

Компьютерное исследование аттракторов нулей для классических полиномов Бернштейна

И. В. ТИХОНОВ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: ivtikh@mail.ru*

Д. Г. ЦВЕТКОВИЧ

*Московский педагогический
государственный университет
e-mail: dianacve@inbox.ru*

В. Б. ШЕРСТЮКОВ

*Национальный исследовательский
ядерный университет «МИФИ», Москва
e-mail: shervb73@gmail.com*

УДК 517.518.82+519.677

Ключевые слова: полиномы Бернштейна, аттрактор нулей, компьютерное моделирование.

Аннотация

Рассмотрены специальные вопросы, связанные с поведением нулей последовательности полиномов Бернштейна. В случае кусочно-линейной порождающей функции средствами компьютерной математики установлены правила, регулирующие предельное поведение нулей при бесконечном возрастании номера полинома Бернштейна. Указаны новые задачи, требующие теоретического изучения.

Abstract

I. V. Tikhonov, D. G. Tsvetkovich, V. B. Sherstyukov, Computer analysis of the attractors of zeros for classical Bernstein polynomials, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 4, pp. 151–173.

The paper is concerned with special questions on the behavior of zeros of sequences of Bernstein polynomials. For a piecewise linear generating function, computer mathematics machinery was used to find the rules controlling the limit behavior of zeros as the number of the Bernstein polynomial unboundedly increases. New problems for theoretical investigations are formulated.

1. Введение

Полиномы Бернштейна, как важный объект анализа, активно используются в теоретической и прикладной математике. Традиционные направления связаны с приближением функций. Недавно обнаружены новые применения полиномов

Бернштейна в специальных задачах компьютерного дизайна (кривые Безье) и в теории всплесков (вейвлетов). Именно при изучении всплесков возник вопрос (его поставил И. Я. Новиков) о поведении нулей полиномов Бернштейна по мере приближения к порождающей функции. Заинтересовавшись проблемой, мы провели компьютерное исследование, результаты которого приводятся в настоящей статье. Фактически речь идёт о серии компьютерных экспериментов, способствующих развитию современного анализа. Полученные ответы обладают своеобразной эстетикой и дают ориентиры для последующей теоретической разработки.

2. Предварительные сведения

Для функции $f \in C[0, 1]$ классические полиномы Бернштейна вводят формулой

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Здесь C_n^k — стандартные биномиальные коэффициенты. Обычно считают, что $x \in [0, 1]$, поскольку согласно классической теореме С. Н. Бернштейна [1] последовательность полиномов $B_n(f, x)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно сходится на $[0, 1]$ к порождающей функции $f(x)$. Основные сведения по теории полиномов Бернштейна представлены в [3, 6, 10, 14, 16, 17].

С общей точки зрения полезно рассмотреть полиномы Бернштейна в комплексной плоскости переменной $z \in \mathbb{C}$, полагая

$$B_n(f, z) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k z^k (1-z)^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

При таком подходе возникают естественные вопросы.

1. Распространяется ли сходимость последовательности (1) за пределы основного отрезка $[0, 1]$, и какие части плоскости \mathbb{C} попадают в полную область сходимости?
2. Как распределены нули полиномов $B_n(f, z)$, и что происходит с нулями в пределе при $n \rightarrow \infty$?

Первый вопрос был поставлен и во многом решён в ключевой работе Л. В. Канторовича [4]. Наиболее просто формулируется его результат для функции $f \in C[0, 1]$, являющейся сужением на $[0, 1]$ соответствующей целой функции $f(z)$. В таком случае

$$B_n(f, z) \rightarrow f(z), \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно на любом компакте в плоскости \mathbb{C} (см. [4, теорема 1]; см. также [6, с. 254–256]). Более специальная формулировка получается для случая, когда совпадение с целой функцией происходит лишь на части основного отрезка $[0, 1]$.

Теорема 1 (Л. В. Канторович, 1931). Пусть $f \in C[0, 1]$ и $f(x) \equiv \varphi(x)$ на отрезке $[a, b] \subset (0, 1)$, где $\varphi(z)$ — целая функция в плоскости \mathbb{C} . Тогда $B_n(f, z) \rightarrow \varphi(z)$ при $n \rightarrow \infty$ в области пересечения лемнискат

$$L_a: \left| \frac{z}{a} \right|^a \left| \frac{1-z}{1-a} \right|^{1-a} = 1, \quad L_b: \left| \frac{z}{b} \right|^b \left| \frac{1-z}{1-b} \right|^{1-b} = 1, \quad (2)$$

примыкающей к отрезку $[a, b]$.

На практике границы отрезка $[a, b]$ обычно связаны с изломами функции $f(x)$. Лемнискаты вида (2), порождённые соответствующими точками $a, b \in (0, 1)$, будем называть *лемнискатами Канторовича*. Наглядное представление о происходящем даёт рис. 1.

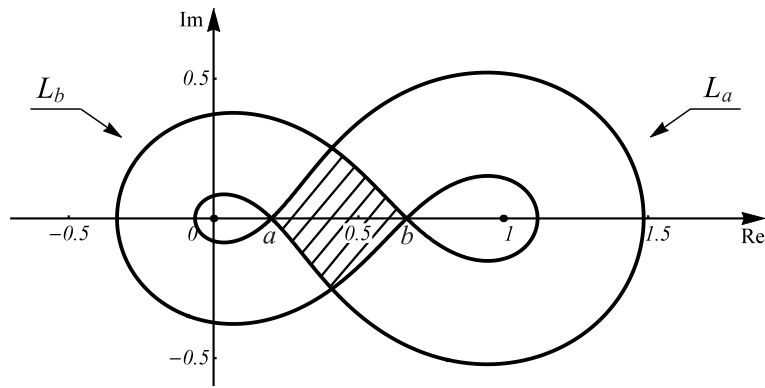


Рис. 1. Лемнискаты Канторовича и область сходимости, примыкающая к отрезку $[a, b]$

Сформулированный результат несколько отличается от версии самого Л. В. Канторовича, но легко извлекается из [4] (см. там доказательство теоремы 3). Вскоре после публикации [4] к исследованиям подключился С. Н. Бернштейн, написавший глубокий и сложный мемуар [2] с уточнёнными описаниями областей сходимости для полиномов Бернштейна в комплексной плоскости. Адаптированную версию результатов С. Н. Бернштейна можно найти в [16, гл. IV].

Особо отметим теорему 4.1.3 из [16], где фактически содержится важное дополнение к теореме Канторовича: в случае совпадения $f(x)$ с некоторой целой функцией на отрезке $[0, a]$, примыкающем к точке $x = 0$, в множество сходимости включается область, ограниченная левой петлёй лемнискаты L_a ; аналогично в случае совпадения $f(x)$ с некоторой целой функцией на отрезке $[b, 1]$, примыкающем к точке $x = 1$, в множество сходимости включается область, ограниченная правой петлёй лемнискаты L_b .

Другой естественный вопрос — о распределении нулей полиномов Бернштейна — поставлен в недавней работе И. Я. Новикова [7]. Там на примере одной

типичной для теории всплесков функции подмечено, что нули полиномов Бернштейна могут образовывать регулярные структуры на комплексной плоскости. Точнее, в изучавшемся примере для кусочно-линейной функции $f(x)$ с изломами в точках $x_1 = 1/4$ и $x_2 = 3/4$ нули полиномов (1) при $n \rightarrow \infty$ стягивались к некоторым предельным континуумам в \mathbb{C} , отчасти связанным с лемнискатами Канторовича, отчасти дополнительным по отношению к ним. Тот же И. Я. Новиков обратил внимание на связь получавшихся результатов с классической теоремой Енча [15] о нулях частичных сумм степенного ряда

$$S(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^k \quad (3)$$

с коэффициентами $\alpha_k \in \mathbb{C}$ и переменной $\zeta \in \mathbb{C}$. Считаем, что радиус сходимости ряда (3) равен единице, т. е. при $|\zeta| < 1$ степенной ряд сходится, а при $|\zeta| > 1$ — расходится.

