

# Гладкие множества Жюлиа\*

**В. С. СЕКОВАНОВ**

*Костромской государственный университет*  
e-mail: sekovanovvs@yandex.ru

УДК 517.988.5

**Ключевые слова:** множества Жюлиа, орбита точки, хаос, неподвижная точка, периодическая точка, транзитивность, притягивающие и отталкивающие неподвижные точки.

## Аннотация

Известно, что множества Жюлиа, как правило, имеют фрактальную структуру. В данной статье приведены примеры гладких множеств Жюлиа: окружность, отрезок, бесконечный промежуток, прямая линия, комплексная плоскость и др. Показано, что исследуемые в статье функции хаотичны на своих множествах Жюлиа. Результаты, полученные аналитическими исследованиями, визуализированы с помощью компьютерных программ. Указаны алгоритмы построения рассмотренных множеств Жюлиа.

## Abstract

*V. S. Sekovanov, Smooth Julia sets, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 4, pp. 133–150.*

It is known that Julia sets, as a rule, have a fractal structure. In this paper, we give examples of smooth Julia sets, among them: a circle, a segment, an infinite interval, a straight line, and the complex plane. It is shown that the functions studied in the paper are chaotic on their Julia sets. The results obtained by analytical research are visualized using computer programs. The algorithms for constructing the Julia sets considered are indicated.

В настоящее время исследованиям множеств Жюлиа уделяется большое внимание. Данные множества используются в качестве математических моделей в физике, экономике и других дисциплинах. Исследованию множеств Жюлиа посвящены многочисленные статьи, монографии, учебные пособия, сборники трудов конференций (см. [1–12]). Отметим, что достаточно полный анализ научных исследований множеств Жюлиа проведён в [3]. Множества Жюлиа являются важной компонентой современной математики — голоморфной динамики. Исследования в этой области отражены в научных статьях, монографиях, учебных пособиях и сайтах.

В большинстве случаев множества Жюлиа являются фракталами (на рис. 1–7 множество Жюлиа — граница чёрного цвета). Ни в одной точке таких множеств нельзя провести касательную. Однако существуют гладкие множества

---

\*Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 16-18-10304).

Жюлиа, которые мы обзорно опишем, приведём примеры целого класса гладких, как связных, так и несвязных множеств Жюлиа и выявим универсальный алгоритм построения рассмотренных множеств. Отметим, что, излагая материал, мы использовали различные подходы при исследовании хаотичности отображений и различные способы выявления компонент, характеризующих хаос (существенная зависимость от начальных условий, всюду плотность периодических точек, транзитивность).

Определять множество Жюлиа будем согласно теореме 1 (см. [2]).

**Теорема 1.** Пусть  $f$  — полином  $n$ -й степени  $n \geq 2$ . Тогда следующие определения множества Жюлиа эквивалентны:

- а) множество Жюлиа — это граница области притяжения всех притягивающих неподвижных точек функции  $f$ , включая  $\infty$ ;
- б) каждая отталкивающая периодическая точка принадлежит  $J(f)$ , и  $J(f)$  является замыканием отталкивающих периодических точек для функции  $f$ ;
- в) если  $w \in J(f)$ , то  $J(f)$  — это замыкание  $\bigcup_{n=1}^{\infty} (f^{(n)})^{-1}(w)$ , где

$$(f^{(n)})^{-1}(w) = \{z \in \mathbb{C}: f^{(n)}(z) = w\}.$$

**Замечание.** При изображении фракталов мы считаем, что начало координат находится в левом верхнем углу монитора компьютера.

Интересный тип множеств — заполняющие множества Жюлиа. Эти множества особенно привлекательны и красивы. Согласно [2] заполняющее множество Жюлиа для полиномов состоит из точек, орбиты которых пойманы (рис. 1–5),



Рис. 1.  $f(z) = z^3 + i$



Рис. 2.  $f(z) = z^3 - iz^2 + z$

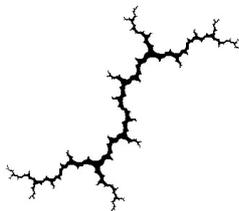
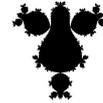


Рис. 3.  $f(z) = z^2 + i$

Рис. 4.  $f(z) = z^3 + 0,48z + 0,928i$ Рис. 5.  $f(z) = z^3 + 0,3z + 0,8i$ 

в отличие от границы этого множества, являющейся настоящим множеством Жюлиа.

Приведём модуль универсальной программы для построения заполняющих множеств Жюлиа, изображённых на рис. 1–5 (полный алгоритм будет приведён в конце статьи).

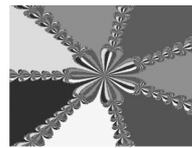
```
try
  for k := 1 to iter do c := fx(c);
  kef := power(c.re, 2) + power(c.im, 2);
  if(kef <= 4) then
    setpixel(i, j, clblack);
except
```

Поясним вкратце работу модуля. Рассматривается число  $z \in \mathbb{C}$  и вычисляется  $f^{(50)}(z)$ . Если  $|f^{(50)}(z)| \leq 4$ , то точка  $z$  закрашивается в чёрный цвет. В противном случае данная точка пропускается и рассматривается очередная точка (см. [8]).

Приведём модуль программы для построения множества Жюлиа для функции

$$f_1(z) = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2},$$

изображённой на рис. 6.

Рис. 6. Множества Жюлиа  $f_1(z) = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2}$ Рис. 7. Множества Жюлиа  $f_2(z) = z - \frac{z^7 - 1}{7z^6}$ 

```
try
  for k := 1 to iter do c := fx(c);
  begin
    if(abs(c - 1) < 0.0005) then
      setpixel(i, j, 1);
    if(abs(c - (-1/2, sqrt(3)/2)) < 0.0005) then
      setpixel(i, j, 5);
```

```

        if(abs(c - (-1/2, -sqrt(3)/2)) < 0.0005) then
            setpixel(i, j, 11);
        end;
    except
        //setpixel(i, j, white);
    end;
end;
end;

```

Притягивающими неподвижными точками функции  $f_1(z)$  являются точки

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

В рамках модуля производятся следующие действия: для комплексного числа  $z$  вычисляется  $f^{(50)}(z)$ , присваивается  $c = f^{(50)}(z)$ . Если  $|c - z_1| < 0,005$ , то  $z$  закрашивается в серый цвет. Если  $|c - z_2| < 0,005$ , то  $z$  закрашивается в чёрный цвет. Если  $|c - z_3| < 0,005$ , то  $z$  закрашивается в белый цвет, поскольку множество Жюлиа является границей областей притяжений для притягивающих неподвижных точек функции

$$f_1(z) = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2}$$

(см. также рис. 6 и [2, 6]).

