Автоморфизм-продолжаемые и эндоморфизм-продолжаемые модули*

А. А. ТУГАНБАЕВ
Национальный исследовательский университет МЭИ,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.55

Ключевые слова: автоморфизм-продолжаемый модуль, автоморфизм-инвариантный модуль, эндоморфизм-продолжаемый модуль, инъективный модуль, квазиинъективный модуль, строго полупервичное кольцо.

Аннотация

Данная обзорная статья посвящена модулям, для которых все автоморфизмы (эндоморфизмы) подмодулей продолжаются до эндоморфизмов всего модуля. Мы приводим старые результаты и получаем ряд новых. Рассматриваются также автоморфизм-инвариантные, квазиинъективные и инъективные модули.

Abstract

A. A. Tuganbaev, Automorphism-extendable and endomorphism-extendable modules, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 4, pp. 175—248.

This review paper is concerned with modules in which all automorphisms (endomorphisms) of submodules can be extended to endomorphisms of the entire module. We consider old results and obtain a number of new results. We also consider automorphism-invariant, quasi-injective, and injective modules.

Инъективные объекты играют очень важную роль во многих математических категориях. В данной работе мы рассматриваем только инъективные правые модули над кольцом A (все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули унитарными), т. е. инъективные объекты категории $\mathrm{Mod}\text{-}A$ всех правых A-модулей. Модуль M называется *инъективным относительно модуля* X или X*-инъективным*, если для любого подмодуля X_1 в X каждый гомоморфизм $X_1 \to M$ продолжается до гомоморфизма $X \to M$. Модуль M над кольцом A называется *инъективным*, если M инъективен относительно любого A-модуля. Например, над конечными прямыми произведениями колец матриц над телами все модули инъективны. Кроме того, абелева группа M является инъективным модулем над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ в точности тогда,

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект 16-11-10013).

когда M — делимая абелева группа, т. е. M — прямая сумма групп, изоморфных аддитивной группе $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и квазициклических групп $\mathbb{Z}(p^\infty)$.

Инъективные модули важны, в частности, потому, что каждый модуль M является существенным[1] подмодулем некоторого инъективного модуля X, который называется *инъективной оболочкой* модуля M, причём инъективная оболочка X определена единственным (с точностью до изоморфизма) образом. Например, если $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, то аддитивная группа $\mathbb{Q}$ — инъективная оболочка модуля $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$.

Модуль M называется *автоморфизм-инвариантным* (*эндоморфизм-инвариантным*), если он является характеристическим[2] (соответственно вполне инвариантным[3]) подмодулем своей инъективной оболочки.

В [24, теорема 16] доказано, что модуль M является автоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда M — *псевдоинъективный* модуль, т. е. если для любого подмодуля X в M каждый мономорфизм $X \to M$ продолжается до эндоморфизма модуля M. Псевдоинъективные модули изучались в ряде работ; см., например, [24, 31, 51]. Автоморфизм-инвариантные модули изучались в ряде работ; см., например, [9, 10, 12—14, 17, 20, 24, 28, 38, 46, 53].

Заметим, что $\mathbb{Z}$ не является автоморфизм-инвариантным $\mathbb{Z}$-модулем, поскольку $\alpha(\mathbb{Z}) \not\subseteq \mathbb{Z}$, где $\alpha\colon q \to q/2$ — автоморфизм $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Q}$.

Модуль M называется *квазиинъективным* или *самоинъективным*, если M инъективен относительно себя. Хорошо известно, что модуль M квазиинъективен в точности тогда, когда M — эндоморфизм-инвариантный модуль, т. е. $\alpha(M) \subseteq M$ для любого эндоморфизма α инъективной оболочки модуля M (см. [34; 58, 17.11]). Отсюда следует, что каждый квазиинъективный модуль — автоморфизм-инвариантный модуль.

Пример 1. Пусть $\{F_{i=1}^{\infty}\}$ — счётное множество экземпляров поля $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и A — подкольцо прямого произведения всех F_i, состоящее из всех последовательностей, стабилизирующихся на конечном шаге. В [24, пример 9] показано, что A — автоморфизм-инвариантный A-модуль, не являющийся квазиинъективным.

Пример 2. Пусть F — поле порядка 2, A — конечная 5-мерная алгебра над полем F, образованная всеми (3×3)-матрицами вида

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ 0 & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{pmatrix},$$

[1]Подмодуль M модуля X называется *существенным*, если $M \cap X_1 \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля X_1 в X.