Теорема 2 (Р. Енч, 1918). *Каждая точка границы круга сходимости является предельной для множества нулей, взятых от частичных сумм степенного ряда (3).*

Точнее, теорема Енча утверждает, что для любой окрестности произвольной точки ζ_0 на окружности $|\zeta| = 1$ и любого числа $N \in \mathbb{N}$ найдётся номер $n \geq N$, при котором частичная сумма

$$S_n(\zeta) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \zeta^k, \quad \zeta \in \mathbb{C}, \quad (4)$$

гарантированно имеет нуль во взятой окрестности. Нужный номер n суммы (4) зависит по сути от выбора точки ζ_0 . Именно в таком виде теорема Енча установлена в оригинале [15, с. 227] и в книгах [5,8] (наиболее простое изложение дано в [5]). Но при дополнительных требованиях регулярности на коэффициенты ряда (3) можно, по-видимому, показать, что нули частичных сумм сближаются с окружностью равномерно, т. е., взяв достаточно большой номер $n \in \mathbb{N}$, получаем множество нулей, «тесно примыкающее» сразу ко всей окружности (см. литературу, цитированную в [19] в связи с теоремой Енча).

Связь результатов И. Я. Новикова с теоремой Енча идейно понятна, но аналитические обоснования в [7] трудны и содержат лакуны. Впрочем, это вполне объяснимо сложностью объекта исследования.

Воспользуемся сейчас эмпирическим подходом. Современные математические пакеты позволяют достаточно точно находить нули полиномов Бернштейна даже при больших номерах, что даёт возможность увидеть, как распределяются нули в комплексной плоскости. Проведя серию численных экспериментов в системе компьютерной математики Wolfram Mathematica 10, мы можем сформулировать точные правила, регулирующие поведение нулей полиномов Бернштейна, по крайней мере для кусочно-линейных порождающих функций. Этот естественный класс удобен своей прямой связью с упомянутой теоремой Канторовича. Кроме того, полиномы Бернштейна для кусочно-линейных функций

обладают специфическими особенностями, позволяющими подгонять ситуацию под теорему Енча (см. пример в разделе 9 ниже). Краткое изложение последующих результатов дано в предварительных публикациях [11–13].

3. Случай кусочно-линейных функций

Рассматриваем вещественную кусочно-линейную функцию $f \in C[0, 1]$ с конечным числом точек излома, все абсциссы которых рациональны. Считаем, что эти абсциссы упорядочены по возрастанию и записаны в виде несократимых дробей

$$x_1 = \frac{p_1}{q_1}, \dots, x_r = \frac{p_r}{q_r} \quad (5)$$

с общим знаменателем

$$q = \text{НОК}(q_1, \dots, q_r) \geq 2. \quad (6)$$

Взятую функцию можно представить в виде

$$f(x) = \alpha + \beta x + \sum_{j=1}^r \gamma_j |q_j x - p_j|, \quad x \in [0, 1]. \quad (7)$$

Здесь $\alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_r$ — соответствующие вещественные коэффициенты. Полиномы Бернштейна (1) от функции (7) обладают следующим *свойством склеивания*:

$$B_{qm+1}(f, z) = B_{qm}(f, z), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

со значением q из формулы (6). Подробнее про свойство склеивания см. в обзоре [10]. Соотношение (8) полезно учитывать при изучении полиномов Бернштейна, взятых от кусочно-линейной функции вида (7). Цепочку полиномов $B_{qm}(f, z)$ при $m \in \mathbb{N}$ целесообразно выделять из общей последовательности полиномов (1).

Выбранный класс функций задаёт удобный стандарт, обеспечивая ряд технических преимуществ при исследовании вопроса о распределении нулей полиномов Бернштейна. В результате серии компьютерных экспериментов установлено, что при $n \rightarrow \infty$ «почти все» нули полиномов (1), порождённых конкретной функцией (7), стягиваются к специальному подмножеству в \mathbb{C} , геометрия которого «почти всегда» определяется лишь точками излома (5) порождающей функции $f(x)$. Будем называть такое «притягивающее» подмножество *аттрактором нулей*.

Точнее говоря, к аттрактору нулей стягиваются все (без исключения) нули полиномов Бернштейна из цепочки склеиваний (8). Полиномы же, не входящие в цепочку склеиваний (а такие полиномы есть, если $q \geq 3$), могут обладать отдельными добавочными *девиантными нулями*, т. е. нулями с индивидуальным поведением, при том, что подавляющее большинство нулей будет по-прежнему стягиваться к аттрактору. Учитывая, что влияние девиантных нулей на общую картину ничтожно, а их поведение подчинено своим более сложным правилам,

сосредоточим сейчас внимание на основном аттракторе нулей, тем более что его удаётся охарактеризовать исчерпывающим образом.

Поскольку вопрос имеет геометрическую природу, проще вначале объяснить происходящее на модельном примере. Всюду в дальнейшем $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, а i — мнимая единица. Основной отрезок $[0, 1]$ для переменной x , отнесённый к порождающей функции $f \in C[0, 1]$, считаем вложенным в плоскость \mathbb{C} по вещественной оси.

4. Типичный пример

Рассмотрим функцию

$$f(x) = |4x - 1| + |2x - 1| + |5x - 4|, \quad x \in [0, 1], \quad (9)$$

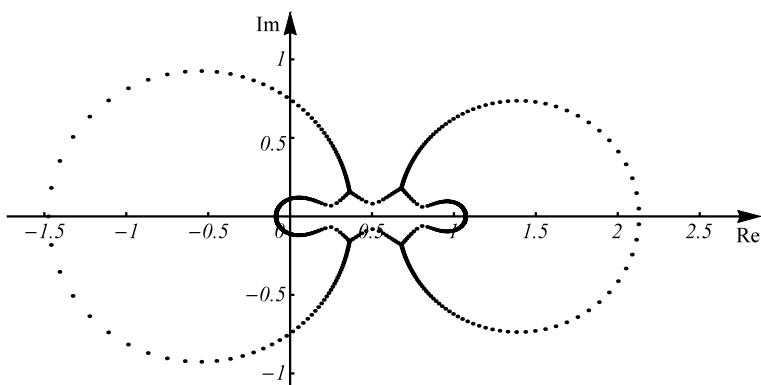


Рис. 2. Нули полинома $B_{500}(f, z)$ для функции (9)

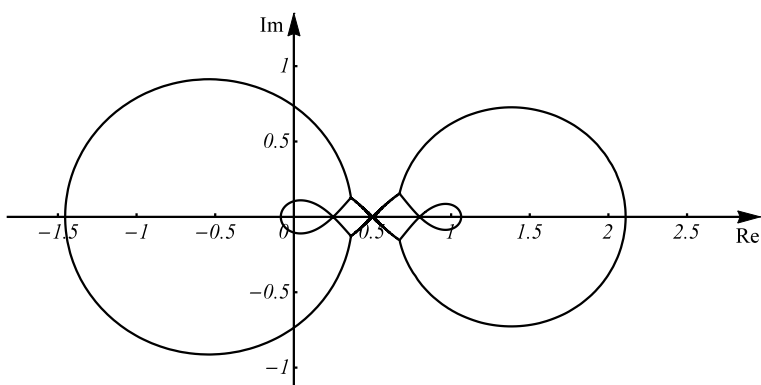


Рис. 3. Аттрактор нулей в примере (9)

с изломами в точках

$$x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{1}{2}, \quad x_3 = \frac{4}{5}. \quad (10)$$

Множество нулей полинома $B_{500}(f, z)$ для функции (9) представлено на рис. 2.

