Мера Винера на группе Гейзенберга и параболические уравнения

С. В. МАМОН
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*
e-mail: sergey-mamon-msu@ya.ru

УДК 512.813.52+517.955.4+517.983.37+517.987.4+519.216.22

Ключевые слова: группа Гейзенберга, интеграл Винера, сублапласиан, марковский процесс на группе Гейзенберга, однопараметрическая полугруппа операторов, производящий оператор полугруппы, формула Фейнмана—Каца.

Аннотация

В статье изучаются вопросы, относящиеся к теории стохастических процессов на нильпотентных группах Ли. В частности, рассматривается случайный процесс на группе Гейзенберга $H_3(\mathbb{R})$, траектории которого в стохастическом смысле удовлетворяют условиям горизонтальности относительно стандартной контактной структуры на $H_3(\mathbb{R})$. Показано, что этот процесс является марковским относительно гейзенберговской групповой операции. Найдено представление в виде винеровского интеграла однопараметрической полугруппы операторов, для которой сублапласиан, порождённый базисными векторными полями соответствующей алгебры Ли $L(H_3)$, является производящим. Основным методом решения задачи в работе является использование интегралов по траекториям; общность метода указывает на дальнейшие направления развития полученных результатов.

Abstract

S. V. Mamon, The Wiener measure on the Heisenberg group and parabolic equations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 4, pp. 67—98.

In this paper, we study questions related to the theory of stochastic processes on Lie nilpotent groups. In particular, we consider the stochastic process on the Heisenberg group $H_3(\mathbb{R})$ whose trajectories satisfy the horizontal conditions in the stochastic sense relative to the standard contact structure on $H_3(\mathbb{R})$. It is shown that this process is a homogeneous Markov process relative to the Heisenberg group operation. There was found a representation in the form of a Wiener integral for a one-parameter linear semigroup of operators for which the Heisenberg sublaplacian generated by basis vector fields of the corresponding Lie algebra $L(H_3)$ is producing. The main method of solving the problem in this paper is using the path integrals technique, which indicates the common direction of further development of the results.

Введение

В [23, 25] впервые было вычислено тепловое ядро, отвечающее сублапласиану $\mathcal{L}$ на группе Гейзенберга $H_{2n+1}(\mathbb{R})$, с использованием техники преобразования Фурье. Также вопрос о нахождении теплового ядра на $H_{2n+1}(\mathbb{R})$

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 4, с. 67—98.

рассматривался С. Ватанабэ в [31], где оно выводилось с использованием исчисления Маллявена. Исследование свойств сублапласиана на $H_{2n+1}(\mathbb{R})$ можно найти, например, в [22], где устанавливается ряд неравенств, которым удовлетворяет $\mathcal{L}$.

В данной работе показано, как тепловое ядро $\mathcal{E}^+$ может быть представлено и вычислено с помощью техники интегрирования в пространстве $C[0,t] \times C[0,t]$ траекторий винеровского процесса на плоскости $\mathbb{R}^2$. Показано, что случайный процесс, связанный $\mathcal{E}^+$, является однородным марковским процессом относительно групповой операции в $H_{2n+1}(\mathbb{R})$ и является образом винеровского процесса в $\mathbb{R}^2$ при соответствующем отображении в $H_{2n+1}(\mathbb{R})$. Кроме того, данный процесс является модельным примером процесса, траектории которого горизонтальны в стохастическом смысле относительно стандартной контактной структуры на $H_3(\mathbb{R})$, рассматриваемой как многообразие Карно—Каратеодори. Тем самым проявляется его связь с контактной геометрией. Основным результатам работы является получение с помощью этой техники представления однопараметрической полугруппы операторов, порождаемой сублапласианом, в виде интеграла Винера.

1. Основные определения и обозначения

1.1. Плотность распределения площади, ограниченной траекториями броуновского моста

Начнём с рассмотрения вероятностной геометрической конструкции, которая будет присутствовать в различных построениях на протяжении всего дальнейшего изложения.

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ движение частицы (точки M_τ), координаты которой являются независимыми случайными процессами и даются уравнениями

$$\mathbf{r}(\tau) = \big(x(\tau), y(\tau)\big),$$

где

$$x(\tau) = W^1(\tau) - \frac{\tau}{t} W^1(t) + \frac{\tau}{t} X, \tag{1}$$

$$y(\tau) = W^2(\tau) - \frac{\tau}{t} W^2(t) + \frac{\tau}{t} Y, \tag{2}$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant t,$$

где $W^1(\tau)$ и $W^2(\tau)$ — независимые винеровские процессы, $(X;Y)$ — фиксированная точка на плоскости $\mathbb{R}^2$. Очевидно, что данная частица, начиная движение из начала координат в начальный момент времени $\tau = 0$, в момент $\tau = t$ приходит в точку (X,Y). Иными словами, уравнения (1) и (2) задают траектории двумерного броуновского моста с концами в начале координат и точке (X,Y).

Кроме того, площадь $\mathbf{S}$ фигуры, заметаемая траекторией этого броуновского моста, является семейством случайных величин $\mathbf{S}(t)$, соответствующих различным значениям времени t.

Рассмотрим задачу нахождения плотности распределения случайной величины $\mathbf{S}(t)$. При этом под $\mathbf{S}(t)$ будем понимать ориентированную площадь, ограниченную замкнутым контуром C, состоящим из участка траектории, отвечающего отрезку времени $\tau \in [0,t]$, и отрезка прямой, соединяющего концы броуновского моста. Основным инструментом для получения результатов данной статьи является интегрирование в пространстве $C[0,t]$ непрерывных траекторий по мере Винера, поэтому ниже, в разделе 1.2, будут подробно рассмотрены вопросы, связанные с ориентированной площадью, и будет показано, как эту площадь можно выразить с помощью винеровского интеграла. Сначала же напомним основные определения из теории меры Винера.

1.2. Условная мера Винера и представление плотности винеровским интегралом

Условная мера Винера

Обозначим через $C_{t,X}$ пространство всех непрерывных на отрезке $[0,t]$ функций, удовлетворяющих условиям $x(0)=0$, $x(t)=X$. Как известно (см., например, [4]), на σ-алгебре цилиндрических множеств $C_{B,\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}}$, где $B = [a_1,b_1]\times\ldots\times[a_{n-1},b_{n-1}]$, вида

$$C_{B,\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}} = \{x(\tau)\in C_{t,X} : a_1 < x(\tau_1) < b_1, \ldots,\ a_{n-1} < x(\tau_{n-1}) < b_{n-1}\}$$

этого пространства определена цилиндрическая мера $P(C)$:

$$P(C) = \frac{1}{[\pi^n \tau_1(\tau_2-\tau_1)\cdots(\tau_n-\tau_{n-1})]^{1/2}} \times$$
$$\times \int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2}\cdots\int\limits_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \exp\left\{-\frac{x_1^2}{\tau_1} - \frac{(x_2-x_1)^2}{\tau_2-\tau_1} - \ldots - \frac{(X-x_{n-1})^2}{\tau_n-\tau_{n-1}}\right\} dx_1\,dx_2\ldots dx_{n-1}$$

(здесь нумерация моментов времени идёт от 1 до $n-1$, поскольку $x(\tau_0) = x(0) = 0$, $x(\tau_n) = x(t) = X$). Эту меру по теореме А. Н. Колмогорова [11] можно продолжить на пространство $C_{t,X}$ всех непрерывных функций $x(\tau)$ непрерывного параметра τ. Полученная в результате мера называется *«условной» мерой Винера*; следуя И. М. Гельфанду [4], будем обозначать её через $W(t,X)$. Интеграл по условной мере Винера (в случае его существования) от функционала $F[x(\tau)]$ может быть вычислен следующим образом: непрерывная функция $x(\tau)$ заменяется ломаной

$$x(0)=0,\ x(\tau_1)=x_1,\ldots,\ x(\tau_{n-1})=x_{n-1},\ x(\tau_n)=X,$$

где точки $\tau_0=0$, $\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}$, $\tau_n = X$ делят интервал $[0,t]$ на n равных частей длины $\Delta t = t/n$. Тогда интеграл от $F[x(\tau)]$ по условной мере Винера определяется следующим образом[1]:

$$\int\limits_{C_{t,X}} F[x(\tau)]\, d_{W(t,X)}x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\pi\Delta t)^{n/2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F[x_1, \dots, x_{n-1}] \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{x_1^2}{\tau_1} - \frac{(x_2-x_1)^2}{\tau_2-\tau_1} - \dots - \frac{(X-x_{n-1})^2}{\tau_n-\tau_{n-1}}\right\} dx_1\, dx_2 \dots dx_{n-1}.$$

Аналогичным образом определяется двойной интеграл Винера по условной мере $W(t,X)\times W(t,Y)$ от функционала $F[x(\tau), y(\tau)]$, зависящего от двух независимых траекторий $x(\tau)$ и $y(\tau)$, таких что $x(0) = y(0) = 0$ и $x(t) = X$, $y(t) = Y$. Пространство соответствующих двумерных траекторий естественно обозначить через $C_{t,X}\times C_{t,Y}$.

Дельта-функция Дирака и представление плотности интегралом Винера

Напомним, что *преобразованием Фурье* функции $f(x)\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ называется комплексная функция $F(y)$

$$F(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi y} f(\xi)\, d\xi,$$

являющаяся для любой функции $f(x)\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ равномерно непрерывной на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющая свойствам [3]

$$|F(y)| \leqslant \|f\|_{\mathscr{L}^1} \quad \text{и} \quad \lim_{|y|\to\infty} F(y) = 0$$

Кроме того, отметим следующую важную для дальнейшего теорему (см., например, [3]).

Теорема 1. *Пусть функция $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ в некоторой точке x удовлетворяет условию Дини: функция*

$$g(t) = \frac{f(x+t) - 2f(x) + f(x-t)}{t}$$

интегрируема в окрестности нуля. Тогда справедлива формула обращения

$$f(x) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-R}^{+R} e^{-ixy} F(y)\, dy := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\xi-y)} f(\xi)\, d\xi\, dy, \tag{3}$$

[1]На самом деле кратная аппроксимация $F[x_1,\dots,x_{n-1}]$ зависит от всех точек $x_0,\dots,x_n$, т. е. $F[x_1,\dots,x_{n-1}] = F[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n]$, где $x_0 = 0$, $x_n = X$. Обычно указывают только те точки, которые соответствуют свободным концам траектории марковской цепи, приближающей траекторию $x(\tau)$, так как по ним производится интегрирование. Например, для $F[x(\tau)] = \int\limits_0^t x^2(\tau)\, d\tau$ будем иметь $F[x_1,\dots,x_{n-1}] = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^2\cdot\Delta t$, где $x_0 = 0$, $x_n = X$, $\Delta t = t/n$.

которую также называют представлением функции $f(x)$ в виде интеграла Фурье.

Отметим, что для всякой дифференцируемой в точке x функции $f(x)$ теорема 1 очевидно выполнена.

Соотношение (3), записанное в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\xi - x)y}\, dy \right] f(\xi)\, d\xi, \tag{4}$$

может рассматриваться как действие линейного функционала на функцию $f \in \mathscr{L}^1$, удовлетворяющую условиям теоремы 1, и этот функционал не что иное, как дельта-функция Дирака δ_x, сосредоточенная в точке x. В этом смысле для дельта-функции часто говорят о справедливости представления

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\rho} d\rho,$$

а соотношение (4) записывают в виде

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - x) f(\xi)\, d\xi, \tag{5}$$

подразумевая под ним действие функционала δ_x на f:

$$\langle \delta_x, f \rangle = f(x).$$

Соотношение (5) будет часто использоваться ниже для сокращения записи.