Обозначим через  $z_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 6$ , корни седьмой степени из единицы. Тогда

$$j(f_0) = \partial(z_0) = \partial(z_1) = \partial(z_2) = \dots = \partial(z_6).$$

На рис. 7 изображены бассейны притяжения неподвижных точек  $z_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 6$  (семь цветов). В данном случае множество Жюлиа функции

$$f_2(z) = z - \frac{z^7 - 1}{7z^6}$$

является границей областей притяжения неподвижных точек (аттракторов) и имеет фрактальную структуру.

Покажем, что множество Жюлиа для функции  $f(z) = z^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$ , есть окружность  $|z| = 1$ . Замечаем, что

$$f^{(1)}(z) = z^p, \quad f^{(2)}(z) = (z^p)^p = z^{p^2}, \dots, \quad f^{(n)}(z) = z^{p^n}.$$

Так как

$$|z^{p^n}| = |z^p| \cdot |z^p| \cdots |z^p|,$$

то  $|f^{(n)}(z)| = 1$ , если  $|z| = 1$ . Следовательно,  $f^{(n)}(z)$  находится на единичной окружности с центром в начале координат.

Нетрудно проверить, что последовательность  $f^{(n)}(z) = z^{p^n}$  стремится к  $\infty$ , если  $|z| > 1$ . При  $|z| < 1$  данная последовательность будет стремиться к 0. В рассмотренном случае согласно теореме 1 множество Жюлиа будет окружностью единичного радиуса с центром в начале координат, являющейся гладкой кривой.

Покажем теперь, что множество Жюлиа для функции  $g(z) = z^3 - 3z$  — это отрезок  $[-2; 2]$  (см. [4, 10]). Пусть  $S$  — окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Каждая точка  $z \in S$  имеет вид  $z = e^{i\theta}$ . Положим  $T(z) = T(e^{i\theta}) = 2 \cos(\theta)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , и  $f(z) = z^3 = e^{3i\theta}$ . Очевидно, что  $T(z) = T(e^{i\theta}) = 2 \cos(\theta)$  отображает окружность  $S$  на отрезок  $[-2, 2]$ :

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{f^{(n)}} & S \\ T \downarrow & & \downarrow T \\ [-2; 2] & \xrightarrow{g^{(n)}} & [-2; 2] \end{array} \quad (*)$$

**Предложение 1.** Пусть  $n$  — натуральное число. Тогда

$$T(f^{(n)}(e^{i\theta})) = g^{(n)}(T(e^{i\theta})),$$

т. е. диаграмма (\*) коммутативна.

Заметим, что

$$T(f^{(n)}(e^{i\theta})) = T(e^{3^n i\theta}) = 2 \cos(3^n \theta)$$

для каждого натурального числа  $n$ .

Равенство

$$g^{(n)}(T(e^{i\theta})) = 2 \cos(3^n \theta)$$

докажем по индукции. При  $n = 1$  предложение 1 справедливо, поскольку

$$\begin{aligned} g(T(e^{i\theta})) &= g(2 \cos(\theta)) = \\ &= 8 \cos^3(\theta) - 6 \cos(\theta) = 2(4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta)) = 2 \cos(3\theta). \end{aligned}$$

Предположим, что предложение 1 справедливо при натуральном значении  $n$ , т. е.

$$g^{(n)}(T(e^{i\theta})) = 2 \cos(3^n \theta).$$

Тогда

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(T(e^{i\theta})) &= g(g^{(n)}(T(e^{i\theta}))) = g(2 \cos(3^n \theta)) = \\ &= 8 \cos^3(3^n \theta) - 6 \cos(3^n \theta) = 2(4 \cos^3(3^n \theta) - 3 \cos(3^n \theta)) = 2 \cos(3^{n+1} \theta). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$g^{(n)}(T(e^{i\theta})) = 2 \cos(3^n \theta)$$

для каждого натурального числа  $n$ , и

$$T(f^{(n)}(e^{i\theta})) = g^{(n)}(T(e^{i\theta})).$$

Пусть выполняется равенство  $g^{(n)}(T(z)) = T(z)$ , где  $z = e^{i\theta}$ , т. е.  $2 \cos(3^n \theta) = 2 \cos \theta$ . Данное уравнение имеет две серии решений:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{2\pi k}{3^n - 1}, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \theta_2 &= \frac{2\pi m}{3^n + 1}, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Замечаем, что

$$\begin{aligned} g^{(n)}\left(T\left(\exp\left(\frac{2\pi ki}{3^n-1}\right)\right)\right) &= 2\cos\left(3^n \cdot \frac{2\pi k}{3^n-1}\right) = \\ &= 2\cos\left(\frac{(3^n-1+1)2\pi k}{3^n-1}\right) = 2\cos\left(2\pi k + \frac{2\pi k}{3^n-1}\right) = \\ &= 2\cos\left(\frac{2\pi k}{3^n-1}\right) = T\left(e^{\frac{2\pi ki}{3^n-1}}\right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} f^{(n)}\left(\exp\left(\frac{2\pi ki}{3^n-1}\right)\right) &= \exp\left(3^n \cdot \frac{2\pi ki}{3^n-1}\right) = \\ &= \exp\left(\frac{(3^n-1+1)2\pi ki}{3^n-1}\right) = \exp\left(\left(2\pi k + \frac{2\pi k}{3^n-1}\right) \cdot i\right) = \exp\left(\frac{2\pi k}{3^n-1} \cdot i\right). \end{aligned}$$

Легко проверить, что

$$f^{(n)}\left(e^{\frac{2\pi ki}{3^n+1}}\right) \neq e^{\frac{2\pi k}{3^n+1} \cdot i}.$$

Если выполняется равенство  $f^{(n)}(z) = z$ , то нетрудно определить, что  $z = e^{\frac{2\pi ki}{3^n-1}}$ ,  $\theta_1 = 2\pi k/(3^n-1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , и точки  $T(e^{\frac{2\pi ki}{3^n-1}})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , будут неподвижными точками для функции  $g^{(n)}$ . Таким образом, точки  $T(e^{\frac{2\pi ki}{3^n-1}})$ ,  $n \in \mathbb{N}$  (соответственно  $e^{\frac{2\pi ki}{3^n-1}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ), являются неподвижными точками  $g^{(n)}$  (соответственно  $f^{(n)}$ ).

