Теорема об отделимости для невыпуклых множеств и её приложения

Г. Е. ИВАНОВ
Московский физико-технический институт (государственный университет)
e-mail: g.e.ivanov@mail.ru

М. С. ЛОПУШАНСКИ
Московский физико-технический институт (государственный университет), Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук
e-mail: masha.alexandra@gmail.com

УДК 517.982.252

Ключевые слова: слабо выпуклые множества, квазишар, многозначное отображение.

Аннотация

Доказаны теоремы об отделимости сферой или (в более общем случае) границей сдвига квазишара двух замкнутых непересекающихся подмножеств банахова пространства, одно из которых прокс-регулярно или слабо выпукло, а другое является слагаемым шара или квазишара. Полученные теоремы об отделимости использованы для доказательства теорем о непрерывности пересечения двух многозначных отображений, значения одного из которых прокс-регулярны или слабо выпуклы (вообще говоря, невыпуклы), а другого — выпуклы и являются слагаемым шара или квазишара. Как следствие получена теорема о непрерывности многозначного отображения, значения которого ограничены графиками двух функций.

Abstract

G. E. Ivanov, M. S. Lopushanski, A separation theorem for nonconvex sets and its applications, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 4, pp. 23—65.

We prove theorems on separation by sphere or (in a general case) by the boundary of a shifted quasiball of two closed disjoint subsets of a Banach space one of which is prox-regular or weakly convex and the other is a summand of a ball or quasiball. These separation theorems are applied for proving some theorems on the continuity of the intersection of two multifunctions, the values of one of them being prox-regular or weakly convex (nonconvex, in general), and the values of the other being convex and summands of a ball or quasiball. As a corollary, a theorem on the continuity of a multifunction with values bounded by the graphs of two functions is obtained.

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 4, с. 23—65.

1. Введение

Теорема Хана—Банаха об отделимости двух выпуклых непересекающихся множеств гиперплоскостью широко известна в функциональном анализе. На этой теореме основана теория двойственности, имеющая многочисленные применения в методах оптимизации и других областях математики. Легко заметить, что два невыпуклых непересекающихся множества, вообще говоря, нельзя отделить гиперплоскостью. Однако в случае, когда одно из этих множеств прокс-регулярно, а другое — слагаемое шара достаточно малого радиуса, эти множества можно отделить сферой.

Пусть E — вещественное банахово пространство. Через $\operatorname{int} X$, ∂X и $\overline{X}$ будем обозначать соответственно внутренность, границу и замыкание множества $X \subset E$. Значения функционала $p \in E^*$ на векторе $x \in E$ будем обозначать $\langle p, x\rangle$. *Шаром* радиуса $r \geqslant 0$ с центром в точке $a \in E$ называется множество

$$\mathfrak{B}_r(a) = \{x \in E\colon \|x - a\| \leqslant r\}.$$

Через $\mathfrak{B}_r$ будем обозначать шар с центром в нулевом элементе пространства E: $\mathfrak{B}_r = \mathfrak{B}_r(0)$. *Суммой Минковского* множеств $A \subset E$ и $B \subset E$ называется множество

$$A + B = \{a + b\colon a \in A,\ b \in B\}.$$

Множество $C \subset E$ называется *слагаемым* множества $M \subset E$, если существует множество $C_1 \subset E$, такое что $C + C_1 = M$.

Расстояние от точки $x \in E$ до множества $A \subset E$ определяется равенством

$$\varrho(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|. \tag{1.1}$$

Множеством наилучших приближений или *метрической проекцией* точки $x \in E$ на множество $A \subset E$ называется множество

$$P(x, A) = \{a \in A\colon \|x - a\| = \varrho(x, A)\}. \tag{1.2}$$

Через $\Omega_R(A)$ будем обозначать *R-слой* вокруг $A \subset E$:

$$\Omega_R(A) = \{x \in E\colon 0 < \varrho(x, A) < R\}.$$

Рассматриваемые в настоящей работе понятия прокс-регулярных и слабо выпуклых множеств восходят к понятию множеств положительной достижимости, введённому Г. Федерером [16]. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *множеством положительной достижимости*, если $\operatorname{reach}(A) > 0$, где

$$\operatorname{reach}(A) = \sup\{R > 0 \mid \text{множество } P(x, A) \text{ одноэлементно для всех } x \in \Omega_R(A)\}.$$

Такие множества также называются *множествами с чебышёвским слоем* [1].

Ж.-Ф. Виаль [23] ввёл другое определение слабо выпуклого множества. Легко заметить, что замкнутое множество A в топологическом векторном пространстве выпукло тогда и только тогда, когда для любых двух точек $x_0, x_1 \in A$ существует точка $x \in [x_0; x_1] \cap A$, не совпадающая с точками x_0 и x_1. Заменяя в этом условии отрезок $[x_0; x_1]$ некоторым специальным множеством $D_R(x_0, x_1)$, которое называется сильно выпуклым отрезком, получаем определение R-слабой выпуклости по Виалю [23].

Ф. Кларк, Р. Штерн и П. Воленски [13], обобщив понятие множеств положительной достижимости на гильбертово пространство, ввели понятие *проксимально гладких множеств* как множеств $A \subset E$, для которых функция расстояния $\varrho(\cdot, A)$ непрерывно дифференцируема на множестве $\Omega_R(A)$ при некотором $R > 0$. Р. Поликвин и Р.-Т. Рокафеллар [21] ввели понятие прокс-регулярности в конечномерном евклидовом пространстве, затем это понятие рассматривалось для множеств из гильбертова пространства. В [22] было показано, что в гильбертовом пространстве этот класс совпадает с классом проксимально гладких множеств. В [10, 11] Ф. Бернард, Л. Тибо и Н. Златева исследовали *равномерно R-прокс-регулярные множества* в банаховом пространстве E, т. е. такие множества $A \subset E$, что

$$P(a + Rz, A) = \{a\} \quad \text{для всех } a \in A \text{ и } z \in N(a, A), \text{ таких что } \|z\| < 1,$$

где

$$N(a, A) = \{z \in E \colon \text{найдётся } t > 0, \text{ такое что } a \in P(a + tz, A)\} \text{ —}$$

конус проксимальных нормалей к множеству A в точке a.

Модуль выпуклости пространства E определяется равенством

$$\delta(t) = \inf\left\{1 - \frac{\|x + y\|}{2} \colon x, y \in \mathfrak{B}_1,\ \|x - y\| \geqslant t\right\}, \quad t \in [0, 2]. \tag{1.3}$$

Понятие модуля выпуклости введено Дж. Кларксоном [14]. Пространство E называется *равномерно выпуклым*, если $\delta(t) > 0$ при всех $t \in (0, 2]$.

Модулем гладкости пространства E называется (см. [15])

$$\beta(t) = \sup\left\{\frac{\|x + y\| + \|x - y\|}{2} - 1 \colon x, y \in E,\ \|x\| = 1,\ \|y\| \leqslant t\right\}, \quad t \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Пространство E называется *равномерно гладким*, если

$$\lim_{t \to +0} \frac{\beta(t)}{t} = 0.$$

В [2] было показано, что в равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве E класс R-прокс-регулярных множеств совпадает с классом R-слабо-выпуклых по Виалю тогда и только тогда, когда единичный шар банахова пространства является порождающим множеством (гильбертово пространство является примером пространства с порождающим единичным шаром). Свойства R-слабо-выпуклых по Виалю множеств в пространствах типа $C(Q)$ (которые не являются ни равномерно выпуклыми, ни равномерно гладкими) рассматривались в [7].

2. Теоремы об отделимости и о непрерывности пересечения для прокс-регулярных множеств

Теорема 2.1 (об отделимости). *Пусть E — равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, $0 < r < R$, множество $A \subset E$ замкнуто и равномерно R-прокс-регулярно, множество $C \subset E$ выпукло, замкнуто и является слагаемым шара $\mathfrak{B}_r$, $\operatorname{int} C \neq \varnothing$, $A \cap \operatorname{int} C = \varnothing$. Тогда (рис. 1) существуют точки $a, c \in E$, такие что*

$$\operatorname{int} C \subset \operatorname{int} \mathfrak{B}_r(c) \subset \operatorname{int} \mathfrak{B}_R(a) \subset E \setminus A.$$

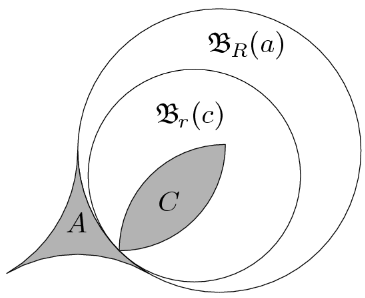

Рис. 1

Теорема 2.1 обобщает теорему 1.18.2, полученную в [3] для случая гильбертова пространства. Далее мы покажем, что теорема 2.1 может быть использована, например, для получения достаточных условий непрерывности пересечения двух многозначных отображений.

Напомним, что *отклонением* множества $A \subset E$ от множества $B \subset E$ называется величина

$$h^+(A, B) = \sup_{a \in A} \varrho(a, B). \tag{2.1}$$

Расстоянием Хаусдорфа между множествами $A \subset E$ и $B \subset E$ называется величина

$$h(A, B) = \max\{h^+(A, B), h^+(B, A)\}.$$

Пусть (T, ϱ_T) — метрическое пространство. Многозначное отображение $A \colon T \to 2^E$ называется *непрерывным* (по Хаусдорфу) в точке $t_0 \in T$, если $h\big(A(t), A(t_0)\big) \to 0$ при $t \to t_0$.

Пусть на метрическом пространстве (T, ϱ_T) заданы многозначные отображения $A \colon T \to 2^E$ и $C \colon T \to 2^E$, непрерывные в точке $t_0 \in T$, и пусть $F(t) = A(t) \cap C(t) \neq \varnothing$ для любого $t \in T$. Даже в случае, когда значения многозначных отображений $A(\cdot)$ и $C(\cdot)$ — выпуклые компакты, многозначное отображение $F(\cdot)$ может не быть непрерывным в точке t_0. В [8] М. В. Балашов и Д. Реповш показали, что если значения многозначного отображения $A(\cdot)$

выпуклы и замкнуты, а значения многозначного отображения $C(\cdot)$ равномерно выпуклы, то многозначное отображение $F(\cdot)$ будет непрерывным в точке t_0. Те же авторы в [9] показали, что для пространств с модулем выпуклости второго порядка в этой теореме условие выпуклости значений многозначного отображения $A(\cdot)$ можно ослабить, заменив его некоторым условием в терминах модуля невыпуклости, введённого авторами.

Следующая теорема, справедливая в любом равномерно выпуклом и равномерно гладком банаховом пространстве (а не только для пространств с модулем выпуклости второго порядка), даёт достаточное условие непрерывности пересечения двух многозначных отображений в терминах условия прокс-регулярности.

Теорема 2.2 (о непрерывности пересечения многозначных отображений). *Пусть E — равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, (T, ϱ_T) — метрическое пространство, многозначные отображения $A\colon T \to 2^E$ и $C\colon T \to 2^E$ непрерывны в точке $t_0 \in T$. Пусть $0 < r < R$ и для любого $t \in T$ множество $A(t) \subset E$ замкнуто и равномерно R-прокс-регулярно, множество $C(t) \subset E$ выпукло, замкнуто и является слагаемым шара $\mathfrak{B}_r$, $F(t) = A(t) \cap C(t) \neq \varnothing$. Тогда многозначное отображение $F\colon T \to 2^E$ непрерывно в точке t_0.*

Далее мы рассмотрим понятие слабо выпуклых множеств относительно квазишара, т. е. относительно несимметричной полунормы. Это понятие обобщает понятие прокс-регулярности множеств. Будет доказана теорема 3.1 об отделимости для пространств с несимметричной полунормой. С помощью этой теоремы будет доказана 3.2 о непрерывности пересечения многозначных отображений (доказательство теоремы 3.2 опирается на лемму 7.3, которая, в свою очередь, использует теорему 3.1). Из теорем 3.1, 3.2, в частности, следуют теоремы 2.1 и 2.2.

Результат, близкий к теореме 2.2, получен в [18, теорема 4.3] другим способом. Важно, что квазишар может быть неограниченным множеством, например надграфиком выпуклой функции. Последнее обстоятельство позволяет применить полученные результаты к исследованию непрерывности многозначного отображения, ограниченного графиками функций (см. теорему 4.3).

3. Теоремы об отделимости и о непрерывности пересечения для слабо выпуклых множеств

Пусть E — банахово пространство. *Квазишаром* $M \subset E$ называется выпуклое замкнутое множество M, $M \neq E$, для которого $0 \in \operatorname{int} M$.

Функцией Минковского квазишара $M \subset E$ называется функция

$$\mu_M\colon E \to [0; +\infty),$$

заданная равенством

$$\mu_M(x) = \inf\{t > 0\colon x \in tM\} \quad \text{для всех} \quad x \in E.$$

Функция $\mu\colon E \to \mathbb{R}$ называется *сублинейной*, если она *положительно однородна*:

$$\mu(\lambda x) = \lambda\mu(x) \quad \text{для любых } x \in E \text{ и } \lambda \geqslant 0$$

и *субаддитивна*:

$$\mu(x+y) \leqslant \mu(x) + \mu(y) \quad \text{для любых} \quad x, y \in E.$$

Сублинейная неотрицательная функция называется *несимметричной полунормой*.

Замечание 3.1. Непрерывная функция $\mu\colon E \to [0; +\infty)$ является несимметричной полунормой тогда и только тогда, когда она является функцией Минковского некоторого квазишара.

Замечание 3.2. Для любого квазишара $M \subset E$ и любого вектора $x \in E$ неравенство $\mu_M(x) \leqslant 1$ эквивалентно включению $x \in M$, а равенство $\mu_M(x) = 1$ — включению $x \in \partial M$.

Пусть $M \subset E$ — квазишар. *M-расстоянием* от множества $C \subset E$ до множества $A \subset E$ называется величина

$$\varrho_M(C, A) = \inf_{\substack{a \in A\\ c \in C}} \mu_M(c - a). \tag{3.1}$$

В частности, M-расстояние от точки $x \in E$ до множества $A \subset E$ определяется равенством

$$\varrho_M(x, A) = \inf_{a \in A} \mu_M(x - a). \tag{3.2}$$

Для любого квазишара $M \subset E$ обозначим

$$\sigma_M = \inf_{x \in \partial M} \|x\|. \tag{3.3}$$

Замечание 3.3. Для любого квазишара $M \subset E$ справедливы неравенство $\sigma_M > 0$ и включение $\mathfrak{B}_{\sigma_M} \subset M$.

Замечание 3.4. Функция Минковского любого квазишара $M \subset E$ удовлетворяет условию Липшица с константой $1/\sigma_M$ на E. Поэтому для любого множества $A \subset E$ функция $\varrho_M(\cdot, A)$ удовлетворяет условию Липшица на E с той же константой.

M-проекцией точки $x \in E$ на множество $A \subset E$ называется множество

$$P_M(x, A) = A \cap (x - \varrho_M(x, A)M). \tag{3.4}$$

Конусом проксимальных нормалей к множеству $A \subset E$ в точке $a \in A$ относительно квазишара $M \subset E$ называется конус

$$N_M(a, A) = \{z \in E\colon \text{найдётся } t > 0, \text{ такое что } a \in P_M(a + tz, A)\}. \tag{3.5}$$

Обозначим

$$N_M^1(a, A) = \{z \in N_M(a, A)\colon \mu_M(z) = 1\}. \tag{3.6}$$

Множество $A \subset E$ называется *слабо выпуклым относительно квазишара* $M \subset E$, если

$$a + z \notin A + \operatorname{int} M \quad \text{для любых } a \in A \text{ и } z \in N_M^1(a, A). \tag{3.7}$$

Замечание 3.5. Если $R > 0$, $M = \mathfrak{B}_R$, то для любых $x \in E$, $A \subset E$ справедливы равенства

$$\mu_M(x) = \frac{\|x\|}{R}, \quad \varrho_M(x, A) = \frac{\varrho(x, A)}{R}, \quad P_M(x, A) = P(x, A), \quad N_M(x, A) = N(x, A).$$

Множество $M \subset E$ называется *строго выпуклым*, если для любых двух различных точек $x, y \in M$ справедливо включение $(x + y)/2 \in \operatorname{int} M$.

Замечание 3.6. Если $R > 0$, $M = \mathfrak{B}_R$ — строго выпуклый шар, то класс множеств, слабо выпуклых относительно квазишара M совпадает с классом равномерно R-прокс-регулярных множеств.

Множество $M \subset E$ называется *ограниченно равномерно выпуклым*, если для любых положительных чисел R и ε выполнено неравенство $\delta_M(\varepsilon, R) > 0$, где

$$\delta_M(\varepsilon, R) = \sup \left\{ \delta \in \left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right] : \text{из } \|x - y\| \geqslant \varepsilon \text{ следует, что } \mathfrak{B}_\delta\left(\frac{x + y}{2}\right) \subset M \text{ для всех } x, y \in M \cap \mathfrak{B}_R \right\}. \tag{3.8}$$

Замечание 3.7. Если множество $M \subset E$ является ограниченно равномерно выпуклым, то оно строго выпукло.

Замечание 3.8. Если $M = \mathfrak{B}_r$, то при $R \geqslant r > 0$, $\varepsilon > 0$ справедливо равенство $\delta_M(\varepsilon, R) = \delta(\varepsilon)$. Поэтому шар в равномерно выпуклом пространстве E является ограниченно равномерно выпуклым.

Замечание 3.9. Ограниченно равномерно выпуклое множество может не быть ограниченным. Например, если E — равномерно выпуклое банахово пространство, то множество

$$\{(x, y) \in E \times \mathbb{R} \colon y \geqslant \|x\|^2\}$$

является ограниченно равномерно выпуклым в пространстве $E \times \mathbb{R}$ с нормой $\|(x, y)\| = \|x\| + |y|$.

