Обратная задача магнитоэлектроэнцефалографии корректна: она имеет единственное решение, устойчивое относительно возмущений

А. С. ДЕМИДОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Московский физико-технический институт
e-mail: demidov.alexandre@gmail.com

УДК 517.958:57

Ключевые слова: обратная задача, уравнения Максвелла, интегральное уравнение первого рода.

Аннотация

Вопреки бытующему уже несколько десятилетий мнению о некорректности обратной МЭЭГ-задачи (см., например, работу Д. Шелтро и Э. Кутсиаса в «Journal of Applied Physics» (т. 94, вып. 8, с. 5307—5315)), в заметке показано, что эта задача абсолютно корректна: она имеет единственное решение, но в специальном классе функций, отличном от рассмотренных биофизиками. Решение имеет вид $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{p}_0\delta|_{\partial Y}$, где $\mathbf{q}_0$ — обычная функция, определённая в области Y, занимаемой головным мозгом, а $\mathbf{p}_0\delta|_{\partial Y}$ — δ-функция на границе области Y с некоторой плотностью $\mathbf{p}_0$. Более того, оператор этой задачи осуществляет изоморфизм соответствующих функциональных пространств. Этот результат был получен благодаря тому, что: 1) за основу были взяты уравнения Максвелла; 2) был сделан переход к уравнениям для потенциалов магнитного и электрического полей; 3) была применена теория эллиптических краевых задач для псевдодифференциальных операторов с целочисленным индексом факторизации. Это позволило найти правильный функциональный класс решений соответствующего интегрального уравнения первого рода. А именно: решение имеет сингулярный пограничный слой в виде дельта-функции (с некоторой плотностью) на границе коры головного мозга. С точки зрения МЭЭГ-задачи это означает, что искомые токовые диполи $\mathbf{q}$ сосредоточены и в коре головного мозга.

Abstract

A. S. Demidov, The inverse problem of magneto-electroencephalography is well-posed: it has a unique solution that is stable with respect to perturbations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 4, pp. 17—22.

Contrary to the already prevailing for several decades opinion about the incorrectness of the inverse—MEEG problems (see, for example, the paper of D. Sheltraw and E. Coutsias in *Journal of Applied Physics*, **94**, No. 8, 5307—5315 (2003)), in this note it is shown that this problem is absolutely well posed: it has a unique solution, but in a special class of functions (different from those considered by biophysicists). The solution has the form $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{p}_0\delta|_{\partial Y}$, where $\mathbf{q}_0$ is an ordinary function defined in the domain of the region Y occupied by the brain, and $\mathbf{p}_0\delta|_{\partial Y}$ is a δ-function on the boundary of the domain Y with a certain density $\mathbf{p}_0$. Moreover, the operator of this problem realizes

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 4, с. 17—22.

an isomorphism of the corresponding function spaces. This result was obtained due to the fact that: (1) Maxwell's equations are taken as a basis; (2) a transition was made to the equations for the potentials of the magnetic and electric fields; (3) the theory of boundary value problems for elliptic pseudodifferential operators with an entire index of factorization is used. This allowed us to find the correct functional class of solutions of the corresponding integral equation of the first kind. Namely: the solution has a singular boundary layer in the form of a delta function (with some density) at the boundary of the domain. From the point of view of the MEEG problem, this means that the sought-for current dipoles are also concentrated in the cerebral cortex.

1. Магнитоэлектроэнцефалография — это неинвазивный метод визуализации мозга, который обеспечивает превосходное временно́е разрешение (порядка 1 *мс*). *Прямая* МЭЭГ-задача — это задача вычисления электромагнитного поля по некоторым явным формулам, включая формулу Био—Савара, исходя из априорных данных о распределении так называемых токовых диполей $\mathbf{q}\colon Y \to \mathbb{R}^3$ (токовых дипольных моментов [4]), обусловленных синхронной активностью больших масс нейронов мозга. В противоположность прямой задаче *обратная* МЭЭГ-задача — это поиск распределения токовых диполей на основании данных измерения электромагнитного поля в конечном множестве точек поверхности X, являющейся внутренней частью шлема, надетого на голову пациента [4, 7]. Отметим, что соответствующее сверхслабое магнитное поле измеряется с помощью сверхчувствительного квантового магнитометра.