Как известно, ориентированная площадь, ограниченная замкнутым контуром C на плоскости Oxy, представляется с помощью формулы Грина следующим криволинейным интегралом второго рода:

$$S = \frac{1}{2} \oint_C x\, dy - y\, dx. \tag{6}$$

Наиболее общий случай, который нас будет интересовать, — это контур, состоящий из двух точек (ξ, η), (X, Y), отрезка γ кривой, определяемой параметрическими уравнениями $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$ и такой, что $x(t_0) = \xi$, $y(t_0) = \eta$, $x(t) = X$, $y(t) = Y$, и отрезка l прямой, соединяющего точки (ξ, η) и (X, Y). При этом будем, как обычно, считать, что при изменении параметра τ от t_0 до t положительно ориентированной является та часть области, ограниченной контуром γ, которая при обходе остаётся слева.

Переходя к параметрическим уравнениям кривых, составляющих контур C, в интеграле (6), получим, что он равен

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} x(\tau)\, dy(\tau) - y(\tau)\, dx(\tau) + \frac{1}{2}(\eta X - \xi Y). \tag{7}$$

Рассмотрим теперь контур, заметаемый траекторией двумерного броуновского моста $\big(x(\tau), y(\tau)\big)$ с концами (ξ, η) и (X, Y), когда параметр изменяется от t_0 до t, т. е. контур, описанный выше, в котором роль кривой $\big(x(\tau), y(\tau)\big)$ играет траектория броуновского моста. Очевидно, что ориентированная площадь области, ограниченной этим контуром, является случайной величиной, которую мы обозначим $S^+(\xi, \eta, t_0; X, Y, t)$ (строго говоря, это случайное поле с двумерным временным параметром $\bar{\mathbf{t}} = (t_0, t)$). Принимая во внимание вышесказанное, определим площадь, заметаемую траекторией броуновского моста на плоскости Oxy, выражением (7), в котором интеграл понимается в смысле Ито [12].

Рассмотрим теперь важный для дальнейшего изложения случай, когда $\xi = \eta = 0$, $t_0 = 0$. Для этого частного случая ориентированную площадь S^+ обозначим через $z^+(t)$, т. е.

$$z^+(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t x(\tau)\, dy(\tau) - y(\tau)\, dx(\tau). \tag{8}$$

В 1940 г. П. Леви в [27] показал, что совместный закон распределения

$$P(z^+(t) \in B_1,\ r(t) \in B_2),$$

где $r(t)$ — случайная величина расстояния от точки $\big(x(t), y(t)\big)$ до начала координат, является абсолютно непрерывным, т. е. существует интегрируемая по Лебегу неотрицательная функция $p(z, r, t)$ (плотность совместного распределения $z^+(t)$ и $r(t)$), такая что

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} p(\xi, \eta, t)\, d\xi\, d\eta = 1,$$

причём

$$P(z^+(t) \in B_1,\ r(t) \in B_2) = \iint\limits_{\substack{\xi \in B_1 \\ \eta \in B_2}} p(\xi, \eta, t)\, d\xi\, d\eta.$$

Более того, П. Леви было показано, что функция $p(z, r, t)$ является непрерывной вместе со своими производными двух первых порядков. Это означает, что определена также и условная плотность

$$p_{z^+(t)|r(t)}(z, t \mid r(t) = R) = \frac{p(z, R, t)}{p_{r(t)}(R, t)},$$

являющаяся дважды дифференцируемой по z функцией и определяющая условный закон распределения ориентированной площади $z^+(t)$

$$P(z^+(t) \in B \mid r(t) = R) = \int\limits_{\xi \in B} p_{z^+(t)|r(t)}(\xi, t \mid r(t) = R)\, d\xi,$$

где $p_{r(t)}(R,t)$ — безусловная плотность распределения расстояния $r(t)$. Несложно понять, что распределение ориентированной площади $z^+(t)$ не зависит от направления радиус-вектора точки $\bigl(x(t),y(t)\bigr)$. Иными словами, определено условное распределение $z^+(t)$ при условии $\mathbf{r}(t) := \bigl(x(t),y(t)\bigr) = (X,Y)$, и справедливо равенство

$$P(z^+(t)\in B \mid x(t)=X,\ y(t)=Y) = P\bigl(z^+(t)\in B \mid r(t)=\sqrt{X^2+Y^2}\bigr).$$

Естественно, при этом определена соответствующая условная плотность и справедливо равенство

$$p_{z^+(t)|(x(t),y(t))}(Z,t \mid x(t)=X,\ y(t)=Y) = p_{z^+(t)|r(t)}\bigl(Z,t \mid r(t)=\sqrt{X^2+Y^2}\bigr).$$

Будем обозначать эту плотность просто с одним индексом z^+:

$$p_{z^+}(Z,t \mid x(t)=X,\ y(t)=Y).$$

Поскольку функция $p_{z^+}(Z,t \mid x(t)=X,\ y(t)=Y)$ является дифференцируемой по Z функцией, то на ней корректно определено действие дельта-функции Дирака. (На самом деле дельта-функция корректно определяется и для непрерывных функций, но поскольку наша плотность является дифференцируемой, мы будем довольствоваться условиями, описанными в начале этого пункта.) Воспользовавшись обозначениями из равенства (5), будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi-Z)p_{z^+}(\xi,t \mid x(t)=X,\ y(t)=Y)\,d\xi = p_{z^+}(Z,t \mid x(t)=X,\ y(t)=Y). \quad (9)$$

Обозначим теперь через $p(X,Y,Z,t)$ плотность совместного распределения вектора

$$\bigl(x(t),y(t),z^+(t)\bigr).$$

Так как

$$p(X,Y,Z,t) = p_{x,y}(X,Y,t)\cdot p_{z^+}(Z,t \mid x(t)=X,\ y(t)=Y),$$

где

$$p_{x,y}(X,Y,t) = \frac{1}{\pi t}\exp\left\{-\frac{X^2+Y^2}{t}\right\} - \quad (10)$$

плотность совместного распределения вектора $\bigl(x(t),y(t)\bigr)$, то, домножая равенство (9) на множитель, определяемый равенством (10), получаем для $p(X,Y,Z,t)$ представление

$$\frac{1}{\pi t}\exp\left\{-\frac{X^2+Y^2}{t}\right\}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi-Z)p_{z^+}(\xi,t \mid x(t)=X,\ y(t)=Y)\,d\xi = p(X,Y,Z,t). \quad (11)$$

Расписывая теперь равенство (11) подробнее в терминах интеграла Фурье, приведём его к виду

$$\frac{1}{\pi t}\exp\left\{-\frac{X^2+Y^2}{t}\right\}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\xi-Z)\rho}p_{z^+}(\xi,t\mid x(t)=X,\ y(t)=Y)\,d\xi\right\}d\rho = \\ = p(X,Y,Z,t). \quad (12)$$

В этом выражении интеграл в фигурных скобках есть не что иное, как условное математическое ожидание случайной величины

$$e^{i(z^+(t)-Z)\rho}$$

при условии, что $x(t)=X$, $y(t)=Y$. С другой стороны, так как случайная величина $z(t)$ — это интегральный функционал от двух независимых винеровских процессов $x(\tau)$ и $y(\tau)$, а именно

$$z^+(t)=\mathcal{F}[x(\tau),y(\tau)]=\frac{1}{2}\int\limits_0^t x(\tau)dy(\tau)-y(\tau)dx(\tau),$$

то указанное выше условное математическое ожидание равно условному математическому ожиданию функционала

$$\mathcal{G}[x(\tau),y(\tau)]=\exp\left\{i\left(\frac{1}{2}\int\limits_0^t x(\tau)\,dy(\tau)-y(\tau)\,dx(\tau)-Z\right)\rho\right\}$$

от двумерной винеровской траектории $\big(x(\tau),y(\tau)\big)$ при условии, что эта траектория в момент t проходит через точку (X,Y), а это условное математическое ожидание, в свою очередь, есть не что иное, как интеграл Винера от функционала $\mathcal{G}[x(\tau),y(\tau)]$,

$$E[\mathcal{G}[x(\tau),y(\tau)]\mid x(t)=X,\ y(t)=Y]=\iint\limits_{C_{t,X}\times C_{t,Y}}\mathcal{G}[x(\tau),y(\tau)]\,d^*_{W(t,X)}x\times d^*_{W(t,Y)}y, \quad (13)$$

по *условной нормированной мере Винера* $d^*_{W(t,X)}x\times d^*_{W(t,Y)}y$, связанной с обычной условной мерой Винера $d_{W(t,X)}x\times d_{W(t,Y)}y$ соотношением [4]

$$d^*_{W(t,X)}x\times d^*_{W(t,Y)}y=\pi t\exp\left\{\frac{X^2+Y^2}{t}\right\}d_{W(t,X)}x\times d_{W(t,Y)}y.$$

Значит, равенство (13) можно переписать в виде

$$E[\mathcal{G}[x(\tau),y(\tau)]\mid x(t)=X,\ y(t)=Y]= \\ =\pi t\exp\left\{\frac{X^2+Y^2}{t}\right\}\iint\limits_{C_{t,X}\times C_{t,Y}}\mathcal{G}[x(\tau),y(\tau)]\,d_{W(t,X)}x\times d_{W(t,Y)}y.$$

Подставляя теперь это выражение вместо интеграла в фигурных скобках в равенстве (12), получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Bigg\{\iint\limits_{C_{t,X}\times C_{t,Y}}\exp\bigg\{i\bigg(\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\xi(\tau)\,d\eta(\tau)-\eta(\tau)\,d\xi(\tau)-Z\bigg)\rho\bigg\}d_{W(t,X)}\xi d_{W(t,Y)}\eta\Bigg\}d\rho = \\ = p(X,Y,Z,t). \quad (14)$$

Если вернуться от интегрального представления дельта-функции к её привычному обозначению, то это равенство можно записать в символическом виде следующим образом:

$$p(X,Y,Z,t)=\iint\limits_{C_{t,X}\times C_{t,Y}}\delta\bigg(\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\xi(\tau)\,d\eta(\tau)-\eta(\tau)\,d\xi(\tau)-Z\bigg)d_{W(t,X)}\xi\,d_{W(t,Y)}\eta. \quad (15)$$

2. Вычисление плотности для различных типов траекторий

Петлевые траектории (пространство $C_{0,0;t,0}\times C_{0,0;t,0}$)

Рассмотрим интеграл Винера, фигурирующий в равенствах (14), (15), для наиболее простого случая пространства $C_{0,0;t,0}\times C_{0,0;t,0}$[1] петлевых траекторий, замкнутых на начале координат. (Следуя И. М. Гельфанду [4], пространство траекторий $x(\tau)$, начинающихся в момент времени $\tau=t_0$ в точке X_0 и заканчивающихся в момент времени $\tau=t$ в точке X, будем обозначать $C_{t_0,X_0;t,X}$, а соответствующую меру Винера — $W(t_0,X_0;t,X)$.)

В этом случае получим значение совместной плотности $p(0,0,Z,t)$ при $X=Y=0$. Как было показано в [21], почти наверное непрерывная на отрезке $[0,t]$ функция может быть представлена на нём в виде тригонометрического ряда Фурье, сходимость которого почти наверное равномерна на $[0,t]$. Поэтому функции $x(\tau)$ и $y(\tau)$, отвечающие координатам петлевых траекторий, могут быть разложены по ортогональной на $[0,t]$ тригонометрической системе

$$\left\{\frac{1}{2},\ \cos\frac{2\pi\tau}{t},\ \sin\frac{2\pi\tau}{t},\dots,\ \cos\frac{2\pi n\tau}{t},\ \sin\frac{2\pi n\tau}{t},\dots\right\}$$

следующим образом:

$$x(\tau)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{t}\tau+b_n\sin\frac{2\pi n}{t}\tau\right), \quad (16)$$

$$y(\tau)=\frac{a_0'}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m'\cos\frac{2\pi m}{t}\tau+b_m'\sin\frac{2\pi m}{t}\tau\right), \quad (17)$$

[1]Это пространство является частным случаем пространства $C_{t,X}\times C_{t,Y}$ при $X=Y=0$.