Конструкция возникающей структуры вполне просматривается. Аттрактор нулей («жук») состоит из «тела» и «усиков». Точный вид аттрактора представлен на рис. 3.

Основное «тело» аттрактора образовано фрагментами трёх лемнискат

$$\left| \frac{256}{27} z(1-z)^3 \right| = 1, \quad |4z(1-z)| = 1, \quad \left| \frac{3125}{256} z^4(1-z) \right| = 1. \quad (11)$$

Каждая из линий (11) представляет собой лемнискату Канторовича, порождённую соответствующей точкой излома (10). По теореме Канторовича полиномы Бернштейна для функции (9) сходятся к её кусочно-аналитическому (точнее, кусочно-линейному) продолжению на множестве, ограниченном соответствующими частями лемнискат (11). Геометрически речь идёт об области внутри «тела» аттрактора (рис. 4). На стыках лемнискат возникают внешние «усики», образованные большими дугами окружностей.

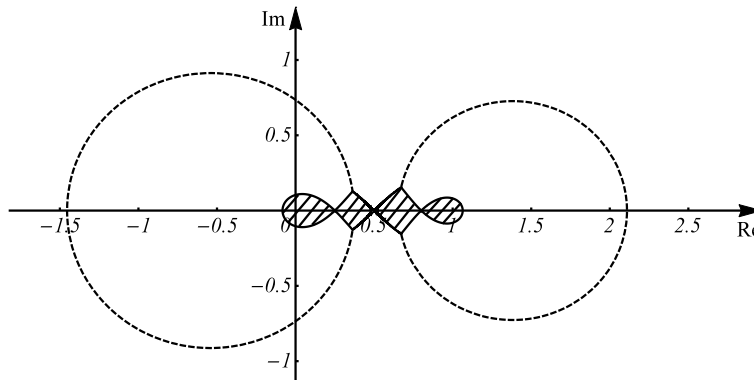


Рис. 4. Иллюстрация к примеру (9). Полиномы Бернштейна сходятся в заштрихованной области — внутри «тела» аттрактора. «Усики» аттрактора отмечены пунктиром

В рассматриваемом примере уравнения окружностей имеют вид

$$(x - a_1)^2 + y^2 = R_1^2, \quad (x - a_2)^2 + y^2 = R_2^2 \quad (12)$$

со значениями

$$a_1 = -\frac{256}{473} \approx -0,541226, \quad R_1 = \frac{432}{473} \approx 0,913319, \quad (13)$$

$$a_2 = \frac{2^{52/3}}{2^{52/3} - 5^{20/3}} \approx 1,382476, \quad R_2 = \frac{2^{26/3} \cdot 5^{10/3}}{2^{52/3} - 5^{20/3}} \approx 0,727162. \quad (14)$$

Значения (13) для первой из окружностей (12) определяются первой парой смежных точек излома (10) с абсциссами $x_1 = 1/4$ и $x_2 = 1/2$. Значения (14) для второй из окружностей (12) определяются второй парой смежных точек излома с абсциссами $x_2 = 1/2$ и $x_3 = 4/5$.

Приведённые формулы (11)–(14) — следствия общих регулярных правил.

5. Правила для построения аттрактора

Перейдём к главным формулировкам. Рассматриваем полиномы Бернштейна (1) для кусочно-линейной порождающей функции $f \in C[0, 1]$ вида (7). При построении аттрактора нулей мы предлагаем ориентироваться на шесть правил. Базовые правила 1 и 2 действуют в случае «общего положения». Все (редкие) исключения из базовых правил оговорены в дополнительных правилах 3 и 4. Ещё две отдельные специфические возможности указаны в заключительных правилах 5 и 6.

Для упрощения формул абсциссу точки излома, выбранную из общего набора (5), будем обозначать через c , а пару последовательных абсцисс — через c_1, c_2 , нумеруя их независимо от основной нумерации, введённой в (5).

Итак, начнём с двух базовых правил, действующих в случае «общего положения».

Правило 1. При наличии у функции $f(x)$ излома в точке $x = c \in (0, 1)$ в аттрактор включается фрагмент лемнискаты

$$L_c: \left| \frac{z}{c} \right|^c \left| \frac{1-z}{1-c} \right|^{1-c} = 1. \quad (15)$$

Этот фрагмент проводится из точки $z = c$ до пересечения с другими лемнискатами, порождёнными соседними точками излома. Если точка излома одна, то аттрактор содержит лишь одну лемнискату (15). Если точек излома несколько, то на стыках лемнискат возникают дополнительные части аттрактора, которые регулируются следующим правилом.

Правило 2. При наличии у функции $f(x)$ двух последовательных изломов в точках $x = c_1$ и $x = c_2$, где $c_1, c_2 \in (0, 1)$ и $c_1 < c_2$, в аттрактор включается большая (внешняя) дуга окружности

$$\left(x - \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - 1} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{\sigma}{|\sigma^2 - 1|} \right)^2 \quad (16)$$

с положительным параметром

$$\sigma \equiv \left[\frac{c_2^{c_2} (1 - c_2)^{1-c_2}}{c_1^{c_1} (1 - c_1)^{1-c_1}} \right]^{1/(c_2 - c_1)}. \quad (17)$$

Если $c_1 + c_2 = 1$, то $\sigma = 1$ и окружность (16) вырождается в прямую $x = 1/2$ — серединный перпендикуляр к отрезку $[0, 1]$. В таком случае в аттрактор включаются два луча этой прямой, выходящие симметрично «вверх» и «вниз» из точек пересечения соответствующих лемнискат.

Нетрудно проверить, что в применении к примеру (9) правило 1 даёт лемнискаты (11), а правило 2 — окружности (12) со значениями (13), (14).

Как уже отмечалось, сформулированные правила 1 и 2 отражают закономерности, действующие в случае «общего положения». Специальные поправки надо вносить лишь при обращении в тождественный нуль порождающей функции $f(x)$ на том или ином участке отрезка $[0, 1]$. Ситуация существенно зависит от того, происходит обращение в тождественный нуль внутри интервала $(0, 1)$ или вблизи одной из границ. Приведём соответствующие добавочные правила. Начнём с особого «внутреннего» случая.

Правило 3. Пусть $f(x) \equiv 0$ между изломами в точках $x = c_1$ и $x = c_2$, расположенных внутри $(0, 1)$. Тогда из «тела» аттрактора исключаются те фрагменты лемнискат, порождённых точками $x = c_1$ и $x = c_2$, что сверху и снизу «охватывают» промежуток (c_1, c_2) . Другими словами, в полосе $c_1 < x < c_2$ нет частей аттрактора, связанных с лемнисками. При этом соответствующий «усик» аттрактора замыкается в полную окружность (16) с параметром (17). В случае когда $c_1 + c_2 = 1$, в аттрактор вместо полной окружности надо включать всю вертикальную прямую $x = 1/2$.

Охарактеризуем теперь специальный «граничный» случай.