Будем исходить из уравнений Максвелла

$$\begin{gathered}\partial_t\mathcal{B}(\mathbf{x},t)+\operatorname{rot}\mathcal{E}(\mathbf{x},t)=0,\quad \operatorname{div}\mathcal{B}(\mathbf{x},t)=0,\\ -\varepsilon(\mathbf{x})\partial_t\mathcal{E}(\mathbf{x},t)+\operatorname{rot}\mathcal{H}(\mathbf{x},t)=\mathbf{J}^v(\mathbf{x})+\mathbf{J}^p(\mathbf{x}),\quad \operatorname{div}\mathcal{D}(\mathbf{x},t)=\rho.\end{gathered}\tag{1}$$

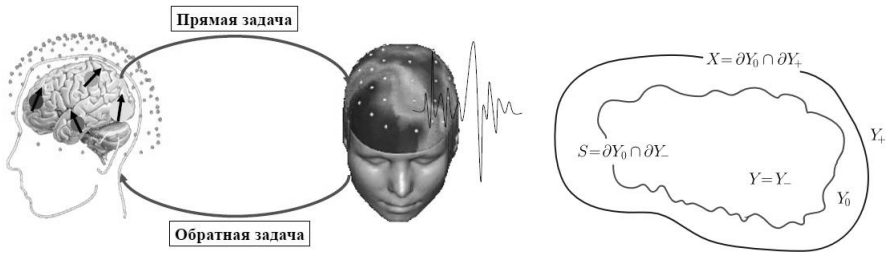
Напомним, что поля $\mathcal{H}$ и $\mathcal{E}$ называются напряжённостями магнитного и электрического полей, $\mathcal{B}=\mu\mathcal{H}$, $\mathcal{D}=\varepsilon\mathcal{E}$. Параметры $\mu=\mu(\mathbf{x})>0$ и $\varepsilon=\varepsilon(\mathbf{x})>0$ — это магнитная и диэлектрическая проницаемости. Параметр $\mathbf{J}^v=\sigma\mathcal{E}$ — это так называемый объёмный или, как говорят, омический ток (точнее, его плотность); он подчиняется закону Ома, связанному с коэффициентом электропроводности $\sigma=\sigma(\mathbf{x})\geqslant 0$, который предполагается не зависящим от t. Объёмный ток является результатом действия макроскопического электрического поля на носители заряда в проводящей среде мозга. Нейронную же активность вызывает так называемый первичный (говорят также «основной») ток $\mathbf{J}^p$. Он возникает в результате диэлектрической поляризации и является совокупностью движения зарядов внутри или вблизи клетки мозга. Объёмную плотность этих зарядов обозначают через ρ. Частицы, обладающие этими зарядами, являются частью молекул. Они вытесняются из своих положений равновесия под действием внешнего электрического поля, не покидая молекулу, в которую они входят.

Заметим, что физически оправданы такие условия: $\sigma|_{Y_\pm}=\sigma_\pm$, $\sigma|_{Y_0}=\sigma_0$ и

$$\sigma_+=0 \ \text{ в } \ Y_+,\quad \sigma_0>0 \ \text{ в } \ Y_0,\quad \sigma_->\sigma_0 \ \text{ в } \ Y_-,\tag{2}$$

где $Y=Y_-$ (т. е. область мозга), Y_0 — область, занятая тканями, расположенными между $Y=Y_-$ и областью $Y=Y_+$, соответствующей воздуху вокруг

головы (череп и т. д.). Эти области представлены схематически в правой части рисунка. В левой части рисунка показано, что на поверхности головы можно зарегистрировать магнитное поле $\mathcal{B}$ и электрическое поле $\mathcal{E}$, индуцированное токовыми диполями $\mathbf{q}$, которые обусловлены синхронной активностью больших масс нейронов мозга. В обратной задаче требуется найти дипольное распределение токовых диполей $\mathbf{q}$, исходя из данных измерения полей $\mathcal{B}$ и $\mathcal{E}$.



Отметим, что для биосред $\mu \approx \mu_0$ (см. `http://ilab.xmedtest.net/?q=node/3521`), где μ_0 — магнитная проницаемость вакуума. Поэтому мы предполагаем, что $\mu = 1$ (впрочем, обобщение на случай $\mu \neq \mathrm{const}$ не вызывает особых осложнений).

Существенным является обстоятельство, особо отмеченное в фундаментальной работе [4]. Оно касается соотношения частот ω колебаний электромагнитного поля $\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$, $\mathcal{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ и частоты электрических колебаний в клетках мозга. Анализ в [4] (на с. 426) показывает, что для системы (1) оправдано квазистатическое приближение. Там же дополнительно отмечается, что «токовый диполь $\mathbf{q}$, аппроксимирующий локализованный первичный ток, является широко используемой концепцией в нейромагнетизме... В приложениях ЭЭГ и МЭГ используется токовый диполь как эквивалентный источник однонаправленного первичного тока, который может распространяться на несколько квадратных сантиметров коры».