Квазишар $M \subset E$ называется *ограниченно равномерно гладким*, если

$$\lim_{t \to +0} \frac{\beta_M(t, R)}{t} = 0 \quad \text{для всех} \quad R > \sigma_M, \tag{3.9}$$

где число σ_M определено равенством (3.3) и

$$\beta_M(t, R) = \sup \left\{ \frac{\mu_M(x + ty) + \mu_M(x - ty)}{2} - 1 \colon x \in \partial M \cap \mathfrak{B}_R,\ y \in \mathfrak{B}_1 \right\}, \quad t \geqslant 0, \quad R > \sigma_M. \tag{3.10}$$

Множество $M \subset E$ называется *параболичным*, если для любого вектора $b \in E$ множество $(b + (1/2)M) \setminus M$ является ограниченным. Множество $M \subset E$ называется *сильно параболичным*, если для любого числа $R > 0$ множество $(\mathfrak{B}_R + (1/2)M) \setminus M$ является ограниченным.

Множество $A \subset E$ называется *замкнутым относительно квазишара* M или M*-замкнутым*, если для любой точки $x \in E \setminus A$ справедливо неравенство $\varrho_M(x, A) > 0$.

Множество $A \subset E$ называется M*-квазиограниченным*, если оно является M-замкнутым и для любого числа $R \geqslant 0$ выполнено неравенство $\kappa(R) < +\infty$, где

$$\kappa(R) = \sup\{\|z\| \colon z \in N_M^1(a, A),\ a \in A \cap \mathfrak{B}_R\}. \tag{3.11}$$

Пусть $M \subset E$ — квазишар. Через $\mathcal{WC}(M)$ будем обозначать класс замкнутых подмножеств пространства E, слабо выпуклых относительно квазишара M, а через $\mathcal{SC}(M)$ — класс выпуклых замкнутых подмножеств пространства E, которые являются слагаемыми квазишара M.

Теорема 3.1 (об отделимости). *Пусть $M \subset E$ — параболичный и ограниченно равномерно выпуклый квазишар. Пусть $r \in (0, 1)$, $A \in \mathcal{WC}(M)$, $C \in \mathcal{SC}(-rM)$. Пусть дополнительно выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:*

1) $\varrho_M(C, A) > 0$;
2) $\operatorname{int} C \neq \varnothing$, $A \cap \operatorname{int} C = \varnothing$, *квазишар M ограниченно равномерно гладкий, множество A является M-квазиограниченным.*

Тогда (рис. 2) существуют точки $a, c \in E$, такие что

$$\operatorname{int} C \subset c - \operatorname{int} rM \subset a - \operatorname{int} M \subset E \setminus A.$$

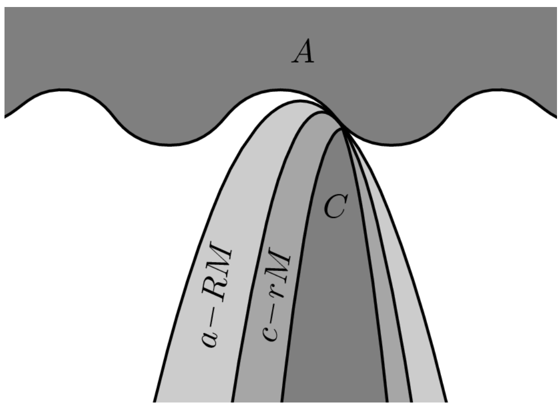

Рис. 2

Замечание 3.10. Условие M-квазиограниченности множества A в пункте 2 теоремы 3.1 существенно. Действительно, рассмотрим в евклидовом пространстве $E = \mathbb{R}^2$ квазишар $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geqslant x^2 - 1\}$ и множества $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geqslant 2x^2 - 1,\ x \leqslant 0\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \leqslant 1 - 2x^2,\ x \geqslant 0\}$. Тогда при $r = 1/2$ выполнены все условия пункта 2 теоремы 3.1, за исключением условия M-квазиограниченности множества A. При этом множества A и C нельзя отделить друг от друга границей сдвига квазишара M (рис. 3).

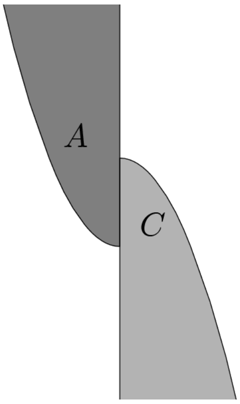

Рис. 3

Для любого числа $R > 0$ рассмотрим следующую величину, обобщающую понятие хаусдорфова расстояния для множеств, которые могут быть неограниченными:

$$h_R(A_1, A_2) = \max\{h^+(A_1 \cap \mathfrak{B}_R, A_2),\, h^+(A_2 \cap \mathfrak{B}_R, A_1)\}. \tag{3.12}$$

Пусть (T, ϱ_T) — метрическое пространство. Многозначное отображение $F \colon T \to 2^E$ называется *R-непрерывным в точке* $t_0 \in T$, если для любого числа $R > 0$ справедливо соотношение $h_R\big(F(t), F(t_0)\big) \to 0$ при $t \to t_0$.

Замечание 3.11. Если многозначное отображение непрерывно по Хаусдорфу в некоторой точке, то оно R-непрерывно в этой точке. Обратное неверно. Например, многозначное отображение $F \colon (0, +\infty) \to 2^{\mathbb{R}^2}$, заданное формулой

$$F(t) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geqslant tx^2\},$$

является R-непрерывным, но не является непрерывным по Хаусдорфу в любой точке $t_0 \in (0, +\infty)$.

Семейство $\{A(t)\}_{t \in T}$ подмножеств пространства E называется *равностепенно M-квазиограниченным*, если для любого числа $R > 0$ справедливо неравенство

$$\sup_{t \in T} \sup_{a \in A(t) \cap \mathfrak{B}_R} \sup_{z \in N_M^1(a, A(t))} \|z\| < +\infty. \tag{3.13}$$

Замечание 3.12. Если квазишар $M \subset E$ ограниченный, то любое замкнутое множество $A \subset E$ является M-квазиограниченным, а любое семейство замкнутых подмножеств пространства E — равностепенно M-квазиограниченным.

Неограниченное множество $M \subset E$ называется *коэрцитивным*, если существует вектор $v_M \in \partial\mathfrak{B}_1$, такой что для любой последовательности $\{z_k\} \subset M$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{k\to\infty} \|z_k\| = +\infty,$$

справедливо соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \frac{z_k}{\|z_k\|} = v_M.$$

При этом вектор v_M называется *асимптотическим направлением* множества M.

Теорема 3.2 (о непрерывности пересечения многозначных отображений). *Пусть $M \subset E$ — ограниченно равномерно выпуклый и ограниченно равномерно гладкий квазишар. Пусть либо квазишар M ограниченный (при этом полагаем, что $v_M = 0$), либо квазишар M сильно параболичный и коэрцитивный, v_M — его асимптотическое направление. Пусть многозначные отображения $A\colon T \to 2^E$ и $C\colon T \to 2^E$ являются R-непрерывными в точке $t_0 \in T$. Пусть существует число $r \in (0,1)$, такое что для любого $t \in T$ выполнено включение $C(t) \in \mathcal{SC}(-rM)$. Пусть при всех $t \in T$ справедливы условия $A(t) \in \mathcal{WC}(M)$, $A(t) + \lambda v_M \subset A(t)$ при всех $\lambda > 0$, $A(t) \cap C(t) \neq \varnothing$, $\operatorname{int} C(t) \neq \varnothing$. Пусть семейство $\{A(t)\}_{t\in T}$ равностепенно M-квазиограниченное. Тогда многозначное отображение $F(t) = A(t) \cap C(t)$ непрерывно по Хаусдорфу в точке $t_0 \in T$.*

Согласно замечаниям 3.6, 3.11, 3.12 теоремы 2.1 и 2.2 следуют из теорем 3.1 и 3.2 соответственно.

4. Теорема о непрерывности многозначного отображения, ограниченного графиками двух функций

Напомним, что *надграфиком* функции $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ называется множество

$$\operatorname{epi} f = \{(x,y) \in E \times \mathbb{R} \mid x \in E,\ y \geqslant f(x)\},$$

а *эффективное множество* f определяется равенством

$$\operatorname{dom} f = \{x \in E \mid f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

Инфимальной конволюцией или, что то же самое, *эпи-суммой* функций $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $g\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется функция

$$(f \boxplus g)(x) = \inf_{u\in E}\bigl(f(x-u) + g(u)\bigr), \quad x \in E.$$

Замечание 4.1. Надграфик эпи-суммы двух функций с точностью до замыкания совпадает с суммой Минковского надграфиков этих функций:

$$\operatorname{epi} f + \operatorname{epi} g \subset \operatorname{epi}(f \boxplus g) \subset \overline{\operatorname{epi} f + \operatorname{epi} g}.$$

Напомним, что *субдифференциалом* выпуклой функции $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ называется множество

$$\partial f(x_0) = \{p \in E^*\colon f(x) - f(x_0) \geqslant \langle p, x - x_0\rangle \text{ для всех } x \in E\}. \tag{4.1}$$

Пусть задана выпуклая полунепрерывная снизу функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Через $\pi_\gamma f(x)$ будем обозначать *γ-предифференциал* функции $f\colon E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ в точке $x \in \operatorname{dom} f$:

$$\pi_\gamma f(x) = \{u \in \operatorname{dom}\gamma\colon \text{найдётся } r > 0, \\ \text{такое что } (f \boxplus \gamma_r)(x + ru) = f(x) + \gamma_r(ru)\}, \tag{4.2}$$

где $\gamma_r(x) = r\gamma(x/r)$ при всех $x \in E$.

Функция $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется *сильно выпуклой* относительно функции γ, если функция f выпукла, существуют точки $x_0 \in \operatorname{dom}\gamma$ и $u_0 \in \operatorname{dom} f$, такие что $\partial f(u_0) \cap \partial\gamma(x_0) \neq \varnothing$ и

$$\gamma(x_1 + w) - \gamma(x_1) \leqslant f(u_1 + w) - f(u_1) \text{ для любых } w \in E \\ \text{и любых } u_1 \in \operatorname{dom} f,\ x_1 \in \operatorname{dom}\gamma, \text{ таких что } \partial f(u_1) \cap \partial\gamma(x_1) \neq \varnothing. \tag{4.3}$$

Класс полунепрерывных снизу функций, сильно выпуклых относительно функции γ, будем обозначать через $\mathcal{SC}(\gamma)$.

Функция $f\colon E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ называется *слабо выпуклой* относительно функции γ, если

$$(f \boxplus \gamma)(x + u) = f(x) + \gamma(u) \text{ для любых } x \in \operatorname{dom} f \text{ и любых } u \in \pi_\gamma f(x). \tag{4.4}$$

Класс полунепрерывных снизу функций, слабо выпуклых относительно функции γ, будем обозначать через $\mathcal{WC}(\gamma)$.

Функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется *коэрцитивной*, если

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\gamma(x)}{\|x\|} = +\infty.$$

Функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется *равномерно выпуклой* на выпуклом множестве $X \subset \operatorname{dom}\gamma$, если для любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $\delta_\gamma(\varepsilon, X) > 0$, где

$$\delta_\gamma(\varepsilon, X) = \inf_{\substack{x_1, x_2 \in X \\ \|x_1 - x_2\| \geqslant \varepsilon}} \left(\frac{\gamma(x_1) + \gamma(x_2)}{2} - \gamma\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right), \quad \varepsilon > 0.$$

Функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется *равномерно гладкой* на выпуклом множестве $X \subset \operatorname{dom}\gamma$, если

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \frac{\beta_\gamma(\varepsilon, X)}{\varepsilon} = 0,$$

где

$$\beta_\gamma(\varepsilon, X) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in X \\ \|x_1 - x_2\| \leqslant \varepsilon}} \left| \frac{\gamma(x_1) + \gamma(x_2)}{2} - \gamma\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \right|, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.5}$$

Будем предполагать, что норма пространства $E_1 = E \times \mathbb{R}$ является согласованной с нормой пространства E, так что для любых $x \in E$ и $y \in \mathbb{R}$ норма вектора $z = (x, y) \in E_1$ удовлетворяет неравенствам

$$\max\{\|x\|_E, |y|\} \leqslant \|z\|_{E_1} \leqslant \|x\|_E + |y|. \tag{4.6}$$

Там, где понятно, о норме в смысле какого пространства идёт речь, вместо $\|x\|_E$, $\|z\|_{E_1}$ будем писать короче: $\|x\|$, $\|z\|$.

Следующие две теоремы устанавливают связь между классами функций $\mathcal{SC}(\gamma)$, $\mathcal{WC}(\gamma)$ и классами множеств $\mathcal{SC}(\operatorname{epi}\gamma)$, $\mathcal{WC}(\operatorname{epi}\gamma)$ соответственно. Теорема 4.1 будет доказана в разделе 8, теорема 4.2 доказана в [19, теорема 3.5].

Теорема 4.1. *Пусть функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ непрерывна, коэрцитивна и является равномерно выпуклой на любом шаре $\mathfrak{B}_R$, $R > 0$. Пусть $\gamma(0) < 0$. Тогда для любой функции $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ условия $f \in \mathcal{SC}(\gamma)$ и $\operatorname{epi} f \in \mathcal{SC}(\operatorname{epi}\gamma)$ эквивалентны.*

Теорема 4.2. *Пусть функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ выпукла и полунепрерывна снизу, $\gamma(0) < 0$ и $0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\gamma$. Тогда для любой функции $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ условия $f \in \mathcal{WC}(\gamma)$ и $\operatorname{epi} f \in \mathcal{WC}(\operatorname{epi}\gamma)$ эквивалентны.*

С использованием теорем 3.2, 4.1, 4.2 будет доказана следующая теорема о непрерывности многозначного отображения, значения которого ограничены графиками двух функций.

Теорема 4.3. *Пусть заданы функции $\alpha\colon T \times E \to \mathbb{R}$, $\omega\colon T \times E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие следующим условиям:*

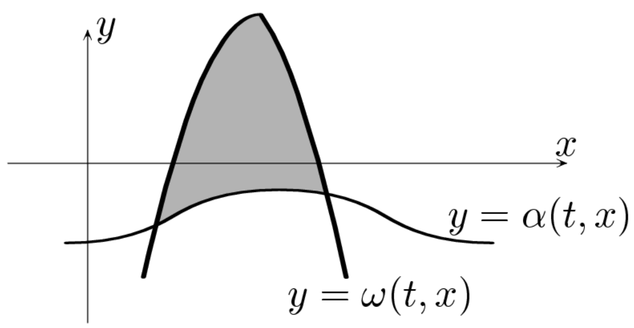

Рис. 4

1) *функция* γ *выпуклая, коэрцитивная, равномерно выпуклая на любом ограниченном множестве и равномерно гладкая на любом ограниченном множестве*;
2) $t \mapsto \operatorname{epi} \alpha(t,\cdot)$ *и* $t \mapsto \operatorname{epi} \omega(t,\cdot)$ *являются* R*-непрерывными в точке* $t_0 \in T$;
3) $\alpha(t,\cdot) \in \mathcal{WC}(\gamma)$ *для любого* $t \in T$;
4) *существует число* $r \in (0,1)$, *такое что при любом* $t \in T$ *справедливо включение* $-\omega(t,\cdot) \in \mathcal{SC}(\gamma_r^-)$, *где* $\gamma_r^-(x) = r\gamma(-x/r)$ *при всех* $x \in E$;
5) $\operatorname{int} \operatorname{epi} \omega(t,\cdot) \neq \varnothing$ *при всех* $t \in T$;
6) *для любого* $t \in T$ *существует точка* $x \in E$, *такая что* $\alpha(t,x) \leqslant \omega(t,x)$;
7) *для любого числа* $R > 0$ *существует число* $L_\alpha(R)$, *такое что при любом* $t \in T$ *функция* $\alpha(t,\cdot)$ *удовлетворяет условию Липшица с константой* $L_\alpha(R)$ *на шаре* $\mathfrak{B}_R$.

Тогда многозначное отображение

$$t \mapsto \{(x,y) \in E \times \mathbb{R} \colon \alpha(t,x) \leqslant y \leqslant \omega(t,x)\}$$

непрерывно по Хаусдорфу в точке $t_0 \in T$.

5. Вспомогательные результаты

Опорной функцией множества $M \subset E$ называется функция

$$s(p,M) = \sup_{x \in M} \langle p, x\rangle, \quad p \in E^*. \tag{5.1}$$

Лемма 5.1. *Пусть* $M \subset E$ *— квазишар,* $p \in E^*$, $s(p,M) < +\infty$. *Тогда*

$$\langle p, x\rangle \leqslant \mu_M(x) s(p,M) \quad \text{для всех} \quad x \in E, \quad p \in E^*.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольный вектор $x \in E$ и функционал $p \in E^*$, такой что $s(p,M) < +\infty$. Если $\mu_M(x) = 0$, то для любого $t > 0$ согласно замечанию 3.2 справедливо включение $x/t \in M$. Поскольку

$$\sup_{t>0} \left\langle p, \frac{x}{t} \right\rangle \leqslant s(p,M) < +\infty,$$

то $\langle p, x\rangle \leqslant 0$, и доказываемое неравенство выполнено. Пусть $\mu_M(x) > 0$. Тогда вектор $x_1 = x/\mu_M(x)$ удовлетворяет включению $x_1 \in M$, и следовательно,

$$\frac{\langle p, x\rangle}{\mu_M(x)} = \langle p, x_1\rangle \leqslant s(p,M). \qquad \square$$

Будем говорить, что множество $C \subset E$ удовлетворяет *опорному условию сильной выпуклости* относительно квазишара $M \subset E$, если

$$C - c \subset M - z \quad \text{для всех} \quad c \in C, \quad z \in N_M^1(c,C). \tag{5.2}$$

Лемма 5.2 [20, лемма 3.1]. *Пусть множество* $C \subset E$ *является слагаемым строго выпуклого квазишара* $M \subset E$. *Тогда множество* C *удовлетворяет опорному условию сильной выпуклости относительно квазишара* M.