Правило 4. Пусть $f(x) \equiv 0$ на промежутке $[0, c]$ с изломом в точке $x = c \in (0, 1)$. Тогда для каждого из полиномов (1) группа нулей, «тяготеющая» к левой петле лемнискаты (15), «схлопывается» в один кратный нуль, расположенный в точке $z = 0$. В таком случае из аттрактора нулей надо исключить левую петлю лемнискаты (15), а точку $z = 0$ следует считать изолированной (кратной) точкой аттрактора. Аналогично если $f(x) \equiv 0$ на промежутке $[c, 1]$ с изломом в точке $c \in (0, 1)$, то для каждого из полиномов (1) группа нулей, «тяготеющая» к правой петле лемнискаты (15), «схлопывается» в один кратный нуль, расположенный в точке $z = 1$. Соответственно, из аттрактора нулей надо исключить правую петлю лемнискаты (15), а точку $z = 1$ следует считать изолированной (кратной) точкой аттрактора.

В случае, подпадающем под правило 4, наличие соответствующих кратных нулей легко извлекается из исходного определения (1), а кратности нулей элементарно оцениваются с учётом расположения точки $c \in (0, 1)$ и номера полинома $B_n(f, z)$. Так, если $f(x) \equiv 0$ на $[0, c]$ с изломом в точке $x = c$, то $z = 0$ будет нулём полинома $B_n(f, z)$ кратности не меньшей чем $[nc] + 1$. Если же $f(x) \equiv 0$ на $[c, 1]$ с изломом в точке $x = c$, то $z = 1$ будет нулём полинома $B_n(f, z)$ кратности не меньшей чем $[n(1 - c)] + 1$.

Пользуясь наглядными представлениями, скажем, что в условиях правила 3 образуется *рассечённый аттрактор* (рис. 8 ниже). В случае, подпадающем под правило 4, будем говорить про *аттрактор с изолированной (кратной) точкой*.

Специально подчеркнём, что особые ситуации, отмеченные в правилах 3 и 4, являются неустойчивыми и при определённых малых возмущениях порождающей функции $f(x)$ картина возвращается к случаю общего положения.

Возможна, наконец, такая специфическая ситуация, когда в аттракторе нулей возникает изолированная (некратная) точка, никак не связанная с точками излома, а порождённая тем, что сама функция $f(x)$ или её кусочно-аналитическое (точнее, кусочно-линейное) продолжение имеет изолированный нуль в той или иной точке из \mathbb{R} . Более понятно, конечно, когда речь идёт о точке из основного отрезка $[0, 1]$. Соответствующее правило выглядит так.

Правило 5. Пусть функция $f(x)$ имеет изолированный нуль в точке $x = d \in [0, 1]$, но не имеет излома в этой точке. Тогда $z = d$ включается в аттрактор нулей на правах изолированной (некратной) точки.

Правило 5 допускает элементарное объяснение с использованием простейших свойств полиномов Бернштейна. Например, если $d = 0$, то $f(0) = 0$, и $B_n(f, 0) = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Поэтому точку $z = 0$ следует включать в аттрактор нулей. Аналогично если $d = 1$, то $f(1) = 0$, и $B_n(f, 1) = 0$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Соответственно, в аттрактор нулей следует включать точку $z = 1$. Наконец, если $d \in (0, 1)$, то $f(d) = 0$, и функция $f(x)$ изменяет знак при переходе через точку $x = d$. По соображениям равномерной аппроксимации возникает соотношение $B_n(f, z_n) = 0$, выполненное при $n \geq n_0$ на некоторой последовательности точек $z_n \in (0, 1)$, такой что $z_n \rightarrow d$ при $n \rightarrow \infty$. Но тогда точку $z = d$ также следует включать в аттрактор нулей.

Схожее рассуждение применимо и в другой, менее очевидной ситуации, связанной с естественным кусочно-аналитическим (точнее, кусочно-линейным) продолжением функции $f(x)$ вида (7) на область сходимости её полиномов Бернштейна.

Правило 6. Пусть кусочно-аналитическое продолжение функции $f(x)$ имеет изолированный нуль в точке $x = d \in \mathbb{R}$, не принадлежащей отрезку $[0, 1]$, но попадающей внутрь области сходимости полиномов Бернштейна (1). Тогда точка $z = d$ включается в аттрактор нулей на правах изолированной (некратной) точки.

Для лучшего понимания сформулированных правил требуется дополнительный наглядный материал. Характерные примеры и иллюстрации представлены в разделе 7. Но прежде покажем, как вывести неочевидное уравнение окружности (16) с параметром (17) для «усиков» аттрактора.

6. Вывод уравнения окружности

Пресловутые дуги окружностей открыты сначала экспериментально — при численных расчётах нулей полиномов Бернштейна. Затем нами обнаружено, что уравнения нужных окружностей выводятся при комбинировании пары уравнений для соответствующих лемнискат Канторовича.

Пусть c_1, c_2 — абсциссы двух последовательных точек излома для кусочно-линейной функции $f \in C[0, 1]$. Считаем, что

$$c_1, c_2 \in (0, 1), \quad c_1 < c_2, \quad c_1 + c_2 \neq 1. \quad (18)$$

По правилу (15) составим уравнения двух лемнискат, порождённых значениями (18). Приравняв левые части таких уравнений, получим

$$\left| \frac{z}{c_2} \right|^{c_2} \left| \frac{1-z}{1-c_2} \right|^{1-c_2} = \left| \frac{z}{c_1} \right|^{c_1} \left| \frac{1-z}{1-c_1} \right|^{1-c_1}.$$

После элементарных преобразований возникнет соотношение

$$|z|^{c_2-c_1} = \frac{c_2^{c_2}(1-c_2)^{1-c_2}}{c_1^{c_1}(1-c_1)^{1-c_1}} |1-z|^{c_2-c_1}.$$

Отсюда следует, что

$$|z| = \sigma |1-z| \quad (19)$$

с параметром $\sigma > 0$ из формулы (17). Подставляя $z = x + iy$, приходим к уравнению

$$x^2 + y^2 = \sigma^2((1-x)^2 + y^2).$$

Последнее преобразуется к виду

$$x^2 + \frac{2\sigma^2}{1-\sigma^2}x + y^2 = \frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}.$$

Наконец, выделение полного квадрата даёт выражение

$$\left(x + \frac{\sigma^2}{1-\sigma^2} \right)^2 + y^2 = \frac{\sigma^2}{(1-\sigma^2)^2},$$

эквивалентное уравнению окружности (16) с параметром σ из формулы (17).

Нетрудно убедиться, что при любом выборе значений (18) параметр $\sigma > 0$ из формулы (17) непременно отличен от единицы, и наши рассуждения корректно приведут к уравнению окружности. Если же $c_1 + c_2 = 1$, то по той же формуле (17) получим значение $\sigma = 1$. Но тогда ключевое соотношение (19) определит прямую $x = 1/2$, как и указано в правиле 2.

Компьютерные эксперименты, проведённые на большой серии примеров, показали, что уравнение (16) с параметром (17) точно подходит под соответствующие фрагменты в аттракторах нулей.

7. Характерные примеры и иллюстрации

Приведём наглядные примеры ко всем основным случаям, возникающим при построении аттракторов нулей в соответствии с правилами из раздела 5.

1. Пусть функция

$$f(x) = |8x - 1| + |5x - 2| + |5x - 3| + |7x - 5|, \quad x \in [0, 1], \quad (20)$$

имеет изломы в точках

$$x_1 = \frac{1}{8}, \quad x_2 = \frac{2}{5}, \quad x_3 = \frac{3}{5}, \quad x_4 = \frac{5}{7}. \quad (21)$$

Это случай «общего положения». Аттрактор нулей для функции (20) полностью описывается базовыми правилами 1 и 2. Множество нулей для полинома $B_{500}(f, x)$ представлено на рис. 5, а сам аттрактор, рассчитанный по формулам (15)–(17), изображён на рис. 6.

