0, \quad \bar{r} = 1, \quad \sigma_r = -q,$$

где q — плотность давления на внутренней поверхности трубы. Запишем начальные условия:

$$U(r,0) = 0 \Longrightarrow C(0) = 0,$$
$$U'(r,0) = 0 \Longrightarrow C'(0) = 0.$$

Интегрируя уравнение движения, используя условие $\sigma_r = 0$ при $\bar{r} = \bar{r}_* = b/a$, получаем распределение σ_r:

$$\sigma_r = \mu \left[\ln\left(\frac{\bar{r}}{\bar{r}_*}\right) C''(\bar{t}) - 2 \left(\frac{1}{\bar{r}^2} - \frac{1}{\bar{r}_*^2} \right) C(\bar{t}) \right].$$

Используя второе граничное условие $\bar{r} = 1$, $\sigma_r = -q$, получаем дифференциальное уравнение для определения функции $C(\bar{t})$:

$$q = \mu \left[(\ln \bar{r}_*) C''(\bar{t}) + 2 \left(1 - \frac{1}{\bar{r}_*^2} \right) C(\bar{t}) \right].$$

Решение при начальных условиях $C(0) = 0$, $C'(0) = 0$ имеет вид

$$C(t) = \frac{q}{2\mu} \frac{\bar{r}_*^2}{\bar{r}_*^2 - 1} (1 - \cos \omega \bar{t}), \tag{5}$$

здесь

$$\omega^2 = \frac{2(\bar{r}_*^2 - 1)}{\bar{r}_*^2 \ln \bar{r}_*}.$$

2.2. Пластическая деформация

Далее задача рассматривается в условиях продолжающегося движения границы раздела между упругой и пластической областями. Из критерия пластичности Треска получаем, что

$$|\sigma_r - \sigma_\theta| = 2K.$$

Решение (5) справедливо при условии $2\mu C(\bar{t}) < K$.

Найдём значение $q = q^*$, при котором на внутренней поверхности трубы начнут развиваться пластические деформации:

$$q^* = K\frac{\bar{r}_*^2 - 1}{\bar{r}_*^2(1-\cos\omega\bar{t})} > \frac{K(\bar{r}_*^2 - 1)}{2\bar{r}_*^2}.$$

При рассмотрении задачи в статической постановке получаем

$$q^* > \frac{K(\bar{r}_*^2 - 1)}{\bar{r}_*^2}$$

(см., например, [3]). Решение, полученное в упругом случае, имеет смысл при $q < q^*$. Будем рассматривать случай $q > q^*$.

Из граничного условия на границе упругой и пластической области, а также из условия несжимаемости материала получаем, что

$$U_{\mathrm{e}}(x) = U_{\mathrm{p}}(x),$$

следовательно,

$$C_{\mathrm{p}} = C_{\mathrm{e}} = C(\bar{t}),$$

где индексы e и p обозначают принадлежность функций к области упругости или пластичность соответственно.

Дифференциальное уравнение движения для пластической области имеет вид

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial\bar{r}} = \mu\frac{C''(\bar{t})}{\bar{r}} + \frac{2K}{\bar{r}}.$$

При действии внутреннего давления пластическая область будет распространяться с внутреннего радиуса. Поэтому используем граничное условие:

$$\bar{r} = 1, \quad \sigma_r = -q.$$

Интегрируя, получаем

$$\sigma_r = -q + [2K + \mu C''(\bar{t})]\ln\bar{r}.$$

Обозначим через $x(\bar{t})$ безразмерный радиус границы пластической и упругой областей. На этой границе напряжение σ_r непрерывно (следствие законов сохранения и условий несжимаемости), поэтому

$$q - [2K + \mu C''(\bar{t})]\ln x = \mu\left[\left(\ln\frac{\bar{r}_*}{x}\right)C''(\bar{t}) + 2\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\bar{r}_*^2}\right)C(\bar{t})\right].$$

Его можно записать в виде

$$\frac{\mu \ln \bar{r}_*}{K} C''(\bar{t}) + \ln x^2 + \frac{2\mu}{K}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\bar{r}_*^2}\right) C(\bar{t}) = \frac{q}{K}.$$