где согласно условиям $x(0) = x(t) = 0$, $y(0) = y(t) = 0$ будем иметь

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0,$$
$$\frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n = 0.$$

После этого случайные траектории в каждый момент времени τ можно рассматривать не как функции x и y, а как функции коэффициентов a_n и b_n и a'_m и b'_m соответственно, а соотношения (16) и (17) — это соответствующее линейное преобразование, якобиан J которого есть постоянная величина [16].

Обращаясь к подходу, развитому Р. Фейнманом в [16], получаем, что этот интеграл равен предельному значению интегралов от конечнократных аппроксимаций входящих в него функций $x(\tau)$ и $y(\tau)$. А именно, рассмотрим конечные N-кратные аппроксимации функций $x(\tau)$ и $y(\tau)$, стоящие в правых частях равенств (16) и (17),

$$x(\tau) \to x_N(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{t}\tau + b_n \sin \frac{2\pi n}{t}\tau \right), \tag{18}$$

$$y(\tau) \to y_N(\tau) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{m=1}^{N} \left(a'_m \cos \frac{2\pi m}{t}\tau + b'_m \sin \frac{2\pi m}{t}\tau \right). \tag{19}$$

Обозначая якобиан соответствующего (18), (19) преобразования через $J(N)$, получаем, что после такого преобразования интеграл в левой части равенства (14)[1] будет равен предельному выражению

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \iint\limits_{C_{0,0;t,0} \times C_{0,0;t,0}} \exp\left\{ i\left(\frac{1}{2} \int\limits_{0}^{t} \xi(\tau)\, d\eta(\tau) - \eta(\tau)\, d\xi(\tau) - Z \right)\rho \right\} \times \right.$$
$$\left. \times\, d_{W(0,0;t,0)}\xi\, d_{W(0,0;t,0)}\eta \right\} d\rho = \lim_{N\to\infty} \frac{J(N)}{\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \dots \int\limits_{\mathbb{R}^N} F[\xi_N(\tau), \eta_N(\tau)] \times$$
$$\times \exp\left\{ -\int\limits_{0}^{t} \left[\left(\frac{d\xi_N(\tau)}{d\tau} \right)^2 + \left(\frac{d\eta_N(\tau)}{d\tau} \right)^2 \right] d\tau \right\} \prod_{n=1}^{N} da_n\, da'_n\, db_n\, db'_n, \tag{20}$$

где

$$F[\xi_N(\tau), \eta_N(\tau)] = \exp\left\{ i\left(\frac{1}{2} \int\limits_{0}^{t} \xi(\tau)\, d\eta(\tau) - \eta(\tau)\, d\xi(\tau) - Z \right)\rho \right\},$$

[1]Напомним, что $X = Y = 0$.

γ — нормирующий множитель, определяемый условием

$$\iint\limits_{C_{0,0;t,0}\times C_{0,0;t,0}} d_{W(0,0;t,0)}\xi \, d_{W(0,0;t,0)}\eta = \frac{1}{\pi t},$$

или в терминах конечнократных аппроксимаций

$$\lim_{N\to\infty} \frac{J(N)}{\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \ldots \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\biggl\{-\int\limits_0^t \biggl[\biggl(\frac{d\xi_N(\tau)}{d\tau}\biggr)^2 + \biggl(\frac{d\eta_N(\tau)}{d\tau}\biggr)^2\biggr] d\tau\biggr\} \times$$
$$\times \prod_{n=1}^{N} da_n \, da'_n \, db_n \, db'_n = \frac{1}{\pi t}.$$

Опуская детали вычислений предельного выражения (20), получаем, что значение $p(0,0,Z,t)$ совместной плотности распределения вектора $\bigl(x(t), y(t), z^+(t)\bigr)$ для $X = Y = 0$ ориентированной площади для случая петлевых траекторий будет равно

$$p(0,0,Z,t) = \frac{1}{\pi t} \cdot \frac{\pi}{t} \, \frac{1}{\operatorname{ch}^2(2\pi Z/t)}.$$

Вычисление этой плотности распределения не является самоцелью и приводится лишь потому, что в этом случае её выражение представляется в виде элементарных функций. Кроме того, ниже будет показано, что более общий случай для незамкнутых траекторий, когда $X \neq 0$, $Y \neq 0$ или, иначе, когда мы имеем дело с пространством $C_{t,X} \times C_{t,Y}$, сводится к разбору приведённого здесь случая.

Незамкнутые траектории, пространство $C_{t,X} \times C_{t,Y}$

В [19] была доказана формула замены переменной в интеграле Винера при линейном преобразовании. Напомним её формулировку.

Лемма (Р. Х. Камерон, У. Т. Мартин). *Пусть функционал $\mathcal{F}[x(\tau)]$ ограничен и непрерывен, $x_0(\tau)$ — функция, производная которой имеет ограниченную вариацию. Тогда при линейном преобразовании*

$$x(\tau) = \tilde{x}(\tau) + \psi(\tau)$$

имеет место следующая формула замены переменных:

$$\int\limits_{C_{t,X}} \mathcal{F}[x(\tau)] \, d_{W(t,X)}x = \exp\biggl\{-\int\limits_0^t [\psi'(\tau)]^2 \, d\tau\biggr\} \times$$
$$\times \int\limits_{C_{0,-\psi(0);t,X-\psi(t)}} \mathcal{F}[\tilde{x}(\tau) + \psi(\tau)] \exp\biggl\{-2\int\limits_0^t \psi'(\tau) \, d\tilde{x}(\tau)\biggr\} d_{W(0,-\psi(0);t,X-\psi(t))}\tilde{x}$$

(*напомним, что* $C_{t_0,X_0;t,X}$ — *это множество непрерывных функций, удовлетворяющих условиям* $x(t_0) = X_0$, $x(t) = X$).

Доказательство этой формулы проще всего провести непосредственной заменой траекторий $x(\tau)$ и $\tilde{x}(\tau)$ на ломаные и, перейдя к конечнократным аппроксимациям, посмотреть, как преобразуется конечнократный интеграл, соответствующий левой части равенства, при получающейся линейной замене переменных.

Запишем теперь интересующий нас интеграл, дающий выражение для совместной плотности:

$$p(X,Y,Z,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Bigg\{\iint\limits_{C_{t,X}\times C_{t,Y}}\exp\Bigg\{i\Bigg[\frac{1}{2}\int\limits_0^t x(\tau)\,dy(\tau) - y(\tau)\,dx(\tau) - Z\Bigg]\rho\Bigg\}\times \\ \times\, d_{W(t,X)}x\,d_{W(t,Y)}y\Bigg\}\,d\rho. \quad (21)$$

Используя линейное преобразование

$$x(\tau) = \tilde{x}(\tau) + \frac{\tau}{t}X,$$
$$y(\tau) = \tilde{y}(\tau) + \frac{\tau}{t}Y,$$

где, очевидно, траектории $\tilde{x}(\tau)$ и $\tilde{y}(\tau)$ удовлетворяют условиям $\tilde{x}(0) = \tilde{y}(0) = \tilde{x}(t) = \tilde{y}(t) = 0$, т. е. принадлежат пространству $C_{0,0;t,0}$, и лемму выше, интеграл в фигурных скобках равенства (21) приведём к интегралу по петлевым траекториям:

$$\exp\left\{-\frac{X^2+Y^2}{t}\right\}\iint\limits_{C_{0,0;t,0}\times C_{0,0;t,0}}\exp\Bigg\{i\Bigg(\frac{1}{2}\int\limits_0^t \tilde{x}(\tau)\,d\tilde{y}(\tau) - \tilde{y}(\tau)\,d\tilde{x}(\tau) + \\ + \frac{Y}{t}\int\limits_0^t \tilde{x}(\tau)\,d\tau - \frac{X}{t}\int\limits_0^t \tilde{y}(\tau)\,d\tau - Z\Bigg)\rho\Bigg\}\,d_{W(0,0;t,0)}\tilde{x}\,d_{W(0,0;t,0)}\tilde{y}. \quad (22)$$

Этот интеграл уже вычислим с помощью рядов Фурье аналогично тому, как это было сделано выше. Выполняя преобразование

$$\tilde{\xi}(\tau) \to \tilde{\xi}_N(\tau) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{t}\tau + b_n\sin\frac{2\pi n}{t}\tau\right),$$
$$\tilde{\eta}(\tau) \to \tilde{\eta}_N(\tau) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{m=1}^{N}\left(a_m'\cos\frac{2\pi m}{t}\tau + b_m'\sin\frac{2\pi m}{t}\tau\right),$$

получим, что интеграл (22) равен следующему предельному выражению:

$$\exp\left\{-\frac{X^2+Y^2}{t}\right\}\lim_{N\to\infty}\frac{J(N)}{\gamma}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\exp\biggl\{i\biggl[\pi\sum_{n=1}^{N}(na_nb'_n-na'_nb_n)-$$

$$-Y\sum_{n=1}^{N}a_n+X\sum_{n=1}^{N}a'_n-Z\biggr]\rho\biggr\}\times$$

$$\times\exp\biggl\{-\frac{2\pi^2}{t}\sum_{n=1}^{N}n^2(a_n^2+b_n^2+a_n'^2+b_n'^2)\biggr\}\prod_{n=1}^{N}da_nda'_ndb_ndb'_n.$$

Действуя аналогично случаю петлевых траекторий, получим после преобразований, что совместная плотность $p(X,Y,Z,t)$ распределения вектора $\bigl(x(t),y(t),z^+(t)\bigr)$ равна

$$p(X,Y,Z,t)=\frac{1}{2\pi^2t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-iZ\rho}\frac{\rho t}{4\,\mathrm{sh}(\rho t/4)}\exp\left\{-\frac{X^2+Y^2}{t}\cdot\frac{\rho t}{4}\,\mathrm{cth}\,\frac{\rho t}{4}\right\}d\rho.$$

Автору данной статьи не известно, может ли это выражение быть преобразовано к какому-либо более удобному и простому виду. Кроме того, для достижения дальнейших целей данной работы в преобразовании нет необходимости. Ниже данное представление плотности $p(X,Y,Z,t)$ будет использовано для получения плотности вероятности перехода процесса $\mathbf{r}(t)=\bigl(x(\tau),y(\tau),z^+(\tau)\bigr)$ из одного состояния в другое.

Незамкнутые траектории, пространство $C_{t_0,X_0;t,X}\times C_{t_0,Y_0;t,Y}$

Обозначим пространство непрерывных траекторий, удовлетворяющих условиям $x(t_0)=X_0$, $x(t)=X$, $y(t_0)=Y_0$, $y(t)=Y$ через $C_{t_0,X_0;t,X}\times C_{t_0,Y_0;t,Y}$, а соответствующую меру Винера — через $W(t_0,X_0;t,X)\times W(t_0,Y_0;t,Y)$.

В этом контексте рассмотрим трёхмерный случайный процесс

$$\mathbf{r}(\tau)=\bigl(x(\tau),y(\tau),z^+(\tau)\bigr),\quad 0\leqslant\tau\leqslant t,\ \ 0<t_0<t,$$

где

$$x(\tau)=W_1(\tau),\quad y(\tau)=W_2(\tau) —$$

два независимых винеровских процесса,

$$z^+(\tau)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau}x(\tau_1)\,dy(\tau_1)-y(\tau_1)\,dx(\tau_1) —$$

ориентированная площадь, заметаемая радиус-вектором случайной точки с координатами $\bigl(x(\tau),y(\tau)\bigr)$. Каждому значению параметра τ соответствует тройка чисел $\bigl(x(\tau),y(\tau),z^+(\tau)\bigr)$, являющаяся состоянием процесса $\mathbf{r}(\tau)$ в момент τ. В начальный момент времени состояние процесса, очевидно, является нулевым.