Далее нам потребуются следующие свойства слабо выпуклых множеств.

Лемма 5.3 [5, лемма 3.3]. *Пусть $M \subset E$ — параболичный и ограниченно равномерно выпуклый квазишар. Пусть $A \in \mathcal{WC}(M)$ и найдётся точка $x \in E$, такая что $\varrho_M(x, A) > 0$. Тогда $A + \operatorname{int} M \neq E$.*

Теорема 5.1 (о чебышёвском слое [5, теорема 4.2]). *Пусть $M \subset E$ — параболичный и ограниченно равномерно выпуклый квазишар. Пусть $A \in \mathcal{WC}(RM)$, $R > 0$. Пусть задана точка $x \in E$, такая что $0 < \varrho_M(x, A) < R$. Тогда множество $P_M(x, A)$ одноэлементное.*

Теорема 5.2 (о ближайших точках [5, теорема 4.3]). *Пусть $M \subset E$ — параболичный и ограниченно равномерно выпуклый квазишар. Пусть $A \in \mathcal{WC}(RM)$, множество C выпукло, замкнуто и удовлетворяет опорному условию сильной выпуклости относительно квазишара $(-rM)$, $0 < \varrho_M(C, A) < R-r$, где $0 < r < R$. Тогда $\min\limits_{a\in A,\ c\in C} \mu_M(c-a)$ достигается в единственной паре точек.*

Лемма 5.4 [6, лемма 3.9]. *Пусть $M \subset E$ — параболичный и ограниченно равномерно выпуклый квазишар. Пусть множество $C \subset E$ удовлетворяет опорному условию сильной выпуклости относительно квазишара $(-rM)$ и существует вектор $c_1 \in E$, такой что $c_1 + C \subset -rM$. Пусть множество $A \in \mathcal{WC}(RM)$, где $0 < r < R$, является M-квазиограниченным. Пусть $\varrho_M(C, A) = 0$, $A \cap \operatorname{int} C = \varnothing$ и $\operatorname{int} C \neq \varnothing$. Тогда множество $A \cap C$ одноэлементно.*

Лемма 5.5.

1. *Если множество $M \subset E$ выпуклое и параболичное, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, $x_1, x_2 \in E$, то множество $(\lambda_1 M + x_1) \setminus (\lambda_2 \operatorname{int} M + x_2)$ является ограниченным.*
2. *Если множество $M \subset E$ выпуклое и сильно параболичное, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, $R > 0$, то множество $(\lambda_1 M + \mathfrak{B}_R) \setminus (\lambda_2 \operatorname{int} M)$ является ограниченным.*

Первый пункт леммы 5.5 вытекает из [17, лемма 5.1]. Второй пункт леммы 5.5 доказывается аналогично.

Лемма 5.6. *Пусть $M \subset E$ — квазишар, $A \in \mathcal{WC}(M)$, $a_0 \in \partial A$, $z \in N_M^1(a_0, A) \cap \mathfrak{B}_R$, где $R > \sigma_M$. Пусть $p \in E^*$, $\langle p, z\rangle = s(p, M) = 1$. Тогда*

$$\langle p, a - a_0\rangle \leqslant 2\beta_M(\|a - a_0\|, R) \quad \text{для всех} \quad a \in A,$$

где β_M — модуль гладкости M, определяемый равенством (3.10).

Доказательство. Зафиксируем произвольный вектор $a \in A$. Так как $z \in N_M^1(a_0, A) \cap \mathfrak{B}_R$, $A \in \mathcal{WC}(M)$, то согласно соотношению (3.7) имеем $a_0 + z \notin A + \operatorname{int} M$. Следовательно, $a_0 + z - a \notin \operatorname{int} M$, т. е. $\mu_M(a_0 + z - a) \geqslant 1$. Используя равенство (3.10) и включения $z \in N_M^1(a_0, A) \subset \partial M$, получаем

$$\beta_M(\|a - a_0\|, R) \geqslant \frac{\mu_M(z + a_0 - a) + \mu_M(z + a - a_0)}{2} - 1 \geqslant \frac{\mu_M(z + a - a_0) - 1}{2}. \tag{5.3}$$

С другой стороны, ввиду леммы 5.1 и равенства $s(p,M) = 1$ имеем, что $\langle p, z + a - a_0\rangle \leqslant \mu_M(z + a - a_0)$. Учитывая равенство $\langle p, z\rangle = 1$ и неравенство (5.3), получаем требуемое неравенство. □

Замечание 5.1. Для любого $R > \sigma_M$ функция $\beta_M(\cdot, R)$ является выпуклой функцией как супремум выпуклых функций. Учитывая равенство $\beta_M(0,R) = 0$ и неравенство $\beta_M(t,R) \geqslant 0$, получаем, что функция $t \mapsto \beta_M(t,R)/t$ нестрого возрастает при любом $R > \sigma_M$.

Лемма 5.7. *Пусть $M \subset E$ — параболичный и ограниченно равномерно выпуклый квазишар. Пусть M-квазиограниченное множество $A \in \mathcal{WC}(M)$ содержит точки x_0, x_1, такие что для некоторого $\lambda \in (0,1)$ справедливо неравенство $\|x_1 - x_0\| \min\{\lambda, 1-\lambda\} < \sigma_M$, где число σ_M определено равенством* (3.3). *Пусть $x_\lambda = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$, $a \in P_M(x_\lambda, A)$, $R \geqslant \max\{\sigma_M + 1, \kappa(\|a\|)\}$, $\varkappa = \kappa(\|a\|)/\sigma_M$, где функция $\kappa(\cdot)$ определена равенством* (3.11). *Тогда справедливо неравенство*

$$\varrho_M(x_\lambda, A) \leqslant 4\lambda(1-\lambda)\beta_M\big((1+\varkappa)\|x_1 - x_0\|, R\big).$$

Доказательство. Если $\varrho_M(x_\lambda, A) = 0$, то доказываемое неравенство тривиально выполнено. Поэтому будем предполагать, что $\varrho_M(x_\lambda, A) > 0$. Согласно равенствам (3.5), (3.6) вектор $z = (x_\lambda - a)/\varrho_M(x_\lambda, A)$ удовлетворяет включению $z \in N^1_M(a, A)$. Согласно равенству (3.11) получаем

$$\|z\| \leqslant \kappa(\|a\|) \leqslant R. \tag{5.4}$$

Поскольку $z \in \partial M$, согласно теореме Хана—Банаха об отделимости существует функционал $p \in E^*$, такой что $\langle p, z\rangle = s(p,M) = 1$. По лемме 5.6 имеем

$$\langle p, x_0 - a\rangle \leqslant 2\beta_M(\|x_0 - a\|, R), \quad \langle p, x_1 - a\rangle \leqslant 2\beta_M(\|x_1 - a\|, R).$$

Следовательно,

$$\langle p, x_\lambda - a\rangle = (1-\lambda)\langle p, x_0 - a\rangle + \lambda\langle p, x_1 - a\rangle \leqslant \\ \leqslant 2(1-\lambda)\beta_M(\|x_0 - a\|, R) + 2\lambda\beta_M(\|x_1 - a\|, R). \tag{5.5}$$

Согласно замечанию 3.4 получаем

$$\varrho_M(x_\lambda, A) \leqslant \min\{\mu_M(x_\lambda - x_0), \mu_M(x_\lambda - x_1)\} \leqslant \\ \leqslant \frac{\min\{\|x_\lambda - x_0\|, \|x_\lambda - x_1\|\}}{\sigma_M} = \frac{\|x_1 - x_0\|}{\sigma_M}\min\{\lambda, 1-\lambda\} < 1.$$

Используя неравенство (5.4), имеем

$$\|x_\lambda - a\| \leqslant \kappa(\|a\|)\varrho_M(x_\lambda, A) \leqslant \varkappa\|x_1 - x_0\|\min\{\lambda, 1-\lambda\}.$$

Поэтому

$$\|x_0 - a\| \leqslant \|x_0 - x_\lambda\| + \|x_\lambda - a\| \leqslant \lambda(1+\varkappa)\|x_1 - x_0\|, \\ \|x_1 - a\| \leqslant \|x_1 - x_\lambda\| + \|x_\lambda - a\| \leqslant (1-\lambda)(1+\varkappa)\|x_1 - x_0\|.$$

Отсюда и из неравенства (5.5) следует, что

$$\langle p, x_\lambda - a\rangle \leqslant 2(1-\lambda)\beta_M(\lambda(1+\varkappa)\|x_1-x_0\|, R)+2\lambda\beta_M\big((1-\lambda)(1+\varkappa)\|x_1-x_0\|, R\big).$$

Используя замечание 5.1, приходим к неравенству

$$\langle p, x_\lambda - a\rangle \leqslant 4\lambda(1-\lambda)\beta_M\big((1+\varkappa)\|x_1-x_0\|, R\big). \tag{5.6}$$

Так как $\langle p, z\rangle = 1$, то $\langle p, x_\lambda - a\rangle = \varrho_M(x_\lambda, A)$. Отсюда и из неравенства (5.6) получаем доказываемое неравенство. □

Лемма 5.8. *Пусть $M \subset E$ — параболичный и ограниченно равномерно выпуклый квазишар. Пусть множество $A \in \mathcal{WC}(M)$ является M-замкнутым, $a_0 \in \partial A$. Тогда*

$$\eta := \sup\big\{\|a\|\colon a \in P_M(x, A),\ x \in \mathfrak{B}_{(1/4)\sigma_M}(a_0)\big\} < +\infty. \tag{5.7}$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{B}_{(1/4)\sigma_M}(a_0)$, $a \in P_M(x, A)$. Тогда

$$\mu_M(a_0-a) \leqslant \mu_M(x-a) + \mu_M(a_0-x) = \\ = \varrho_M(x, A) + \mu_M(a_0-x) \leqslant \mu_M(x-a_0) + \mu_M(a_0-x).$$

Последнее неравенство следует из того, что $a_0 \in \partial A$. Так как $\{x-a_0, a_0-x\} \subset \subset \mathfrak{B}_{(1/4)\sigma_M} \subset (1/4)M$, то $\mu_M(x-a_0) \leqslant 1/4$ и $\mu_M(a_0-x) \leqslant 1/4$. Следовательно, $\mu_M(a_0-a) \leqslant 1/2$, а значит, $a \in A\cap(a_0-(1/2)M)$. Поэтому достаточно показать, что множество $A\cap(a_0-(1/2)M)$ является ограниченным.

Поскольку множество A является M-замкнутым и $A \neq E$, то найдётся точка $x_0 \in E$, такая что $\varrho_M(x_0, A) > 0$. По лемме 5.3 существует точка $w \in E\setminus(A+\operatorname{int} M)$. Поэтому $A \subset E\setminus(w-\operatorname{int} M)$, а значит,

$$A\cap\left(a_0-\frac{1}{2}M\right) \subset \left(a_0-\frac{1}{2}M\right)\setminus(w-\operatorname{int} M).$$

Используя параболичность множества M, согласно лемме 5.5 получаем ограниченность множества $A\cap(a_0-(1/2)M)$. □

6. Доказательство теоремы 3.1

Контингентный конус к множеству $A \subset E$ в точке $a_0 \in E$ введён Ж. Булиганом [12] и определяется равенством

$$T(a_0, A) = \bigcap_{\varepsilon>0}\bigcap_{\delta>0}\bigcup_{t\in(0,\delta]}\left(\frac{1}{t}(A-a_0)+\mathfrak{B}_\varepsilon\right).$$

Замечание 6.1. Вектор v содержится в конусе $T(a_0, A)$ тогда и только тогда, когда существуют последовательности $\{v_k\} \subset E$ и $\{t_k\} \subset (0,+\infty)$, такие что $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = v$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 0$ и $a_0 + t_k v_k \in A$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 6.1. *Пусть $M \subset E$ — параболичный, ограниченно равномерно выпуклый и ограниченно равномерно гладкий квазишар, множество $A \in \mathcal{WC}(M)$ является M-квазиограниченным, $a_0 \in \partial A$. Тогда конус $T(a_0, A)$ является выпуклым.*

Доказательство. Пусть $u, v \in T(a_0, A)$. Требуется доказать включение

$$u + v \in T(a_0, A). \tag{6.1}$$

Согласно замечанию 6.1 найдутся последовательности $\{u_k\} \subset E$, $\{v_k\} \subset E$, $\{t_k\} \subset (0, +\infty)$ и $\{\tau_k\} \subset (0, +\infty)$, такие что

$$\lim_{k\to\infty} u_k = u, \quad \lim_{k\to\infty} v_k = v, \quad \lim_{k\to\infty} t_k = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \tau_k = 0, \tag{6.2}$$

$a_0 + t_k u_k \in A$ и $a_0 + \tau_k v_k \in A$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\xi_k = \frac{t_k \tau_k}{t_k + \tau_k}, \quad y_k = a_0 + \xi_k(u_k + v_k), \quad \varrho_k = \varrho_M(y_k, A).$$

Если для любого индекса k_0 найдётся индекс $k \geqslant k_0$, такой что $y_k \in A$, то согласно замечанию 6.1 и соотношениям (6.2) получаем включение (6.1). Поэтому будем предполагать, что $y_k \notin A$ для всех k начиная с некоторого k_0. Ввиду M-квазиограниченности множества A получаем неравенство $\varrho_k > 0$ при всех $k \geqslant k_0$.

Поскольку $0 < \xi_k < t_k \to 0$, $\tau_k \to 0$ при $k \to \infty$, а последовательности $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ являются ограниченными, то $y_k \to a_0$ и $\varrho_k \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, найдётся индекс $k_1 \geqslant k_0$, такой что

$$\varrho_k < 1, \quad y_k \in \mathfrak{B}_{(1/4)\sigma_M}(a_0), \quad \|t_k u_k - \tau_k v_k\| < \sigma_M \quad \text{для всех} \quad k \geqslant k_1.$$

По теореме 5.1 для любого $k \geqslant k_1$ существует точка $a_k \in P_M(y_k, A)$. Согласно соотношению (5.7)

$$\sup_{k \geqslant k_1} \|a_k\| \leqslant \eta < +\infty.$$

При любом фиксированном $k \geqslant k_1$ по лемме 5.7, применённой для $x_0 = a_0 + t_k u_k$, $x_1 = a_0 + \tau_k v_k$, $\lambda = t_k/(t_k + \tau_k)$, получаем неравенство

$$\varrho_k \leqslant 4\xi_k \varepsilon_k, \tag{6.3}$$

где

$$\varepsilon_k = \frac{\beta_M\big((1+\varkappa)\|t_k u_k - \tau_k v_k\|, R\big)}{t_k + \tau_k}, \quad \varkappa = \frac{\kappa(\eta)}{\sigma_M}, \quad R = \max\{\sigma_M + 1, \kappa(\eta)\}.$$

Используя соотношение (3.9) и ограниченность последовательностей $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$, получаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0. \tag{6.4}$$

При $k \geqslant k_1$ обозначим $z_k = (y_k - a_k)/\varrho_k$. Так как $a_k \in P_M(y_k, A)$, то $z_k \in N_M^1(a_k, A)$. Отсюда и из M-квазиограниченности множества A следует, что

$$\sup_{k \geqslant k_1} \|z_k\| = C < +\infty.$$

Используя неравенство (6.3), для любого $k \geqslant k_1$ получаем

$$\|y_k - a_k\| = \|z_k\|\varrho_k \leqslant C\varrho_k \leqslant 4C\xi_k\varepsilon_k.$$

Обозначая $w_k = (a_k - a_0)/\xi_k$, приходим к неравенству $\|u_k + v_k - w_k\| \leqslant 4C\varepsilon_k$ при $k \geqslant k_1$. Используя соотношения (6.4) и (6.2), получаем, что $w_k \to u+v$ при $k \to \infty$. Так как $a_k = a_0 + \xi_k w_k \in A$, то справедливо включение (6.1). □

Лемма 6.2. *Пусть множество $A \subset E$ и выпуклое множество $C \subset E$ таковы, что $0 \in A \cap C$, $\operatorname{int} C \neq \varnothing$, $A \cap \operatorname{int} C = \varnothing$. Тогда $T(0, A) \cap \operatorname{int} C = \varnothing$.*

Доказательство. Предположим противное: существует вектор $v \in T(0, A) \cap \cap \operatorname{int} C$. Так как $v \in \operatorname{int} C$, то существует число $\delta > 0$, такое что $\mathfrak{B}_\delta(v) \subset \operatorname{int} C$. Поскольку $v \in T(0, A)$, то найдутся вектор $u \in \mathfrak{B}_\delta(v)$ и число $t \in (0, 1)$, такие что $tu \in A$. С другой стороны, из включений $u \in \mathfrak{B}_\delta(v) \subset \operatorname{int} C$, $0 \in C$ и из выпуклости C следует, что $tu \in \operatorname{int} C$. Это противоречит условию $A \cap \operatorname{int} C = \varnothing$. □

Лемма 6.3. *Пусть $M \subset E$ — параболичный, ограниченно равномерно выпуклый и ограниченно равномерно гладкий квазишар. Пусть множество $A \in \mathcal{WC}(M)$ является M-квазиограниченным и $0 \in \partial A$. Тогда существуют положительные числа δ, C_1, C_2 и число $R > \sigma_M$, такие что для любого ненулевого вектора $a \in A \cap \mathfrak{B}_\delta$ найдётся ненулевой вектор $v \in T(0, A)$, удовлетворяющий неравенству*

$$\|v - a\| \leqslant C_1\beta_M(C_2\|a\|, R), \tag{6.5}$$

где функция $\beta_M(\cdot)$ определена равенством (3.10).