Покажем, что  $z = e^{i\theta}$  — неподвижная отталкивающая точка для функции  $f^{(n)}$ , а  $T(z)$  — неподвижная отталкивающая точка для функции  $g^{(n)}$ . Поскольку  $f(z) = z^3$ , то для каждого  $z = e^{i\theta}$

$$|(f^{(n)}(z))'| = |(z^{3^n})'| = 3^n > 1.$$

Имеем, что

$$T(f^{(n)}(e^{i\theta})) = g^{(n)}(T(e^{i\theta})).$$

Так как  $T(e^{3^n\theta}) = 2\cos(3^n\theta)$ , то  $g^{(n)}(2\cos\theta) = 2\cos(3^n\theta)$ . Из последнего равенства получаем, что

$$(g^{(n)}(2\cos\theta))' = g^{(n)'}(2\cos\theta)(-2\sin\theta) = -2\sin(3^n\theta)3^n,$$

т. е.

$$g^{(n)'}(2\cos\theta) = \frac{3^n \sin(3^n\theta)}{\sin\theta}.$$

Поскольку  $f^{(n)}(e^{i\theta}) = e^{i\theta}$ , то

$$\cos(3^n\theta) + i\sin(3^n\theta) = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Следовательно,  $\sin(3^n\theta) = \sin\theta$ . Таким образом,

$$g^{(n)'}(2\cos\theta) = \frac{3^n \sin(3^n\theta)}{\sin(3^n\theta)} = 3^n > 1.$$

Следовательно, точка  $w = T(z) = T(e^{i\theta})$  будет отталкивающей неподвижной точкой для функции  $g^{(n)}$ .

Нетрудно установить, что если  $T(z) \in [-2; 2]$  — неподвижная отталкивающая точка для функции  $g^{(n)}$ , то найдётся неподвижная отталкивающая точка  $z = e^{i\theta}$  для функции  $f^{(n)}$ . Множеством Жюлиа для функции  $f(z) = z^3$  является окружность радиуса 1 с центром в начале координат, и множество периодических точек всюду плотно в  $S$ . Пусть  $y \in [-2; 2]$ . Выберем такое соответствующее значение  $x \in S$ , что  $y = T(x)$ . Поскольку множество Жюлиа есть замыкание отталкивающих периодических точек  $f(z)$  (теорема 1), то существует такая последовательность периодических отталкивающих точек  $x_n \in S$ , что  $x_n \rightarrow x$ . Тогда последовательность  $\{T(x_n)\}_1^\infty \in [-2; 2]$  будет состоять из периодических отталкивающих точек для функции  $g(z) = z^3 - 3z$ , заданной на отрезке  $[-2; 2]$ , и  $T(x_n) \rightarrow T(x) = y$ . Следовательно,  $j(g) = [-2; 2]$ .

Покажем, что функция  $g(z) = z^3 - 3z$  хаотична в смысле Девани на своём множестве Жюлиа. Установим сначала транзитивность. Пусть  $U$  и  $V$  — открытые множества в множестве  $j(g) = [-2; 2]$ . Ясно, что  $U \cap j(g) \neq \emptyset$  и  $V \cap j(g) \neq \emptyset$ . Пусть  $x \in V \cap j(g)$ . Согласно теореме 1  $j(g) = [-2; 2]$  является замыканием множества  $\bigcup_{n=1}^\infty (g^{(n)})^{-1}(x)$ . Следовательно, существует такое  $n \in \mathbb{N}$ , что  $(g^{(n)})^{-1}(x) \cap U \neq \emptyset$ . Пусть  $u \in (g^{(n)})^{-1}(x) \cap U$ . Тогда  $g^{(n)}(u) = x$  и  $g^{(n)}(U) \cap V \neq \emptyset$ . Таким образом,  $g(z) = z^3 - 3z$  транзитивно. Поскольку множество периодических точек  $g(z)$  всюду плотно и данное отображение транзитивно, то согласно [2]  $g(z)$  хаотично на множестве Жюлиа  $j(g) = [-2; 2]$ .

**Теорема 2.** Пусть  $q$  — вещественное число,  $q \neq 0$ . Тогда существует функция  $f_q(z)$ , обладающая следующими свойствами:

- 1) множеством Жюлиа  $f_q(z)$  является промежутки  $]-\infty; -q/2] \cup [q/2; +\infty[$ ;
- 2)  $f_q(z)$  хаотична на множестве  $]-\infty; -q/2] \cup [q/2; +\infty[$ .

**Доказательство.** Определим сначала функцию, которая обладает свойством 1). Рассмотрим  $P(z) = z^3 - 3z$ . Положим

$$f_q(z) = \frac{q}{P(q/2)} = \frac{z^3}{q^2 - 3z^2}.$$

Покажем, что  $j(f_q) = ]-\infty; -q/2] \cup [q/2; +\infty[$ . Неподвижными точками функции  $f_q(z)$  будут точки

$$z_0^q = 0, \quad z_1^q = \frac{q}{2}, \quad z_2^q = -\frac{q}{2}.$$

Точка  $z_0^q = 0$  будет неподвижной сверхпритягивающей точкой, а неподвижные точки  $z_1^q$  и  $z_2^q$  функции  $f_q(z)$  будут отталкивающими. Нетрудно заметить, что

$$f_q^{(n)}(z) = \frac{q}{P^{(n)}(q/z)}.$$

Действительно, пусть

$$y = \frac{q}{P(q/z)}.$$

Тогда

$$f_q^{(2)}(z) = f_q(y) = \frac{q}{P(q/y)} = \frac{q}{P(q/(q/P(q/z)))} = \frac{q}{P^{(2)}(q/z)}.$$

Продолжая вычисления, получаем, что

$$f_q^{(n)}(z) = \frac{q}{P^{(n)}(q/z)}$$

для каждого  $n \in \mathbb{N}$ . Нетрудно проверить, что точка  $q/x$  является неподвижной отталкивающей точкой для функции  $P^{(n)}$ ,  $q/x \in [-2; 2]$  тогда и только тогда, когда точка  $x \in ]-\infty; -q/2] \cup [q/2; +\infty[$  является неподвижной отталкивающей точкой для функции  $f_q^{(n)}$ . Действительно, пусть

$$P^{(n)}\left(\frac{q}{x}\right) = \frac{q}{x}, \quad \left(P^{(n)}\left(\frac{q}{x}\right)\right)' > 1.$$

Тогда  $f_q^{(n)}(x) = x$  и

$$\left(f_q^{(n)}(x)\right)' = -\frac{\left(P^{(n)}(q/x)\right)' q(-q/x^2)}{\left(P^{(n)}(q/x)\right)\left(P^{(n)}(q/x)\right)} = \left(P^{(n)}\left(\frac{q}{x}\right)\right)' > 1.$$

Аналогично устанавливается обратное утверждение.