При этом плотность $p(X,Y,Z,t)$, найденная выше, является плотностью вероятности перехода процесса $\mathbf{r}(\tau)$ из состояния $(0,0,0)$ в момент $\tau=0$ в состояние (X,Y,Z) в момент $\tau=t$. Рассмотрим вопрос о нахождении плотности вероятности перехода процесса $\mathbf{r}(\tau)$ из состояния (ξ,η,ζ) в момент $\tau=t_0$ в состояние (X,Y,Z) в момент $\tau=t$. Действуя по той же схеме, что использовалась для вывода плотности в начале раздела 2, найдём, что плотность $\mathcal{E}^+(\xi,\eta,\zeta,t_0;X,Y,Z,t)$ перехода $\mathbf{r}(\tau)$ из состояния (ξ,η,ζ) при $\tau=t_0$ в состояние (X,Y,Z) при $\tau=t$ определяется выражением

$$\mathcal{E}^+(\xi,\eta,\zeta,t_0;X,Y,Z,t)=\iint\limits_{C_{t_0,\xi;t,X}\times C_{t_0,\eta;t,Y}}\delta\Big(S^+(\xi,\eta,t_0;X,Y,t)-Z+ +\zeta+\frac{1}{2}(\xi Y-\eta X)\Big)\,d_{W(t_0,\xi;t,X)}x\,d_{W(t_0,\eta;t,Y)}y, \quad (23)$$

где, как и ранее,

$$S^+(\xi,\eta,t_0;X,Y,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t}x(\tau)\,dy(\tau)-y(\tau)\,dx(\tau)+\frac{1}{2}(\eta X-\xi Y)-$$

функционал ориентированной площади.

Как и было сказано выше, при $\xi=0$, $\eta=0$, $\zeta=0$ получаем уже найденный частный случай

$$p(X,Y,Z,t)=\mathcal{E}^+(0,0,0,0;X,Y,Z,t).$$

Функция $\mathcal{E}^+(\xi,\eta,\zeta,t_0;X,Y,Z,t)$ также может быть выражена через уже найденную ранее функцию $p(X,Y,Z,t)$ перехода из нулевого состояния в состояние (X,Y,Z). Это выражение получается с помощью следующей несложной леммы [4].

Лемма 1. *Если функционал $F[x(\tau)]$, где $x(\tau)\in C_{t_0,X_0;t,X}$, ограничен и непрерывен, то имеет место равенство*

$$\int\limits_{C_{t_0,X_0;t,X}}F[x(\tau)]\,d_{W(t_0,X_0;t,X)}x=\int\limits_{C_{t-t_0,X-X_0}}F[\tilde{x}(\tau)+X_0]\,d_{W(t-t_0,X-X_0)}\tilde{x},$$

где $\tilde{x}(\tau)\in C_{t-t_0,X-X_0}$, т. е. $\tilde{x}(0)=0$, $\tilde{x}(t-t_0)=X-X_0$.

Теперь, пользуясь этой леммой и представлением (23), получаем, что

$$\mathcal{E}^+(\xi,\eta,\zeta,t_0;X,Y,Z,t)=$$

$$=\iint\limits_{C_{t-t_0,X-\xi}\times C_{t-t_0,Y-\eta}}\delta\Big(\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t-t_0}[\tilde{u}(\tau)+\xi]\,d\tilde{v}(\tau)-[\tilde{v}(\tau)+\eta]\,d\tilde{u}(\tau)-z+\zeta\Big)\times$$

$$\times\,d_{W(t-t_0,X-\xi)}\tilde{u}\,d_{W(t-t_0,Y-\eta)}\tilde{v}=$$

$$= \iint\limits_{C_{t-t_0,X-\xi}\times C_{t-t_0,Y-\eta}} \delta\Bigg(\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-t_0} \tilde{u}(\tau)\,d\tilde{v}(\tau) - \tilde{v}(\tau)\,d\tilde{u}(\tau) - \tilde{z}\Bigg) \times$$

$$\times\, d_{W(t-t_0,X-\xi)}\tilde{u}\, d_{W(t-t_0,Y-\eta)}\tilde{v},$$

где

$$\tilde{z} = Z - \zeta - \frac{1}{2}(\xi Y - \eta X).$$

Вспоминая теперь представление (15) для функции $p(X, Y, Z, t)$, получаем, что

$$\mathcal{E}^+(\xi, \eta, \zeta, t_0; X, Y, Z, t) = p\left(X - \xi, Y - \eta, Z - \zeta - \frac{1}{2}(\xi Y - \eta X), t - t_0\right). \quad (24)$$

3. Марковское свойство и уравнение Колмогорова

3.1. Марковское свойство

Связь траекторий процесса $r(\tau) = \big(x(\tau), y(\tau), z^+(\tau)\big)$ с группой Гейзенберга $H_3(\mathbb{R})$

Прежде чем говорить о связи описываемых здесь объектов с группой Гейзенберга, напомним кратко, что она из себя представляет. Группа Гейзенберга есть не что иное, как групповая структура соответствующей гейзенберговской алгебры, являющейся математической моделью алгебры наблюдаемых в квантовой механике. В квантовой механике каждой наблюдаемой соответствует оператор, действующий в гильбертовом пространстве состояний квантовой системы. Алгебра Гейзенберга есть алгебра этих операторов. Сформулируем это более строго.

Определение 1. *Группой Гейзенберга* $H_{2n+1}(\mathbb{R})$ размерности $2n+1$ называется группа верхнетреугольных матриц вида

$$H_{2n+1}\mathbb{R} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_n & z \\ 0 & 1 & \dots & 0 & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & y_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z \in \mathbb{R}\right\}. \quad (25)$$

Группа $H_{2n+1}(\mathbb{R})$ является связной односвязной нильпотентной группой Ли. Её алгебра Ли $L(H_{2n+1})$ — алгебра строго верхнетреугольных матриц вида

$$L(H_{2n+1}) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n & z \\ 0 & 0 & \dots & 0 & y_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & y_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},\ x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z \in \mathbb{R}\right\},$$

базисом которой является набор матриц вида

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{n+i} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & \dots & 1 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots n, \tag{26}$$

а коммутационные соотношения имеют вид

$$[e_i, e_{n+i}] = e_{2n+1}, \quad [e_i, e_k] = 0, \quad |i-k| \neq n.$$

Как известно [2], экспоненциальное отображение является диффеоморфизмом алгебры Ли $L(H_{2n+1})$ на группу $H_{2n+1}(\mathbb{R})$. Поэтому с помощью обратного отображения $\exp^{-1}$ можно отождествить H_{2n+1} с $L(H_{2n+1})$, причём с учётом того, что алгебра $L(H_{2n+1})$ имеет степень нильпотентности 2, формулу Кэмпбелла—Хаусдорфа (см., например, [5, 13]) примет вид

$$\exp X \cdot \exp Y = \exp\left(X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]\right), \quad X, Y \in L(H_{2n+1}), \tag{27}$$

и мы получим следующую операцию группового умножения в $H_{2n+1}(\mathbb{R})$:

$$u \circ v = u + v + \frac{1}{2}[u, v]. \tag{28}$$

Если записать разложение элементов X и Y в формуле (27) относительно базиса (26), то получим, что $H_{2n+1}(\mathbb{R})$ отождествляется с $\mathbb{R}^{2n+1}$. В этих координатах, называемых координатами первого рода, групповая операция (28) принимает вид

$$u \circ v = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z) \circ (x'_1, \dots, x'_n, y'_1, \dots, y'_n, z') =$$
$$= \left(x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n, y_1 + y'_1, \dots, y_n + y'_n, z + z' + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i y'_i - y_i x'_i)\right),$$

а единица e группы $H_{2n+1}(\mathbb{R})$ есть $e = (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, 0)$.

Нас будет интересовать наиболее простой случай группы $H_3(\mathbb{R})$, являющийся трёхпараметрической реализацией описанной выше конструкции. Эту группу мы можем, в соответствии с вышесказанным, отождествлять с множеством числовых троек (x, y, z), наделённым групповой операцией

$$(x_1, y_1, z_1) \circ (x_2, y_2, z_2) = \left(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)\right).$$

Возвращаясь теперь к процессу $\mathbf{r}(\tau) = \big(x(\tau), y(\tau), z^+(\tau)\big)$, рассмотрим для него последовательный переход из состояния $(0,0,0)$ в момент $\tau = 0$ в состояние (x_1, y_1, z_1) в момент $\tau = t_1 \geqslant 0$ и далее из состояния (x_1, y_1, z_1) в состояние (X, Y, Z) в момент времени $\tau = t_2 \geqslant t_1$. Обозначим координаты $(X - x_1, Y - y_1)$ вектора перемещения конца винеровской траектории через (x_2, y_2), а соответствующую ориентированную площадь через z_2. Тогда получим два независимых перехода, соответствующих векторам (x_1, y_1) и (x_2, y_2) на плоскости $\mathbb{R}^2$ с соответствующими ориентированными площадями z_1 и z_2. На множестве состояний процесса $\mathbf{r}(\tau)$ естественно определить операцию сложения так, что для любых двух состояний (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) их суммой является состояние, соответствующее траектории, являющейся объединением траекторий слагаемых. Несложно понять, что результирующим состоянием будет вектор

$$\left(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1)\right). \tag{29}$$

В этом случае множество состояний процесса $\mathbf{r}(\tau)$ с определённой на нём бинарной операцией (29) является конкретной реализацией группы Гейзенберга $H_3(\mathbb{R})$.

Отметим также другой интересный факт, связанный с тем, что группа Гейзенберга $H_{2n+1}(\mathbb{R})$ является конкретным примером контактного многообразия. Для этого напомним определения основных понятий из контактной геометрии.

Определение 2. *Контактной структурой* на $(2n+1)$-мерном многообразии M называется невырожденное поле касательных гиперплоскостей V_x, гладко зависящее от точки $x \in M$ (при этом, следуя [1], под гиперплоскостью понимаем подпространство размерности на единицу ниже исходного многообразия M; под касательной гиперплоскостью понимается гиперплоскость в касательном пространстве).

Поле V_x в окрестности каждой точки $x \in M$ может быть задано с помощью дифференциальной 1-формы ω_x, которая выбирается так, чтобы её значение на векторах, вертикальных к плоскости поля, было отлично от нуля [1]. В соответствии с этим контактную структуру на M, заданную 1-формой ω_x обозначают (M, ω).

Определение 3. *Контактной гиперплоскостью* в точке $x \in M$ называется гиперплоскость V_x, удовлетворяющая условию $\omega_x(V_x) = 0$.

Известно, что в группе $H_{2n+1}(\mathbb{R})$ существует контактная структура, называемая *канонической*, которая определяется 1-формой [8, 9]

$$\omega_x = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i\,dx_i - x_i\,dy_i) + dz.$$

Определение 4. Кусочно-гладкая кривая $\gamma\colon [t_0, t] \to H_{2n+1}(\mathbb{R})$ называется *горизонтальной*, если $\dot\gamma(t) \in V_{\gamma(t)}$.

Длина кривой $\gamma(t)$ определяется римановым метрическим тензором $\{g_{ij}\}$:

$$l(\gamma)=\int\limits_{t_0}^{t}\sqrt{g_{ij}(\gamma(\tau))\dot\gamma_i(\tau)\dot\gamma_j(\tau)}\,d\tau.$$

Хорошо известна теорема Рашевского—Чжоу (см., например, [14, 24]), в соответствии с которой любые две точки в $(H_{2n+1}(\mathbb{R}),\omega)$ соединимы горизонтальной кривой. С помощью классов горизонтальных кривых на $(H_{2n+1}(\mathbb{R}),\omega)$ может быть определена левоинвариантная метрика. А именно, пусть $C(g_1,g_2)$ — класс горизонтальных кривых, соединяющих точки g_1 и g_2 в $H_{2n+1}(\mathbb{R})$.