Доказательство. Используя функцию $\kappa(\cdot)$, определяемую формулой (3.11), и число η, задаваемое равенством (5.7), введём обозначения

$$\varkappa = \frac{\kappa(\eta)}{\sigma_M}, \quad R = \max\{\sigma_M + 1, \kappa(\eta)\}. \tag{6.6}$$

Для любого $t > 0$ определим

$$\gamma_M(t) = \frac{\beta_M\big((1+\varkappa)t, R\big)}{t}.$$

По замечанию 5.1 функция $\gamma_M(\cdot)$ нестрого возрастает. По соотношению (3.9) $\lim\limits_{t\to+0} \gamma_M(t) = 0$. Поэтому существует положительное число

$$\delta \leqslant \min\left\{\frac{\sigma_M}{2}, \eta\right\},$$

такое что

$$8R\gamma_M(\delta) \leqslant 1. \tag{6.7}$$

Зафиксируем произвольный ненулевой вектор $a \in A \cap \mathfrak{B}_\delta$. Положим $a_0 = a$, $\delta_0 = \|a_0\|$. Так как $\lim\limits_{t\to+0} \gamma_M(t) = 0$, то для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдётся число $\delta_k \in (0, \delta]$, такое что

$$\gamma_M(\delta_k) \leqslant \frac{\gamma_M(\delta_0)}{2^k}. \tag{6.8}$$

Пусть для некоторого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ задан вектор $a_k \in A$, такой что

$$0 < \|a_k\| \leqslant \delta_k. \tag{6.9}$$

Зафиксируем число $\lambda_k \in (0,1)$, такое что

$$2\lambda_k \|a_k\| < \delta_{k+1}. \tag{6.10}$$

Так как

$$\|\lambda_k a_k\| < \frac{\delta_{k+1}}{2} \leqslant \frac{\delta}{2} \leqslant \frac{\sigma_M}{4},$$

то по замечанию 3.4 приходим к неравенствам

$$\varrho_M(\lambda_k a_k, A) \leqslant \frac{\|\lambda_k a_k\|}{\sigma_M} < \frac{1}{4}.$$

Поэтому согласно теореме 5.1 существует точка $a_{k+1} \in P_M(\lambda_k a_k, A)$. Ввиду неравенства $\|\lambda_k a_k\| < \sigma_M/4$ и равенства (5.7) получаем неравенство $\|a_{k+1}\| \leqslant \eta$. Согласно лемме 5.7, применённой для $x_0 = 0$, $x_1 = a_k$, $\lambda = \lambda_k$, $a = a_{k+1}$, и равенству (6.6) имеем

$$\varrho_M(\lambda_k a_k, A) \leqslant 4\lambda_k \beta_M\big((1+\varkappa)\|a_k\|, R\big) = 4\lambda_k \|a_k\| \gamma_M(\|a_k\|). \tag{6.11}$$

Из равенства (3.11) следует, что

$$\|\lambda_k a_k - a_{k+1}\| \leqslant \kappa(\eta)\mu_M(\lambda_k a_k - a_{k+1}) \leqslant R\mu_M(\lambda_k a_k - a_{k+1}).$$

Отсюда и из неравенства (6.11) и равенства $\mu_M(\lambda_k a_k - a_{k+1}) = \varrho_M(\lambda_k a_k, A)$ следует, что

$$\|\lambda_k a_k - a_{k+1}\| \leqslant R\mu_M(\lambda_k a_k - a_{k+1}) \leqslant 4R\lambda_k \|a_k\| \gamma_M(\|a_k\|). \tag{6.12}$$

Согласно замечанию 5.1 справедливо неравенство $\gamma_M(\|a_k\|) \leqslant \gamma_M(\delta)$. Отсюда по неравенству (6.7) получаем

$$\|\lambda_k a_k - a_{k+1}\| \leqslant \frac{\lambda_k \|a_k\|}{2}.$$

Поэтому, используя неравенство (6.10), приходим к цепочке неравенств

$$0 < \frac{1}{2}\lambda_k \|a_k\| \leqslant \|a_{k+1}\| \leqslant \frac{3}{2}\lambda_k \|a_k\| < \delta_{k+1}.$$

Итак, $0 < \|a_{k+1}\| \leqslant \delta_{k+1}$, и процесс построения a_k можно продолжить. Таким образом, рекурсивно построена последовательность $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \subset A$, такая что при каждом $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ выполнены неравенства (6.9) и (6.12).

Для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ из неравенств

$$\left\| \frac{a_{k+1}}{\|a_{k+1}\|} - \frac{a_k}{\|a_k\|} \right\| \leqslant \left\| \frac{a_{k+1}}{\|a_{k+1}\|} - \frac{a_{k+1}}{\lambda_k \|a_k\|} \right\| + \left\| \frac{a_{k+1}}{\lambda_k \|a_k\|} - \frac{a_k}{\|a_k\|} \right\| \leqslant \frac{2\|\lambda_k a_k - a_{k+1}\|}{\lambda_k \|a_k\|},$$

соотношений (6.8), (6.9), (6.12) и замечания 5.1 следует, что

$$\left\| \frac{a_{k+1}}{\|a_{k+1}\|} - \frac{a_k}{\|a_k\|} \right\| \leqslant 8R\gamma_M(\|a_k\|) \leqslant 8R\gamma_M(\delta_k) \leqslant \frac{8R\gamma_M(\delta_0)}{2^k}.$$

Поэтому

$$\left\|\frac{a_m}{\|a_m\|}-\frac{a_n}{\|a_n\|}\right\|\leqslant\sum_{k=n}^{m-1}\left\|\frac{a_{k+1}}{\|a_{k+1}\|}-\frac{a_k}{\|a_k\|}\right\|\leqslant\frac{R\gamma_M(\delta_0)}{2^{n-4}}$$

$$\text{для всех}\quad n\in\mathbb{N}\cap\{0\},\quad m>n.$$

Таким образом, последовательность $\{a_k/\|a_k\|\}$ фундаментальная, а значит, сходится к некоторому вектору $v_0\in E$. При этом

$$\left\|v_0-\frac{a}{\delta_0}\right\|\leqslant 16R\gamma_M(\delta_0)=\frac{16R\beta_M\big((1+\varkappa)\delta_0,R\big)}{\delta_0}.$$

Следовательно, вектор $v=\delta_0 v_0$ удовлетворяет неравенству (6.5) при $C_1=16R$, $C_2=1+\varkappa$. Поскольку $a_k\in A$, $a_k/\|a_k\|\to v_0$, $\|a_k\|\to 0$ при $k\to\infty$, то $v_0\in T(0,A)$, и следовательно, $v\in T(0,A)$. $\square$

Лемма 6.4 [17, лемма 5.2]. *Пусть множество $M\subset E$ параболично. Тогда*

1) *для любого функционала $p\in\operatorname{dom}s(\cdot,M)\setminus\{0\}$ множество $\{x\in M\colon \langle p,x\rangle\geqslant -1\}$ является ограниченным;*
2) *множество $\operatorname{dom}s(\cdot,M)\setminus\{0\}$ открыто.*

Из включений (21) работы [19], а также лемм 4.4 и 7.2 этой работы вытекают следующие две леммы.

Лемма 6.5. *Если в пространстве E существует параболичный ограниченно равномерно выпуклый квазишар, то пространство E рефлексивно.*

Лемма 6.6. *Пусть $M\subset E$ — ограниченно равномерно выпуклый и параболичный квазишар. Пусть функционал $p\in E^*\setminus\{0\}$ и ограниченная последовательность $\{w_k\}\subset\partial M$ таковы, что*

$$\lim_{k\to\infty}\langle p,w_k\rangle=s(p,M)<+\infty.$$

Тогда последовательность $\{w_k\}$ сходится.

Лемма 6.7. *Пусть $M\subset E$ — параболичный, ограниченно равномерно выпуклый и ограниченно равномерно гладкий квазишар, множество $A\in\mathcal{WC}(M)$ является M-квазиограниченным, $0\in\partial A$. Пусть функционал $p\in E^*$ удовлетворяет равенству $s\big(p,T(0,A)\big)=0$. Тогда*

1) *$s(p,M)<+\infty$;*
2) *если точка $z\in\partial M$ удовлетворяет равенствам $\langle p,z\rangle=s(p,M)=1$, то $0\in P_M(z,A)$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольный вектор $z\in M$, такой что $\langle p,z\rangle>0$. Если для любого k_0 найдётся номер $k\geqslant k_0$, такой что $z/k\in A$, то $z\in T(0,A)$. Тогда $0<\langle p,z\rangle\leqslant s\big(p,T(0,A)\big)=0$. Полученное противоречие доказывает существование номера k_0, такого что $z/k\notin A$ при всех $k\geqslant k_0$.

Отсюда и из M-квазиограниченности множества A следует, что $\varrho_M(z/k, A) > 0$ при $k \geqslant k_0$. Так как $0 \in A$, то

$$\varrho_M\left(\frac{z}{k}, A\right) \leqslant \mu_M\left(\frac{z}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6.13}$$

По теореме 5.1 для любого $k > k_0$ существует $a_k \in P_M(z/k, A)$. Для любого $k > k_0$ обозначим

$$w_k = \frac{z/k - a_k}{\mu_M(z/k - a_k)}. \tag{6.14}$$

Выберем индекс $k_1 > k_0$ так, что

$$\frac{\|z\|}{k_1} < \frac{\sigma_M}{4}.$$

Тогда согласно равенству (5.7) имеем $\sup\limits_{k \geqslant k_1} \|a_k\| \leqslant \eta$. Из равенства (3.11) и M-квазиограниченности множества A следует, что

$$\|w_k\| \leqslant \kappa(\eta) < +\infty \quad \text{для всех} \quad k \geqslant k_1.$$

Отсюда и из соотношений (6.13), (6.14) и равенства

$$\mu_M\left(\frac{z}{k} - a_k\right) = \varrho_M\left(\frac{z}{k}, A\right)$$

получаем, что

$$\left\|\frac{z}{k} - a_k\right\| \leqslant \frac{\kappa(\eta)}{k} \quad \text{для всех} \quad k \geqslant k_1. \tag{6.15}$$

Поэтому

$$\|a_k\| \leqslant \left\|\frac{z}{k} - a_k\right\| + \frac{\|z\|}{k} \leqslant \frac{\kappa(\eta) + \|z\|}{k} \to 0, \quad k \to \infty. \tag{6.16}$$

По лемме 6.3 существуют индекс $k_2 \geqslant k_1$, положительные числа C_1, C_2 и число $R > \sigma_M$, такие что для любого $k \geqslant k_2$ найдётся вектор $v_k \in T(0, A)$, удовлетворяющий неравенству

$$\|a_k - v_k\| \leqslant \varepsilon_k := C_1 \beta_M(C_2\|a_k\|, R). \tag{6.17}$$

Из соотношений (3.9), (6.16) следует, что

$$k\varepsilon_k = C_1 k \beta_M(C_2\|a_k\|, R) \leqslant C_1 k \beta_M\left(\frac{C_2(\kappa(\eta) + \|z\|)}{k}, R\right) \to 0, \quad k \to \infty. \tag{6.18}$$

Поскольку $v_k \in T(0, A)$, то $\langle p, v_k\rangle \leqslant s\big(p, T(0, A)\big) = 0$. Поэтому согласно неравенству (6.17) имеем

$$\langle p, a_k\rangle \leqslant \langle p, a_k - v_k\rangle \leqslant \|p\| \cdot \|a_k - v_k\| \leqslant \varepsilon_k\|p\| \quad \text{для всех} \quad k \geqslant k_2.$$

Следовательно,

$$\left\langle p, \frac{z}{k}\right\rangle \leqslant \left\langle p, \frac{z}{k} - a_k\right\rangle + \varepsilon_k\|p\| \quad \text{для всех} \quad k \geqslant k_2. \tag{6.19}$$

Используя неравенство (6.15), приходим к неравенствам

$$\langle p, z\rangle \leqslant \left(\left\|\frac{z}{k} - a_k\right\| + \varepsilon_k\right) k\|p\| \leqslant (\kappa(\eta) + k\varepsilon_k)\|p\| \quad \text{для всех} \quad k \geqslant k_2.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, с учётом соотношения (6.18) получаем, что

$$\langle p, z\rangle \leqslant \kappa(\eta)\|p\|, \tag{6.20}$$

где функция $\kappa(\cdot)$ и число η определены равенствами (3.11) и (5.7) соответственно, а значит, выражение $\kappa(\eta)$ не зависит от точки z. Если $\langle p, z\rangle \leqslant 0$, то неравенство (6.20) также выполнено. Таким образом, неравенство (6.20) справедливо для любой точки $z \in M$. Поэтому $s(p, M) \leqslant \kappa(\eta)\|p\| < +\infty$. Это доказывает первое утверждение леммы 6.7.

Докажем второе утверждение. Пусть точка $z \in \partial M$ удовлетворяет равенствам $\langle p, z\rangle = s(p, M) = 1$. Используя неравенство (6.19), имеем

$$\left\langle p, \frac{z}{k} - a_k\right\rangle \geqslant \left\langle p, \frac{z}{k}\right\rangle - \varepsilon_k\|p\| = \frac{1 - k\varepsilon_k\|p\|}{k} \quad \text{для всех} \quad k \geqslant k_2.$$

Ввиду соотношения (6.18) существует индекс $k_3 \geqslant k_2$, такой что $k\varepsilon_k\|p\| < 1$ при всех $k \geqslant k_3$. Используя равенство

$$\mu_M\left(\frac{z}{k} - a_k\right) = \varrho_M\left(\frac{z}{k}, A\right)$$

и соотношения (6.13), (6.14), получаем

$$s(p, M) \geqslant \langle p, w_k\rangle = \frac{\langle p, z/k - a_k\rangle}{\mu_M(z/k - a_k)} \geqslant \frac{1 - k\varepsilon_k\|p\|}{k\,\mu_M\,(z/k - a_k)} \geqslant 1 - k\varepsilon_k\|p\|$$
$$\text{для всех} \quad k \geqslant k_2.$$

Поскольку $w_k \in M$, то согласно соотношению (6.18) имеем

$$s(p, M) \geqslant \langle p, w_k\rangle \geqslant 1 - k\varepsilon_k\|p\| \to 1 = s(p, M), \quad k \to \infty.$$

Согласно пункту 1 леммы 6.4 последовательность $\{w_k\}$ является ограниченной. Поэтому в силу леммы 6.6 эта последовательность сходится к некоторому вектору $w \in E$. При этом $w \in M$ и $\langle p, w\rangle = s(p, M) = \langle p, z\rangle$. Учитывая строгую выпуклость множества M, получаем равенство $w = z$. Итак,

$$\lim_{k\to\infty} w_k = z. \tag{6.21}$$

Так как $a_k \in P_M(z/k, A)$, то согласно равенствам (3.5), (3.6) имеем, что $w_k \in N^1_M(a_k, A)$. Поэтому с учётом включения $A \in \mathcal{WC}(M)$ и формулы (3.7) получаем, что $a_k + w_k \notin A + \operatorname{int} M$, т. е. $\varrho_M(a_k + w_k, A) = 1$. Используя соотношения (6.16), (6.21), а также непрерывность функции $\varrho_M(\cdot, A)$, приходим к равенству $\varrho_M(z, A) = 1$, т. е. $0 \in P_M(z, A)$. $\square$

Для любого множества $X \subset E$ и любого функционала $p \in E^*$ рассмотрим множество

$$\operatorname{Exp}(p, X) = \{x \in X \colon \langle p, x\rangle = s(p, X)\}. \tag{6.22}$$

Замечание 6.2. Непосредственно из определения (6.22) и формулы

$$s(p, X_1 + X_2) = s(p, X_1) + s(p, X_2)$$

следует, что

$$\operatorname{Exp}(p, X_1 + X_2) = \operatorname{Exp}(p, X_1) + \operatorname{Exp}(p, X_2) \quad \text{для всех} \quad X_1, X_2 \subset E, \quad p \in E^*.$$

Доказательство теоремы 3.1. По лемме 5.2 множество C удовлетворяет опорному условию сильной выпуклости относительно квазишара $(-rM)$.

1. Пусть $\varrho_M(C, A) > 0$.

а) Предположим сначала, что $\varrho_M(C, A) < 1 - r$. По теореме 5.2 минимум

$$\min_{\substack{a \in A \\ c \in C}} \mu_M(c - a)$$

достигается в единственной паре точек $a_0 \in A$, $c_0 \in C$. Следовательно,

$$a_0 \in P_M(c_0, A), \quad c_0 \in P_{-M}(a_0, C).$$

Обозначим

$$w = \frac{c_0 - a_0}{\mu_M(c_0 - a_0)}.$$

Так как $A \in \mathcal{WC}(M)$, то согласно соотношению (3.7) имеем

$$a_0 + w - \operatorname{int} M \subset E \setminus A.$$

Поскольку множество C удовлетворяет опорному условию сильной выпуклости относительно квазишара $(-rM)$, то ввиду соотношения (5.2) $C \subset c_0 - r(M - w)$. Положим $c = c_0 + rw$, $a = a_0 + w$. Тогда $C \subset c - rM$, $a - \operatorname{int} M \subset E \setminus A$. Осталось доказать, что $a - c \in \operatorname{int}(1 - r)M$. Из определения вектора w следует, что

$$\mu_M(a - c) = \mu_M(a_0 - c_0 + (1 - r)w) =$$
$$= \mu_M\Big(\big(1 - r - \mu_M(c_0 - a_0)\big)w\Big) = 1 - r - \mu_M(c_0 - a_0) < 1 - r,$$

т. е. $a - c \in \operatorname{int}(1 - r)M$.