Покажем теперь, что

$$P^{(n)}\left(w + \frac{1}{w}\right) = w^{3^n} + \frac{1}{w^{3^n}}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} P\left(w + \frac{1}{w}\right) &= \left(w + \frac{1}{w}\right)^3 - 3\left(w + \frac{1}{w}\right) = w^3 + \frac{1}{w^3}, \\ P^{(2)}\left(w + \frac{1}{w}\right) &= \left(w^3 + \frac{1}{w^3}\right)^3 - 3\left(w^3 + \frac{1}{w^3}\right) = w^{3^2} + \frac{1}{w^{3^2}}. \end{aligned}$$

Продолжая вычисления, получаем

$$P^{(n)}\left(w + \frac{1}{w}\right) = w^{3^n} + \frac{1}{w^{3^n}}$$

для каждого  $n \in \mathbb{N}$ .

Пусть сначала  $z \in ]-\infty; -q/2] \cup [q/2; +\infty[$ . Тогда  $q/z \in [-2; 2]$  и мы получим для любого  $n \in \mathbb{N}$ , что

$$P^{(n)}\left(\frac{q}{z}\right) \subseteq [-2; 2].$$

По формуле

$$f_q^{(n)}(z) = \frac{q}{P^{(n)}(q/z)}$$

получаем, что  $f_q^{(n)}(z) \in ]-\infty; -q/2] \cup [q/2; +\infty[$ .

Пусть теперь  $z \notin ]-\infty; -q/2] \cup [q/2; +\infty[$ . Тогда  $q/z \notin [-2; 2]$  и существует такое  $w \in \mathbb{C}$ , что

$$w + \frac{1}{w} = \frac{q}{z}$$

и  $|w| > 1$ . Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}\left(w + \frac{1}{w}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(w^{3^n} + \frac{1}{w^{3^n}}\right) = \infty.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_q^{(n)}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q}{P^{(n)}(q/z)} = 0.$$

Согласно [4] граница области притяжения совпадает с множеством Жюлиа, т. е.  $j(f_q) = \partial A = \bar{A} \setminus A$ , где  $A$  — область притяжения,  $\bar{A}$  — замыкание  $A$ ,  $\partial A$  — граница множества  $A$ . В нашем случае множеством Жюлиа будет множество  $] -\infty; -q/2] \cup [q/2; +\infty[$ , поскольку оно является границей области притяжения к единственной неподвижной притягивающей точке  $z_0^q = 0$ . Компьютерный эксперимент при  $q = 1$  (рис. 8) подтверждает наше утверждение.



Рис. 8. Множество Жюлиа функции  $f_1(z) = z^3 / (1 - 3z^2)$

Покажем теперь, что функция  $f_q(z)$  обладает свойством 2). Для этой цели следует доказать, что функция  $f_q(z)$  транзитивна на  $] -\infty; -q/2] \cup [q/2; +\infty[$  и множество периодических отталкивающих точек  $f_q(z)$  всюду плотно в множестве  $] -\infty; -q/2] \cup [q/2; +\infty[$  (см. [2]).

Пусть  $U$  и  $V$  — открытые множества в  $] -\infty; -q/2] \cup [q/2; +\infty[$ . Тогда множества

$$U_1 = \left\{ \frac{q}{x}; x \in U \right\}, \quad V_1 = \left\{ \frac{q}{y}; y \in V \right\} —$$

открытые множества в  $[-2; 2]$ . Поскольку функция  $P(z) = w^3 - 3w$  хаотична на множестве  $[-2; 2]$ , то существует  $n \in \mathbb{N}$ , такое что  $P^{(n)}(U_1) \cap V_1$  — непустое множество. Существует  $x_0 \in P^{(n)}(U_1) \cap V_1$ . Следовательно,  $x_0 = P^{(n)}(q/x)$ , где  $x \in U$ . Тогда

$$\frac{q}{x_0} = \frac{q}{P^{(n)}(q/x)} = f_q^{(n)}(x)$$

принадлежит множеству  $f^{(n)}(U)$ . Поскольку  $x_0 \in V_1$ , то  $q/x_0$  принадлежит множеству  $V$ . Транзитивность доказана.

Докажем плотность периодических точек всюду на множестве  $] -\infty; -q/2] \cup [q/2; +\infty[$ . Пусть  $y \in ] -\infty; -q/2] \cup [q/2; +\infty[$ . Тогда  $x = q/y \in [-2; 2]$ .

Поскольку множеством Жюлиа для функции  $P(z) = z^3 - 3z$  является отрезок  $[-2; 2]$  и множество периодических отталкивающих точек всюду плотно в  $[-2; 2]$ , то существует такая последовательность периодических отталкивающих точек  $x_n \in [-2; 2]$ , что  $x_n \rightarrow x$  (теорема 1). Тогда последовательность  $y_n = q/x_n \in ]-\infty; -q/2] \cup [q/2; +\infty[$  будет состоять из периодических отталкивающих точек для функции  $f_q(z)$ , заданной на множестве  $]-\infty; -q/2] \cup [q/2; +\infty[$ , и  $y_n \rightarrow y$ . Следовательно,  $j(f_q(z)) = ]-\infty; -q/2] \cup [q/2; +\infty[$ . Мы заключаем, что функция  $f_q(z)$  хаотична на своём множестве Жюлиа  $[2]$ , и свойство 2) доказано.  $\square$

Приведём пример семейства рациональных функций, у которых множества Жюлиа — прямые линии (см. [2, 6, 7]). Доказательство проведём, следуя [7].

