

## О диагонализации матриц в произвольном поле

**В. Д. ШМАТКОВ**

Рязанский государственный  
радиотехнический университет  
e-mail: shmatkov-vadim@yandex.ru

УДК 512.64

**Ключевые слова:** подобие матриц, функции от матриц.

### Аннотация

В данной работе приведён простой способ диагонализации матриц в произвольном поле, с помощью которого можно вычислять функции от матриц.

### Abstract

*V. D. Shmatkov, On diagonalization of matrices in an arbitrary field, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 3, pp. 233–239.*

The paper presents a simple way for diagonalization of matrices in an arbitrary field, with which one can calculate functions of matrices.

Пусть  $P$  — поле. Обозначим через  $M_n(P)$  множество всех матриц над полем  $P$ . Пусть  $A \in M_n(P)$ .

Рассмотрим характеристический многочлен матрицы  $A$  и для него поле разложения  $F$ . Будем считать, что  $A \in M_n(F)$ . По аналогу теоремы Шура существует обратимая матрица  $T \in M_n(F)$ , такая что  $T^{-1}AT = B$  — верхнетреугольная матрица. Пусть  $f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , — множество многочленов над полем  $F$ , каждый из которых имеет корень 0. Рассмотрим поле рациональных дробей  $F(X)$  (поле частных многочленов). Будем считать, что  $B \in M_n(F(X))$ .

Рассмотрим диагональную матрицу

$$d(f_i(x)) = \begin{pmatrix} f_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Пусть  $B(f_i(x)) = B + d(f_i(x))$ . Ясно, что  $B(f_i(x)) \in M_n(F(X))$ .

Рассмотрим такие  $f_i(x)$ , что все элементы  $B(i, i) + f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , попарно различны. Тогда у матрицы  $B(f_i(x))$  все собственные значения попарно различны и её можно диагонализировать, т. е. существует обратимая  $S \in M_n(F(X))$ , такая что

$$S^{-1}B(f_i(x))S = \begin{pmatrix} B(1, 1) + f_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(n, n) + f_n(x) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Если  $x = 0$ , то правая часть равенства (1) равна

$$\begin{pmatrix} B(1,1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(n,n) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, после сопряжения в левой части и подстановки  $x = 0$  левая часть равенства (1) станет равна

$$\begin{pmatrix} B(1,1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(n,n) \end{pmatrix}.$$

Ясно, что

$$B(f_i(x)) = S \begin{pmatrix} B(1,1) + f_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(n,n) + f_n(x) \end{pmatrix} S^{-1}. \quad (2)$$

Возведём матрицу в левой части равенства (2) в степень  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$B^k(f_i(x)) = S \begin{pmatrix} (B(1,1) + f_1(x))^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (B(n,n) + f_n(x))^k \end{pmatrix} S^{-1}. \quad (3)$$

Далее,

$$\begin{aligned} B^k &= B^k(f_i(x)) \Big|_{x=0} = \\ &= S \begin{pmatrix} (B(1,1) + f_1(x))^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (B(n,n) + f_n(x))^k \end{pmatrix} S^{-1} \Big|_{x=0}. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначение  $\Big|_{x=0}$  показывает, что после вычисления выражения мы подставляем значение  $x = 0$ .

Пусть

$$f(B) = a_0 + a_1 B + \dots + a_k B^k -$$

матричный многочлен. Тогда из (4) следует, что

$$f(B) = S \begin{pmatrix} f(B(1,1) + f_1(x)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(B(n,n) + f_n(x)) \end{pmatrix} S^{-1} \Big|_{x=0}. \quad (5)$$

Здесь

$$f(B(i, i) + f_i(x)) = \sum_{j=0}^k a_j (B(i, i) + f_i(x))^j -$$

соответствующий многочлен для  $B(i, i) + f_i(x)$ .

Если ряд

$$f(B) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i B^i$$

сходится по какой-то матричной норме, то

$$f(B) = S \begin{pmatrix} f(B(1, 1) + f_1(x)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(B(n, n) + f_n(x)) \end{pmatrix} S^{-1} \Big|_{x=0}. \quad (6)$$

Вспоминая, что  $A = TBT^{-1}$ , и считая, что  $T_1 = TS$ , имеем

$$f(A) = T_1 \begin{pmatrix} f(B(1, 1) + f_1(x)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(B(n, n) + f_n(x)) \end{pmatrix} T_1^{-1} \Big|_{x=0}. \quad (7)$$

Если  $F$  — поле действительных или комплексных чисел и переменная  $x$  принимает значения в  $F$ , то

$$f(A) = \lim_{x \rightarrow 0} T_1 \begin{pmatrix} f(B(1, 1) + f_1(x)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(B(n, n) + f_n(x)) \end{pmatrix} T_1^{-1}. \quad (8)$$

Формулы (7), (8) позволяют вычислить функцию от матрицы, если функция представляется степенным матричным рядом или многочленом.

Хорошо известно, что ряды

$$e^A = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!}, \quad \cos A = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p A^{2p}}{(2p)!}, \quad \sin A = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p A^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

сходятся для всех  $A$ . Поэтому формулы (7), (8) можно, в частности, применить для вычислений  $e^A$ ,  $\sin A$ ,  $\cos A$ .