Основное «тело» аттрактора состоит из фрагментов четырёх лемнискат, порождённых четырьмя точками излома (21). На трёх образовавшихся стыках лемнискат возникают три дополнительных «усика», два из которых являются дугами окружностей. Ещё один — центральный — «усик», порождённый точками излома $x_2 = 2/5$ и $x_3 = 3/5$, состоит из двух лучей, попадающих на

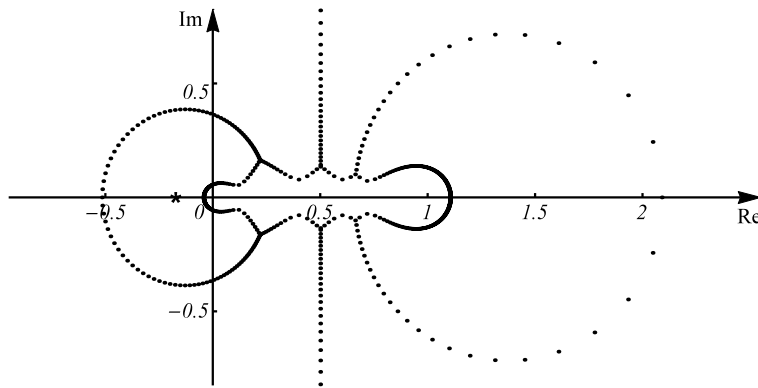


Рис. 5. Нули полинома $B_{500}(f, z)$ для функции (20)

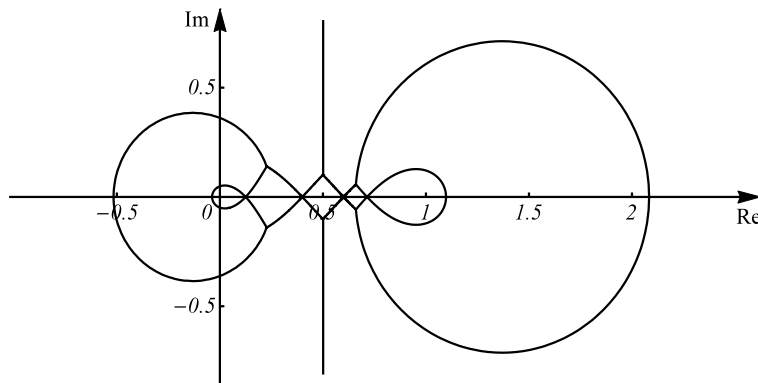


Рис. 6. Аттрактор нулей в примере (20)

вертикальную прямую $x = 1/2$ в соответствии с условием $x_2 + x_3 = 1$ (см. правило 2).

Следует обратить внимание, что полином $B_{500}(f, z)$ имеет девиантный вещественный нуль $z^* \approx -0,168$ (на рис. 5 девиантный нуль отмечен «звёздочкой»). Этот девиантный нуль возник скорее всего из-за того, что полином $B_{500}(f, z)$ не попадает в цепочку склеиваний

$$B_{280m+1}(f, z) = B_{280m}(f, z), \quad m \in \mathbb{N}, \quad (22)$$

построенную для функции (20) по правилу (8). Компьютерный расчёт показывает, что полином $B_{560}(f, z)$ из цепочки (22) подобных девиантных нулей иметь не будет, и все его нули (без исключения) регулярно укладываются вблизи аттрактора.

2. Пусть функция

$$f(x) = 10x - 8 + |5x - 1| + |9x - 4| + |6x - 5|, \quad x \in [0, 1], \quad (23)$$

имеет изломы в точках

$$x_1 = \frac{1}{5}, \quad x_2 = \frac{4}{9}, \quad x_3 = \frac{5}{6}. \quad (24)$$

Здесь $f(x) \equiv 0$ между $x_1 = 1/5$ и $x_2 = 4/9$. Это особый вырожденный «внутренний» случай, регулируемый дополнительным правилом 3.

Множество нулей для полинома $B_{720}(f, z)$, представлено на рис. 7. Возникающий рассечённый аттрактор, рассчитанный для точек излома (24) в соответствии с правилами 1–3, изображён на рис. 8. Девиантные нули отсутствуют, поскольку полином $B_{720}(f, z)$ попадает в цепочку склеиваний

$$B_{90m+1}(f, z) = B_{90m}(f, z), \quad m \in \mathbb{N},$$

построенную для функции (23) по правилу (8).

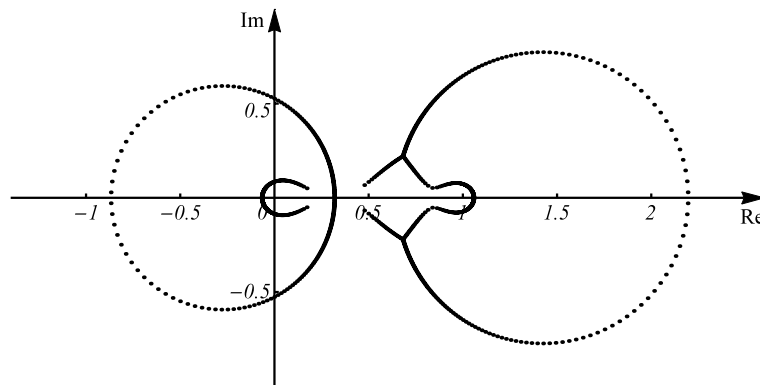


Рис. 7. Нули полинома $B_{720}(f, z)$ для функции (23)

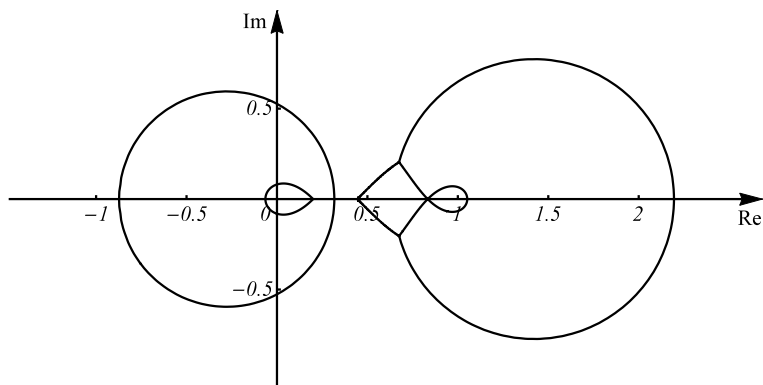


Рис. 8. Рассечённый аттрактор нулей в примере (23)

3. Пусть функция

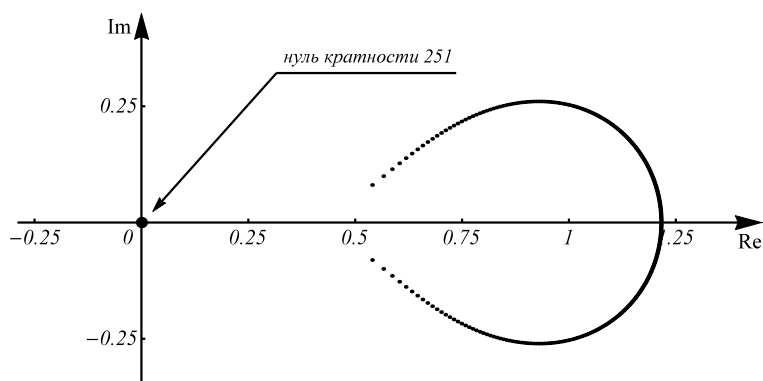
$$f(x) = \frac{1}{2}(2x - 1 + |2x - 1|), \quad x \in [0, 1], \quad (25)$$

имеет единственный излом в точке

$$x = \frac{1}{2}. \quad (26)$$

Ясно, что $f(x) \equiv 0$ на $[0, 1/2]$ и $f(x) = 2x - 1$ на $[1/2, 1]$.