На границе упругой и пластической областей $|\sigma_r - \sigma_\theta| = 2K$. С учётом (4) получаем

$$x^2(t) = \frac{2\mu C(\bar{t})}{K}.$$

Обозначим $x^2(\bar{t}) = y(\bar{t})$. Тогда получим уравнение

$$\frac{\ln \bar{r}_*}{2} y'' + \ln y - \frac{y}{\bar{r}_*^2} = \frac{q}{K} - 1. \tag{6}$$

Начальные условия: t_0 — время начала пластических деформаций на внутреннем радиусе ($\bar{r} = 1$), для каждого значения q/K оно разное. Время t_0 определяется по упругому решению:

$$\frac{K(1 - 1/\bar{r}_*^2)}{q} = \big(1 - \cos(\omega t_0)\big),$$

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \arccos\left(1 - \frac{K}{q}\left(1 - \frac{1}{\bar{r}_*^2}\right)\right).$$

Начальные условия можно записать следующим образом:

$$y(t_0) = \frac{2\mu C(t_0)}{K} = 1, \quad y'(t_0) = \frac{2\mu C'(t_0)}{K}.$$

Уравнение (6) — обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем его один раз. Получим

$$\frac{\ln \bar{r}_*}{4} y'^2 = \frac{q}{K} y + \frac{y^2}{2\bar{r}_*^2} - y \ln y + P_1, \tag{7}$$

где P_1 — константа, определяемая с помощью начальных условий. Имеем

$$\big(1 - \cos(\omega t_0)\big) = \frac{K(1 - 1/\bar{r}_*^2)}{q} = \frac{K\left(\bar{r}_*^2 - 1\right)}{\bar{r}_*^2 q}, \tag{8}$$

$$\omega^2 = \frac{2(\bar{r}_*^2 - 1)}{\bar{r}_*^2 \ln \bar{r}_*},$$

$$C(t_0) = \frac{q}{2\mu} \frac{\bar{r}_*^2}{\bar{r}_*^2 - 1}\big(1 - \cos(\omega t)\big), \tag{9}$$

$$y'(t_0) = \frac{2\mu C'(t_0)}{K}, \quad y(t_0) = 1. \tag{10}$$

Из (9) следует, что

$$C'(t_0) = \frac{q\bar{r}_*^2}{2\mu(\bar{r}_*^2 - 1)} \sqrt{\frac{2(\bar{r}_*^2 - 1)}{\bar{r}_*^2 \ln \bar{r}_*}} \sin(\omega t_0) = \frac{q}{\mu\omega \ln \bar{r}_*} \sin(\omega t_0).$$

Из (9) и (10) получаем, что

$$y'(t_0) = \frac{2q}{K\omega \ln \bar{r}_*} \sin(\omega t_0) = \frac{2q}{K\omega \ln \bar{r}_*} \sqrt{1 - \cos^2(\omega t_0)}. \tag{11}$$

Из (8) выводим, что

$$\cos(\omega t_0) = 1 - \frac{K(\bar{r}_*^2 - 1)}{q r_*^2},$$

$$\cos^2(\omega t_0) = 1 - \frac{2K(\bar{r}_*^2 - 1)}{q\bar{r}_*^2} + \frac{K^2(\bar{r}_*^2 - 1)^2}{q^2\bar{r}_*^4}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) получаем, что

$$y'(t_0) = \frac{2q}{K\omega \ln \bar{r}_*} \sqrt{\frac{2K(\ln \bar{r}_*^2 - 1)}{q\bar{r}_*^2} - \frac{K^2(\bar{r}_*^2 - 1)^2}{q^2\bar{r}_*^4}}.$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\ln \bar{r}_*}{4} y'^2 - \frac{q}{K} - \frac{1}{2\bar{r}_*^2} = \\ &= \frac{q^2}{K^2\omega^2 \ln \bar{r}_*} \left(\frac{2K(\bar{r}_*^2 - 1)}{q\bar{r}_*^2} - \frac{K^2(\bar{r}_*^2 - 1)^2}{q^2\bar{r}_*^4} \right) - \frac{q}{K} - \frac{1}{2r_*^2} = \\ &= \frac{q}{K} - \frac{q}{K} - \frac{\ln \bar{r}_* \omega^2}{4} - \frac{1}{\bar{r}_*^2}, \\ P_1 &= -\frac{\bar{r}_*^2 - 1}{2\bar{r}_*^2} - \frac{1}{2\bar{r}_*^2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Разрешаем уравнение (7) относительно y':

$$y' = \frac{2}{\sqrt{\ln \bar{r}_*}} \sqrt{\frac{q}{K} y + \frac{y^2}{2\bar{r}_*^2} - y \ln y - \frac{1}{2}}. \tag{13}$$