Мы покажем, что множествами Жюлиа для рациональных функций

$$f(z) = z - \frac{z^2 - e^{i\theta}}{2z} = \frac{z^2 + e^{i\theta}}{2z} = \frac{z}{2} + \frac{e^{i\theta}}{2z}, \quad z \in \bar{\mathbb{C}}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

являются прямые линии

$$\mu(z) = re^{i(\theta/2 + \pi/2)}, \quad r \in \mathbb{R}, \quad z = r,$$

проходящие через начало координат, и установим, что каждая функция  $f(z)$  данного семейства хаотична на своём множестве Жюлиа. Обозначим прямую  $\mu(z) = re^{i(\theta/2 + \pi/2)}$  через  $L$ .

Поясним сказанное, рассмотрев конкретное значение  $\theta = 0$ . В данном случае

$$f(z) = z - \frac{z^2 - e^{i \cdot 0}}{2z} = \frac{z^2 + 1}{2z}.$$

Множеством Жюлиа будет мнимая ось, поскольку  $\mu(z) = re^{i\pi/2} = ri$ .

Рассмотрим теперь два отображения, каждое из которых является автоморфизмом комплексных плоскостей  $\bar{Z}$  и  $\bar{W}$ :

$$w = \varphi(z) = \frac{z + e^{i\theta/2}}{z - e^{i\theta/2}}, \quad z = \varphi^{-1}(w) = e^{i\theta/2} \left( \frac{w + 1}{w - 1} \right).$$

Пусть  $l(w) = w^2$ . Покажем тогда, что  $l = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ , т. е.  $w^2 = \varphi(f(\varphi^{-1}(w)))$ . Пусть  $w = w_0$ . Тогда

$$z_0 = \varphi^{-1}(w_0) = e^{i\theta/2} \left( \frac{w_0 + 1}{w_0 - 1} \right).$$

Далее получим, что

$$\begin{aligned} z_1 = f(z_0) &= f(\varphi^{-1}(w_0)) = \frac{z_0^2 + e^{i\theta}}{2z_0} = \\ &= \frac{(e^{i\theta/2})^2 ((w_0 + 1)/(w_0 - 1))^2 + e^{i\theta}}{2e^{i\theta/2} ((w_0 + 1)/(w_0 - 1))} = e^{i\theta/2} \left( \frac{w_0^2 + 1}{w_0^2 - 1} \right). \end{aligned}$$

После преобразований имеем

$$\varphi\left(f(\varphi^{-1}(w_0))\right) = \frac{e^{i\theta/2}((w_0^2 + 1)/(w_0^2 - 1)) + e^{i\theta/2}}{e^{i\theta/2}((w_0^2 + 1)/(w_0^2 - 1)) - e^{i\theta/2}} = w_0^2.$$

Таким образом,

$$\varphi\left(f(\varphi^{-1}(w))\right) = w^2$$

для каждого  $w \in \bar{\mathbb{C}}$ . Множество Жюлиа для функции  $h(z) = z^2$  — это окружность единичного радиуса с центром в начале координат комплексной плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$ . Таким образом, изучение траекторий точки при отображении  $f$  сводится к изучению траектории точки при отображении  $l(w) = w^2$ .

Заметим, что прямая  $L$  инвариантна относительно функции  $f$ , а дробно-линейное преобразование

$$\varphi^{-1}(w) = e^{i\theta/2} \left( \frac{w + 1}{w - 1} \right)$$

преобразует единичную окружность в прямую  $L$ .

Будем считать, что функция  $\varphi^{-1}(w)$  переводит внутренность и внешность единичного круга  $|w| = 1$  соответственно в полуплоскость  $P_1$  и полуплоскость  $P_2$ , на которые комплексная плоскость разбивается прямой  $\mu(z) = re^{i(\theta/2 + \pi/2)}$  ( $r \in \mathbb{R}, z = r$ ). Справедлива лемма 1.

**Лемма 1 [7].** Пусть  $\varphi$  — гомеоморфизм метрических пространств  $Z$  и  $W$  ( $\varphi: Z \rightarrow W$ ),  $\varphi^{-1}$  — обратное отображение для  $\varphi$  (т. е.  $\varphi^{-1}: W \rightarrow Z$ ). Пусть  $f$  — отображение метрического пространства  $Z$  на себя, и пусть  $h = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ . Тогда  $\varphi \circ f^{(n)} \circ \varphi^{-1} = h^{(n)}$ , т. е.

$$\varphi\left(f^{(n)}(\varphi^{-1}(w))\right) = h^{(n)}(w).$$

Рассмотрим

$$h(w) = w^2, \quad w = \varphi(z) = \frac{z + e^{i\theta/2}}{z - e^{i\theta/2}}, \quad z = \varphi^{-1}(w) = e^{i\theta/2} \left( \frac{w + 1}{w - 1} \right),$$

$$f(z) = z - \frac{z^2 - e^{i\theta}}{2z} = \frac{z^2 + e^{i\theta}}{2z} = \frac{z}{2} + \frac{e^{i\theta}}{2z}.$$

Тогда согласно лемме 1

$$\varphi\left(f^{(n)}(\varphi^{-1}(w))\right) = w^{2^n},$$

поскольку  $h^{(n)}(w) = w^{2^n}$ .

Нетрудно проверить, что если  $z \in P_1 \subset \bar{Z}$ , то  $f^{(n)}(z) \rightarrow -e^{i\theta/2}$  при  $n \rightarrow \infty$ . Если же  $z \in P_2 \subset \bar{Z}$ , то  $f^{(n)}(z) \rightarrow e^{i\theta/2}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Лемма 2 [7].** Пусть  $h = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ , где  $h, \varphi$  и  $f$  — те же отображения, что и в лемме 1. Тогда  $f^{(n)}$  имеет неподвижную точку тогда и только тогда, когда  $h^{(n)}$  имеет неподвижную точку.