Определение 5. *Метрикой Карно—Каратеодори* в H_{2n+1} относительно данной контактной структуры V_x называется величина

$$\rho(g_1,g_2):=\inf_{\gamma\in C(g_1,g_2)} l(\gamma). \tag{30}$$

Применительно к группе H_3 устанавливается прозрачный геометрический смысл кривой, на которой достигается минимальное значение в выражении (30) [7]. Первые две координаты этой кривой пробегают дугу, соответствующую сектору кривой $\big(x(\tau),y(\tau)\big)$, соединяющей точки, являющиеся проекциями точек g_1 и g_2 на плоскость $(x,y,0)$, а последняя координата численно равна площади, заметаемой радиус-вектором первых двух координат. Условие горизонтальности $\gamma(\tau)=\big(x(\tau),y(\tau),z(\tau)\big)$ при надлежащем выборе ориентации $z(\tau)$ имеет вид

$$\dot z=\frac{1}{2}(x\dot y-y\dot x) \tag{31}$$

(см., например, [6]). Возвращаясь к нашему случайному процессу $\mathbf{r}(\tau)=\big(x(\tau),y(\tau),z^+(\tau)\big)$ и вспоминая соотношение (8), дающее представление $z^+(\tau)$ в виде интеграла Ито, можно записать это представление в виде стохастического уравнения

$$dz_t^+=\frac{1}{2}\big(x_t dy_t-y_t dx_t\big) \tag{32}$$

Естественно, мы не можем переписать это равенство в виде (31), поскольку траектории винеровских процессов $x(t)$ и $y(t)$ не дифференцируемы ни в одной точке, однако сопоставление равенств (31) и (32) указывает на наличие связи траекторий процесса $\mathbf{r}(t)$ с горизонтальными траекториями в группе Гейзенберга и, соответственно, с метрикой Карно—Каратеодори в $H_3(\mathbb{R})$.

Гейзенберговская марковость процесса $\mathbf{r}(\tau)$

Вновь рассмотрим последовательный переход процесса

$$\mathbf{r}(\tau)=\big(x(\tau),y(\tau),z^+(\tau)\big)$$

из состояния (ξ,η,ζ) в момент $\tau=t_0$ в состояние (ξ_1,η_1,ζ_1) в момент $\tau=t_1$ и далее в (X,Y,Z) в момент $\tau=t$. Очевидно, что случайная величина площади, заметаемой траекторией при $\tau \in [t_1, t]$, не зависит от случайной величины, соответствующей участку при $\tau \in [t_0, t_1]$. Отсюда следует, что независимыми являются два случайных вектора

$$\begin{gathered}\big(x(t_1)-x(t_0), y(t_1)-y(t_0), S^+(\xi,\eta,t_0;\xi_1,\eta_1,t_1)\big),\\ \big(x(t)-x(t_1), y(t)-y(t_1), S^+(\xi_1,\eta_1,t_1;X,Y,t)\big).\end{gathered}$$

Вспоминая теперь, что случайная величина площади, соответствующей отрезку $\tau \in [t_1, t]$, может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}S^+(\xi_1,\eta_1,t_1;X,Y,t) &= S^+(\xi,\eta,t_0;X,Y,t) - S^+(\xi,\eta,t_0;\xi_1,\eta_1,t_1) - \\ &- \frac{1}{2}\Big[\big(x(t_1)-x(t_0)\big)\big(y(t)-y(t_0)\big) - \big(y(t_1)-y(t_0)\big)\big(x(t)-x(t_0)\big)\Big],\end{aligned}$$

получаем, что $\big(x(\tau), y(\tau), z(\tau)\big)$ — процесс с независимыми приращениями относительно сложения в группе Гейзенберга $H_3(\mathbb{R})$. Следует ожидать, что он является марковским относительно гейзенберговского сложения. Это действительно так, и в терминах плотности вероятности перехода имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Для любых двух фиксированных состояний (ξ,η,ζ) при $\tau = t_0$ и (X,Y,Z) при $\tau = t$ плотность вероятности перехода $\mathcal{E}^+(\xi,\eta,\zeta,t_0;X,Y,Z,t)$ из (ξ,η,ζ) в (X,Y,Z) удовлетворяет соотношению*

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}^+(\xi,\eta,\zeta,t_0;X,Y,Z,t) = \\ &\quad = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}^+(\xi,\eta,\zeta,t_0;\xi_1,\eta_1,\zeta_1,t_1)\cdot\mathcal{E}^+(\xi_1,\eta_1,\zeta_1,t_1;X,Y,Z,t)\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\zeta_1. \qquad (33)\end{aligned}$$

Замечание 1. Отличия уравнения (33) от классического уравнения Колмогорова—Чепмена для марковских процессов в $\mathbb{R}^3$ не очевидны. Их можно усмотреть, рассматривая данное соотношение в конкретных ситуациях. Например, если мы возьмём стандартный винеровский процесс в $\mathbb{R}^3$ и рассмотрим плотность $\tilde{\mathcal{E}}(0,0,0,0;X,Y,Z,t)$ вероятности перехода из нулевого состояния $(0,0,0)$ при $\tau = 0$ в состояние (X,Y,Z) при $\tau = t$,

$$\tilde{\mathcal{E}}(0,0,0,0;X,Y,Z,t) := \tilde{p}(X,Y,Z,t) = \frac{1}{(\pi t)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{X^2+Y^2+Z^2}{t}\right\},$$

то для неё будет справедливо классическое равенство

$$\tilde{p}(X,Y,Z,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \tilde{p}(\xi,\eta,\zeta,t_0)\cdot\tilde{p}(X-\xi,Y-\eta,Z-\zeta,t-t_0)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta,$$

как и для любого другого однородного марковского процесса в $\mathbb{R}^3$. Однако в этих же самых условиях для функции

$$\mathcal{E}^+(0,0,0,0;X,Y,Z,t) := p(X,Y,Z,t) = \\ = \frac{1}{2\pi^2 t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-iZ\rho}\frac{\rho t}{4\operatorname{sh}(\rho t/4)}\exp\left\{-\frac{X^2+Y^2}{t}\cdot\frac{\rho t}{4}\operatorname{cth}\frac{\rho t}{4}\right\}d\rho$$

равенство (33) уже примет вид

$$p(X,Y,Z,t) = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^3} p(\xi,\eta,\zeta,t_0)\cdot p\left(X-\xi, Y-\eta, Z-\zeta-\frac{1}{2}(\xi Y-\eta X), t-t_0\right)d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Доказательство теоремы 2. Запишем интеграл, стоящий в правой части (33), в развёрнутом виде и преобразуем его. Для сокращения записи введём обозначения

$$C_{t_0,\xi;t_1,\xi_1}\times C_{t_0,\eta;t_1,\eta_1} = C\times C,\quad C_{t_1,\xi_1;t,X}\times C_{t_1,\eta_1;t,Y} = \tilde{C}\times\tilde{C}.$$

Траектории на участке $[t_0,t_1]$ будем обозначать $x(\tau)$, $y(\tau)$, а на участке $[t_1,t]$ — $\tilde{x}(\tau)$, $\tilde{y}(\tau)$. Также напомним, что

$$S^+(\xi,\eta,t_0;\xi_1,\eta_1,t_1) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1} x(\tau)\,dy(\tau)-y(\tau)\,dx(\tau)+\frac{1}{2}(\eta\xi_1-\xi\eta_1),$$

$$S^+(\xi_1,\eta_1,t_1;X,Y,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_1}^{t} \tilde{x}(\tau)\,d\tilde{y}(\tau)-\tilde{y}(\tau)\,d\tilde{x}(\tau)+\frac{1}{2}(\eta_1 X-\xi_1 Y).$$

В этих обозначениях для интеграла в правой части (33) будем иметь

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3}\Bigg\{\iint\limits_{C\times C}\delta\left(S^+(\xi,\eta,t_0;\xi_1,\eta_1,t_1)-\left[\zeta_1-\zeta-\frac{1}{2}(\xi\eta_1-\eta\xi_1)\right]\right)\times \\ \times d_{W(t_0,\xi;t_1,\xi_1)}x\, d_{W(t_0,\eta;t_1,\eta_1)}y\times \\ \times\iint\limits_{\tilde{C}\times\tilde{C}}\delta\left(S^+(\xi_1,\eta_1,t_1;X,Y,t)-\left[Z-\zeta_1-\frac{1}{2}(\xi_1 Y-\eta_1 X)\right]\right)\times \\ \times d_{W(C_{t_1,\xi_1;t,x})}\tilde{x}\, d_{C_{t_1,\eta_1;t,y}}\tilde{y}\Bigg\}d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^3}\Bigg\{\iint\limits_{C\times C}\iint\limits_{\tilde{C}\times\tilde{C}}\delta\left(S^+(\xi,\eta,t_0;\xi_1,\eta_1,t_1)+\zeta+\frac{1}{2}(\xi\eta_1-\eta\xi_1)-\zeta_1\right)\times \\ \times\delta\left(\zeta_1-\left[-S^+(\xi_1,\eta_1,t_1;X,Y,t)+Z-\frac{1}{2}(\xi_1 Y-\eta_1 X)\right]\right)\times \\ \times d_{W(t_0,\xi;t_1,\xi_1)}x\, d_{W(t_0,\eta;t_1,\eta_1)}y\, d_{W(t_1,\xi_1;t,X)}\tilde{x}\, d_{W(t_1,\eta_1;t,Y)}\tilde{y}\Bigg\}d\xi_1\, d\eta_1\, d\zeta_1 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \Bigg\{ \iint\limits_{C\times C} \iint\limits_{\tilde{C}\times\tilde{C}} \delta\Bigg(S^+(\xi,\eta,t_0;\xi_1,\eta_1,t_1) + \zeta + \frac{1}{2}(\xi\eta_1 - \eta\xi_1) +$$

$$+ S^+(\xi_1,\eta_1,t_1;X,Y,t) - Z + \frac{1}{2}(\xi_1 Y - \eta_1 X)\Bigg) \times$$

$$\times\, d_{W(t_0,\xi;t_1,\xi_1)}x\, d_{W(t_0,\eta;t_1,\eta_1)}y\, d_{W(t_1,\xi_1;t,X)}\tilde{x}\, d_{W(t_1,\eta_1;t,Y)}\tilde{y}\Bigg\}\, d\xi_1\, d\eta_1, \tag{34}$$

где в последнем равенстве, которое следует понимать в смысле равенства в $\mathcal{D}'$, была использована свёртка двух δ-функций

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(a-\xi)\delta(\xi-b)\, d\xi = \delta(a-b).$$

После несложных преобразований выражение в (34) может быть переписано в виде

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \Bigg\{ \iint\limits_{C\times C} \iint\limits_{\tilde{C}\times\tilde{C}} \delta\Bigg(S^+(\xi,\eta,t_0;\xi_1,\eta_1,t_1) + S^+(\xi_1,\eta_1,t_1;X,Y,t) +$$

$$+ \frac{1}{2}[(\xi_1-\xi)(Y-\eta) - (\eta_1-\eta)(X-\xi)] - Z + \zeta + \frac{1}{2}(\xi Y - \eta X)\Bigg) \times$$

$$\times\, d_{W(t_0,\xi;t_1,\xi_1)}x\, d_{W(t_0,\eta;t_1,\eta_1)}y\, d_{W(t_1,\xi_1;t,X)}\tilde{x}\, d_{W(t_1,\eta_1;t,Y)}\tilde{y}\Bigg\}\, d\xi_1\, d\eta_1. \tag{35}$$