Подставим $y = x^2$:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{\ln \bar{r}_*}} \sqrt{\dfrac{q}{K} + \dfrac{x^2}{2\bar{r}_*^2} - 2\ln x - \dfrac{1}{2x^2}}, \\ x(t_0) = 1. \end{cases}$$

Решение уравнения должно проводиться при параметрах q/K и $\bar{r}_*$, удовлетворяющих условию возникновения пластичности:

$$\frac{q}{K} \geqslant \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{r_*^2} \right).$$

Теперь найдём, при каком значении q/K цилиндр целиком перейдёт в состояние пластичности:

$$
\begin{aligned}
&x' = \frac{1}{\sqrt{\ln \bar{r}_*}} \sqrt{\frac{q}{K} + \frac{x^2}{2\bar{r}_*^2} - 2\ln x - \frac{1}{2x^2}} = 0,\\
&\frac{q}{K} = \xi,\\
&x = \bar{r_*},\\
&\frac{q}{K} = 2\ln \bar{r}_* + \frac{1}{2\bar{r}_*^2} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

При рассмотрении задачи в статической постановке $q/K = 2\ln \bar{r}_*$ [3].

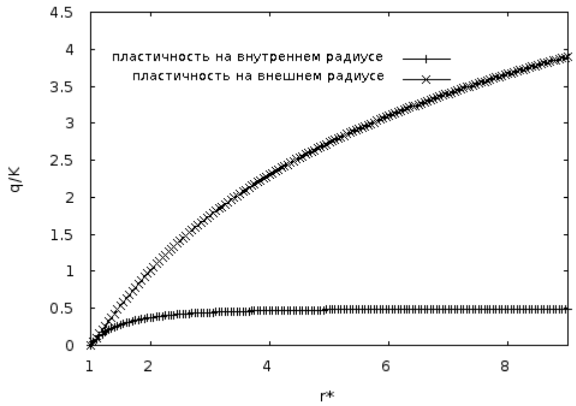

Рис. 1

2.3. Метод решения

Будем решать это дифференциальное уравнение численно, воспользовавшись методом Рунге—Кутты четвёртого порядка с автоматическим выбором шага и оценкой погрешности [2, 10]. Воспользуемся уравнениями метода Рунге—Кутты с коэффициентами, приведёнными в [9]. Рассмотрим задачу Коши

$$
\begin{cases} y' = f(x, y),\\ y(x_0) = y_0. \end{cases}
$$

Приближённое значение в последующих точках вычисляется по формуле

$$
y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),
$$

где

$$
\begin{aligned}
&k_1 = f(x_n, y_n),\\
&k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right),
\end{aligned}
$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right),$$
$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3),$$

h — шаг.

Для оценивания погрешности и выбора шага воспользуемся методом горизонтального выбора шага. Посчитаем значения интеграла в точке за один шаг и за два с учётом погрешности метода, затем найдём их разность. Имеем

$$\Delta = \frac{I_1 - I_{22}}{1 - 1/2^s},$$

где I_1 — значение интеграла, посчитанное за один шаг, I_{22} — значение интеграла, посчитанное за два шага, C — константа, s — порядок метода, $\Delta = Ch^{s+1}$ — главный член погрешности. Выбираем новый шаг h_{new} таким образом, чтобы погрешность на шаге была равна ε ($Ch_{\text{new}}^{s+1} = \varepsilon$):

$$\left(\frac{h}{h_{\text{new}}}\right)^{s+1} = \frac{\Delta}{\varepsilon} = \chi.$$

Будем выбирать новый шаг по формуле:

$$h_{\text{new}} = \frac{0{,}95h}{\sqrt[s+1]{\chi}}.$$

Глобальную погрешность вычисляем по формуле

$$\delta_{k+1} = \delta_k e^{\int_{t_k}^{t_{k+1}} \mu\, ds} + r_k,$$

где δ_k — значение глобальной погрешности к k-му шагу, r_k — локальная погрешность на шаге, μ — максимальное сингулярное число, определяемое как максимальное собственное значение матрицы $(J + J^{\mathrm{T}})/2$, J — якобиан системы. В нашем случае одного уравнения максимальное собственное значение равно

$$\mu = \frac{x/\bar{r}_*^2 - 2/x + 1/x^3}{2\sqrt{\bar{r}_*\big(q/K + x^2/(2\bar{r}_*^2) - 2\ln x - 1/(2x^2)\big)}}.$$

Для того чтобы убедиться в правильности решений, найдём значения функции в трёх различных точках ($t = 2, 5, 11$) с тремя различными погрешностями на шаге.