[2]Подмодуль M модуля X называется *характеристическим* подмодулем в X, если $M \subseteq \alpha(M)$ для каждого автоморфизма α модуля X.

[3]Подмодуль M модуля X называется *вполне инвариантным* подмодулем в X, если $M \subseteq \alpha(M)$ для каждого эндоморфизма α модуля X.

где $f_{ij} \in F$. В [46] показано, что $e_{11}A = e_{11}F + e_{12}F + e_{13}F$ — конечный циклический автоморфизм-инвариантный проективный модуль, не являющийся квазиинъективным. Так как каждый эндоморфизм-продолжаемый артинов модуль является по теореме 3.1 квазиинъективным, то $e_{11}A$ — автоморфизм-продолжаемый модуль, не являющийся эндоморфизм-продолжаемым. Нетрудно проверить, что модуль $e_{11}A$ несингулярен.

Ясно, что каждый инъективный модуль квазиинъективен. Каждая конечная циклическая группа является квазиинъективным (автоморфизм-инвариантным) неинъективным модулем над кольцом $\mathbb{Z}$.

Модуль M называется *автоморфизм-продолжаемым* (*эндоморфизм-продолжаемым*, если для любого подмодуля X в M каждый автоморфизм (соответственно эндоморфизм) модуля X продолжается до эндоморфизма модуля M.

Замечание 1. Ясно, что все прямые слагаемые автоморфизм-продолжаемых (эндоморфизм-продолжаемых) модулей являются автоморфизм-продолжаемыми (соответственно эндоморфизм-продолжаемыми) модулями и каждый эндоморфизм-продолжаемый модуль является автоморфизм-продолжаемым.

Замечание 2. Ясно, что каждый квазиинъективный модуль является автоморфизм-продолжаемым и эндоморфизм-продолжаемым. Если M — автоморфизм-инвариантный модуль, то каждый автоморфизм любого подмодуля модуля M продолжается до автоморфизма модуля M (см. предложение 1.3), в частности, M — автоморфизм-продолжаемый модуль. Кроме того, $\mathbb{Z}$ — пример автоморфизм-продолжаемого (эндоморфизм-продолжаемого) $\mathbb{Z}$-модуля, не являющегося автоморфизм-инвариантным (квазиинъективным).

Следующие два примера показывают, что автоморфизм-продолжаемый модуль M_A не обязан быть эндоморфизм-продолжаемым, даже если $M = A$ — простая область главных правых (левых) идеалов или $M = A$ — коммутативное регулярное кольцо.

Пример 3. Пусть F — поле и A — алгебра над F с двумя образующими x, y и одним определяющим соотношением $xy - yx = 1$. Докажем, что A_A и ${}_AA$ — автоморфизм-продолжаемые модули, причём модули A_A и ${}_AA$ не являются эндоморфизм-продолжаемыми. Хорошо известно, что A — простая область главных правых (левых) идеалов, A не тело и группа обратимых элементов $U(A)$ области A совпадает с $F \setminus 0$. В частности, $U(A)$ лежит в центре области A.

Пусть a — ненулевой необратимый элемент области A. Достаточно доказать следующие два утверждения.

Для каждого автоморфизма α модуля aA_A существует такой обратимый элемент $u \in U(A)$, что $\alpha(ab) = uab$ для всех $b \in A$. $(*)$

Существует эндоморфизм f модуля aA, который не продолжается до эндоморфизма модуля A_A. $(**)$

Докажем утверждение $(*)$. Так как $\alpha(aA) = aA$, то $\alpha(a) = au$ и $a = auv$ для некоторых элементов $u, v \in A$. Тогда $uv = 1$. Поскольку A — область, то $vu = 1$ и $u \in U(A) \subset F$. Тогда $uab = aub = \alpha(ab)$ для всех $b \in A$.

Докажем утверждение $(**)$. Так как A — простая область и a — ненулевой необратимый элемент, то $AaA = A \neq Aa$. Поэтому $ab \not\subseteq Aa$ для некоторого элемента $b \in A$. Так как A — нётерова область, то A имеет классическое тело частных, содержащее элемент a^{-1}. Тогда $aba^{-1}aA \subseteq aA$, и соотношение $f(ac) = aba^{-1}c$ задаёт эндоморфизм f подмодуля aA_A в A_A. Допустим, что f продолжается до эндоморфизма φ модуля A_A. Обозначим $d = \varphi(a)$. Тогда

$$ab = aba^{-1}a = f(a)a = \varphi(a)a = da \in Aa.$$

Получено противоречие.