**Теорема 3.** Прямая  $L$  является замыканием периодических отталкивающих точек функции

$$f(z) = \frac{z}{2} + \frac{e^{i\theta}}{2z}.$$

Рассмотрим вновь

$$h(w) = w^2, \quad w = \varphi(z) = \frac{z + e^{i\theta/2}}{z - e^{i\theta/2}}, \quad z = \varphi^{-1}(w) = e^{i\theta/2} \left( \frac{w+1}{w-1} \right),$$

$$f(z) = z - \frac{z^2 - e^{i\theta}}{2z} = \frac{z^2 + e^{i\theta}}{2z} = \frac{z}{2} + \frac{e^{i\theta}}{2z}.$$

Как уже отмечалось,

$$w = \varphi(z) = \frac{z + e^{i\theta/2}}{z - e^{i\theta/2}}$$

является гомеоморфизмом комплексных плоскостей  $\bar{Z}$  и  $\bar{W}$ . Нетрудно заметить, что функция

$$f(z) = \frac{z^2 + e^{i\theta}}{2z}$$

отображает  $\bar{Z}$  на себя.

Согласно лемме 1

$$\varphi\left(f^{(n)}(\varphi^{-1}(w))\right) = w^{2^n}.$$

Поскольку  $h^{(n)}(w)$  имеет  $2^{2^n-1}$  неподвижных точек, то согласно лемме 2  $f^{(n)}$  также имеет  $2^{2^n-1}$  неподвижных точек.

Как и выше, обозначим прямую  $\mu(z) = re^{i(\theta/2+\pi/2)}$  ( $r \in \mathbb{R}$ ,  $z = r$ ) через  $L$ , а окружность радиуса 1 с центром в начале координат через  $S$ . Предположим, что точка  $z \in L$  имеет период  $n$ , где  $n > 1$  для функции  $f$  (в случае  $n = 1$  на прямой  $L$  находится лишь одна неподвижная точка  $z = \infty$ ).

Существует такая точка  $w \in S$ , что  $z = \varphi^{-1}(w)$ . Покажем, что данная точка отталкивающая. Согласно лемме 1

$$\varphi\left(f^{(n)}(\varphi^{-1}(w))\right) = w^{2^n}.$$

Тогда  $f^{(n)}(\varphi^{-1}(w)) = \varphi^{-1}(w^{2^n})$ , т. е.

$$f^{(n)}(\varphi^{-1}(w)) = e^{i\theta/2} \left( \frac{w^{2^n} + 1}{w^{2^n} - 1} \right).$$

Имеем

$$\begin{aligned} (f^{(n)}(z))' &= \left( f^{(n)}(\varphi^{-1}(w)) \right)' = \left( e^{i\theta/2} \left( \frac{w^{2^n} + 1}{w^{2^n} - 1} \right) \right)' = \\ &= e^{i\theta/2} \cdot \frac{2^n w^{2^n-1} (w^{2^n} - 1) - 2^n w^{2^n-1} (w^{2^n} + 1)}{(w^{2^n} - 1)^2} = \\ &= e^{i\theta/2} \cdot \frac{2^n w^{2^n-1} (-2)}{(w^{2^n} - 1)^2} = -e^{i\theta/2} \cdot \frac{2^{n+1} w^{2^n-1}}{(w^{2^n} - 1)^2}. \end{aligned}$$

После преобразований получим

$$\left| \left( f^{(n)}(\varphi^{-1}(w)) \right)' \right| = \frac{2^{n+1}}{|w^{2^n} - 1|^2},$$

поскольку точки  $w^{2^n-1}$  и  $e^{i\theta/2}$  принадлежат  $S$ . Так как  $w^{2^n} \in S$ , то  $0 \leq |w^{2^n} - 1| \leq 2$ . Следовательно,

$$\left| \left( f^{(n)}(z) \right)' \right| = \left| \left( f^{(n)}(\varphi^{-1}(w)) \right)' \right| = \frac{2^{n+1}}{|w^{2^n} - 1|^2} > 1.$$

Таким образом, точка  $z$  отталкивающая.

Покажем теперь, что множество периодических точек функции  $f(z)$  всюду плотно на  $L$ . Пусть  $r \in L$  и  $U$  — некоторая окрестность точки  $r$ . Тогда существует такая точка  $\alpha \in S$ , что  $r = \varphi^{-1}(\alpha)$ . Поскольку множество периодических отталкивающих точек всюду плотно на  $S$  для функции  $h(w) = w^2$ , то существует последовательность  $\{\alpha_n^{pk}\}_{n=1}^\infty \subset S$  ( $p_k$  — период точки  $\alpha_n^{pk} \in S$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ), сходящаяся к  $\alpha \in S$ . Согласно лемме 2 и только что приведённым рассуждениям каждая точка последовательности  $\{r_n^{pk}\}_{n=1}^\infty \subset L$  будет периодической и отталкивающей для функции  $f(z) = (z^2 + e^{i\theta})/(2z)$ . Поскольку  $\varphi^{-1}$  — гомеоморфизм  $S$  и  $L$ , то последовательность периодических отталкивающих точек  $\{r_n^{pk}\}_{n=1}^\infty$ , где  $r_n^{pk} = \varphi^{-1}(\alpha_n^{pk})$ , сходится к точке  $r \in L$ . Существует такой номер  $n_0$ , что  $r_{n_0}^{pk} \in U$ . Таким образом, множество периодических точек функции  $f(z)$  всюду плотно на  $L$ .

Покажем, что функция  $f(z)$  хаотична на прямой  $\mu(z) = re^{i(\theta/2+\pi/2)}$ . Установим сначала, что имеется существенная зависимость от начальных условий функции  $f(z)$ . Согласно [2] функция  $h(z) = z^2$  хаотична на  $S$ .

Пусть даны  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon_1 = 1/6$ ,  $r_1 \in L$  и некоторое открытое множество  $U$  на прямой  $L$ , содержащее точку  $r_1$ . Тогда  $\varphi(r_1)$  принадлежат  $S$  и  $\varphi(U)$  — открытое множество в  $S$ . Обозначим  $\varphi(r_1) = x = e^{i\theta}$  и найдём такие  $n_\delta \in \mathbb{N}$ ,  $y_{n_\delta} = e^{i(\theta+\pi/(3 \cdot 2^{n_\delta}))}$ , чтобы выполнялись условия

$$y_{n_\delta} = e^{i(x+\pi/(3 \cdot 2^{n_\delta}))} \in \varphi(U), \quad \rho(x, y_{n_\delta}) < \delta$$

и

$$\rho(h^{(n_\delta)}(x), h^{(n_\delta)}(y_{n_\delta})) = 1 > \varepsilon = \frac{2}{3}.$$