ε	2	5	11
10^{-7}	2,22802282019651	4,13950553685536	5,46500206374295
10^{-9}	2,22802297613335	4,13950606569059	5,4650026473705
10^{-11}	2,22802298288977	4,1395060800067	5,46500266381324

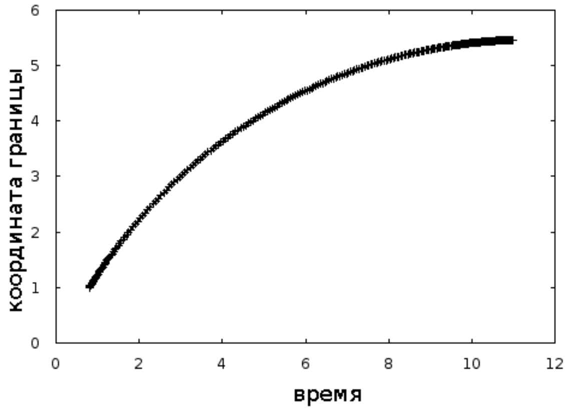

Рис. 2

Значения глобальной погрешности в точке $t = 11$ зависят от максимальной погрешности на шаге.

10^{-7}	10^{-9}	10^{-11}
$1{,}039477084 \cdot 10^{-6}$	$2{,}9190828 \cdot 10^{-8}$	$6{,}95469 \cdot 10^{-10}$

Таким образом, мы показали, что решение данной задачи численно с использованием этого метода возможно.

Численное решение получено при $r_* = 6$ на сетке с шагом 0,01 для различных значений q/K от 2 до 3,5.

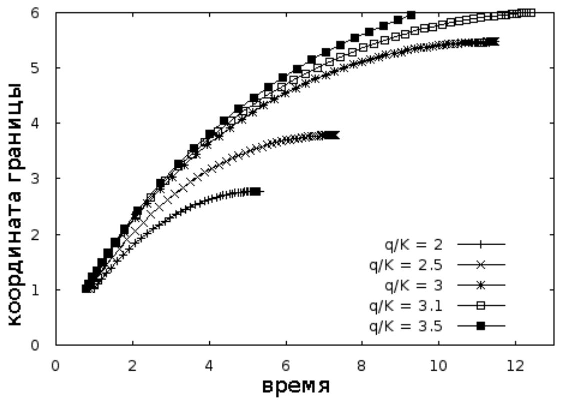

Рис. 3

Теперь рассмотрим ситуацию, когда нагрузка q снимается через время t_*. Граничные условия на границе упругой и пластической областей не изменятся, поэтому уравнение (6) останется верным. Но начальные условия изменятся: $y(t_*) = y_*$, $y'(t_*) = y'_*$, где y_* и y'_* — возведённые в квадрат координата и скорость границы между пластической и упругой областями соответственно в момент прекращения действия нагрузки. Проинтегрировав уравнение (6) с учётом того, что $q = 0$, получим

$$\frac{\ln \bar{r}_*}{4} {y'}^2 = \frac{y^2}{2\bar{r}_*^2} - y \ln y + P_2, \tag{14}$$

где P_2 — константа, определяемая с помощью уже новых начальных условий. Выражения для $y(t)$ в явном виде у нас нет, но есть выражение (13) для $y'(t)$. Подставим его в (14) при $t = t_*$ и найдём выражение для P_2:

$$P_2 = \frac{q}{K} y_* - \frac{1}{2}.$$

В итоге получим

$${y'}^2 = \frac{4}{\ln \bar{r}_*} \left(\frac{q}{K} y_* + \frac{y^2}{2\bar{r}_*^2} - y \ln y - \frac{1}{2} \right). \tag{15}$$

Подставим $y = x^2$:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{\ln \bar{r}_*}} \sqrt{\frac{q x_*^2}{K x^2} + \frac{x^2}{2\bar{r}_*^2} - 2 \ln x - \frac{1}{2x^2}}.$$

На рис. 4 $t_* = \inf$ приведено для того, чтобы показать решение, при котором за время наблюдений нагрузка не снимается.