б) Пусть теперь $\varrho_M(C, A) \geqslant 1 - r$. Так как $C \in \mathcal{SC}(-rM)$, существует множество $C' \subset E$, такое что $C + C' = -rM$. Зафиксируем $c_0 \in C'$ и для любого числа $t \in [0, 1]$ рассмотрим множество $C_t = C + t(C' - c_0)$. Предположим, что $\varrho_M(C_1, A) \geqslant 1 - r$. Так как $C_1 = C_t|_{t=1} = -c_0 - rM$, то $\varrho_M(-c_0 - rM, A) \geqslant 1 - r$. Следовательно, $(-c_0 - rM) \cap (A + (1 - r) \operatorname{int} M) = \varnothing$, а значит, $-c_0 - \operatorname{int} M \subset \subset E \setminus A$. Полагая $a = c = -c_0$, получаем доказываемые включения. Пусть, наконец, $\varrho_M(C_1, A) < 1 - r$. Так как функция $t \mapsto \varrho_M(C_t, A)$ непрерывна и $\varrho_M(C_0, A) = \varrho_M(C, A) \geqslant 1 - r > 0$, то существует число $\tau \in (0, 1]$, такое что $0 < \varrho_M(C_\tau, A) < 1 - r$. Заметим, что $C_\tau \in \mathcal{SC}(-rM)$. Согласно доказанному в пункте а) существуют точки $a, c \in E$, такие что

$$\operatorname{int} C_\tau \subset c - \operatorname{int} rM \subset a - \operatorname{int} M \subset E \setminus A.$$

Поскольку $C \subset C_\tau$, то доказываемые включения получены.

2. Пусть выполнены условия пункта 2) теоремы 3.1. Если $\varrho_M(C, A) > 0$, то доказываемые включения получены в предыдущем пункте. Поэтому будем предполагать, что $\varrho_M(C, A) = 0$. По лемме 5.4 множество $A \cap C$ состоит из единственного элемента. Без потери общности будем считать, что $A \cap C = \{0\}$. Из леммы 6.2 следует, что $T(0, A) \cap \operatorname{int} C = \varnothing$. Согласно лемме 6.1 конус $T(0, A)$ является выпуклым. По теореме Хана—Банаха об отделимости существует ненулевой функционал $p \in E^*$, такой что $s\big(p, T(0, A)\big) \leqslant -s(-p, C)$. Используя равенство $A \cap C = \{0\}$, получаем, что $s\big(p, T(0, A)\big) = 0$, $s(-p, C) = 0$. Согласно пункту 1) леммы 6.7 справедливо неравенство $s(p, M) < +\infty$, т. е. $p \in \operatorname{dom} s(\cdot, M)$. По пункту 2) леммы 6.4 получаем включение $p \in \operatorname{int} \operatorname{dom} s(\cdot, M)$. Используя лемму 6.5, получаем рефлексивность пространства E. Поэтому функция $s(\cdot, M)$ имеет непустой субдифференциал в точке p. Это означает, что существует вектор $z \in \partial M$, такой что $\langle p, z\rangle = s(p, M)$. Согласно пункту 2) леммы 6.7 имеем, что $0 \in P_M(z, A)$. Поэтому

$$z - \operatorname{int} M \subset E \setminus A. \tag{6.23}$$

Так как $C \in \mathcal{SC}(-rM)$, то существует множество $C_1 \subset E$, такое что $C + C_1 = -rM$. Поскольку $z \in M$, $\langle p, z\rangle = s(p, M)$, а множество M строго выпукло, то согласно равенству (6.22) имеем, что $\operatorname{Exp}(p, M) = \{z\}$, т. е. $\operatorname{Exp}(-p, -rM) = \{-rz\}$. Поэтому по замечанию 6.2 существует и единственна пара точек $c_0 \in \operatorname{Exp}(-p, C)$, $c_1 \in \operatorname{Exp}(-p, C_1)$, причём $c_0 + c_1 = -rz$. Так как $0 \in C$ и $s(-p, C) = 0$, то $0 \in \operatorname{Exp}(-p, C)$. Поэтому $c_0 = 0$. Итак, $-rz = c_0 + c_1 = c_1 \in C_1$, а значит, $C - rz \subset C + C_1 = -rM$. Поэтому, используя включения (6.23) и $z \in M$, имеем

$$\operatorname{int} C \subset rz - \operatorname{int} rM \subset z - \operatorname{int} M \subset E \setminus A.$$

Полагая $c = rz$, $a = z$, получаем требуемое утверждение. □

7. Доказательство теоремы 3.2

Лемма 7.1. *Пусть квазишар $M \subset E$, векторы $x, y \in E$ и число $d > 0$ удовлетворяют неравенствам*

$$0 < \|x\| \leqslant d \cdot \mu_M(x), \quad 0 < \|y\| \leqslant d \cdot \mu_M(y).$$

Тогда для всякого $r \in (0, 1]$ имеем

$$\frac{\min\{\mu_M(x),\, \mu_M(y)\}}{rd} \cdot \delta_M\left(r\left\|\frac{x}{\mu_M(x)} - \frac{y}{\mu_M(y)}\right\|, 2d\right) \leqslant \\ \leqslant \mu_M(x) + \mu_M(y) - \mu_M(x+y), \tag{7.1}$$

где величина $\delta_M(\cdot, \cdot)$ определена формулой (3.8).

Доказательство. Обозначим

$$a = \frac{x}{\mu_M(x)}, \quad b = \frac{y}{\mu_M(y)}, \quad c = \frac{a+b}{2}, \quad \delta = \delta_M(r\|a-b\|, 2d).$$

Покажем, что

$$\mu_M(c) \leqslant 1 - \frac{\delta}{2rd}. \tag{7.2}$$

Так как $\|a\| \leqslant d$ и $\|b\| \leqslant d$, то ввиду равенства (3.8) имеем

$$\delta \leqslant \frac{r\|a-b\|}{2} \leqslant rd.$$

Поэтому в случае $\mu_M(c) \leqslant 1/2$ неравенство (7.2) выполнено. Пусть теперь $\mu_M(c) > 1/2$. Обозначим

$$c_0 = \frac{c}{\mu_M(c)}, \quad a_r = (1-r)c_0 + ra, \quad b_r = (1-r)c_0 + rb, \quad c_r = \frac{a_r + b_r}{2}.$$

Поскольку $\|c_0\| \leqslant 2\|c\| \leqslant 2d$, то $a_r, b_r \in M \cap \mathfrak{B}_{2d}$. Используя равенство (3.8) для $R = 2d$, $x = a_r$, $y = b_r$, $\varepsilon = r\|a-b\| = \|x-y\|$ и замечая, что $c_0 \in \partial M$, получаем неравенство $\|c_0 - c_r\| \geqslant \delta$. Так как $c_0 - c_r = r(c_0 - c)$, то

$$\|c_0 - c\| \geqslant \frac{\delta}{r}.$$

Отсюда и из равенства $c = \mu_M(c)c_0$ следует неравенство

$$\|c_0\| \cdot |1 - \mu_M(c)| \geqslant \frac{\delta}{r}.$$

Учитывая неравенства $\|c_0\| \leqslant 2d$, $\mu_M(c) \leqslant 1$, получаем неравенство (7.2).

Обозначим $\mu_1 = \mu_M(x)$, $\mu_2 = \mu_M(y)$. Без потери общности будем считать, что $\mu_2 \leqslant \mu_1$. Далее используем замечание 3.1 и учитываем, что $\mu_M(a) = 1$:

$$\mu_M(x+y) = \mu_M\big((\mu_1 - \mu_2)a + \mu_2(a+b)\big) \leqslant$$
$$\leqslant (\mu_1 - \mu_2) \cdot \mu_M(a) + \mu_2 \cdot \mu_M(a+b) = \mu_1 - \mu_2 + 2\mu_2 \cdot \mu_M(c).$$

Используя оценку (7.2), получаем

$$\mu_M(x+y) \leqslant \mu_1 + \mu_2 - \frac{\mu_2 \delta}{rd} = \mu_1 + \mu_2 - \frac{\delta}{rd}\min\{\mu_1, \mu_2\}. \qquad \square$$

Наряду с M-проекцией (3.4) будем рассматривать *приближённую M-проекцию* точки $x \in E$ на множество $A \subset E$ с точностью $\varepsilon > 0$:

$$P_M^{\varepsilon}(x, A) = A \cap (x - (\varrho_M(x, A) + \varepsilon)M). \tag{7.3}$$

Лемма 7.2. *Пусть параболичный квазишар $M \subset E$ является ограниченно равномерно выпуклым множеством. Пусть множество $A \in \mathcal{WC}(M)$ и точка $x_0 \in A$ удовлетворяют соотношениям $0 < \varrho_M(x_0, A) = r < 1$. Пусть положительные числа ε, ε_0, d и точки $a_0 \in P_M(x_0, A)$, $a \in P_M^{\varepsilon}(x_0, A)$ удовлетворяют неравенствам*

$$\max\{\|a - x_0\|, \|a_0 - x_0\|\} \leqslant dr, \quad \varepsilon d < (1-r)\delta_M(\varepsilon_0, 2d).$$

Тогда $\|a - a_0\| < (3/2)\varepsilon_0$.

Доказательство. Так как $a_0 \in P_M(x_0, A)$, то $\mu_M(x_0 - a_0) = r$. Обозначим

$$z = \frac{x_0 - a_0}{r}.$$

Согласно (3.6) имеем, что $z \in N_M^1(a_0, A)$. Так как $A \in \mathcal{WC}(M)$, то согласно (3.7) получаем, что $\varrho_M(a_0 + z, A) = 1$.

Обозначим $x = x_0 - a$, $y = (1 - r)z$. Используя равенство (7.3), получаем, что $r \leqslant \mu_M(x) \leqslant r + \varepsilon$. Поскольку $\mu_M(y) = 1 - r$, то

$$\mu_M(x + y) = \mu_M(a_0 + z - a) \geqslant \varrho_M(a_0 + z, A) = 1 \geqslant \mu_M(x) + \mu_M(y) - \varepsilon.$$

Так как $\max\{\|a - x_0\|, \|a_0 - x_0\|\} \leqslant dr$ и $r \leqslant \mu_M(x)$, то $\|x\| \leqslant dr \leqslant d \cdot \mu_M(x)$, $\|z\| \leqslant d$ и $\|y\| = (1 - r)\|z\| \leqslant d \cdot \mu_M(y)$. По лемме 7.1 с учётом неравенства

$$\varepsilon < \frac{(1 - r)\delta_M(\varepsilon_0, 2d)}{d}$$

получаем, что

$$\begin{aligned}
&\delta_M\left(r\left\|\frac{x}{\mu_M(x)} - \frac{y}{\mu_M(y)}\right\|, 2d\right) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \frac{rd}{\min\{\mu_M(x), \mu_M(y)\}}\bigl(\mu_M(x) + \mu_M(y) - \mu_M(x + y)\bigr) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \frac{\varepsilon rd}{\min\{r, 1 - r\}} \leqslant \frac{\varepsilon d}{1 - r} < \delta_M(\varepsilon_0, 2d).
\end{aligned} \tag{7.4}$$

Следовательно,

$$r\left\|\frac{x}{\mu_M(x)} - \frac{y}{\mu_M(y)}\right\| < \varepsilon_0.$$

Так как

$$\left\|\frac{rx}{\mu_M(x)} - x\right\| = \frac{\|x\|}{\mu_M(x)}(\mu_M(x) - r) \leqslant \varepsilon d,$$

то

$$\|a - a_0\| = \|(x_0 - a_0) - (x_0 - a)\| = \left\|\frac{ry}{\mu_M(y)} - x\right\| < \varepsilon_0 + \varepsilon d.$$

Из равенства (3.8) следует, что $\delta_M(\varepsilon_0, 2d) \leqslant \varepsilon_0/2$. Поэтому $\varepsilon d < \delta_M(\varepsilon_0, 2d) \leqslant \leqslant \varepsilon_0/2$, и следовательно, $\|a - a_0\| < (3/2)\varepsilon_0$. □

Лемма 7.3. *Пусть $M \subset E$ — равномерно гладкий и ограниченно равномерно выпуклый квазишар. Пусть либо квазишар M ограничен (при этом полагаем, что $v_M = 0$), либо квазишар M параболичен и коэрцитивен, v_M — его асимптотическое направление. Пусть множество $A \in \mathcal{WC}(M)$ удовлетворяет условию $A + \lambda v_M \subset A$ для любого $\lambda > 0$. Пусть $r \in (0, 1)$, $C \in \mathcal{SC}(-rM)$, $A \cap C \neq \varnothing$, $\operatorname{int} C \neq \varnothing$. Пусть*

$$\varkappa = \sup\{\|z\| \colon z \in N_M^1(a, A),\ a \in A \cap C\} < +\infty. \tag{7.5}$$

Пусть заданы такие положительные числа ε_0, ε, что

$$R = \sup_{x \in A \cap (C + \mathfrak{B}_\varepsilon)} \|x\| < +\infty, \quad d = \kappa + \frac{2R}{r}, \quad \varepsilon < \frac{(1-r)\sigma_M \delta_M(\varepsilon_0, 2d)}{d}. \tag{7.6}$$

Пусть $a \in A \cap (C + \mathfrak{B}_\varepsilon)$. Тогда существует точка $a_0 \in A \cap C$, для которой справедливо неравенство $\|a - a_0\| < (3/2)\varepsilon_0$.

Доказательство. Так как $a \in A \cap (C + \mathfrak{B}_\varepsilon)$, то существует точка $c_1 \in C$, такая что $\|c_1 - a\| \leqslant \varepsilon$. Для любого числа $t \in [0, 1]$ рассмотрим множество $C_t = (1-t)c_1 + tC$. Определим число

$$\tau = \inf\{t \in [0,1] \colon A \cap C_t \neq \varnothing\}.$$

Так как $A \cap C_1 = A \cap C \neq \varnothing$, то множество $\{t \in [0,1] \colon A \cap C_t \neq \varnothing\}$ не пусто и $\tau \leqslant 1$. Рассмотрим случай $\tau = 0$. Покажем, что в этом случае

$$c_1 \in A. \tag{7.7}$$

В случае $\tau = 0$ найдутся последовательность чисел $t_k > 0$, стремящаяся к нулю, и последовательность точек a_k, такие что $a_k \in A \cap C_{t_k}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Поскольку $C \in \mathcal{SC}(-rM)$, то существует вектор $d \in E$, такой что $C \subset d - rM$. Так как

$$a_k \in C_{t_k} = (1-t_k)c_1 + t_k C \subset (1-t_k)c_1 + t_k d - r t_k M,$$

то найдётся точка $z_k \in M$, такая что $a_k = (1-t_k)c_1 + t_k d - r t_k z_k$. Поскольку $a_k \in A \cap C$, а множество $A \cap C$ является ограниченным согласно первому из соотношений (7.6), то последовательность $\{t_k \|z_k\|\}$ является ограниченной. Поэтому найдётся подпоследовательность $\{t_{k_j} \|z_{k_j}\|\}$, сходящаяся к некоторому числу β. Заметим, что $\beta \geqslant 0$. Если $\beta = 0$, то

$$\lim_{j \to \infty} a_{k_j} = c_1.$$

Поэтому выполнено включение (7.7). Рассмотрим теперь случай $\beta > 0$. Если квазишар M ограниченный, то $\beta = 0$, поэтому в данном случае квазишар M параболичный и коэрцитивный. Следовательно,

$$\lim_{j \to \infty} \frac{z_{k_j}}{\|z_{k_j}\|} = v_M.$$

Тогда

$$\lim_{j \to \infty} a_{k_j} = c_1 - r\beta v_M.$$

Поскольку множество A замкнуто, справедливо включение $c_1 - r\beta v_M \in A$. Так как $A + r\beta v_M \subset A$, то справедливо включение (7.7). В этом случае положим $a_0 = c_1$.

Пусть теперь $\tau \in (0, 1]$. Тогда $A \cap \operatorname{int} C_\tau = \varnothing$ и $\varrho_M(C_\tau, A) = 0$. По лемме 5.4 найдётся точка $a_0 \in A \cap C_\tau$. Согласно теореме 3.1 существует вектор $c_0 \in E$, такой что

$$\operatorname{int} C_\tau \subset c_0 - \operatorname{int} \tau r M \subset E \setminus A.$$

Обозначим
$$z = \frac{c_0 - a_0}{\tau r}.$$
Так как $a_0 \in C_\tau \subset c_0 - \tau r M$, то $z \in M$. Поскольку $c_0 - \operatorname{int} \tau r M \subset E \setminus A$, то
$$\varrho_M(c_0, A) \geqslant \tau r \geqslant \tau r \mu_M(z) = \mu_M(c_0 - a_0).$$
Следовательно, $a_0 \in P_M(c_0, A)$ и $z \in \partial M$. По (3.6) имеем, что $z \in N_M^1(a_0, A)$. Используя соотношение (7.5), получаем, что $\|z\| \leqslant \kappa$. Согласно первому из соотношений (7.6) справедливо неравенство $\|a - a_0\| \leqslant 2R$. Обозначим $b = a_0 + rz$. Тогда, используя второе равенство формулы (7.6), получаем, что
$$\max\{\|a - b\|, \|a_0 - b\|\} \leqslant r\|z\| + \|a - a_0\| \leqslant r\kappa + 2R = rd.$$
Так как $A \in \mathcal{WC}(M) \subset \mathcal{WC}(rM)$, то $a_0 \in P_M(b, A)$ и $\varrho_M(b, M) = r$. Заметим, что
$$c_1 \in C_\tau \subset c_0 - \tau r M = a_0 + \tau r(z - M) \subset a_0 + r(z - M) = b - rM.$$
Используя замечание 3.3, получаем, что $\mathfrak{B}_{\sigma_M} \subset M$, а значит,
$$a \in \mathfrak{B}_\varepsilon(c_1) \subset b - (rM + \mathfrak{B}_\varepsilon) \subset b - (r + \varepsilon')\, M,$$
где $\varepsilon' = \varepsilon/\sigma_M$. Отсюда и из равенств (7.3), $\varrho_M(b, M) = r$ следует, что $a \in P_M^{\varepsilon'}(b, A)$. Применяя лемму 7.2, получаем доказываемое неравенство. $\square$

Лемма 7.4. *Пусть параболичный квазишар $M \subset E$ является ограниченно равномерно выпуклым множеством. Пусть множество $A \in \mathcal{WC}(M)$ является M-квазиограниченным и $a_0 \in \partial A$. Тогда найдётся последовательность $\{a_k\} \subset \partial A$, такая что $N_M^1(a_k, A) \neq \varnothing$ и $a_k \to a_0$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Так как $a_0 \in \partial A$, то найдётся последовательность $\{x_k\} \subset E \setminus A$, такая что $x_k \to a_0$ при $k \to \infty$. Поскольку $x_k \notin A$ и множество A является M-квазизамкнутым, то $\varrho_M(x_k, A) > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Так как функция $\varrho_M(\cdot, A)$ непрерывна, имеем, что $\varrho_M(x_k, A) \to \varrho_M(a_0, A) = 0$ при $k \to \infty$. Поэтому найдётся индекс k_0, такой что $\varrho_M(x_k, A) < 1/2$ при $k \geqslant k_0$. Согласно теореме 5.1 для любого $k \geqslant k_0$ найдётся точка $a_k \in P_M(x_k, A)$. Согласно равенству (3.6) при любом $k \geqslant k_0$ вектор
$$z_k = \frac{x_k - a_k}{\mu_M(x_k - a_k)}$$
удовлетворяет включению $z_k \in N_M^1(a_k, A)$. Осталось показать, что $a_k \to a_0$ при $k \to \infty$.