В результате мы приходим к следующим уравнениям:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = (\sigma\mathbf{E} + \mathbf{q}), \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho. \tag{3}$$

2. Как известно,

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \iff \mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \iff \mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}. \tag{4}$$

Так как $\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = \rho$, то

$$-\varepsilon\Delta\Phi - \nabla\varepsilon\nabla\Phi = \rho. \tag{5}$$

Согласно физическим представлениям потенциал Φ поля $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ постоянен на бесконечности и потому может считаться равным нулю. По аналогичным причинам векторный потенциал $\mathbf{A}$ поля $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ также выбирается равным

нулю на бесконечности. Так как

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{A}) = \nabla \operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A},$$

то

$$\Delta\mathbf{A} = -\operatorname{rot}\mathbf{B} + \nabla\operatorname{div}\mathbf{A}.$$

Но $\operatorname{rot}\mathbf{B} = \sigma\mathbf{E} + \mathbf{q}$ и $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Поэтому

$$\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\mathbf{q}(\mathbf{x}) + \nabla[\sigma(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x}) + \operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{x})] - \Phi(\mathbf{x})\nabla\sigma(\mathbf{x}). \tag{6}$$

Векторный потенциал $\mathbf{A}$ определяется с точностью до потенциального поля. Действительно,

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*) = 0 \overset{(4)}{\Longleftrightarrow} \mathbf{A} - \mathbf{A}^* = \nabla\varphi,$$

т. е.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^* + \nabla\varphi,$$

где φ — некоторая функция. Принимая в качестве φ решение уравнения

$$\Delta\varphi = -\operatorname{div}\mathbf{A}^* - \sigma\Phi,$$

подчинённое условию $\varphi|_\infty = 0$ (поскольку $\mathbf{A}^*|_\infty = 0$, $\Phi|_\infty = 0$), находим, что

$$\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \text{где} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}(\mathbf{x}) + \Phi_\rho(\mathbf{x})\nabla\sigma(\mathbf{x}). \tag{7}$$

Полагая $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, где $\Delta a_j(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$, $a_j(\infty) = 0$, т. е.

$$a_j(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{x}|},$$

получаем, что

$$\Delta\mathbf{A}(\mathbf{x}) \overset{(7)}{=} -\int\limits_Y \mathbf{F}(\mathbf{y})\Delta\mathbf{a}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = \Delta\Big[-\int\limits_Y \mathbf{F}(\mathbf{y})\mathbf{a}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\Big].$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_Y \mathbf{F}(\mathbf{y})\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,d\mathbf{y} \overset{(7)}{=} \frac{1}{4\pi}\int\limits_Y \big(\mathbf{q}(\mathbf{y}) + \Phi(\mathbf{y})\nabla\sigma(\mathbf{y})\big)\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,d\mathbf{y},$$

так как уравнение Лапласа имеет единственное решение, обращающееся в нуль на бесконечности (как уже было отмечено, $\mathbf{A}|_\infty = 0$). Если функция σ, подчинённая условию (2), кусочно-постоянна, то

$$\int\limits_Y \frac{\Phi(\mathbf{y})\nabla\sigma(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,d\mathbf{y} = (\sigma_+ - \sigma_0)\mathbf{n}_X\int\limits_X \frac{\Phi_0(\mathbf{y}_X)\,d\mathbf{y}_X}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}_X|} + (\sigma_0 - \sigma_-)\mathbf{n}_S\int\limits_S \frac{\Phi_0(\mathbf{y}_S)\,d\mathbf{y}_S}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}_S|},$$

где $\mathbf{n}_X$ и $\mathbf{n}_S$ — единичные внешние нормали к $X = \partial Y_0 \cap \partial Y_+ = \partial Y_+$ и $S = \partial Y_0 \cap \partial Y_- = \partial Y$.

3. В результате приходим к интегральному уравнению первого рода

$$\mathfrak{I}\colon \mathbf{q} \mapsto \mathfrak{I}\mathbf{q} \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_Y \frac{\mathbf{q}(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Y, \tag{8}$$

правая часть которого, задаваемая формулой

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 4\pi\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \int\limits_Y \frac{\Phi(\mathbf{y})\nabla\sigma(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,d\mathbf{y},$$

полностью определяется полями $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ и $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$.

Теорема 1 (см. [1]). *Уравнение* (8) *однозначно разрешимо, и его решение имеет вид*

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_0(\mathbf{y}')\delta|_{\partial Y},$$

где $\delta|_{\partial Y}$ *—* δ*-функция на* ∂Y*, а* $\mathbf{q}_0 \in C^\infty(\bar{Y})$*,* $\mathbf{p}_0 \in C^\infty(\partial Y)$*, если* $\mathbf{f} \in C^\infty(\bar{Y})$[1].