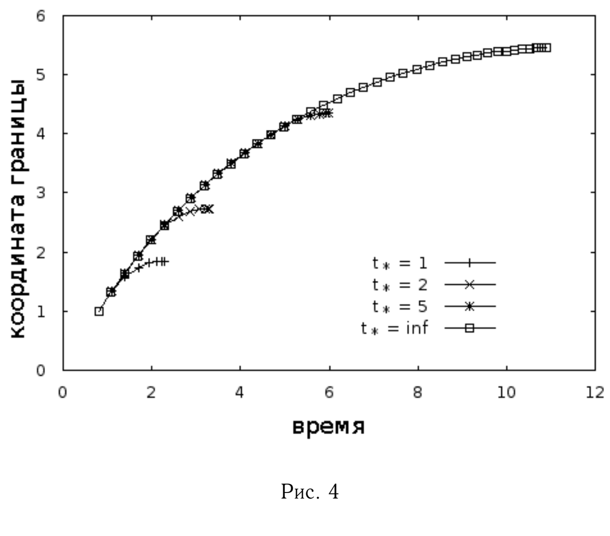

Рис. 4

3. Нелинейный режим нагружения

Изменим схему эксперимента.

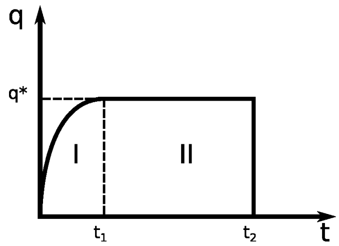

Рис. 5

Нагрузка по параболе возрастает до значения $q*$, достигаемого в момент t_1, затем постоянна до момента t_2, после чего снимается. Найдём решение задачи упругости в области I:

$$q(t) = \mu\left[(\ln \bar{r}_*)C''(\bar{t}) + 2\left(1 - \frac{1}{\bar{r_*}^2}\right)C(\bar{t})\right].$$

Функция нагружения имеет вид

$$q(t) = -\frac{q*}{t_1^2}t^2 + \frac{2q*}{t_1}t.$$

Начальные условия записываются в виде

$$C(0) = 0,$$
$$C'(0) = 0.$$

Получим решение обыкновенного дифференциального уравнения:

$$C_{oo}(t) = \xi\cos(\omega\bar{t}) + \eta\sin(\omega\bar{t}),$$
$$C_{cn}(t) = \frac{q*}{t_1\mu(1 - 1/\bar{r}_*^2)}\left(-\frac{t^2}{2t_1} + t + \frac{1}{t1\omega}\right),$$
$$C^{\mathrm{I}}(\bar{t}) = \frac{q*}{t_1\mu(1 - 1/r_*^2)}\left(-\frac{\cos(\omega\bar{t})}{t_1\omega} - \frac{\sin(\omega\bar{t})}{\omega} - \frac{\bar{t}^2}{2t_1} + t + \frac{1}{t_1\omega}\right).$$

Для определения времени начала пластических деформаций на внутреннем радиусе необходимо найти корни уравнения

$$F(t) = \frac{q*}{t_1\mu(1 - 1/r_*^2)}\left(-\frac{\cos(\omega\bar{t})}{t_1\omega} - \frac{\sin(\omega\bar{t})}{\omega} - \frac{\bar{t}^2}{2t_1} + t + \frac{1}{t_1\omega}\right) - \frac{K}{2\mu}.$$