Это вырожденный «граничный» случай, регулируемый дополнительным правилом 4. Множество нулей для полинома $B_{500}(f, z)$ представлено на рис. 9. Группа нулей, которая «тяготеет» к левой петле лемнискаты, отвечающей точке излома (26), «схлопнулась» в один кратный нуль $z = 0$. Кратность данного нуля

Рис. 9. Нули полинома $B_{500}(f, z)$ для функции (25)

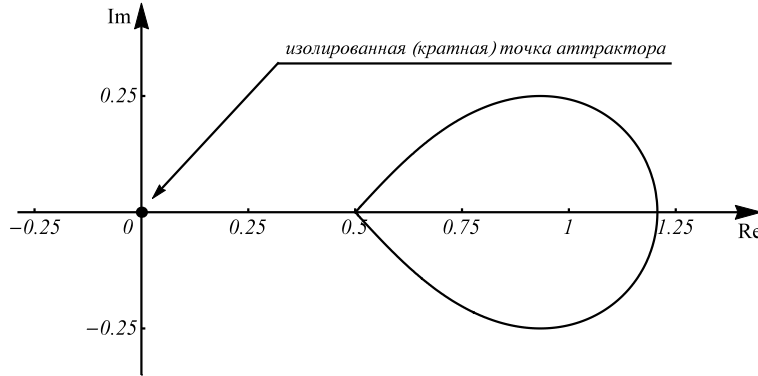


Рис. 10. Аттрактор нулей в примере (25)

легко подсчитывается: для полинома $B_{500}(f, z)$ она равна 251 (вообще для полинома $B_n(f, z)$ с произвольным $n \in \mathbb{N}$ кратность нуля $z = 0$ в точности равна $[n/2] + 1$).

Соответствующий аттрактор, рассчитанный для функции (25) по правилам 1 и 4, изображён на рис. 10. В аттракторе остаётся лишь правая петля лемнискаты Канторовича, а точка $z = 0$ является изолированной (кратной) точкой аттрактора.

Как уже отмечалось, особые ситуации обладают сильной неустойчивостью: при определённых малых возмущениях порождающей функции $f(x)$ кратные нули полиномов Бернштейна распадаются и аттрактор перестраивается под случай «общего положения».

4. Для функции (25) рассмотрим возмущение вида

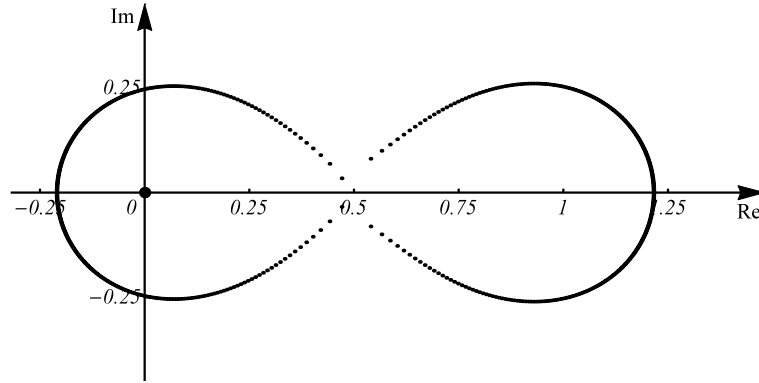
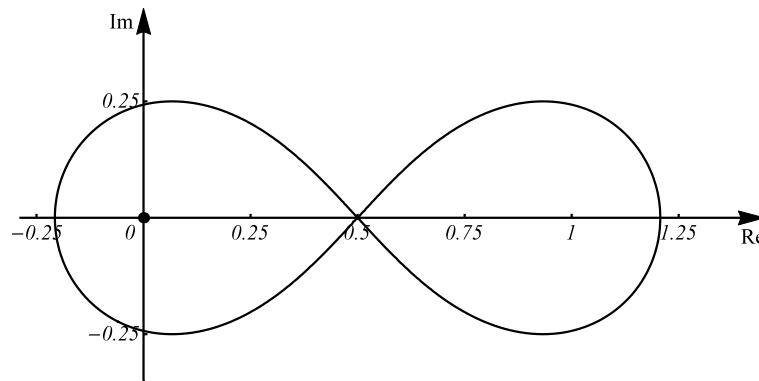
$$f_\varepsilon(x) = \frac{1-\varepsilon}{2}(2x-1+|2x-1|) + \varepsilon x, \quad x \in [0, 1], \quad (27)$$

с малым параметром $\varepsilon > 0$ и прежним изломом в точке (26). Характерные значения

$$f_\varepsilon(0) = 0, \quad f_\varepsilon\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2}, \quad f_\varepsilon(1) = 1$$

показывают отличие функции $f_\varepsilon(x)$ от «невозмущённой» функции (25). Для определённости зафиксируем выбор $\varepsilon = 0.01$, когда погрешность возмущения в равномерной норме не превышает полпроцента от амплитуды исходной функции (25). Множество нулей для полинома $B_{500}(f_\varepsilon, z)$ при $\varepsilon = 0,01$ представлено на рис. 11.

Как видим, картина получилась стандартная, существенно отличная от той, что наблюдалась для примера (25). Кратный нуль $z = 0$, фигурировавший в примере (25), распался на 250 нулей, «тяготеющих» к левой петле лемнискаты, и один простой нуль $z = 0$, сохранившийся по правилу 5 из-за значения $f_\varepsilon(0) = 0$.

Рис. 11. Нули полинома $B_{500}(f_\varepsilon, z)$ для функции (27) при $\varepsilon = 0,01$ Рис. 12. Аттрактор нулей в примере (27) при любом $\varepsilon \in (0, 1)$

Соответствующий аттрактор нулей изображён на рис. 12. Точка $z = 0$ осталась в аттракторе на правах изолированной (некратной) точки. Этот вид аттрактора нулей будет получаться в примере (27) при любом $\varepsilon \in (0, 1)$.

Численные эксперименты показывают, что при малых значениях $\varepsilon > 0$, когда функция (27) «почти не отличается» от функции (25), нули стремятся к левой петле аттрактора достаточно своеобразно. Для небольших номеров $n \in \mathbb{N}$ нули располагаются вблизи точки $z = 0$, наглядно представляя собой распавшийся кратный нуль. При дальнейшем увеличении n нули сначала стремятся к левой петле лемнискаты изнутри, но затем постепенно выходят наружу и отодвигаются от левой петли на некоторое расстояние. В дальнейшем картина стабилизируется: «левые» нули приближаются к левой петле лемнискаты снаружи, охватывая её чуть плотнее, чем «правые» нули охватывают правую петлю. Эту лёгкую асимметрию можно уловить на рис. 11.

5. Функцию

$$f_{\varepsilon,h}(x) = \frac{1-\varepsilon}{2}(2x-1+|2x-1|) + \varepsilon x + h, \quad x \in [0, 1], \quad (28)$$

с параметрами

$$\varepsilon = 0,01, \quad h = 0,001 \quad (29)$$

можно рассматривать как дополнительное возмущение примера (27).