Обозначим  $h^{(n_\delta)}(x) = w_1$ ,  $h^{(n_\delta)}(y_{n_\delta}) = w_2$ . Ясно, что  $w_1, w_2 \in S$ . Тогда

$$f^{(n)}(\varphi^{-1}(w_1)) = e^{i\theta/2} \left( \frac{w_1 + 1}{w_1 - 1} \right), \quad f^{(n)}(\varphi^{-1}(w_2)) = e^{i\theta/2} \left( \frac{w_2 + 1}{w_2 - 1} \right).$$

Найдём расстояние между точками  $f^{(n)}(\varphi^{-1}(w_1))$  и  $f^{(n)}(\varphi^{-1}(w_2))$ :

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(\varphi^{-1}(w_1)) - f^{(n)}(\varphi^{-1}(w_2))| &= \\ &= \left| e^{i\theta/2} \left( \frac{w_2 + 1}{w_2 - 1} - \frac{w_1 + 1}{w_1 - 1} \right) \right| = \frac{2|w_2 - w_1|}{|w_2 - 1| \cdot |w_1 - 1|}. \end{aligned}$$

Поскольку  $w_1, w_2 \in S$ ,  $|w_2 - 1| \cdot |w_1 - 1| \leq 4$  и  $2|w_2 - w_1| > 2/3$ , то

$$|f^{(n)}(\varphi^{-1}(w_1)) - f^{(n)}(\varphi^{-1}(w_2))| = \frac{2|w_2 - w_1|}{|w_2 - 1| \cdot |w_1 - 1|} > \frac{1}{6},$$

и существенная зависимость от начальных условий функции  $f(z)$  на  $L$  установлена.

Покажем, что  $f(z)$  транзитивна на  $L$ . Пусть  $U$  и  $V$  — два открытых множества на прямой  $L$ . Тогда существуют такие два открытых множества  $W_1$  и  $W_2$  на  $S$ , что выполняются соотношения  $U = \varphi^{-1}(W_1)$  и  $V = \varphi^{-1}(W_2)$ . Поскольку  $h(w) = w^2$ , то существует такое натуральное число  $n$ , что  $h^{(n)}(W_1) \supset S$ . Поскольку  $f^{(n)}(\varphi^{-1}(W_1)) = \varphi^{-1}(h^{(n)}(W_1))$ , то  $f^{(n)}(\varphi^{-1}(W_1)) \supset L$ . Следовательно,  $f^{(n)}(\varphi^{-1}(W_1)) \cap V$  непусто, и транзитивность  $f(z)$  установлена. Выше мы показали, что множество периодических точек функции  $f$  всюду плотно в  $L$ .

Таким образом, отображение  $f$  обладает существенной зависимостью от начальных условий, транзитивно и множество периодических точек  $f$  всюду плотно в  $L$ . По определению хаоса (Девани) отображение  $f$  хаотично на  $L$ . Опишем алгоритм построения множеств Жюлиа для функции

$$f(z) = z - \frac{z^2 - e^{i\theta}}{2z}$$

при определённых значениях угла  $\theta$  (рис. 9–12).

Отметим, что выражение  $\text{kef} := \text{power}(\text{c.re}, 2) + \text{power}(\text{c.im}, 2)$  является суммой квадратов вещественной и мнимой частей соответствующей итерации, и при увеличении числа итераций модуль разности между данным числом и единицей будет стремиться к нулю. Если  $|\text{kef} - 1| < 0.01$ , то соответствующая точка (принадлежащая бассейну притяжения одного из аттракторов) закрашивается в чёрный цвет. В противном случае итерации будут находиться на прямой белого цвета  $\mu(z) = re^{i(\theta/2 + \pi/2)}$ , являющейся множеством Жюлиа для функции

$$f(z) = z - \frac{z^2 - e^{i\theta}}{2z}.$$

```

try
  for k := 1 to iter do c := fx(c);
  kef := power(c.re, 2) + power(c.im, 2);
  if(abs(kef - 1) < 0.01) then
    setpixel(i, j, clblack);
except

```

Поясним действие алгоритма, заключённого между **try** и **except** при определённых значениях угла  $\theta$  (рис. 9, 10).

Пусть  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = -1$ ,  $\alpha_3 = i$ ,  $\alpha_4 = -i$  и  $f^{(50)}(z) = w^2$ . Тогда для каждого  $i = 1, 2, 3, 4$   $|w^2 - \alpha_i^2| = |w - \alpha_i| \cdot |w + \alpha_i|$ . Если точка  $w$  принадлежит полуплоскости  $P_1$ , то  $|w - \alpha_i|$  очень мала, а  $|w + \alpha_i|$  очень близка к  $2\alpha_i$ , откуда следует, что  $|w^2 - \alpha_i^2| = |w - \alpha_i| \cdot |w + \alpha_i|$  при увеличении числа итераций будет стремиться к нулю. Если точка  $w$  принадлежит полуплоскости  $P_2$ , то  $|w + \alpha_i|$



Рис. 9.  $\theta = 0$ .  
Множества Жюлиа  $f(z) = z - \frac{z^2 - 1}{2z}$



Рис. 10.  $\theta = \pi$ .  
Множества Жюлиа  $f(z) = z - \frac{z^2 - 1}{2z}$



Рис. 11.  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .  
Множества Жюлиа  $f(z) = z - \frac{z^2 - i}{2z}$



Рис. 12.  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ .  
Множества Жюлиа  $f(z) = z - \frac{z^2 + i}{2z}$

очень мала, а  $|w - \alpha_i|$  очень близка к  $-2\alpha_i$ , откуда следует, что  $|w^2 - \alpha_i^2| = |w - \alpha_i| \cdot |w + \alpha_i|$  при увеличении числа итераций будет стремиться к нулю.

Таким образом, если точка  $w$  принадлежит полуплоскости  $P_1$  или полуплоскости  $P_2$ , то мы закрашиваем её в чёрный цвет, а точки, лежащие на прямой  $L$ , разделяющей данные полуплоскости, не закрашиваем в чёрный цвет (оставляем цвет фона (белый)). Данная прямая и будет множеством Жюлиа.