Для дальнейших рассуждений распишем по определению двойной винеровский интеграл, стоящий под знаком двойного интеграла в последнем выражении. Тогда (35) примет вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \Bigg\{ \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\pi^n(\tau_1-\tau_0)(\tau_2-\tau_1)\dots(\tau_n-\tau_{n-1})} \times$$

$$\times \frac{1}{\pi^m(\tilde{\tau}_1-\tilde{\tau}_0)(\tilde{\tau}_2-\tilde{\tau}_1)\dots(\tilde{\tau}_m-\tilde{\tau}_{m-1})} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{2n-2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{2m-2}} \delta\Bigg(S_1^+[\xi,x_1,\dots,x_{n-1},\xi_1;\eta,y_1,\dots,y_{n-1},\eta_1] +$$

$$+ S_2^+[\xi_1,\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_{n-1},X;\eta_1,\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_{n-1},Y] +$$

$$+ \frac{1}{2}[(\xi_1-\xi)(Y-\eta) - (\eta_1-\eta)(X-\xi)] - Z + \zeta + \frac{1}{2}(\xi Y - \eta X)\Bigg) \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{(x_1-\xi)^2}{\tau_1-\tau_0} - \frac{(x_2-x_1)^2}{\tau_2-\tau_1} - \dots - \frac{(\xi_1-x_{n-1})^2}{\tau_n-\tau_{n-1}} \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{(y_1-\eta)^2}{\tau_1-\tau_0} - \frac{(y_2-y_1)^2}{\tau_2-\tau_1} - \dots - \frac{(\eta_1-y_{n-1})^2}{\tau_n-\tau_{n-1}} \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{(\tilde{x}_1-\xi_1)^2}{\tilde{\tau}_1-\tilde{\tau}_0}-\frac{(\tilde{x}_2-\tilde{x}_1)^2}{\tilde{\tau}_2-\tilde{\tau}_1}-\ldots-\frac{(X-\tilde{x}_{m-1})^2}{\tilde{\tau}_m-\tilde{\tau}_{m-1}}\right\}\times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{(\tilde{x}_1-\eta_1)^2}{\tilde{\tau}_1-\tilde{\tau}_0}-\frac{(\tilde{y}_2-\tilde{y}_1)^2}{\tilde{\tau}_2-\tilde{\tau}_1}-\ldots-\frac{(Y-\tilde{y}_{m-1})^2}{\tilde{\tau}_m-\tilde{\tau}_{m-1}}\right\}\times$$
$$\left.\times\, dx_1\ldots dx_{n-1}\,dy_1\ldots dy_{n-1}\,d\tilde{x}_1\ldots d\tilde{x}_{m-1}\,d\tilde{y}_1\ldots d\tilde{y}_{m-1}\right\}d\xi_1\,d\eta_1, \qquad (36)$$

где $\tau_0=t_0$, $\tau_n=\tilde{\tau}_0=t_1$, $\tilde{\tau}_m=t$,

$$S_1^+[x_0,x_1,\ldots,x_n;y_0,y_1,\ldots,y_n]=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[x_i(y_i-y_{i-1})-y_i(x_i-x_{i-1})]-\frac{1}{2}[x_0(y_0-y_n)-y_0(x_0-x_n)],$$
$$S_2^+[\tilde{x}_0,\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_n;\tilde{y}_0,\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_n]=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}[\tilde{x}_j(\tilde{y}_j-\tilde{y}_{j-1})-\tilde{y}_j(\tilde{x}_j-\tilde{x}_{j-1})]-\frac{1}{2}[\tilde{x}_0(\tilde{y}_0-\tilde{y}_m)-\tilde{y}_0(\tilde{x}_0-\tilde{x}_m)]\,—$$

конечнократные аппроксимации для функционалов площадей

$$S^+(\xi,\eta,t_0;\xi_1,\eta_1,t_1),\quad S^+\big(\xi_1,\eta_1,t_1;X,Y,t\big)$$

соответственно, причём в этих суммах $x_0=\xi$, $y_0=\eta$, $x_n=\tilde{x}_0=\xi_1$, $y_n=\tilde{y}_0=\eta_1$, $\tilde{x}_m=X$, $\tilde{y}_m=Y$.

С другой стороны, перенумеруем и переобозначим моменты времени и узлы аппроксимации по следующему правилу (учитываем, что $\tau_n=\tilde{\tau}_0$):

$$\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_n,\tilde{\tau}_1,\ldots,\tilde{\tau}_m\to\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_n,\tau_{n+1},\ldots,\tau_{n+m},$$
$$\begin{pmatrix}x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},\xi_1,\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_m\\ y_0,y_1,\ldots,y_{n-1},\eta_1,\tilde{y}_1,\ldots,\tilde{y}_m\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x_0,x_1,\ldots,x_{n-1},x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+m}\\ y_0,y_1,\ldots,y_{n-1},y_n,y_{n+1},\ldots,y_{n+m}\end{pmatrix}.$$

Тогда сумма

$$S_1^++S_2^++\frac{1}{2}[(\xi_1-\xi)(Y-\eta)-(\eta_1-\eta)(X-\xi)]$$

в выражении (36), поскольку она даёт значение суммы площадей, ограниченных двумя ломаными, соответствующими отрезкам времени $[t_0,t_1]$ и $[t_1,t]$ соответственно и треугольником с вершинами (x_0,y_0), (ξ_1,η_1) и (ξ,η), в точности равна сумме

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}[x_i(y_i-y_{i-1})-y_i(x_i-x_{i-1})]-\frac{1}{2}[x_0(y_0-y_l)-y_0(x_0-x_l)],$$

где $l=n+m$, дающей значение для площади, ограниченной всей ломаной на отрезке $[t_0,t]$. Кроме того, внося интегрирование по ξ_1 и η_1 под знак предела и учитывая, что в новых обозначениях $\xi_1=x_n$, $\eta_1=y_n$, получаем, что интеграл

(36) равен

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{\pi^l(\tau_1-\tau_0)(\tau_2-\tau_1)\dots(\tau_l-\tau_{l-1})} \times$$
$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^{2l-2}} \delta\biggl(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}[x_i(y_i-y_{i-1})-y_i(x_i-x_{i-1})] -$$
$$-\frac{1}{2}[x_0(y_0-y_l)-y_0(x_0-x_l)] - Z + \zeta + \frac{1}{2}(\xi Y - \eta X)\biggr) \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{(x_1-\xi)^2}{\tau_1-\tau_0} - \frac{(x_2-x_1)^2}{\tau_2-\tau_1} - \dots - \frac{(X-x_{l-1})^2}{\tau_l-\tau_{l-1}}\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{(y_1-\eta)^2}{\tau_1-\tau_0} - \frac{(y_2-y_1)^2}{\tau_2-\tau_1} - \dots - \frac{(Y-y_{l-1})^2}{\tau_l-\tau_{l-1}}\right\} \times$$
$$\times\, dx_1\dots dx_{l-1}\,dy_1\dots dy_{l-1},$$

где $\tau_0=t_0$, $\tau_l=t$, $x_0=\xi$, $y_0=\eta$, $x_l=X$, $y_l=Y$. Это по определению есть не что иное, как

$$\iint\limits_{C_{t_0,\xi;t,X}\times C_{t_0,\eta;t,Y}} \delta\left(S^+(\xi,\eta,t_0;X,Y,t) - Z + \zeta + \frac{1}{2}(\xi Y - \eta X)\right) \times$$
$$\times\, d_{W(t_0,\xi;t,X)}x\, d_{W(t_0,\eta;t,Y)}y = \mathcal{E}^+(\xi,\eta,\zeta,t_0;X,Y,Z,t), \quad (37)$$

где, напомним,

$$S^+(\xi,\eta,t_0;X,Y,t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} x(\tau)\,dy(\tau) - y(\tau)\,dx(\tau) + \frac{1}{2}(\eta X - \xi Y).$$

Равенство (37) завершает доказательство теоремы 2. □

Замечание 2. Если вспомнить представление (24) для переходной плотности $\mathcal{E}^+$, то, обозначив $t_1-t_0=T_1$, $t-t_1=T_2$, равенству (33) можно придать вид

$$\mathcal{E}^+(\xi,\eta,\zeta;X,Y,Z,T_1+T_2) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}^+(\xi,\eta,\zeta;\xi_1,\eta_1,\zeta_1,T_1)\cdot\mathcal{E}^+(\xi_1,\eta_1,\zeta_1;X,Y,Z,T_2)\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\zeta_1.$$

Таким образом, процесс $\mathbf{r}(\tau)$ является однородным марковским в $H_3(\mathbb{R})$.

Как известно, с каждым однородным марковским процессом $\mathbf{r}(\tau)$ в $\mathbb{R}^n$ связана однопараметрическая полугруппа интегральных операторов, задаваемых соответствующей переходной плотностью $p(\mathbf{x};\mathbf{y},t)$ и действующих на множестве всех ограниченных измеримых функций посредством соотношения

$$(\mathbf{P}_t f)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} p(\xi;\mathbf{x},t) f(\xi)\,d\xi.$$

Операцией умножения в этой полугруппе является композиция операторов, а наличие групповой структуры относительно композиции обеспечивается выполнением уравнения Колмогорова—Чепмена. Кроме того, с этим семейством интегральных операторов связан посредством равенства

$$(e^{-Ht}f)(\mathbf{x}) := (\mathbf{P}_t f)(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} p(\xi; \mathbf{x}, t) f(\xi)\, d\xi$$

дифференциальный оператор H, называемый инфинитезимальным (или производящим) оператором полугруппы. Простейшим примером является винеровский процесс в $\mathbb{R}^1$. Общий вид соответствующего интегрального оператора даётся выражением

$$(e^{-Ht}f)(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}^1} \exp\left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{t} \right\} f(\xi)\, d\xi,$$

а производящим оператором H является оператор теплопроводности.

Учитывая доказанное выше соотношение, которому удовлетворяет функция $\mathcal{E}^+(\xi, \eta, \zeta, t_0; X, Y, Z, t)$, логично было бы ожидать, что интегральный оператор, ядром которого является функция $\mathcal{E}^+$, даёт общий вид однопараметрической полугруппы операторов e^{-Ht}, порождаемой некоторым дифференциальным оператором H. Операторы действуют на функции вида $\psi(x, y, z)$ по правилу

$$(e^{-Ht}\psi)(X, Y, Z, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi(\xi, \eta, \zeta) \mathcal{E}^+(\xi, \eta, \zeta, 0; X, Y, Z, t)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta. \tag{38}$$

Чтобы показать, что это действительно так, напомним определения основных объектов. Пусть X — банахово пространство и $\mathcal{L}(X)$ — пространство ограниченных линейных операторов на X.

Определение 6. Говорят, что семейство операторов $\{T_t\colon 0 \leqslant t < +\infty\}$ из $\mathcal{L}(X)$ образует сильно непрерывную полугруппу операторов, если

1) $T_0 = I$, где I — тождественный оператор на X,
2) $T_{t+s} = T_t \circ T_s$ при любых $t, s \in [0, +\infty)$,
3) $T_{(\cdot)}f \in C([0, +\infty), X)$, где $C([0, +\infty), X)$ — пространство непрерывных функций из $[0, +\infty)$ в X.

Другими словами, условие 3) означает, что для каждой фиксированной функции f из X отображение $t \mapsto T_t f$ является непрерывным (по норме в X) отображением из $[0, +\infty)$ в X.