Обозначим $w = a_{k_0} + z_{k_0}$. Так как $A \in \mathcal{WC}(M)$, то по (3.7) справедливо равенство $(w - \operatorname{int} M) \cap A = \varnothing$. Поэтому $a_k \notin w - \operatorname{int} M$ для любого $k \geqslant k_0$. С другой стороны,
$$a_k \in x_k - \varrho_M(x_k, A)M \subset x_k - \frac{1}{2}M$$
при $k \geqslant k_0$. Поскольку $x_k \to a_0$, то по лемме 5.8 последовательность $\{a_k\}$ является ограниченной. Отсюда и из M-квазиограниченности множества A вытекает

ограниченность последовательности $\{z_k\}$. Так как $x_k \to a_0$ и $\mu_M(x_k - a_0) = \varrho_M(x_k, A) \to 0$, то $a_k = x_k - \mu_M(x_k - a_k)z_k \to a_0$ при $k \to \infty$. $\square$

Пусть (T, ϱ_T) — метрическое пространство. Для любых $t_0 \in T$ и $\delta > 0$ множество

$$U_\delta(t_0) = \{t \in T \colon \varrho_T(t, t_0) < \delta\}$$

будем называть *δ-окрестностью точки* t_0.

Лемма 7.5. *Пусть параболичный квазишар $M \subset E$ является ограниченно равномерно выпуклым множеством. Пусть многозначное отображение $A \colon T \to 2^E$ является R-непрерывным в точке $t_0 \in T$, причём семейство $\{A(t)\}_{t\in T}$ равностепенно M-квазиограниченное. Пусть $A(t) \in \mathcal{WC}(M)$ для любого $t \in T$. Тогда существуют число $\delta > 0$ и ограниченная функция $w \colon U_\delta(t_0) \to E$, такие что*

$$A(t) \cap (w(t) - \operatorname{int} M) = \varnothing \quad \text{для всех} \quad t \in U_\delta(t_0). \tag{7.8}$$

Доказательство. Зафиксируем точку $a_0 \in \partial A(t_0)$. Так как многозначное отображение A R-непрерывно, найдутся число $\delta > 0$ и функция $a_1 \colon U_\delta(t_0) \to E$, такие что $a_1(t) \in \partial A(t) \cap \mathfrak{B}_1(a_0)$ для любого $t \in U_\delta(t_0)$. По лемме 7.4 для любого $t \in U_\delta(t_0)$ существует вектор $a(t) \in \partial A(t) \cap \mathfrak{B}_1\big(a_1(t)\big)$, такой что $N^1_M\big(a(t), A(t)\big) \neq \varnothing$. Поэтому для любого $t \in U_\delta(t_0)$ найдётся вектор $z(t) \in N^1_M\big(a(t), A(t)\big)$. Так как $A(t) \in \mathcal{WC}(M)$, то в силу равенства (3.7) $A(t) \cap (a(t) + z(t) - \operatorname{int} M) = \varnothing$. Из равностепенной M-квазиограниченности семейства $\{A(t)\}_{t\in T}$ следует ограниченность функции $z \colon U_\delta(t_0) \to E$. Полагая $w(t) = a(t) + z(t)$, получаем требуемое утверждение. $\square$

Лемма 7.6. *Пусть квазишар $M \subset E$ является ограниченно равномерно выпуклым множеством. Пусть многозначное отображение $C \colon T \to 2^E$ R-непрерывно в точке $t_0 \in T$ и для любого $t \in T$ справедливо включение $C(t) \in \mathcal{SC}(M)$. Тогда существует функция $c_1 \colon T \to E$, непрерывная в точке t_0 и такая, что $C(t) + c_1(t) \subset M$ для любого $t \in T$.*

Доказательство. Так как $C(t) \in \mathcal{SC}(M)$ при всех $t \in T$, то для любого $t \in T$ существует множество $C_1(t) \subset E$, такое что $C(t) + C_1(t) = M$. Зафиксируем точку $z \in \partial M$. Тогда для любого $t \in T$ существуют точки $c(t) \in C(t)$ и $c_1(t) \in C_1(t)$, такие что

$$z = c(t) + c_1(t). \tag{7.9}$$

Тогда для любого $t \in T$ имеем

$$C(t) + c_1(t) \subset C(t) + C_1(t) = M.$$

Осталось доказать непрерывность функции $c_1(\cdot)$ в точке t_0. Предположим противное: найдутся число $\varepsilon \in (0, 1/2)$ и последовательность $\{t_k\} \subset T$, такие что $\varrho_T(t_k, t_0) \to 0$ при $k \to \infty$ и $\|c_1(t_k) - c_1(t_0)\| \geqslant \varepsilon$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Отсюда и из равенства (7.9) следует, что

$$\|c(t_k) - c(t_0)\| \geqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{7.10}$$

Поскольку многозначное отображение $C(\cdot)$ является R-непрерывным в точке $t_0 \in T$ и $\varrho_T(t_k, t_0) \to 0$ при $k \to \infty$, то найдётся последовательность $\{a_k\} \subset E$, такая что $a_k \in C(t_k)$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и

$$\lim_{k\to\infty} a_k = c(t_0). \tag{7.11}$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим точку

$$\tilde{c}_k = \begin{cases} c(t_k), & \|c(t_k) - a_k\| \leqslant 1, \\ a_k + \dfrac{c(t_k) - a_k}{\|c(t_k) - a_k\|}, & \|c(t_k) - a_k\| > 1. \end{cases} \tag{7.12}$$

В силу выпуклости множества $C(t_k)$ для каждого $k \in \mathbb{N}$ справедливо включение $\tilde{c}_k \in C(t_k)$. Согласно соотношению (7.11) существует индекс k_0, такой что $\|a_k - c(t_0)\| < 1/2$ при всех $k \geqslant k_0$. Покажем, что

$$\|\tilde{c}_k - c(t_0)\| \geqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad k \geqslant k_0. \tag{7.13}$$

Действительно, зафиксируем индекс $k \geqslant k_0$. Если $\|c(t_k) - a_k\| \leqslant 1$, то $\tilde{c}_k = c(t_k)$ и неравенство (7.13) следует из неравенства (7.10). Иначе $\|c(t_k) - a_k\| > 1$, и согласно (7.12) имеем $\|\tilde{c}_k - a_k\| = 1$. Используя неравенство $\|a_k - c(t_0)\| < 1/2$, получаем, что

$$\|\tilde{c}_k - c(t_0)\| \geqslant \|\tilde{c}_k - a_k\| - \|a_k - c(t_0)\| > \frac{1}{2} > \varepsilon,$$

и неравенство (7.13) снова выполнено.

Поскольку многозначное отображение $C(\cdot)$ R-непрерывно в точке $t_0 \in T$ и $\varrho_T(t_k, t_0) \to 0$ при $k \to \infty$, а последовательность $\{\tilde{c}_k\}$ является ограниченной, то найдётся последовательность $\{b_k\} \subset C(t_0)$, такая что

$$\lim_{k\to\infty} \|b_k - \tilde{c}_k\| = 0. \tag{7.14}$$

Отсюда и из неравенства (7.13) получаем, что существует индекс $k_1 \geqslant k_0$, такой что

$$\|b_k - c(t_0)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для всех} \quad k \geqslant k_1.$$

Следовательно, для последовательности векторов $z_k = z + b_k - c(t_0)$ справедливы соотношения

$$\|z_k - z\| = \|b_k - c(t_0)\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для каждого} \quad k \geqslant k_1. \tag{7.15}$$

Согласно равенству (7.9)

$$z - c(t_0) = c_1(t_0) \in C_1(t_0).$$

Поэтому

$$z_k \in b_k + C_1(t_0) \subset C(t_0) + C_1(t_0) = M.$$

Используя ограниченную равномерную выпуклость квазишара M и соотношение (7.15), получаем, что существует число $\delta > 0$, такое что

$$\mathfrak{B}_\delta\left(\frac{z_k + z}{2}\right) \subset M \quad \text{для всех} \quad k \geqslant k_1. \tag{7.16}$$

Так как $z \in \partial M$, то по теореме Хана—Банаха об отделимости найдётся функционал $p \in E^* \setminus \{0\}$, такой что $\langle p, z\rangle = s(p, M)$. Поскольку

$$a_k + c_1(t_k) \in C(t_k) + C_1(t_k) = M,$$

то

$$\langle p, a_k + c_1(t_k)\rangle \leqslant s(p, M) = \langle p, z\rangle = \langle p, c(t_k) + c_1(t_k)\rangle.$$

Поэтому $\langle p, a_k\rangle \leqslant \langle p, c(t_k)\rangle$, и согласно равенству (7.12)

$$\langle p, \tilde{c}_k\rangle \geqslant \langle p, a_k\rangle.$$

Используя соотношения (7.11), (7.14), получаем

$$\liminf_{k\to\infty}\langle p, b_k\rangle = \liminf_{k\to\infty}\langle p, \tilde{c}_k\rangle \geqslant \liminf_{k\to\infty}\langle p, a_k\rangle = \langle p, c(t_0)\rangle.$$

Следовательно,

$$\liminf_{k\to\infty}\langle p, z_k\rangle \geqslant \langle p, z\rangle.$$

С другой стороны, из включения (7.16) следует, что

$$\frac{1}{2}\langle p, z_k + z\rangle + \|p\|\delta \leqslant s(p, M)$$

для любого $k \geqslant k_1$. Поэтому

$$\langle p, z\rangle \leqslant \frac{1}{2}\liminf_{k\to\infty}\langle p, z_k + z\rangle \leqslant s(p, M) - \|p\|\delta,$$

что противоречит равенству $\langle p, z\rangle = s(p, M)$. □

Доказательство теоремы 3.2. По лемме 7.5 в некоторой δ-окрестности точки t_0 определена ограниченная функция $w\colon U_\delta(t_0) \to E$, удовлетворяющая условию (7.8). Согласно лемме 7.6 существует непрерывная в точке t_0 функция $c_1\colon T \to E$, такая что

$$C(t) + c_1(t) \subset -rM \quad \text{для всех} \quad t \in T. \tag{7.17}$$

Зафиксируем число $r_1 \in (r, 1)$. Положим $\varepsilon_1 = (r_1 - r)\sigma_M$. Тогда по замечанию 3.3 справедливо включение $\mathfrak{B}_{\sigma_M} \subset M$. Используя включение (7.17), получаем, что

$$C(t) + \mathfrak{B}_{\varepsilon_1} \subset -c_1(t) - rM + \mathfrak{B}_{(r_1 - r)\sigma_M} \subset -c_1(t) - r_1 M \quad \text{для каждого} \quad t \in T.$$

Отсюда и из равенства (7.8) следует, что

$$A(t) \cap (C(t) + \mathfrak{B}_{\varepsilon_1}) \subset (-c_1(t) - r_1 M) \setminus (w(t) - \operatorname{int} M) \quad \text{для каждого} \quad t \in U_\delta(t_0). \tag{7.18}$$

Из непрерывности функции $c_1(\cdot)$ в точке t_0 следует ограниченность этой функции в $U_{\delta_1}(t_0)$ при некотором $\delta_1 \in (0, \delta]$. Согласно второму утверждению леммы 5.5 и включению (7.18)

$$R := \sup_{t \in U_{\delta_1}(t_0)} \; \sup_{x \in A(t) \cap (C(t) + \mathfrak{B}_{\varepsilon_1})} \|x\| < +\infty.$$

Используя равностепенную M-квазиограниченность семейства $\{A(t)\}_{t\in T}$ (см. (3.13)), имеем

$$\kappa := \sup_{t\in U_{\delta_1}(t_0)} \sup_{a\in A(t)\cap C(t)} \sup_{z\in N^1_M(a,A(t))} \|z\| < +\infty.$$

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon_0 > 0$. Определим

$$d = \kappa + \frac{2R}{r}, \quad \varepsilon = \min\left\{\frac{\varepsilon_0}{2}, \varepsilon_1, \frac{(1-r)\sigma_M\delta_M(\varepsilon_0, 2d)}{2d}\right\}. \tag{7.19}$$

Так как многозначные отображения $A(\cdot)$ и $C(\cdot)$ R-непрерывны в точке t_0, найдётся число $\delta_2 \in (0, \delta_1]$, такое что

$$h_R\big(A(t), A(t_0)\big) + h_R\big(C(t), C(t_0)\big) + 2\varrho_T(t, t_0) \leqslant \varepsilon \text{ для всех } t \in U_{\delta_2}(t_0). \tag{7.20}$$

Покажем, что

$$h\big(F(t), F(t_0)\big) \leqslant 2\varepsilon_0 \text{ для всех } t \in U_{\delta_2}(t_0). \tag{7.21}$$

Пусть заданы точки $t_1, t_2 \in U_{\delta_2}(t_0)$ и вектор $x_1 \in F(t_1) = A(t_1)\cap C(t_1)$. Согласно определениям (2.1), (3.12) найдётся вектор $x_1' \in A(t_2)$, такой что

$$\|x_1 - x_1'\| \leqslant \varepsilon' := h_R\big(A(t_1), A(t_2)\big) + \varrho_T(t_1, t_2).$$

Обозначим

$$\varepsilon'' = h_R\big(C(t_1), C(t_2)\big) + \varrho_T(t_1, t_2).$$

Поскольку

$$x_1 \in C(t_1) \cap \mathfrak{B}_R \subset C(t_2) + \mathfrak{B}_{\varepsilon''},$$

то $x_1' \in A(t_2) \cap (C(t_2) + \mathfrak{B}_{\varepsilon'+\varepsilon''})$. Из неравенства (7.20) следует, что $\varepsilon' + \varepsilon'' \leqslant \varepsilon$. Тогда $x_1' \in A(t_2) \cap (C(t_2) + \mathfrak{B}_{\varepsilon})$, и в силу леммы 7.3 существует точка $x_2 \in F(t_2) = A(t_2) \cap C(t_2)$, удовлетворяющая неравенству $\|x_2 - x_1'\| < (3/2)\varepsilon_0$. Следовательно,

$$\|x_2 - x_1\| \leqslant \|x_2 - x_1'\| + \|x_1 - x_1'\| < \frac{3}{2}\varepsilon_0 + \varepsilon' \leqslant \frac{3}{2}\varepsilon_0 + \varepsilon \leqslant 2\varepsilon_0.$$

Так как вектор $x_1 \in F(t_1)$ произволен, из формулы (2.1) следует неравенство $h^+\big(F(t_1), F(t_2)\big) \leqslant 2\varepsilon_0$. Аналогично, $h^+\big(F(t_2), F(t_1)\big) \leqslant 2\varepsilon_0$, а значит, $h\big(F(t_1), F(t_2)\big) \leqslant 2\varepsilon_0$. Итак, неравенство (7.21) доказано. Так как число ε_0 произвольно, из неравенства (7.21) следует непрерывность многозначного отображения F в точке t_0. $\square$

8. Доказательство теорем 4.1, 4.3

Лемма 8.1. *Пусть функция* $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ *коэрцитивна. Тогда множество* $\operatorname{epi}\gamma$ *коэрцитивно и вектор* $(0_E, 1)$ *является асимптотическим направлением этого множества* (*здесь* 0_E — *нулевой элемент пространства* E).

Доказательство. Пусть последовательность векторов $z_k = (x_k, y_k) \in \operatorname{epi}\gamma$ удовлетворяет условию

$$\lim_{k\to\infty} \|z_k\| = +\infty.$$

Покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{y_k}{\|x_k\|} = +\infty. \tag{8.1}$$

Предположим противное. Тогда существует подпоследовательность $\{z_{k_j}\} = \{(x_{k_j}, y_{k_j})\}$, такая что

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{|y_{k_j}|}{\|x_{k_j}\|} < +\infty. \tag{8.2}$$

Если последовательность $\{x_{k_j}\}$ неограниченная, то это противоречит коэрцитивности функции γ. Если последовательность $\{x_{k_j}\}$ ограниченная, то ввиду неравенства (8.2) получаем ограниченность последовательности $\{y_k\}$, что противоречит условию

$$\lim_{k\to\infty} \|z_k\| = +\infty.$$

Итак, соотношение (8.1) доказано. Поэтому существует индекс k_0, такой что $y_k > 0$ при $k \geqslant k_0$. Согласно неравенствам (4.6) при $k \geqslant k_0$

$$1 \leqslant \frac{\|z_k\|}{y_k} \leqslant 1 + \frac{\|x_k\|}{y_k}.$$

Используя соотношения (8.1), получаем равенство

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|z_k\|}{y_k} = 1. \tag{8.3}$$

Из неравенств

$$\left\| \frac{z_k}{\|z_k\|} - (0_E, 1) \right\| \leqslant \frac{\|x_k\| + |y_k - \|z_k\||}{\|z_k\|} \leqslant \frac{\|x_k\| + |y_k - \|z_k\||}{|y_k|} = \frac{\|x_k\|}{|y_k|} + \left| 1 - \frac{\|z_k\|}{y_k} \right|$$

и соотношений (8.1), (8.3) следует равенство

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \frac{z_k}{\|z_k\|} - (0_E, 1) \right\| = 0. \qquad \square$$

Лемма 8.2 [19, лемма 10.1]. *Если функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ равномерно выпукла на любом шаре $\mathfrak{B}_R$, $R > 0$, то множество $\operatorname{epi}\gamma$ ограниченно равномерно выпукло.*

Лемма 8.3.