Приведём пример функции, множеством Жюлиа которой будет вся комплексная плоскость. Известно, что если критические точки поглощаются циклом, то множеством Жюлиа для функции будет вся плоскость. Рассмотрим пример Латте:

$$f(z) = \frac{z^2 - 4z + 4}{z^2}$$

(см. [3, 4, 6]). Неподвижные точки данной функции находятся из уравнения  $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$ . Решая данное уравнение, получаем, что  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 2i$ ,  $z_3 = -2i$ . Поскольку  $f'(z_1) = -4$ ,  $f'(z_2) = -i - 1$ ,  $f'(z_3) = 1 - i$ , то неподвижные точки  $z_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , отталкивающие. Критическими точками функции  $f(z)$  являются точки  $\{2, 0\}$ . Заметим, что цикл периода 1 поглощает данные критические точки. Действительно,  $2 \rightarrow 0 \rightarrow \infty \rightarrow 1 \rightarrow 1$ . Согласно [6] множеством Жюлиа будет вся комплексная плоскость (рис. 13).

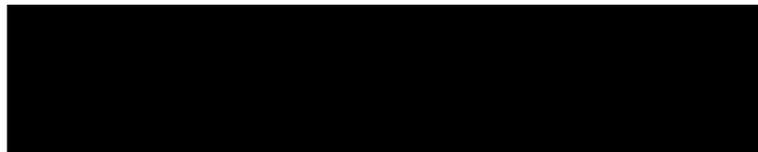


Рис. 13. Множество Жюлиа для функции  $f(z) = \frac{z^2 - 4z + 4}{z^2}$

Укажем модуль построения множества Жюлиа функции

$$f(z) = \frac{z^2 - 4z + 4}{z^2}.$$

```
try
  for k := 1 to iter do c := fx(c);
    if((abs(c - p) >= 0.0E6)) then
      begin setpixel(250, 250, clblack);
        setpixel(i, j, clblack); setpixel(375, 250, clblack);
      end
    except
```

Рассмотрим функцию

$$f(z) = 1 - \frac{4}{27z^2}$$

(см. [3]). Данная функция имеет неподвижную точку  $x_0 = 2/3$ , модуль производной в которой равен 1. При  $z = -4/27 + \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) из  $x_0 = 2/3$  рождается пара неподвижных точек: отталкивающая и притягивающая. Следовательно, функция

$$f(z) = 1 - \frac{4}{27z^2}$$

является  $J$ -неустойчивой. Согласно [3] множество Жюлиа данной функции совпадает со всей комплексной плоскостью (рис. 14). Укажем модуль построения множества Жюлиа функции

$$f(z) = 1 - \frac{4}{27z^2}.$$

```
for i := 1 to width do
  for j := 1 to height do begin
    begin c := (x_min + i * dx, y_min + j * dy); p := c; end;
    try
      for k := 1 to iter do c := fx(c);
        kef := power(c.re, 2) + power(c.im, 2);
        if(abs(kef - p) > 0.001) then
          begin setpixel(i, j, clblack);
            setpixel(250, 250, clblack)
          end;
        except
          //setpixel(i, j, white);
        end;
    end;
```

**Замечание.** Компьютерный эксперимент показывает, что множество Жюлиа для функции

$$f(z) = 1 - \frac{4}{28z^2}$$

также совпадает со всей комплексной плоскостью.

Рис. 14. Множество Жюлиа для функции  $f(z) = 1 - \frac{4}{27z^2}$ 

Укажем компьютерный алгоритм, с помощью которого строится множество Жюлиа для функции

$$f(z) = \frac{z^3}{1 - 3z^2}.$$

```

uses crt, GraphABC;
var height, width : integer;
var i, j, k : integer;
var dx, dy, x_max, x_min, y_max, y_min, kef, scall : real;
function fz(z : complex): complex;
begin fz := z * z * z / (1 - 3 * z * z); end;
var c : complex;
var iter : integer;
begin
width := 500; height := 500;
setwindowsize(width, height);
iter := 50; //итерация scall := 2; //масштаб
if(width >= height ) then
begin
kef := width / height;
x_min := scall * -kef; x_max := scall * kef;
y_min := scall * -1; y_max := scall;
end else if (height > width) then
begin
kef := height / width;
x_min := scall * -1; x_max := scall;
y_min := scall * -kef; y_max := scall * kef;
end;
dx := (x_max - x_min) / width;
dy := (y_max - y_min) / height;
for i := 1 to width do
for j := 1 to height do begin
c := (x_min + i * dx, y_min + j * dy);
try
for k := 1 to iter do c := fz(c);
kef := power(c.re, 2) + power(c.im, 2);

```

```

    if(abs(kef) < 0.005) then
        setpixel(i, j, clblack ); //установка значения пикселя
    except
//setpixel(i, j, white);
end;
end;
end;

```

Заменив функцию

$$f(z) = \frac{z^3}{1 - 3z^2}$$

и учтя модули программы, указанные выше, мы построим каждое рассмотренное множество Жюлиа, что указывает на универсальность данного алгоритма.

В заключение отметим, что мы привели примеры гладких множеств Жюлиа, которые являются отрезком, окружностью, бесконечным промежутком на числовой прямой, прямой линией и, наконец, всей комплексной плоскостью, что указывает на достаточно широкий спектр класса гладких множеств Жюлиа.

## Литература

- [1] Гринченко В. Т., Мацыпура В. Т., Снарский А. А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. — М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
- [2] Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. — М.: Постмаркет, 2000.
- [3] Любич М. Ю. Динамика рациональных преобразований. Топологическая картина // УМН. — 1986. — Т. 41, № 4 (250). — С. 35—95.
- [4] Милнор Дж. Голоморфная динамика. — Ижевск: РХД, 2000.
- [5] Обучение фрактальной геометрии и информатике в вузе и школе в свете идей академика А. Н. Колмогорова: Матер. междунар. науч.-метод. конф. — Кострома: КГУ, 2016.
- [6] Пайтген Х. О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. — М.: Мир, 1993.
- [7] Секованов В. С. О множествах Жюлиа некоторых рациональных функций // Вестн. КГУ им. Н. А. Некрасова. — 2012. — Т. 18, № 2. — С. 23—28.
- [8] Секованов В. С. Элементы теории фрактальных множеств: Уч. пособ. — М.: Либроком, 2014.
- [9] Секованов В. С. Что такое фрактальная геометрия? — М.: Ленанд, 2016.
- [10] Секованов В. С. Элементы теории дискретных динамических систем. — СПб.: Лань, 2017.
- [11] Секованов В. С., Ивков В. А. Многоэтапное математико-информационное задание «Странные аттракторы» // Вестн. КГУ. — 2013. — Т. 19, № 5. — С. 155—157.
- [12] Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. — New York: Wiley, 1990.