Теперь несложно показать, что рассматриваемое семейство операторов (38) образует сильно непрерывную полугруппу. А именно, для $t = 0$ положим $T(0) = I$. Условие 2) из определения 6 выполняется согласно теореме 2 и замечанию 2. Для доказательства выполнимости условия 3) достаточно доказать, что операторы (38) являются сжимающими, т. е. для любой ограниченной функции $\psi \in C(\mathbb{R}^3)$ и для любого $t \geqslant 0$ выполнено $\|T(t)\psi\|_C \leqslant \|\psi\|_C$. Это вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$|T(t)\psi| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi(\xi, \eta, \zeta)\mathcal{E}_1^+ \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\psi\mathcal{E}_1^+| \, d\xi \, d\eta \, d\zeta \leqslant \|\psi\|_C \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}_1^+ \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = \|\psi\|_C.$$

3.2. Уравнение Колмогорова. Решение задачи Коши и формула Фейнмана—Каца

Основной целью данной работы является нахождение производящего оператора H описанной выше полугруппы операторов, связанных с процессом $\mathbf{r}(\tau)$. Для этого достаточно найти уравнение, для которого функция $(e^{-Ht}\psi_0)(X, Y, Z, t)$ при каждой фиксированной функции $\psi_0 \in C(\mathbb{R}^3)$ даёт решение задачи Коши. Сформулируем сразу основную теорему данного раздела.

Теорема 3. *Пусть в области* $G_T = \{x, y, z \in \mathbb{R},\ 0 < t < \infty\}$ *для уравнения*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{x^2 + y^2}{4} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - y\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right) - V(x, y)u,$$

где функция $V(x, y)$ *непрерывная и ограниченная снизу на* $\mathbb{R}^2$, *в классе* $u(x, y, z, t) \in C^{2,1}(G_T) \cap C(\overline{G_T})$ *рассматривается задача Коши с начальной функцией* $u(x, y, z, 0) = \psi_0(x, y, z) \in C(\mathbb{R}^3)$, $\|\psi_0\|_C < \infty$. *Тогда её решение даёт общий вид однопараметрической полугруппы операторов, определяемых равенством* (3.1), *и выражается с помощью интеграла Винера следующим образом*:

$$u(X, Y, Z, t) = \iint\limits_{\substack{C_{[0,t]} \times C_{[0,t]} \\ x(0)=0,\ y(0)=0}} \psi_0\biggl(x(t) + X,\ y(t) + Y,\ Z + \frac{1}{2}[y(t)X - x(t)Y] +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_0^t x(\tau)\, dy(\tau) - y(\tau)\, dx(\tau)\biggr) \exp\biggl\{-\int\limits_0^t V(x(\tau) + X, y(\tau) + Y)\, d\tau\biggr\}\, d_W x\, d_W y.$$

Доказательство. Доказательство проведём в два этапа. На первом преобразуем формулу, дающую общий вид интегрального оператора с ядром $\mathcal{E}_1^+$, определяемым выражением

$$\mathcal{E}_1^+(\xi,\eta,\zeta,t_0;X,Y,Z,t) = \\ = \iint\limits_{C_{t_0,\xi;t,X}\times C_{t_0,\eta;t,Y}} \delta\left(S^+(\xi,\eta,t_0;X,Y,t) - Z + \zeta + \frac{1}{2}(\xi Y - \eta X)\right) \times \\ \times \exp\left\{-\int\limits_{t_0}^{t} V\big(x(\tau),y(\tau)\big)\,d\tau\right\} d_{W(t_0,\xi;t,X)}x\, d_{W(t_0,\eta;t,Y)}y. \tag{39}$$

Искомое решение $u(X,Y,Z,t)$ задачи Коши должно даваться свёрткой

$$\mathcal{E}_1^+(\xi,\eta,\zeta,0;X,Y,Z,t)$$

с начальной функцией $\psi_0(\xi,\eta,\zeta)$:

$$u(X,Y,Z,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi_0(\xi,\eta,\zeta)\mathcal{E}_1^+(\xi,\eta,\zeta,0;X,Y,Z,t)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Этап 1. Приведение $u(X,Y,Z,t)$ к формуле Фейнмана—Каца. Воспользовавшись представлением (39) для $\mathcal{E}_1^+$, получим, что

$$u(X,Y,Z,t) = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \psi_0(\xi,\eta,\zeta)\Bigg\{\iint\limits_{C_{0,\xi;t,X}\times C_{0,\eta;t,Y}} \delta\left(S^+(\xi,\eta,0;X,Y,t) - Z + \zeta + \frac{1}{2}(\xi Y - \eta X)\right) \times \\ \times \exp\left\{-\int\limits_{0}^{t} V\big(x(\tau),y(\tau)\big)\,d\tau\right\} d_{W(0,\xi;t,X)}x\, d_{W(0,\eta;t,Y)}y\Bigg\}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta.$$

Интегрируя в последнем выражении по ζ и пользуясь свойствами δ-функции, получаем для $u(X,Y,Z,t)$ представление

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Bigg\{\iint\limits_{C_{0,\xi;t,X}\times C_{0,\eta;t,Y}} \psi_0\left(\xi,\eta,Z - \frac{1}{2}(\xi Y - \eta X) - S^+(\xi,\eta,0;X,Y,t)\right) \times \\ \times \exp\left\{-\int\limits_{0}^{t} V\big(x(\tau),y(\tau)\big)\,d\tau\right\} d_{W(0,\xi;t,X)}x\, d_{W(0,\eta;t,Y)}y\Bigg\}\,d\xi\,d\eta. \tag{40}$$

Поменяем теперь направление изменения параметра в функционале ориентированной площади с помощью замены

$$\tilde{\tau} = t - \tau,$$

т. е. $\tilde{\tau}$ меняется от t до 0. Так как моменту $\tau = 0$ соответствует точка (ξ,η) на плоскости Oxy, то ей будет соответствовать момент $\tilde{\tau} = t$; аналогично получим, что $\tilde{\tau} = 0$ соответствует точка (X,Y) на плоскости Oxy. Таким образом, относительно нового параметра $\tilde{\tau}$ траектории броуновского моста идут из точки (ξ,η) при $\tilde{\tau} = t$ в точку (X,Y) при $\tilde{\tau} = 0$. При этом функционал площади

$S^+(\xi,\eta,0;X,Y,t)$ относительно новых траекторий примет вид

$$S^+(\xi,\eta,t;X,Y,0)=\frac{1}{2}\int\limits_t^0 \tilde{x}(\tilde{\tau})\,d\tilde{y}(\tilde{\tau})-\tilde{y}(\tilde{\tau})\,d\tilde{x}(\tilde{\tau})+\frac{1}{2}(\eta X-\xi Y),$$

где $\tilde{x}(\tilde{\tau})=x(t-\tilde{\tau})$, $\tilde{y}(\tilde{\tau})=y(t-\tilde{\tau})$. При этом мы уже имеем дело с множеством непрерывных функций, удовлетворяющих условиям $\tilde{x}(0)=X$, $\tilde{y}(0)=Y$, $\tilde{x}(t)=\xi$, $\tilde{y}(t)=\eta$, поэтому интеграл (40) после надлежащих преобразований примет вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Bigg\{\iint\limits_{C_{0,X;t,\xi}\times C_{0,Y;t,\eta}}\psi_0\Bigg(\xi,\eta,Z+\frac{1}{2}\int\limits_0^t \tilde{x}(\tau)\,d\tilde{y}(\tau)-\tilde{y}(\tau)\,d\tilde{x}(\tau)\Bigg)\times$$
$$\times\exp\Bigg\{-\int\limits_0^t V\big(\tilde{x}(\tau),\tilde{y}(\tau)\big)\,d\tau\Bigg\}\,d_{W(0,X;t,\xi)}\tilde{x}\,d_{W(0,Y;t,\eta)}\tilde{y}\Bigg\}\,d\xi\,d\eta.$$

С помощью леммы 1 и последующей замены в двойном интеграле по ξ и η

$$\bar{\xi}=\xi-X,\quad \bar{\eta}=Y-\eta,\quad \frac{D(\xi,\eta)}{D(\bar{\xi},\bar{\eta})}=1$$

это выражение может быть преобразовано к виду

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\Bigg\{\iint\limits_{C_{t,\bar{\xi}}\times C_{t,\bar{\eta}}}\psi_0\Bigg(\bar{\xi}+X,\bar{\eta}+Y,Z+\frac{1}{2}(\bar{\eta}X-\bar{\xi}Y)+\frac{1}{2}\int\limits_0^t \tilde{x}(\tau)\,d\tilde{y}(\tau)-\tilde{y}(\tau)\,d\tilde{x}(\tau)\Bigg)\times$$
$$\times\exp\Bigg\{-\int\limits_0^t V(\tilde{x}(\tau)+X,\tilde{y}(\tau)+Y)\,d\tau\Bigg\}\,d_{W(t,\bar{\xi})}\tilde{x}\,d_{W(t,\bar{\eta})}\tilde{y}\Bigg\}\,d\bar{\xi}\,d\bar{\eta}.$$

Наконец, вспоминая известное свойство интеграла по условной мере Винера

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Bigg\{\int\limits_{C_{t,X}}\mathcal{F}[x(\tau)]\,d_{W(t,X)}x\Bigg\}\,dX=\int\limits_{C[0,t],\,x(0)=0}\mathcal{F}[x(\tau)]\,d_W x,$$

получаем, что последний интеграл, а значит и функция $u(X,Y,Z,t)$, имеет вид

$$u(X,Y,Z,t)=\iint\limits_{\substack{C_{[0,t]}\times C_{[0,t]}\\ x(0)=0,\ y(0)=0}}\psi_0\Bigg(x(t)+X,y(t)+Y,Z+\frac{1}{2}[y(t)X-x(t)Y]+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t x(\tau)\,dy(\tau)-y(\tau)\,dx(\tau)\Bigg)\exp\Bigg\{-\int\limits_0^t V(x(\tau)+X,y(\tau)+Y)\,d\tau\Bigg\}\,d_W x\,d_W y. \tag{41}$$

Этап 2. Вывод производящего оператора H. Найдём уравнение, для которого функция (41) даёт решение задачи Коши. Для этого запишем выражение для $u(X,Y,Z,t+\Delta t)$:

$$u(X,Y,Z,t+\Delta t) = \\ = \iint\limits_{\substack{C_{[0,t+\Delta t]}\times C_{[0,t+\Delta t]} \\ \xi(0)=0,\ \eta(0)=0}} \psi_0\Bigg(\xi(t+\Delta t)+X, \eta(t+\Delta t)+Y, \\ Z+\frac{1}{2}[\eta(t+\Delta t)X-\xi(t+\Delta t)Y]+\frac{1}{2}\int\limits_0^{t+\Delta t}\xi(\tau)\,d\eta(\tau)-\eta(\tau)\,d\xi(\tau)\Bigg)\times \\ \times\exp\Bigg\{-\int\limits_0^{t+\Delta t}V(\xi(\tau)+X,\eta(\tau)+Y)\,d\tau\Bigg\}\,d_W\xi\,d_W\eta. \tag{42}$$

Разобьём теперь отрезок $[0,t+\Delta t]$ на два непересекающихся отрезка $[0,\Delta t]$ и $(\Delta t, t+\Delta t]$. Параметр времени на участке $[0,\Delta t]$ будем обозначать τ_1. Траектории $\xi(\tau)$ и $\eta(\tau)$ при $\tau\in[0,\Delta t]$ будем обозначать через $\xi'(\tau_1)$ и $\eta'(\tau_1)$ соответственно. Если же $\tau\in(\Delta t,t+\Delta t]$, то справедливо представление

$$\xi(\tau)=\xi(\tau)-\xi'(\Delta t)+\xi'(\Delta t)=\xi''(\tau_2)+\xi'(\Delta t),\quad \tau_2\in(0,t],$$
$$\eta(\tau)=\eta(\tau)-\eta'(\Delta t)+\eta'(\Delta t)=\eta''(\tau_2)+\eta'(\Delta t),\quad \tau_2\in(0,t],$$