Обозначим через

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \times \dots \times (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

минимальный многочлен матрицы  $A$ . (Здесь  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  — все различные характеристические числа матрицы  $A$ .) Степень этого многочлена равна

$$m = \sum_{k=1}^s m_k.$$

Существует единственный многочлен  $r(\lambda)$  степени  $m$ , принимающий те же значения на спектре  $A$ , что и  $f$ , т. е.

$$r(\lambda_k) = f(\lambda_k), \quad r'(\lambda_k) = f'(\lambda_k), \quad \dots, \quad r^{m_k-1}(\lambda_k) = f^{m_k-1}(\lambda_k) \quad (k = 1, 2, \dots, s).$$

Этот многочлен называется интерполяционным многочленом Лагранжа—Сильвестра для функции  $f(\lambda)$  на спектре  $A$  (см. [1, гл. 5, § 1, 2]). Как показано в [1, гл. 5, § 4], это определение  $f$  совпадает с определением, данным нами для степенных матричных рядов и многочленов.

Будем считать, что функция  $f$  вместе с производными до  $f^{m_k-1}$  определена в окрестности  $\lambda_k$ . Тогда, используя результаты [1, с. 102, утверждения 2, 3], имеем

$$\begin{aligned} f \left( T_1 \begin{pmatrix} B(1,1) + f_1(x) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B(n,n) + f_n(x) \end{pmatrix} T_1^{-1} \right) = \\ = T_1 \begin{pmatrix} f(B(1,1) + f_1(x)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(B(n,n) + f_n(x)) \end{pmatrix} T_1^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f(A) = \lim_{x \rightarrow 0} T_1 \begin{pmatrix} f(B(1,1) + f_1(x)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(B(n,n) + f_n(x)) \end{pmatrix} T_1^{-1}. \quad (9)$$

Как показано в [1, гл. 5, § 5], при таком определении  $f$  для обратимой матрицы

$$(\sqrt{A})^2 = A, \quad e^{\ln A} = A, \quad AA^{-1} = E.$$

**Пример 1.** Пусть дана действительная матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Диагонализируем

$$B(f_i(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1+x & 2 \\ 0 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$$

с помощью матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{x} & \frac{1-2x}{x^2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

столбцы которой являются собственными векторами матрицы  $B(f_i(x))$ . Имеем

$$f(B) = \lim_{x \rightarrow 0} \begin{pmatrix} f(1) & \frac{f(1+x)-f(1)}{x} & \frac{2f(1)(x-1)+f(1+x)+f(1-x)(1-2x)}{x^2} \\ 0 & f(1+x) & \frac{f(1+x)-f(1-x)}{x} \\ 0 & 0 & f(1-x) \end{pmatrix}.$$

Если  $f$  дифференцируема, то

$$f(B) = \begin{pmatrix} f(1) & f'(1) & f''(1) + 2f'(1) \\ 0 & f(1) & 2f'(1) \\ 0 & 0 & f(1) \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.** Пусть дана действительная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B,$$

где

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Диагоналируем

$$B(f_i(x)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2+x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{pmatrix},$$

с помощью матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

столбцы которой являются собственными векторами матрицы  $B(f_i(x))$ . По формуле (6) имеем

$$f(B) = \left( \begin{array}{ccc} f(2) & \frac{f(2+x) - f(2)}{x} & 0 \\ 0 & f(2+x) & 0 \\ 0 & 0 & f(2-x) \end{array} \right) \Big|_{x=0} =$$

$$= \left( \begin{array}{ccc} f(2) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2+x) - f(2)}{x} & 0 \\ 0 & f(2) & 0 \\ 0 & 0 & f(2) \end{array} \right).$$

Если  $f$  дифференцируема, то

$$f(B) = \begin{pmatrix} f(2) & f'(2) & 0 \\ 0 & f(2) & 0 \\ 0 & 0 & f(2) \end{pmatrix}, \quad f(A) = \begin{pmatrix} f(2) - 2f'(2) & f'(2) & 0 \\ -4f'(2) & 2f'(2) + f(2) & 0 \\ -2f'(2) & f'(2) & f(2) \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что ряд Тейлора функции  $f = e^{At}$  сходится для всех  $At$ . Поэтому

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{2t} - 2te^{2t} & -2te^{2t} & 0 \\ -4te^{2t} & 2te^{2t} + e^{2t} & 0 \\ -2te^{2t} & te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

**Пример 3.** Пусть

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$B \in M_n(F)$ ,  $F = \text{GF}(2)$ . Диагонализируя матрицу

$$B(f_i(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 0 \\ 0 & 0 & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

с помощью матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

имеем

$$f(B) = \left( \begin{array}{ccc} f(1) & \frac{f(1+x) - f(1)}{x} & \frac{f(1) - f(1+x^2)}{x^2} \\ 0 & f(1+x) & 0 \\ 0 & 0 & f(1+x^2) \end{array} \right) \Big|_{x=0}.$$

Например,

$$B^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## **Литература**

- [1] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
- [2] Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука, 1970.
- [3] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989.