Это можно сделать численно, воспользовавшись методом хорд [1, 2]. Расчётная формула этого метода следующая:

$$t_{n+1} = t_n - \frac{(t_n - t_0)}{F(t_n) - F(t_0)}F(t_n).$$

Примем начальное приближение для t_0 равным 0, затем на каждом шаге будем принимать за t_0 то значение, для которого верно $F(t) = F''(t)$. Нас будет интересовать ближайший к нулю положительный корень. Если найденный корень будет меньше t_1, будем строить решение нескольких систем дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \bar{t} \in [t_0, t_1), \\ \ln \bar{r}_*(x'^2 + xx'') + 2\ln x - \dfrac{x^2}{\bar{r}_*^2} = \dfrac{-(q^* t^2)/t_1^2 + (2q^* t)/t_1}{K} - 1, \\ x(t_0) = 1, \\ x'(t_0) = \dfrac{q^*}{t_1 K(1 - 1/\bar{r}_*^2)} \left(1 - \cos(\omega t_0) + \dfrac{\sin(\omega t_0)}{t_1} - \dfrac{t_0}{t_1}\right). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{t} \in [t_1, t_2), \\ \ln r_*(x'^2 + xx'') + 2\ln x - \dfrac{x^2}{\bar{r}_*^2} = \dfrac{q^*}{K} - 1, \\ x(t_1) = x_{1^*}, \\ x'(t_1) = x'_{1^*}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_2 \leqslant \bar{t}, \\ \ln r_*(x'^2 + xx'') + 2\ln x - \dfrac{x^2}{\bar{r}_*^2} = -1, \\ x(t_2) = x_{2^*}, \\ x'(t_2) = x'_{2^*}. \end{cases}$$

Теперь найдём функцию $C(t)$ в случае наступления пластичности при достижении нагрузкой области с постоянным давлением:

$$C^{\mathrm{II}}(\bar{t}) = \xi_2 \cos(\omega t) + \eta_2 \sin(\omega t) + \frac{q^* \bar{r}_*^2}{2\mu \bar{r}_*^2 - 1)},$$

$$\begin{cases} C^{\mathrm{II}}(t_1) = C^{\mathrm{I}}(t_1), \\ \big(C^{\mathrm{II}}(t_1)\big)' = \big(C^{\mathrm{I}}(t_1)\big)', \end{cases}$$

$$C^{\mathrm{II}}(\bar{t}) = \frac{q^*}{t_1 \mu (1 - 1/\bar{r}_*^2)} \times$$
$$\times \left(\left(\frac{\cos(\omega t_1)}{\omega t_1} - \frac{1}{\omega t_1}\right)\cos(\omega \bar{t}) + \left(\frac{\sin(\omega t_1)}{\omega t_1} - \frac{1}{\omega}\right)\sin(\omega \bar{t}) + \frac{t_1}{2}\right).$$

Найдём t_0 для второго случая:

$$C(t_0) = \frac{K}{2\mu},$$
$$C(t_0) = \xi\cos\omega t_0 + \eta\sin\omega t_0 + \frac{q\bar{r_*}^2}{2\mu(\bar{r_*}^2 - 1)}.$$

Выразим синус через косинус, перенесём всё, кроме полученного выражения, в левую часть и возведём обе части в квадрат. Получим квадратное уравнение относительно $\cos\omega t_0$ и решим его:

$$\cos\omega t_0 = \frac{A\xi \pm \eta\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - A^2}}{\xi^2 + \eta^2},$$

где

$$A = \frac{K}{2\mu} - \frac{qr_*^2}{2\mu(r_*^2 - 1)}.$$

Выберем минимальное t_0, лежащее в промежутке от t_1 до t_2. Имеем

$$x'(t_0) = \frac{\mu}{K}C'(t_0) = \frac{2\mu}{K}\big(-\omega\xi\sin(\omega t_0) + \eta\omega\cos(\omega t_0)\big),$$
$$x(t_0) = 1.$$

В этом случае начальные условия изменятся ($t_0 \in [t_1, t_2]$):

$$\begin{cases} \bar{t} \in [t_0, t_2), \\ \ln r_*(x'^2 + xx'') + 2\ln x - \dfrac{x^2}{\bar{r}_*^2} = \dfrac{q^*}{K} - 1, \\ x(t_0) = 1, \\ x'(t_0) = \dfrac{q^*}{t_1 K(1 - 1/\bar{r}_*^2)} \times \\ \quad \times \left(-\left(\dfrac{\cos(\omega t_1)}{t_1} - \dfrac{1}{t_1}\right)\sin(\omega t_0) + \left(\dfrac{\sin(\omega t_1)}{t_1} - 1\right)\cos(\omega t_0)\right), \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_2 \leqslant \bar{t}, \\ \ln r_*(x'^2 + xx'') + 2\ln x - \dfrac{x^2}{\bar{r}_*^2} = -1, \\ x(t_2) = x_{2*}, \\ x'(t_2) = x'_{2*}. \end{cases}$$

Получим численное решение наборов систем дифференциальных уравнений. Воспользуемся методом Рунге—Кутты четвёртого порядка с автоматическим выбором шага. Поскольку изменились только граничные условия, соображения о точности решения остаются справедливыми. Для обоих случаев можно получить точное решение задачи упругости.