где $\xi''(\tau_2)$ и $\eta''(\tau_2)$ — новые траектории, не зависящие от $\xi'(\tau_1)$ и $\eta'(\tau_1)$ соответственно из-за независимости приращений винеровского процесса. В частности, справедливы равенства

$$\xi(t+\Delta t)=\xi''(t)+\xi'(\Delta t),$$
$$\eta(t+\Delta t)=\eta''(t)+\eta'(\Delta t).$$

После такой замены криволинейный интеграл, фигурирующий в (42), примет следующий вид:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^{t+\Delta t}\xi(\tau)\,d\eta(\tau)-\eta(\tau)\,d\xi(\tau)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\Delta t}\xi'(\tau_1)\,d\eta'(\tau_1)-\eta'(\tau_1)\,d\xi'(\tau_1)+ \\ +\frac{1}{2}\int\limits_0^{t}\xi''(\tau_2)\,d\eta''(\tau_2)-\eta''(\tau_2)\,d\xi''(\tau_2)+\frac{1}{2}[\xi'(\Delta t)\eta''(t)-\eta'(\Delta t)\xi''(t)].$$

Для интеграла, стоящего в показателе экспоненты, получим следующее представление:

$$\int\limits_0^{t+\Delta t} V(\xi(\tau)+X, \eta(\tau)+Y)\,d\tau = \int\limits_0^{\Delta t} V(\xi'(\tau_1)+X, \eta'(\tau_1)+Y)\,d\tau_1 +$$
$$+\int\limits_0^{t} V(\xi''(\tau_2)+\xi'(\Delta t)+X, \eta''(\tau_2)+\eta'(\Delta t)+Y)\,d\tau_2.$$

С использованием полученных равенств выражение для функции $u(X,Y,Z,t)$ приводится к виду

$$\iint\limits_{\substack{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]\\ \xi'\eta'}} \iint\limits_{\substack{C[0,t]\times C[0,t]\\ \xi''\eta''}} \psi_0\Big(\xi''(t)+\xi'(\Delta_t)+X,\ \eta''(t)+\eta'(\Delta t)+Y,$$
$$Z+\frac{1}{2}[\eta''(t)(\xi'(\Delta t)+X)-\xi''(t)(\eta'(\Delta t)+Y)]+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^t \xi''(\tau_2)\,d\eta''(\tau_2)-\eta''(\tau_2)\,d\xi''(\tau_2)+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\Delta t} \xi'(\tau_1)\,d\eta'(\tau_1)-\eta'(\tau_1)\,d\xi'(\tau_1)+\frac{1}{2}[\eta'(\Delta t)X-\xi'(\Delta t)Y]\Big)\times$$
$$\times\exp\Big\{-\int\limits_0^{\Delta t} V(\xi'(\tau_1)+X, \eta'(\tau_1)+Y)\,d\tau_1\Big\}\times$$
$$\times\exp\Big\{-\int\limits_0^{t} V(\xi''(\tau_2)+\xi'(\Delta t)+X, \eta''(\tau_2)+\eta'(\Delta t)+Y)\,d\tau_2\Big\}\times$$
$$\times d_W\xi'\,d_W\eta'\,d_W\xi''\,d_W\eta''.$$

Сопоставляя теперь слагаемые в последнем выражении, которые отвечают траекториям ξ'' и η'', с представлением (41) для функции $u(X,Y,Z,t)$ и вычисляя интеграл Винера по траекториям ξ'' и η'', получаем, что последний интеграл будет равен

$$\iint\limits_{\substack{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]\\ \xi'(0)=\eta'(0)=0}} u\Big(\xi'(\Delta t)+X,\ \eta'(\Delta t)+Y,\ Z+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\Delta t}\xi'(\tau_1)\,d\eta'(\tau_1)-\eta'(\tau_1)\,d\xi'(\tau_1)+$$
$$+\frac{1}{2}[\eta'(\Delta t)X-\xi'(\Delta t)Y],\ t\Big)\cdot\exp\Big\{-\int\limits_0^{\Delta t} V(\xi'(\tau_1)+X, \eta'(\tau_1)+Y)\,d\tau_1\Big\}\,d_W\xi'\,d_W\eta'.$$

Теперь, воспользовавшись тем, что

$$u(X,Y,Z,t) = \iint\limits_{\substack{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]\\ \xi'(0)=\eta'(0)=0}} u(X,Y,Z,t)\, d_W\xi'\, d_W\eta',$$

найдём, что

$$u(X,Y,Z,t+\Delta t) - u(X,Y,Z,t) = \iint\limits_{\substack{C[0,\Delta t]\times C[0,\Delta t]\\ \xi'(0)=\eta'(0)=0}} \Biggl\{ u\biggl(\xi'(\Delta t)+X,\ \eta'(\Delta t)+Y,$$

$$Z + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\Delta t} \xi'(\tau_1)\, d\eta'(\tau_1) - \eta'(\tau_1)\, d\xi'(\tau_1) + \frac{1}{2}[\eta'(\Delta t)X - \xi'(\Delta t)Y],\ t\biggr) \times$$

$$\times \exp\Biggl\{ -\int\limits_0^{\Delta t} V(\xi'(\tau_1)+X, \eta'(\tau_1)+Y)\, d\tau_1 \Biggr\} - u(X,Y,Z,t)\Biggr\}\, d_W\xi'\, d_W\eta'.$$

Теперь разложим в последнем выражении в ряды Тейлора экспоненту и функцию u в точке (X,Y,Z). Вычисляя получающиеся коэффициенты членов разложения, деля обе части полученного равенства на Δt и переходя в полученном соотношении к пределу при $\Delta t \to 0$, получаем, что $u(x,y,z,t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{x^2+y^2}{4}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} - y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} \right) - V(x,y)u, \qquad (43)$$

что завершает доказательство теоремы 3. □

Замечание 3. При формулировке теоремы 3 рассматривался случай, когда потенциальная функция $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ зависела лишь от переменных x и y. Это связано с тем, что рассмотрение решения задачи Коши в том случае, когда V зависит также и от переменной z, связано с исследованием вопроса о регулярности траекторий процесса $\mathbf{r}(\tau)$, что выходит за рамки данной статьи и будет опубликовано автором позже.

Замечание 4. Отметим в заключение, что полученный оператор L на группе Гейзенберга является не чем иным, как аналогом оператором теплопроводности. А именно, как известно (см., например, [15, 18, 20]), алгебра Ли левоинвариантных векторных полей на $H_3(\mathbb{R})$ порождается векторными полями

$$X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad Z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Лапласиан $\mathcal{L} = X^2 + Y^2$, построенный с помощью полей X и Y и называемый *сублапласианом* на $H_3(\mathbb{R})$ [15, 18, 20], с точностью до множителя есть не что иное, как оператор, фигурирующий в правой части равенства (43). Таким образом, оператор H, полученный в теореме 3, является аналогом оператора теплопроводности для $H_3(\mathbb{R})$, а функция $\mathcal{E}^+(\xi, \eta, \zeta, t_0; X, Y, Z, t)$ — соответствующее тепловое ядро.

Литература

[1] Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.

[2] Берестовский В. Н. Геодезические неголономных левоинвариантных внутренних метрик на группе Гейзенберга и изопериметриксы плоскости Минковского // Сиб. матем. журн. — 1994. — Т. 35, № 1. — С. 3—11.

[3] Богачёв В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ. — М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.

[4] Гельфанд И. М., Яглом А. М. Интегрирование в функциональных пространствах и его применение в квантовой физике // УМН. — 1956. — Т. 11, № 1 (67). — С. 77—114.

[5] Грешнов А. В. Метрики равномерно регулярных пространств Карно—Каратеодори и их касательных конусов // Сиб. матем. журн. — 2006. — Т. 47, № 2. — С. 259—292.

[6] Грешнов А. В. О дифференцируемости горизонтальных кривых в квазипространствах Карно—Каратеодори // Сиб. матем. журн. — 2008. — Т. 49, № 1. — С. 67—86.

[7] Донцов В. В. Систолы равномерных решёток на группе Гейзенберга с метриками Карно—Каратеодори // Фундамент. и прикл. матем. — 2000. — Т. 6, вып. 2. — С. 401—432.

[8] Донцов В. В. Систолы на группах Гейзенберга с метриками Карно—Каратеодори // Матем. сб. — 2001. — Т. 192, № 3. — С. 27—54.

[9] Кисиль В. В. Об алгебре псевдодифференциальных операторов, порождённой свёртками на группе Гейзенберга // Сиб. матем. журн. — 1993. — Т. 34, № 6. — С. 75—85.

[10] Ковальчик И. М. Интеграл Винера // УМН. — 1963. — Т. 18, № 1 (109). — С. 97—134.

[11] Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. — М.; Л.: ОНТИ, 1936.

[12] Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. — М.: Наука, 1972.

[13] Магнус В., Каррас А., Солитэр Д. Комбинаторная теория групп. — М.: Наука, 1974.

[14] Рашевский П. К. О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией // Уч. зап. пед. ин-та им. Либкнехта. Сер. физ.-мат. наук. — 1938. — № 2. — С. 83—94.

[15] Сачкова Е. Ф. Инвариантный объём субриманова шара на группе Гейзенберга // СФНМ. — 2011. — Т. 42. — С. 199—203.

[16] Фейнман Р., Хиббс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968.

[17] Шилов Г. Е. Интегрирование в бесконечномерных пространствах и интеграл Винера // УМН. — 1963. — Т. 18, № 2 (110). — С. 99—120.

[18] Applebaum D., Cohen S. Lévy processes, pseudo-differential operators and Dirichlet forms in the Heisenberg group // Ann. Fac. Sci. Toulouse: Math., Sér. 6. — 2004. — Vol. 13, no. 2. — P. 149—177.

[19] Cameron R. H., Martin W. T. Transformations of Wiener integrals under translations // Ann. Math. — 1944. — Vol. 45, no. 2. — P. 386—396.

[20] Dasgupta A., Molahajloo S., Wong M.-W. The spectrum of the sub-Laplacian on the Heisenberg group // Tôhoku Math. J. — 2011. — Vol. 63. — P. 269—276.

[21] Delporte J. Fonctions aléatoires presque sûrement continues sur un intervalle fermé // Ann. Inst. Henri Poincaré. — 1964. — Vol. 1, no. 2. — P. 111—215.

[22] Driver B., Melcher T. Hypoelliptic heat kernel inequalities on the Heisenberg group // J. Funct. Anal. — 2005. — Vol. 221. — P. 340—365.

[23] Gaveau B. Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certains groupes nilpotents // Acta Math. — 1977. — Vol. 139, no. 1—2. — P. 95—153.

[24] Gromov M. Carnot—Caratheodory spaces seen from within // Sub-Riemannian Geometry. — Basel: Birkhäuser, 1996.

[25] Hulanicki A. The distribution of energy in the Brownian motion in the Gaussian field and analytic-hypoellipticity of certain subelliptic operators on the Heisenberg group // Stud. Math. — 1976. — Vol. 56, no. 2. — P. 165—173.

[26] Krantz S. G. Explorations in Harmonic Analysis with Applications to Complex Function Theory and the Heisenberg Group. — Berlin: Springer, 2007.

[27] Lévy P. Le mouvement brownien plan // Am. J. Math. — 1940. — Vol. 62, no. 1. — P. 487—550.

[28] Neuenschwander D. Probabilities on the Heisenberg Group. Limit Theorems and Brownian Motion. — Berlin: Springer, 1996. — (Lect. Notes Math.; Vol. 163).

[29] Stein E. M. Harmonic Analysis. Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.

[30] Taylor M. E. Noncommutative Microlocal Analysis. Pt. I. — Amer. Math. Soc., 1984. — (Memoirs Amer. Math. Soc.; Vol. 313).

[31] Watanabe S. Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculus) and its applications to heat kernels // Ann. Probab. — 1987. — Vol. 15, no. 1. — P. 1—39.