1. *Если функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ выпукла, непрерывна и коэрцитивна, то множество $\operatorname{epi}\gamma$ параболично.*
2. *Если дополнительно функция γ является ограниченной на любом ограниченном множестве, то множество $\operatorname{epi}\gamma$ сильно параболично.*

Первый пункт леммы 8.3 доказан в [17, лемма 2.5], второй пункт этой леммы — в [4, теорема 2.1].

Лемма 8.4. *Пусть функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ выпукла, непрерывна и является равномерно гладкой на любом шаре $\mathfrak{B}_R$, $R > 0$, пусть $\gamma(0) < 0$. Тогда множество $M = \operatorname{epi}\gamma$ — ограниченно равномерно гладкий квазишар.*

Доказательство. Из выпуклости и непрерывности функции γ следует выпуклость и замкнутость множества M. Пусть 0_E — нулевой элемент пространства E, $0_{E\times\mathbb{R}}$ — нулевой элемент пространства $E\times\mathbb{R}$. Так как функция γ непрерывна и $\gamma(0_E) < 0$, то $0_{E\times\mathbb{R}} \in \operatorname{int} M$. Итак, M — квазишар. Покажем, что

$$\sigma_M\beta_M(t,R) \leqslant \frac{3}{2}\beta_\gamma\left(2t\left(1+\frac{4R}{\sigma_M}\right), \mathfrak{B}_{4R}\right) \quad \text{для всех} \quad R > \sigma_M \quad \text{и} \quad t \in \left(0, \frac{\sigma_M}{2}\right), \tag{8.4}$$

где функция $\beta_M(\cdot,\cdot)$ определена равенством (3.10), функция $\beta_\gamma(\cdot,\cdot)$ — равенством (4.5), число σ_M — равенством (3.3).

Зафиксируем произвольные числа $R > \sigma_M$, $t \in (0, \sigma_M/2)$. Если $\beta_M(t,R) = 0$, то неравенство (8.4) выполнено. Поэтому будем предполагать, что $\beta_M(t,R) > 0$. Зафиксируем число $\delta \in \big(0, \beta_M(t,R)\big)$. В силу равенства (3.10) найдутся векторы $u \in \partial M \cap \mathfrak{B}_R \subset E\times\mathbb{R}$ и $v \in \mathfrak{B}_1 \subset E\times\mathbb{R}$, такие что

$$\frac{\mu_M(u+tv)+\mu_M(u-tv)}{2} - 1 > \beta_M(t,R) - \delta. \tag{8.5}$$

Пусть для определённости $\mu_M(u+tv) \geqslant \mu_M(u-tv)$. Используя выпуклость функции Минковского, получаем, что

$$\mu_M(u+tv) \geqslant \frac{1}{2}\big(\mu_M(u+tv)+\mu_M(u-tv)\big) \geqslant \mu_M(u) = 1.$$

Так как $|t| < \sigma_M/2$, то по замечанию 3.4

$$\frac{1}{2} \leqslant \mu_M(u) - \frac{|t|\cdot\|v\|}{\sigma_M} \leqslant \mu_M(u-tv) \leqslant \mu_M(u+tv) \leqslant \mu_M(u) + \frac{|t|\cdot\|v\|}{\sigma_M} \leqslant \frac{3}{2}.$$

Поскольку $\|u\| \leqslant R$, $|t| \leqslant R$, то $\|u+tv\| \leqslant 2R$, $\|u-tv\| \leqslant 2R$. Итак,

$$\mu_M(u+tv) \in \left[1, \frac{3}{2}\right], \quad \mu_M(u-tv) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right], \quad \|u+tv\| \leqslant 2R, \quad \|u-tv\| \leqslant 2R. \tag{8.6}$$

Обозначим

$$z_1 = \frac{u+tv}{\mu_M(u+tv)}, \quad z_2 = \frac{u-tv}{\mu_M(u-tv)}. \tag{8.7}$$

По замечанию 3.4 справедливо неравенство

$$|\mu_M(u+tv) - \mu_M(u-tv)| \leqslant \frac{2t}{\sigma_M}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\|z_1 - z_2\| \leqslant \\
&\quad \leqslant \left\| \frac{u+tv}{\mu_M(u+tv)} - \frac{u-tv}{\mu_M(u+tv)} \right\| + \|u-tv\| \left| \frac{1}{\mu_M(u+tv)} - \frac{1}{\mu_M(u-tv)} \right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \frac{2t}{\mu_M(u+tv)} + \frac{2t\|u-tv\|}{\sigma_M \mu_M(u+tv)\mu_M(u-tv)} \leqslant 2t\left(1 + \frac{4R}{\sigma_M}\right),
\end{aligned} \tag{8.8}$$

где последнее неравенство следует из неравенств (8.6). Используя замечание 3.1, получаем

$$\begin{aligned}
&\mu_M(z_1+z_2) \leqslant \\
&\quad \leqslant \mu_M\left(\frac{u+tv}{\mu_M(u+tv)} + \frac{u-tv}{\mu_M(u+tv)}\right) + \mu_M(u-tv)\left(\frac{1}{\mu_M(u-tv)} - \frac{1}{\mu_M(u+tv)}\right) = \\
&\quad = \frac{2}{\mu_M(u+tv)} + \frac{\mu_M(u+tv) - \mu_M(u-tv)}{\mu_M(u+tv)} = 2 - \frac{\mu_M(u+tv) + \mu_M(u-tv) - 2}{\mu_M(u+tv)}.
\end{aligned}$$

Согласно неравенству (8.5) получаем неравенство

$$\mu_M(z_1+z_2) < 2 - \frac{2(\beta_M(t,R) - \delta)}{\mu_M(u+tv)}.$$

Так как согласно соотношениям (8.6) справедливо неравенство $\mu_M(u+tv) \leqslant 3/2$, то

$$\frac{\mu_M(z_1+z_2)}{2} < 1 - \frac{2}{3}(\beta_M(t,R) - \delta). \tag{8.9}$$

Так как $\mu_M(z_1) = \mu_M(z_2) = 1$, то $z_1, z_2 \in \partial M = \partial \operatorname{epi} \gamma$. Поэтому существуют точки $x_1, x_2 \in E$, такие что

$$z_1 = \big(x_1, f(x_1)\big), \quad z_2 = \big(x_2, f(x_2)\big).$$

В силу соотношений (8.6), (8.7) справедливы неравенства $\|z_1\| \leqslant 4R$, $\|z_2\| \leqslant 4R$. Из неравенств (4.6) и (8.8) следует, что

$$\|x_1\| \leqslant 4R, \quad \|x_2\| \leqslant 4R, \quad \|x_1 - x_2\| \leqslant 2t\left(1 + \frac{4R}{\sigma_M}\right).$$

Поэтому согласно равенству (4.5)

$$\left| \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \right| \leqslant \hat{\beta} := \beta_\gamma\left(2t\left(1 + \frac{4R}{\sigma_M}\right), \mathfrak{B}_{4R}\right).$$

Отсюда и из неравенств (4.6) получаем, что точка

$$z = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$$

удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{z_1+z_2}{2} - z \right| \leqslant \hat{\beta}.$$

Поскольку $z \in \partial M$, то $\mu_M(z) = 1$, и согласно замечанию 3.4

$$\mu_M\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) \geqslant 1 - \frac{\hat{\beta}}{\sigma_M}.$$

Используя неравенство (8.9), приходим к неравенствам

$$1 - \frac{\hat{\beta}}{\sigma_M} \leqslant \mu_M\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right) < 1 - \frac{2}{3}(\beta_M(t,R) - \delta).$$

Переходя к пределу при $\delta \to +0$, получаем неравенство (8.4). Поскольку функция $\gamma(\cdot)$ является равномерно гладкой на шаре $\mathfrak{B}_{4R}$, то из неравенства (8.4) вытекает соотношение

$$\lim_{t\to+0} \frac{\beta_M(t,R)}{t} = 0.$$

В силу произвольности числа $R > \sigma_M$ множество M является ограниченно равномерно гладким. □

Лемма 8.5. *Пусть функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ выпуклая, коэрцитивная и ограниченная на любом ограниченном множестве, пусть $\gamma(0) < 0$. Пусть задана функция $\alpha\colon T \times E \to \mathbb{R}$ и для любого числа $R > 0$ существует число $L_\alpha(R)$, такое что при любом $t \in T$ функция $\alpha(t,\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L_\alpha(R)$ на шаре $\mathfrak{B}_R$. Пусть $M = \operatorname{epi}\gamma$, $A(t) = \operatorname{epi}\alpha(t,\cdot)$ для любого $t \in T$. Тогда семейство $\{A(t)\}_{t\in T}$ равностепенно M-квазиограниченное.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $R > 0$. Так как функция γ коэрцитивна, то существует число $r_\gamma > 0$, такое что

$$\frac{\gamma(x)-\gamma(0)}{\|x\|} > L_\alpha(R+1) \quad \text{для всех} \quad x \in E \setminus \mathfrak{B}_{r_\gamma}. \tag{8.10}$$

Поскольку функция γ ограниченная на шаре $\mathfrak{B}_{r_\gamma}$, то

$$C_\gamma := \sup_{x\in\mathfrak{B}_{r_\gamma}} \gamma(x) < +\infty.$$

Покажем, что

$$\sup_{t\in T} \sup_{a\in A(t)\cap\mathfrak{B}_R} \sup_{z\in N_M^1(a,A(t))} \|z\| \leqslant C_\gamma + r_\gamma. \tag{8.11}$$

Зафиксируем произвольные $t \in T$, $a = (a_x, a_y) \in A(t) \cap \mathfrak{B}_R$ и $z = (z_x, z_y) \in N_M^1\big(a, A(t)\big)$. Так как $a \in \partial A(t)$, $z \in \partial M$, то $a_y = \alpha(t, a_x)$, $z_y = \gamma(z_x)$. Поскольку $z \in N_M^1\big(a, A(t)\big)$, то согласно соотношениям (3.4)—(3.6) найдётся число $\tau > 0$, такое что $a + \tau z \notin A(t) + \operatorname{int}\tau M$. Заметим, что для любого числа $\varepsilon > 0$ выполнено включение

$$\big(a_x - \varepsilon\tau z_x, \alpha(t, a_x - \varepsilon\tau z_x)\big) \in A(t).$$

Следовательно,

$$\big(a_x + \tau z_x, \alpha(t,a_x) + \tau\gamma(z_x)\big) = a + \tau z \notin \big(a_x - \varepsilon\tau z_x, \alpha(t, a_x - \varepsilon\tau z_x)\big) + \operatorname{int}\tau M,$$

т. е.

$$\left((1+\varepsilon)z_x, \frac{\alpha(t,a_x)-\alpha(t,a_x-\varepsilon\tau z_x)}{\tau}+\gamma(z_x)\right)\notin \operatorname{int} M.$$

Поэтому, используя выпуклость функции γ, получаем

$$\varepsilon\big(\gamma(z_x)-\gamma(0)\big)\leqslant \gamma\big((1+\varepsilon)z_x\big)-\gamma(z_x)\leqslant \frac{\alpha(t,a_x)-\alpha(t,a_x-\varepsilon\tau z_x)}{\tau}. \qquad (8.12)$$

Поскольку $a=(a_x,a_y)\in\mathfrak{B}_R$, то $\|a_x\|\leqslant R$. Используя условие Липшица для функции $\alpha(t,\cdot)$ на шаре $\mathfrak{B}_{R+1}$ и неравенство (8.12) при достаточно малых $\varepsilon>0$, получаем неравенство

$$\gamma(z_x)-\gamma(0)\leqslant L_\alpha(R+1)\|z_x\|.$$

Отсюда и из неравенства (8.10) следует, что $\|z_x\|\leqslant r_\gamma$. Поэтому $|z_y| = |\gamma(z_x)|\leqslant C_\gamma$. Таким образом, $\|z\|\leqslant\|z_x\|+|z_y|\leqslant C_\gamma+r_\gamma$, и неравенство (8.11) доказано. По определению равностепенной M-квазиограниченности (см. (3.13)) получаем утверждение леммы. □

Лемма 8.6. *Пусть E — рефлексивное банахово пространство, функция $f\colon E\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ выпуклая, полунепрерывная снизу и коэрцитивная.*

1. *Если последовательность $\{x_n\}$ такова, что*

$$\inf_{n\in\mathbb{N}}\big(\langle p,x_n\rangle-f(x_n)\big)>-\infty \qquad (8.13)$$

для некоторого функционала $p\in E^*$, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, слабо сходящаяся к некоторой точке $x_0\in E$, при этом

$$f(x_0)\leqslant\liminf_{k\to\infty} f\big(x_{n_k}\big).$$

2. *Для любого $p\in E^*$ достигается $\max\limits_{x\in E}\big(\langle p,x\rangle-f(x)\big)$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет условию (8.13). Если эта последовательность неограниченная, то найдётся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, такая что

$$\lim_{k\to\infty}\big\|x_{n_k}\big\|=+\infty.$$

Тогда в силу коэрцитивности функции f

$$\frac{\langle p,x_{n_k}\rangle-f\big(x_{n_k}\big)}{\big\|x_{n_k}\big\|}\leqslant\|p\|-\frac{f\big(x_{n_k}\big)}{\big\|x_{n_k}\big\|}\to-\infty \ \text{ при } \ k\to\infty,$$

что противоречит условию (8.13). Поэтому последовательность $\{x_n\}$ ограниченная. Согласно теореме Банаха—Алаоглу существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, слабо сходящаяся к некоторой точке $x_0\in E$. Так как множество $\operatorname{epi} f$ выпукло и замкнуто, то по теореме Мазура оно слабо замкнуто. Поэтому

$$f(x_0)\leqslant\liminf_{k\to\infty} f\big(x_{n_k}\big).$$

Докажем утверждение 2. Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, такую что

$$\lim_{n\to\infty}\big(\langle p,x_n\rangle - f(x_n)\big) = \sup_{x\in E}\big(\langle p,x\rangle - f(x)\big).$$

Тогда выполнено условие (8.13) и согласно пункту 1 существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, слабо сходящаяся к некоторой точке $x_0\in E$, причём

$$f(x_0)\leqslant \liminf_{k\to\infty} f\big(x_{n_k}\big).$$

Следовательно,

$$\langle p,x_0\rangle - f(x_0)\geqslant \lim_{k\to\infty}\Big(\big\langle p,x_{n_k}\big\rangle - f\big(x_{n_k}\big)\Big) = \sup_{x\in E}\big(\langle p,x\rangle - f(x)\big). \qquad \square$$

Доказательство теоремы 4.1. Согласно лемме 8.2 и первому утверждению леммы 8.3 множество $\operatorname{epi}\gamma$ является параболичным ограниченно равномерно выпуклым квазишаром в пространстве $E\times\mathbb{R}$. Согласно лемме 6.5 пространство $E\times\mathbb{R}$ (а значит, и пространство E) рефлексивно. Применяя второе утверждение леммы 8.6 для функционала $p=0$, получаем, что минимум $\min\limits_{x\in E}\gamma(x)$ достигается в некоторой точке $x_0\in E$. Обозначим $C=\operatorname{epi} f$, $M=\operatorname{epi}\gamma$.

1. Пусть множество C — слагаемое множества M, т. е. существует множество $C'\subset E\times\mathbb{R}$, такое что $M=C+C'$. По замечанию 6.2, применённому для функционала $p\in(E\times\mathbb{R})^*$, заданного равенством $\langle p,(x,y)\rangle=-y$ при всех $(x,y)\in E\times\mathbb{R}$, точка $z_0=\big(x_0,\gamma(x_0)\big)$ представима в виде $z_0=z+z'$, где $z=\big(u_0,f(u_0)\big)$, $z'\in C'$, $f(u_0)=\min\limits_{u\in E} f(u)$. Поэтому $0\in\partial f(u_0)\cap\partial\gamma(x_0)$.

Зафиксируем теперь произвольные точки $u_1\in\operatorname{dom} f$, $x_1\in\operatorname{dom}\gamma$, такие что найдётся функционал $p_1\in\partial f(u_1)\cap\partial\gamma(x_1)$. Так как $p_1\in\partial\gamma(x_1)$ и функция γ строго выпукла, то $\max\limits_{(x,y)\in\operatorname{epi}\gamma}\big(\langle p_1,x\rangle - y\big)$ достигается в единственной точке $z_1:=\big(x_1,\gamma(x_1)\big)$. По замечанию 6.2 справедливо представление $z_1=z+z'$, где $z=\big(u_1,f(u_1)\big)$, $z'\in C'$. Следовательно, $C+z_1-z=C+z'\subset C+C'=M$. Поэтому для любой точки $u\in\operatorname{dom} f$ справедливо включение $\big(u,f(u)\big)+z_1-z\in M$, т. е.

$$\big(u+x_1-u_1, f(u)+\gamma(x_1)-f(u_1)\big)\in M=\operatorname{epi}\gamma,$$

а значит,

$$\gamma(u+x_1-u_1)\leqslant f(u)+\gamma(x_1)-f(u_1). \tag{8.14}$$

Поскольку для точек $u\in E\setminus\operatorname{dom} f$ неравенство (8.14) автоматически справедливо, то оно справедливо для всех $u\in E$. Производя замену переменной $u=u_1+w$, $w\in E$, получаем неравенство (4.3). Поэтому $f\in\mathcal{SC}(\gamma)$.