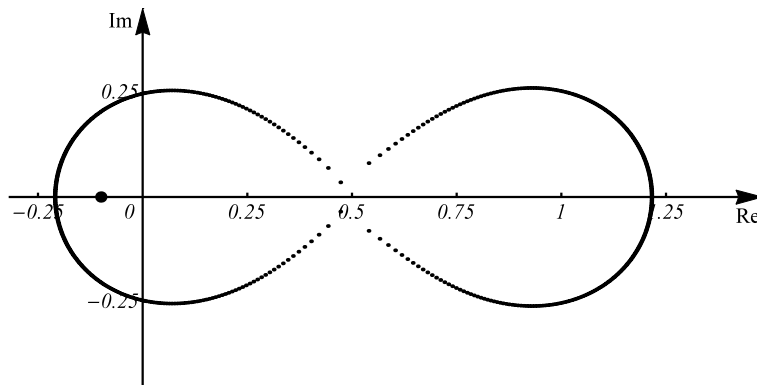


Рис. 13. Нули полинома $B_{500}(f_{\varepsilon,h}, z)$ для функции (28) с параметрами (29)

Множество нулей полинома $B_{500}(f_{\varepsilon,h}, z)$ представлено на рис. 13. Как видно, картина получается похожей на ту, что наблюдалась на рис. 11, с одним отличием. Прежний нуль $z = 0$ сместился влево в точку с примерным значением $z \approx -0,1$. Это произошло из-за того, что естественное продолжение на \mathbb{R} функции (28) с параметрами (29) обращается в нуль в точке $x = -0,1$, попадающей внутрь области сходимости полиномов Бернштейна. Аттрактор нулей в этом примере совпадает с аттрактором на рис. 12 с заменой изолированной точки $z = 0$ на точку $z = -0,1$.

При дальнейшем увеличении параметра $h > 0$ изолированный нуль продолжит смещаться влево. Дойдя до границы левой петли лемнискаты, он встроится в общую группу нулей, охватывающую эту петлю снаружи.

Итак, основные геометрические закономерности наглядно показаны. Из-за сжатого объёма статьи ограничимся перечисленными примерами. Впрочем, весь собранный нами обширный вычислительный материал подтверждает сформулированные правила. Кстати, частный пример из [7], послуживший отправным пунктом для нашего исследования, полностью укладывается в предлагаемую схему. Надо только иметь в виду, что некоторые детали (связанные с кратной точкой аттрактора и наличием девиантных нулей) в [7] не отмечены.

Выскажем ещё несколько соображений, которые могут пригодиться при дальнейшей разработке темы, связанной с нулями полиномов Бернштейна.

8. Дополнительные комментарии к правилам построения аттрактора

Все замечания в этом пункте основаны на эмпирических наблюдениях.

1. Снова подчеркнём, что установленные закономерности отражают поведение подавляющего большинства нулей, взятых от полиномов Бернштейна, но не исключают появления при каких-то номерах $n \in \mathbb{N}$ единичных девиантных нулей, существующих по своим законам. В наших экспериментах девиантные нули возникали лишь у полиномов, не попадающих в соответствующую цепочку склеиваний. Центральную роль в расположении того или иного девиантного нуля играет, по-видимому, соотношение между номером n полинома $B_n(f, z)$ с функцией $f(x)$ вида (7) и значением знаменателя q из формулы (6). Точнее, важен лишь остаток от n по модулю q . Для непопадания полинома $B_n(f, z)$ в цепочку склеиваний (8) надо, чтобы указанный остаток был отличен от нуля и единицы, что возможно только при $q \geq 3$. Иными словами, для кусочно-линейных функций с единственным изломом в точке $x = 1/2$ девиантных нулей никогда не возникает.

2. В рассмотренных нами примерах правила 1–6 проверялись на кусочно-линейных функциях вида (7) с рациональными абсциссами точек излома. Общие соображения подсказывают, что подобные правила должны сохраниться и в случае иррациональных абсцисс у тех или иных точек излома. Но обосновать это придётся теоретически, не полагаясь на компьютерную проверку. При компьютерных вычислениях неизбежна замена иррациональных значений рациональными. Последнее может приводить к переформатированию соответствующих цепочек склеиваний в зависимости от выбора рационального приближения и сильной неустойчивости коэффициентов в полиномах Бернштейна при больших номерах $n \in \mathbb{N}$. Более подробную информацию об эффекте неустойчивости можно найти в [10].

3. Наши основные эксперименты проводились при вещественных значениях коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma_1, \dots, \gamma_r$ в формуле (7). Однако несколько отдельных расчётов, выполненных для кусочно-линейных функций с комплексными коэффициентами, показали, что основные правила 1, 2 сохраняются и в этом случае, правда, с одним естественным отличием. Для вещественной функции (7) все невещественные нули полиномов Бернштейна оказываются попарно комплексно сопряжёнными и множество нулей стягивается к аттрактору симметрично относительно вещественной оси. В комплексном же случае такая симметрия отсутствует, и «верхние» нули немного смещены относительно «нижних».

4. Ряд специальных численных расчётов даёт нам основание полагать, что кусочно-линейная природа порождающей функции $f(x)$ также, скорее всего, не является определяющей. Возможно, что обсуждаемые правила сохраняются и для кусочно-аналитической порождающей функции $f \in C[0, 1]$ с конечным числом точек излома на $(0, 1)$. Другими словами, важно лишь наличие точек излома,

а характер поведения функции между ними не так принципиален. Впрочем, пока совершенно не ясно, как можно теоретически обосновать наличие аттрактора в столь общем случае.

Для кусочно-линейных функций вида (7) некоторые соображения у нас есть. Кратко изложим их на наиболее изученном примере симметричного модуля.

9. Случай симметричного модуля

Пусть

$$f(x) = |2x - 1|, \quad x \in [0, 1]. \quad (30)$$

Функция (30) является простейшей кусочно-линейной функцией с единственным изломом в точке $x = 1/2$. Полиномы Бернштейна для функции (30) обозначим просто $B_n(z)$ без указания в их записи на функцию f . По правилу (8) получаем цепочку склеиваний

$$B_{2m+1}(z) = B_{2m}(z), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (31)$$

В силу (31) без ущерба для общности можно рассматривать полиномы лишь с чётными номерами $n = 2m$. По определению

$$B_{2m}(z) = \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} z^k (1-z)^{2m-k}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (32)$$

Систематическое изучение полиномов (32) проведено в [9] (см. также [10]).

Особую роль играет специальное *разложение Поповичу*

$$B_{2m}(z) = 1 - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} 2^{-2k} C_{2k}^k (4z(1-z))^k, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (33)$$

идейно восходящее к [18]. Применяя в (33) замену

$$\zeta = 4z(1-z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (34)$$

получаем новые полиномы

$$S_m(\zeta) = 1 - \sum_{k=1}^m \frac{1}{2k-1} 2^{-2k} C_{2k}^k \zeta^k, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (35)$$

переменной $\zeta \in \mathbb{C}$. Полиномы (35) совпадают с частичными суммами степенного ряда

$$S(\zeta) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} 2^{-2k} C_{2k}^k \zeta^k. \quad (36)$$

Ряд (36) сходится в круге $|\zeta| \leq 1$ к функции $S(\zeta) = \sqrt{1-\zeta}$, в чём можно убедиться разложением корня по формуле бинома. Ветвь $\sqrt{1} = 1$ согласуется с условием $S(0) = 1$.

Учитывая формулу замены (34), получаем, что исходные полиномы (33) сходятся в комплексной плоскости на компакте, ограниченном лемнискойой

$$L_{1/2}: |4z(1-z)| = 1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (37)$$

к предельной функции

$$F(z) = \sqrt{1-4z(1-z)} = \sqrt{(2z-1)^2}. \quad (38)$$

В левой петле лемнискаты (37) формула (38) даёт значение $\varphi_1(z) = 1-2z$, а в правой петле — значение $\varphi_2(z) = 2z-1$. Сама же лемниската (37) есть в точности лемниската Канторовича, порождённая точкой излома с абсциссой $x = 1/2$.