Если имеются данные измерений полей $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ и $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ в конечном наборе точек $\mathbf{x}_k \in X$, мы можем в какой-то мере их восстановить, решая задачу минимизации функционала

$$G(\Phi, \mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{K} (\|\mathbf{E}(\mathbf{x}_k) + \nabla\Phi|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k}\|^2 + \|\mathbf{B}(\mathbf{x}_k) - \operatorname{rot}\mathbf{A}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_k}\|^2) \tag{9}$$

при условии $\operatorname{rot}\mathbf{E} \stackrel{(3)}{=} 0$, $\operatorname{div}\mathbf{B} \stackrel{(3)}{=} 0$. Конечно, в любом случае эти поля будут восстановлены с некоторой ошибкой. Её минимизация может быть достигнута с помощью методов оптимальной интерполяции (см., например, [3, 5, 6]).

Отметим также, что в [2] устанавливается связь между решением $\mathbf{q}$ интегрального уравнения (8) и решением $\mathbf{u}$ интегрального уравнения второго рода

$$\eta^2\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \int\limits_Y \frac{\mathbf{u}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,d\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Y, \quad \eta > 0. \tag{10}$$

Теорема 2. (см. [2]) *Решение уравнения* (10) *представимо в виде*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_0(\mathbf{x}) + \frac{1}{\eta}\mathbf{p}_0(\mathbf{y}')\varphi\, e^{-\mathbf{y}_n/\eta} + r_0(\mathbf{x}, \eta), \tag{11}$$

где $\|r_0\|_{L^2} \leqslant C\sqrt{\eta}$*,* $\mathbf{y}_n$ *— расстояние по нормали от* $\mathbf{x}$ *к* $\mathbf{y}' \in \Gamma$*,* $\varphi \in C^\infty(\bar{Y})$*,* $\varphi \equiv 1$ *в малой окрестности* ∂Y *и* $\varphi \equiv 0$ *вне несколько большей окрестности.*

Формула (11) может служить основой для численного решение задачи (8).

[1]При меньшей гладкости функции $\mathbf{f}$ компоненты решения $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{p}_0$ также менее гладкие. Точные классы гладкости в терминах пространств Соболева приведены в [1]. Там же доказывается, что оператор $\mathfrak{I}$, заданный формулой (8), реализует изоморфизм соответствующих функциональных пространств.

Автор благодарен М. А. Галченковой и Т. А. Строгановой за полезные обсуждения, а также К. Ю. Осипенко за информацию о работах [3, 5, 6], посвящённых вопросам интерполяции.

Работа частично поддерживается РФФИ (гранты 15-01-03576, 16-01-00781, 17-01-00809).

Литература

[1] Демидов А. С. Эллиптические псевдодифференциальные краевые задачи с малым параметром при старшем операторе // Матем. сб. — 1973. — Т. 91 (133), № 3 (7). — С. 421—444.

[2] Demidov A. S. Sur les problèmes elliptiques pseudo-différentiels, à petit paramètre dans l'opérateur principal // Singular Perturbations and Boundary Layer Theory. Proc. of the Conf. Held at the Ecole Centrale de Lyon, December 8—10, 1976 / C.-M. Brauner, B. Gay, J. Mathieu, eds. — Berlin: Springer, 1977. — (Lect. Notes Math.; Vol. 594). — P. 108—122.

[3] Gaffney P. W., Powell M. J. D. Optimal interpolation // Numerical Analysis. Proc. of the Dundee Conf. on Numerical Analysis, 1975 / G. A. Watson, ed. — Berlin: Springer, 1976. — (Lect. Notes Math.; Vol. 506). — P. 90—99.

[4] Hämäläinen M., Hari R., Ilmoniemi R. J., Knuutila J., Lounasmaa O. V. Magnetoencephalography — theory, instrumentation, and applications to noninvasive studies of the working human brain // Rev. Modern Phys. — 1993. — Vol. 65, no. 2. — P. 413—497.

[5] Micchelli C. A., Rivlin T. J., Winograd S. The optimal recovery of smooth functions // Numer. Math. — 1976. — Vol. 26. — P. 191—200.

[6] Osipenko K. Yu. Optimal recovery of linear functionals and operators // Commun. Appl. Math. Comput. — 2016. — Vol. 30, no. 4. — P. 459—482.

[7] Stroganova T. A., Posikera I. N., Prokofiev A. O., Morozov A. A., Obukhov Yu. V., Morozov V. A. EEG alpha activity in the human brain during perception of an illusory kanizsa square // Neuroscience Behavioral Physiology. — 2011. — Vol. 41, no. 2. — P. 130—139.