2. Пусть $f\in\mathcal{SC}(\gamma)$. Согласно определению существуют точки $x_0\in\operatorname{dom}\gamma$ и $u_0\in\operatorname{dom} f$, такие что $\partial f(u_0)\cap\partial\gamma(x_0)\neq\varnothing$ и справедливо соотношение (4.3). В частности,

$$\gamma(x_0+w)-\gamma(x_0)\leqslant f(u_0+w)-f(u_0)\quad\text{для каждого}\quad w\in E.$$

Отсюда и из коэрцитивности функции γ следует коэрцитивность функции f.

Рассмотрим функцию

$$g(v) = \sup_{u \in E} \bigl(\gamma(v+u) - f(u)\bigr), \quad v \in E. \tag{8.15}$$

Функция g выпукла и полунепрерывна снизу как супремум семейства выпуклых полунепрерывных снизу функций. Так как $g(v) \geqslant \gamma(v+u_0) - f(u_0)$ для любой точки $v \in E$, а функция γ коэрцитивна, то функция g также коэрцитивна. Применяя второе утверждение леммы 8.6 для функционала $p = 0$, получаем, что функции f и g являются ограниченными снизу. Обозначим

$$C = \operatorname{epi} f, \quad C' = \operatorname{epi} g, \quad M' = C + C'.$$

Множество M' выпукло как сумма Минковского двух выпуклых множеств. Покажем, что множество M' замкнуто. Пусть последовательность векторов $\{z_n\} \subset M'$ сходится к некоторому вектору $z^0 = (x^0, y^0) \in E \times \mathbb{R}$. Так как $z_n \in M' = C + C'$, то для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо представление $z_n = (x_n, y_n) + (x'_n, y'_n)$, где $y_n \geqslant f(x_n)$, $y'_n \geqslant g(x'_n)$. Поскольку функции f и g ограниченные снизу, то последовательности $\{y_n\}$ и $\{y'_n\}$ ограниченные снизу. Отсюда и из соотношения $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n + y'_n) = y^0$ следует, что эти последовательности являются ограниченными и сверху. Поэтому последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x'_n)\}$ ограниченные сверху. Применяя первое утверждение леммы 8.6 для $p = 0$, получаем существование такой подпоследовательности $\bigl\{z_{n_k}\bigr\}$, что последовательность $\bigl\{x_{n_k}\bigr\}$ слабо сходится к некоторому вектору u^0, последовательность $\bigl\{x'_{n_k}\bigr\}$ — к вектору v^0, причём

$$f(u^0) \leqslant \liminf_{k\to\infty} f\bigl(x_{n_k}\bigr), \quad g(v^0) \leqslant \liminf_{k\to\infty} g\bigl(x'_{n_k}\bigr).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + x'_n) = x^0$, то $u^0 + v^0 = x^0$. Поскольку

$$f(u^0) + g(v^0) \leqslant \liminf_{k\to\infty}(y_{n_k} + y'_{n_k}) = y^0$$

и

$$\bigl(u^0 + v^0, f(u^0) + g(v^0)\bigr) \in C + C' = M',$$

то $z^0 = (x^0, y^0) \in M'$. Итак, замкнутость множества M' доказана.

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что $M' = M$.

Пусть сначала $(x, y) \in C$, $(x', y') \in C'$. Тогда $y \geqslant f(x)$, $y' \geqslant g(x')$. По равенству (8.15) имеем, что $y' \geqslant \gamma(x+x') - f(x)$. Поэтому $y + y' \geqslant \gamma(x+x')$, т. е. $(x + x', y + y') \in \operatorname{epi}\gamma = M$. Итак, включение $M' \subset M$ доказано. Предположим, что обратное включение не выполнено, т. е. существует точка $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in M \setminus M'$.

Поскольку $\hat{z} \notin M'$, то по теореме Хана—Банаха об отделимости существует функционал $\tilde{p} \in (E \times \mathbb{R})^*$, такой что $s(\tilde{p}, M') < \langle \tilde{p}, \hat{z}\rangle$, т. е. существуют функционал $p \in E^*$ и числа $q \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$, такие что

$$\sup_{(x,y)\in M'} (\langle p, x\rangle - qy) + \varepsilon < \langle p, \hat{x}\rangle - q\hat{y}. \tag{8.16}$$

Так как для любой точки $(x,y) \in M'$ и для любого числа $t > 0$ справедливо включение $(x, y+t) \in M'$, то из неравенства (8.16) следует, что $q \geqslant 0$. Покажем, что можно считать $q > 0$. Действительно, предположим, что $q = 0$, т. е. $\sup\limits_{(x,y)\in M'} \langle p, x\rangle + \varepsilon < \langle p, \hat{x}\rangle$. Поскольку функции f и g ограниченные снизу, то

$$\sup_{(x,y)\in M'} (\hat{y} - y) = \hat{y} - \inf_{u\in E} f(u) - \inf_{v\in E} g(v) < +\infty.$$

Поэтому найдётся число $q_1 > 0$, такое что

$$q_1 \sup_{(x,y)\in M'} (\hat{y} - y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$\sup_{(x,y)\in M'} (\langle p, x\rangle - q_1 y) + \frac{\varepsilon}{2} < \langle p, \hat{x}\rangle - q_1 \hat{y}.$$

Таким образом, существуют функционал $p \in E^*$ и числа $q > 0$, $\varepsilon > 0$, для которых выполнено неравенство (8.16). Деля это неравенство на q и обозначая $p_0 = p/q$, получаем неравенство

$$\sup_{(x,y)\in M'} (\langle p_0, x\rangle - y) < \langle p_0, \hat{x}\rangle - \hat{y}.$$

Поскольку $\hat{z} = (\hat{x}, \hat{y}) \in M$, то для функционала $\tilde{p}_0 \in (E \times \mathbb{R})^*$, задаваемого равенством

$$\langle \tilde{p}_0, (x,y)\rangle = \langle p_0, x\rangle - y, \quad x \in E, \quad y \in \mathbb{R}, \tag{8.17}$$

справедливы неравенства

$$s(\tilde{p}_0, M') < \langle \tilde{p}_0, \hat{z}\,\rangle \leqslant s(\tilde{p}_0, M). \tag{8.18}$$

Согласно лемме 8.6(2) существуют векторы $\hat{u}_0 \in \operatorname{dom} f$ и $\hat{x}_0 \in \operatorname{dom}\gamma$, такие что

$$\max_{u\in E}\bigl(\langle p_0, u\rangle - f(u)\bigr) = \langle p_0, \hat{u}_0\rangle - f(\hat{u}_0), \quad \max_{x\in E}\bigl(\langle p_0, x\rangle - \gamma(x)\bigr) = \langle p_0, \hat{x}_0\rangle - \gamma(\hat{x}_0). \tag{8.19}$$

Согласно определению субдифференциала (4.1) получаем включение $p_0 \in \partial f(\hat{u}_0) \cap \partial\gamma(\hat{x}_0)$. Используя соотношение (4.3), получаем неравенство

$$\gamma(\hat{x}_0 + w) - \gamma(\hat{x}_0) \leqslant f(\hat{u}_0 + w) - f(\hat{u}_0) \ \text{ для каждого } \ w \in E.$$

Отсюда и из равенства (8.15) следует, что

$$g(\hat{x}_0 - \hat{u}_0) = \gamma(\hat{x}_0) - f(\hat{u}_0). \tag{8.20}$$

Кроме того, из равенства (8.15) для любого $v \in E$ получаем неравенство $g(v) \geqslant \gamma(v + \hat{u}_0) - f(\hat{u}_0)$. Поэтому согласно второму из равенств (8.19) и равенству (8.20)

$$g(v) \geqslant \gamma(\hat{x}_0) - f(\hat{u}_0) + \langle p_0, v - \hat{x}_0 + \hat{u}_0\rangle = g(\hat{x}_0 - \hat{u}_0) + \langle p_0, v - \hat{x}_0 + \hat{u}_0\rangle$$
$$\text{для каждого } \ v \in E.$$

Полагая
$$\hat{v}_0 = \hat{x}_0 - \hat{u}_0, \tag{8.21}$$
получаем, что
$$\max_{v \in E}\big(\langle p_0, v\rangle - g(v)\big) = \langle p_0, \hat{v}_0\rangle - g(\hat{v}_0). \tag{8.22}$$
Равенства (8.19), (8.22) означают, что для функционала $\tilde{p}_0$, задаваемого соотношением (8.17), справедливы равенства
$$s(\tilde{p}_0, \operatorname{epi} f) = \big\langle \tilde{p}_0, \big(\hat{u}_0, f(\hat{u}_0)\big)\big\rangle, \quad s(\tilde{p}_0, \operatorname{epi}\gamma) = \big\langle \tilde{p}_0, \big(\hat{x}_0, \gamma(\hat{x}_0)\big)\big\rangle,$$
$$s(\tilde{p}_0, \operatorname{epi} g) = \big\langle \tilde{p}_0, \big(\hat{v}_0, g(\hat{v}_0)\big)\big\rangle.$$
Из равенств (8.20), (8.21) следует, что
$$\big(\hat{x}_0, \gamma(\hat{x}_0)\big) = \big(\hat{u}_0, f(\hat{u}_0)\big) + \big(\hat{v}_0, g(\hat{v}_0)\big).$$
Поэтому
$$s(\tilde{p}_0, \operatorname{epi}\gamma) = s(\tilde{p}_0, \operatorname{epi} f) + s(\tilde{p}_0, \operatorname{epi} g),$$
т. е.
$$s(\tilde{p}_0, M) = s(\tilde{p}_0, C) + s(\tilde{p}_0, C') = s(\tilde{p}_0, M'),$$
что противоречит неравенствам (8.18). □

Доказательство теоремы 4.3. Пусть выполнены условия теоремы 4.3. Эти условия сохранятся, если функцию γ заменить функцией $\tilde{\gamma}(x) = \gamma(x) - \gamma(0) - 1$, для которой справедливо неравенство $\tilde{\gamma}(0) < 0$. Поэтому без потери общности будем считать, что $\gamma(0) < 0$.

В силу лемм 8.1—8.4 множество $M = \operatorname{epi}\gamma$ является коэрцитивным, сильно параболичным, ограниченно равномерно выпуклым и ограниченно равномерно гладким квазишаром, а $v_M = (0_E, 1)$ — асимптотическое направление множества M.

По условию многозначные отображения
$$t \mapsto A(t) = \operatorname{epi}\alpha(t, \cdot), \quad t \mapsto \operatorname{epi}\omega(t, \cdot)$$
являются R-непрерывными в точке t_0. Поэтому многозначное отображение
$$t \mapsto C(t) = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} \colon y \leqslant \omega(t, x)\}$$
обладает тем же свойством.

При любом $t \in T$ рассмотрим множество $C^-(t) = \operatorname{epi}\big(-\omega(t, \cdot)\big)$. Заметим, что
$$C^-(t) = \{(x, -y) \in E \times \mathbb{R} \colon (x, y) \in C(t)\}. \tag{8.23}$$
Поскольку $-\omega(t, \cdot) \in \mathcal{SC}(\gamma_r^-)$, то по теореме 4.1 для любого $t \in T$ справедливо включение $C^-(t) \in \mathcal{SC}(\operatorname{epi}\gamma_r^-)$, т. е. множество $C^-(t)$ выпукло, замкнуто и существует множество $C_1^-(t) \subset E \times \mathbb{R}$, такое что $C^-(t) + C_1^-(t) = \operatorname{epi}\gamma_r^-$. Отсюда и из равенства (8.23) следует, что множество $C(t)$ выпукло, замкнуто и существует множество
$$C_1(t) = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} \colon (x, -y) \in C_1^-(t)\},$$

такое что $C(t) + C_1(t) = -\operatorname{epi}\gamma_r$, где $\gamma_r(x) = r\gamma(x/r)$ при всех $x \in E$. Следовательно, $C(t) + C_1(t) = -r\operatorname{epi}\gamma$, т. е. $C(t) \in \mathcal{SC}(-rM)$ при всех $t \in T$.

Согласно теореме 4.2 для любого $t \in T$ справедливо включение $A(t) \in \mathcal{WC}(M)$. Поскольку $A(t) = \operatorname{epi}\alpha(t,\cdot)$ и $v_M = (0_E, 1)$, то $A(t) + \lambda v_M \subset A(t)$ при всех $\lambda > 0$, $t \in T$.

Так как для любого $t \in T$ существует точка $x \in E$, такая что $\alpha(t,x) \leqslant \omega(t,x)$, то $A(t) \cap C(t) \neq \varnothing$ при всех $t \in T$.

Согласно лемме 8.5 семейство $\{A(t)\}_{t\in T}$ равностепенно M-квазиограниченное.

По теореме 3.2 многозначное отображение

$$t \mapsto A(t) \cap C(t) = \{(x,y) \in E \times \mathbb{R} \colon \alpha(t,x) \leqslant y \leqslant \omega(t,x)\}$$

непрерывно по Хаусдорфу в точке $t_0 \in T$. □

Разделы 3, 7, лемма 6.1 и доказательство теоремы 3.1 из раздела 6 выполнены М. С. Лопушански. Разделы 1, 2, 4, 5, 8 и оставшиеся леммы из раздела 6 выполнены Г. Е. Ивановым. Исследование Г. Е. Иванова проведено за счёт Российского фонда фундаментальных исследований (проект 16-01-00259-а) в Московском физико-техническом институте. Исследование М. С. Лопушански выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00443) в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Литература

[1] Алимов А. Р., Карлов М. И. Множества с внешним чебышёвским слоем // Мат. заметки. — 2001. — Т. 69, № 2. — С. 303—307.

[2] Балашов М. В., Иванов Г. Е. Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. — 2009. — Т. 73, № 3. — С. 23—66.

[3] Иванов Г. Е. Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. — М.: Физматлит, 2006.

[4] Иванов Г. Е. Аппроксимативные свойства множеств относительно функции Минковского // Проблемы фундаментальной и прикладной математики. — М.: МФТИ, 2009. — С. 76—105.

[5] Иванов Г. Е., Лопушански М. С. Аппроксимативные свойства слабо выпуклых множеств в пространствах с несимметричной полунормой // Тр. МФТИ. — 2012. — Т. 4, № 4. — С. 94—104.

[6] Иванов Г. Е., Лопушански М. С. Исчисление параметров выпуклости суммы Минковского сильно и слабо выпуклых множеств относительно неограниченного квазишара // Тр. МФТИ. — 2014. — Т. 6, № 2. — С. 26—37.

[7] Alimov A. R. Monotone path-connectedness of R-weakly convex sets in spaces with linear ball embedding // Eurasian Math. J. — 2012. — Vol. 3, no. 2. — P. 21—30.

[8] Balashov M. V., Repovš D. Uniform convexity and the splitting problem for selections // J. Math. Anal. Appl. — 2009. — Vol. 360, no. 1. — P. 307—316.

[9] Balashov M. V., Repovš D. Weakly convex sets and modulus of nonconvexity // J. Math. Anal. Appl. — 2010. — Vol. 371, no. 1. — P. 113—127.

[10] Bernard F., Thibault L., Zlateva N. Characterization of proximal regular sets in super reflexive Banach spaces // J. Convex Anal. — 2006. — Vol. 13. — P. 525—559.

[11] Bernard F., Thibault L., Zlateva N. Prox-regular sets and epigraphs in uniformly convex Banach spaces: Various regularities and other properties // Trans. Am. Math. Soc. — 2011. — Vol. 363. — P. 2211—2247.

[12] Bouligand G. Sur les surfaces dépourvues de points hyperlimites // Ann. Soc. Polon. Math. — 1930. — Vol. 9. — P. 32—41.

[13] Clarke F. H., Stern R. J., Wolenski P. R. Proximal smoothness and lower-C^2 property // J. Convex Anal. — 1995. — Vol. 2, no. 1, 2. — P. 117—144.

[14] Clarkson J. A. Uniformly convex spaces // Trans. Am. Math. Soc. — 1936. — Vol. 40. — P. 396—414.

[15] Day M. M. Some more uniformly convex spaces // Bull. Amer. Math. Soc. — 1941. — Vol. 47. — P. 504—507.

[16] Federer H. Curvature measures // Trans. Am. Math. Soc. — 1959. — Vol. 93. — P. 418—491.

[17] Ivanov G. E. On well posed best approximation problems for a nonsymmetric seminorm // J. Convex Anal. — 2013. — Vol. 20, no. 2. — P. 501—529.

[18] Ivanov G. E. Continuity and selections of the intersection operator applied to nonconvex sets // J. Convex Anal. — 2015. — Vol. 22, no. 4. — P. 939—962.

[19] Ivanov G. E. Weak convexity of sets and functions in a Banach space // J. Convex Anal. — 2015. — Vol. 22, no. 2. — P. 365—398.

[20] Ivanov G. E., Lopushanski M. S. Well-posedness of approximation and optimization problems for weakly convex sets and functions // J. Math. Sci. — 2015. — Vol. 209, no. 1. — P. 66—87.

[21] Poliquin R. A., Rockafellar R. T. Prox-regular functions in variational analysis // Trans. Am. Math. Soc. — 1996. — Vol. 348. — P. 1805—1838.

[22] Poliquin R. A., Rockafellar R. T., Thibault L. Local differentiability of distance functions // Trans. Am. Math. Soc. — 2000. — Vol. 352. — P. 5231—5249.

[23] Vial J.-P. Strong and weak convexity of sets and functions // Math. Ops. Res. — 1983. — Vol. 8, no. 2. — P. 231—259.