Приведём численное решение при $t_2 = 5$, $q_* = 6$, $K = 3$, $r_* = 6$, $\mu = 1$ для разных значений t_1 при максимальной локальной погрешности решения $1e-5$.

Автор благодарит Е. В. Ломакина, А. Н. Сахарова и А. В. Муравлёва.

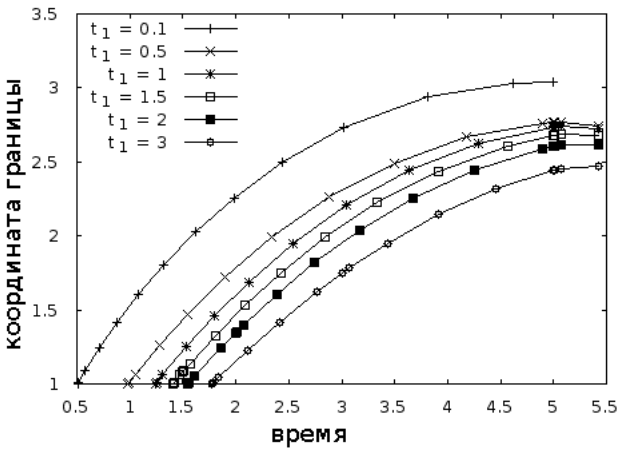

Рис. 6

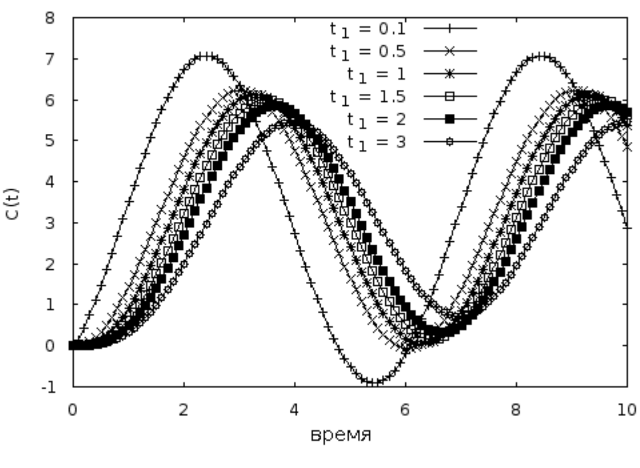

Рис. 7

Литература

[1] Арушанян И. О., Корнев А. А., Чижонков Е. В. Задачи и упражнения по курсу «Численные методы». — М.: Изд-во ЦПИ при мех.-мат. фак-те МГУ, 2006.

[2] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Бином, 2008.

[3] Качанов Л. М. Основы теории пластичности. — М.: Наука, 1969.

[4] Ломакин Е. В. Влияние запаздывания текучести на распространение пластической области в толстостенной трубе под действием динамической нагрузки // Изв. АН СССР. МТТ. — 1968. — № 2. — С. 168—171.

[5] Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. — М.: Физматгиз, 1962.

[6] Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твёрдого тела. — М.: Наука, 1988.

[7] Седов Л. И. Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1970.

[8] Соколовский В. В. Упруго-пластическое напряжённое состояние трубы, находящейся под действием равномерных внутреннего и внешнего давлений // Прикл. матем. и мех. — 1943. — Т. 7. — С. 74—80.

[9] Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику. — М.: Изд-во МФТИ, 1994.

[10] Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — М: Мир, 1990.

[11] Hopkinson B. The effects of momentary stress in metals // Proc. Roy. Soc. London. — 1904. — Vol. 74. — P. 498—506.

[12] Hopkinson B. A method of measuring the pressure produced in the detonation of high explosives or by the impact of bullets // Trans. Roy. Philos. Soc. Ser. A. — 1914. — Vol. 213. — P. 437—456.