Изложенная схема реализует, по-видимому, наиболее простой путь для доказательства аналога теоремы Канторовича (точнее, её модифицированной версии [16, теорема 4.1.3]) применительно к модельному примеру (30).

К той же лемнискате (37) «подтягиваются» нули полиномов Бернштейна (32). Соответствующий типичный образец представлен на рис. 14.

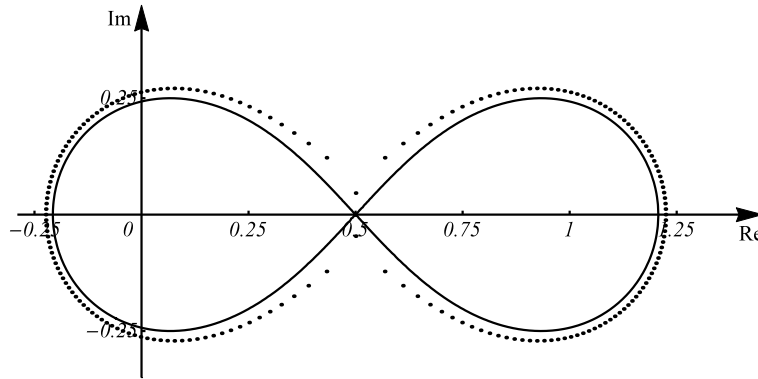


Рис. 14. Нули полинома $B_{200}(z)$ в примере (30) вместе с аттрактором (37)

Принимая во внимание изложенные соображения, а также теорему Енча [15] (цитированную в разделе 2) и некоторые дополнительные соотношения, связанные с разложением Поповичу (33) (см. [11]), можно обосновать следующий результат.

Теорема 3. Все нули полиномов $B_{2m}(z)$ из формулы (32) являются простыми и находятся строго вне лемнискаты (37). При $m \rightarrow \infty$ нули полиномов $B_{2m}(z)$ последовательно сближаются с лемнискойой (37), заполняя в пределе всю лемнискату.

Подробному доказательству теоремы 3 планируется посвятить отдельную работу. Сейчас же добавим лишь несколько технических замечаний.

На рис. 14 заметно уменьшение плотности нулей вблизи точки самопересечения лемнискаты (37). Это объясняется особенностью отображения (34) при

$z = 1/2$. Компьютерные расчёты показывают, что нули «тейлоровых» полиномов (35) подобных «разреженностей» не содержат и располагаются по внешней стороне окружности $|\zeta| = 1$ примерно с одинаковой плотностью.

На наш взгляд, исследование плотности распределения нулей и оценки скорости их сближения с аттрактором будут представлять наиболее трудную часть для создаваемой теории. Результаты круга теоремы Енча отличаются незавершёнными формулировками и мало что дают в нужном направлении. Возможно, что замеченные эффекты, связанные с нулями полиномов Бернштейна, послужат здесь стимулом к дальнейшему развитию.

Схема исследования, предложенная для модельного примера (30), допускает перенос на общий случай кусочно-линейных функций вида (7). В качестве первого шага надо получить аналоги разложения Поповичу для первичных несимметричных модулей вида

$$f(x) = |qx - p|, \quad x \in [0, 1], \quad (39)$$

с рациональными несократимыми значениями $p/q \in (0, 1)$. На таком пути, возможно, удастся обосновать наличие нулей, стремящихся к основному «телу» аттрактора. Напомним, что «тело» состоит из фрагментов соответствующих лемнискат и даёт границу для множества сходимости полиномов Бернштейна в комплексной плоскости. Происхождение дополнительных «усиков» аттрактора, связанных с внешними дугами окружностей, представляется пока загадочным, и у нас нет гипотез по этому поводу.

10. Две специальные проблемы

Отметим в завершение две задачи, где перед теоретической разработкой полезно провести компьютерное исследование. Речь снова идёт об аттракторах нулей для полиномов Бернштейна (1) с кусочно-линейными порождающими функциями вида (7).

Во-первых, желательно разобраться с проблемой девиантных (добавочных) нулей, указав для них явные законы появления и эволюции.

Во-вторых, желательно установить численные оценки количества нулей, приходящих к тому или иному фрагменту аттрактора. По-видимому, здесь соблюдаются точные пропорции.

Не исключено, что эти вопросы связаны друг с другом и появление девиантных нулей вызвано невозможностью сохранять упомянутые пропорции при конкретных номерах $n \in \mathbb{N}$. Численные исследования удобно начать с типовых примеров функций вида (39) при рациональных несократимых значениях $p/q \in (0, 1)$.

Литература

- [1] Бернштейн С. Н. Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur la calcul des probabilités // Сообщ. Харьков. матем. общ. — 1912. — Т. 13, № 1. — С. 1—2.
- [2] Бернштейн С. Н. О сходимости многочленов $\sum_0^n C_n^m f(\frac{m}{n})x^m(1-x)^{n-m}$ в комплексной области // Изв. Акад. наук СССР. Сер. матем. — 1943. — Т. 7, № 2. — С. 49—88.
- [3] Виденский В. С. Многочлены Бернштейна: Уч. пособ. к спецкурсу. — Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1990.
- [4] Канторович Л. В. О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала // Изв. Акад. наук СССР. VII сер. Отд. матем. и естеств. наук. — 1931. — № 8. — С. 1103—1115.
- [5] Монтель П. Нормальные семейства аналитических функций. — М.; Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.
- [6] Натансон И. П. Конструктивная теория функций. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1949.
- [7] Новиков И. Я. Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши // Матем. заметки. — 2002. — Т. 71, № 2. — С. 239—253.
- [8] Титчмарш Е. Теория функций. — М.: Наука, 1980.
- [9] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б. Приближение модуля полиномами Бернштейна // Вестн. Челябинск. гос. ун-та. Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 15, № 26. — С. 6—40.
- [10] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Петросова М. А. Полиномы Бернштейна: старое и новое // Матем. форум. — 2014. — Т. 8, ч. 1. — С. 126—175.
- [11] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г. Задача о нулях полиномов Бернштейна на модельном примере симметричного модуля // Современные проблемы теории функций и их приложения: Материалы 18-й междунар. Саратов. зимней школы. — Саратов: Научная книга, 2016. — С. 271—275.
- [12] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г. Компьютерная классификация аттракторов для нулей полиномов Бернштейна // Системы компьютерной математики и их приложения: Материалы XVII междунар. науч. конф. Вып. 17. — Смоленск: СмолГУ, 2016. — С. 224—227.
- [13] Тихонов И. В., Шерстюков В. Б., Цветкович Д. Г. Специальные задачи для полиномов Бернштейна в комплексной области // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения — 2016. Материалы науч. конф., 11—15 апреля 2016 г. — СПб: Изд. РГПУ им. А. И. Герцена, 2016. — С. 139—145.
- [14] DeVore R. A., Lorentz G. G. Constructive Approximation. — Berlin: Springer, 1993.
- [15] Jentzsch R. Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen // Acta Math. — 1918. — Vol. 41. — P. 219—251.
- [16] Lorentz G. G. Bernstein Polynomials. — Toronto: Univ. of Toronto Press, 1953.
- [17] Phillips G. M. Interpolation and Approximation by Polynomials. — Berlin: Springer, 2003.

- [18] Popoviciu T. Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur // *Mathematica*. — 1935. — Vol. 10. — P. 49–54.
- [19] Rahman Q. I., Schmeisser G. *Analytic Theory of Polynomials*. — Oxford: Clarendon Press, 2002.