Замечание 3. Кольцо A называется *регулярным*, если любой его главный правый идеал порождается идемпотентом. В этом случае $_AAa$ и любой конечно порождённый левый идеал кольца A являются прямыми слагаемыми модуля $_AA$. Кольцо A называется *строго регулярным*, если любой его главный правый (левый) идеал порождается центральным идемпотентом.

Пусть A — регулярное кольцо. Если A_A — эндоморфизм-продолжаемый модуль, то по [52, теорема 10.47] модуль A_A инъективен.

Пример 4. Пусть $\{F_{i=1}^{\infty}\}$ — счётное множество экземпляров поля $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и A — подкольцо прямого произведения всех F_i, состоящее из всех последовательностей, стабилизирующихся на конечном шаге. Тогда A — коммутативное регулярное кольцо. В [24, пример 9] показано, что A — автоморфизм-инвариантный модуль, не являющийся квазиинъективным. По замечаниям 2 и 3 A_A — автоморфизм-продолжаемый модуль, не являющийся эндоморфизм-продолжаемым.

Замечание 4. В теореме 4.6 для кольца A с радикалом Голди G доказано, что все несингулярные автоморфизм-инвариантные правые A-модули инъективны в точности тогда, когда A/G — сильно полупервичное справа кольцо.

Замечание 5. В теореме 4.9 для сильно полупервичного справа кольца A и произвольного правого A-модуля X доказано, что если найдётся такой существенный правый идеал B кольца A, что X инъективен относительно модуля B_A, то X — инъективный модуль.

Замечание 6. В теореме 4.24 доказано, что A — автоморфизм-инвариантное справа несингулярное справа кольцо в точности тогда, когда A — регулярное кольцо и $A = S \times T$, где S — инъективное справа регулярное кольцо и T — строго регулярное кольцо, содержащее все обратимые элементы своего максимального правого кольца частных.

Если $f\colon X \to Q$ — гомоморфизм модулей и M — подмодуль в Q, то через $f^{-1}(M)$ обозначается подмодуль $\{x \in X \mid f(x) \in M$ модуля X.

Пусть A — кольцо, X — правый A-модуль и Y — левый A-модуль. Для любых подмножеств $X_1 \subseteq X$ и $Y_1 \subseteq Y$ через $r(X_1)$ и $\ell(Y_1)$ обозначаются *правый аннулятор* $\{a \in A \mid X_1 a = 0\}$ и *левый аннулятор* $\{a \in A \mid aY_1 = 0\}$ множеств X_1 и Y_1 соответственно. Иногда пишут $r_A(X_1)$ и $\ell_A(Y_1)$ вместо $r(X_1)$ и $\ell(Y_1)$ соответственно. Заметим, что $r(X_1)$ — правый идеал в A и $\ell(Y_1)$ — левый идеал в A. Если B — идеал в A, то $r(B)$ и $\ell(B)$ — идеалы в A.

1. Предварительные сведения

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули унитарными. Модуль называется *артиновым*, если каждая строго убывающая цепь его подмодулей конечна. Выражения, подобные выражению «A — артиново кольцо», означают, что A_A и ${}_AA$ — артиновы модули.

В работе используются некоторые хорошо известные понятия и утверждения из теории колец, содержащиеся во многих книгах (см., например, [16, 18, 32, 40, 52, 58]).

1.1. Свободные, инъективные и проективные модули. Относительные инъективность и проективность. Пусть A — кольцо. Правый A-модуль X называется *свободным циклическим* модулем, если существует такой элемент $x \in X$, называемый *свободным образующим* для X, что $X = xA$ и правый аннулятор $r(x)$ элемента x равен нулю. Заметим, что X — свободный циклический модуль в точности тогда, когда $X \cong A_A$.

Модуль X_A называется *свободным*, если существует такое подмножество $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq X$, называемое *базисом* модуля X, что $X = \bigoplus\limits_{i\in I} x_iA$ и $r(x_i) = 0$ для всех $i \in I$; мощность $\mathrm{card}(I)$ называется *рангом* свободного модуля X. Заметим, что ранг свободного модуля не всегда определён однозначно.

Модуль M называется *проективным относительно модуля* X или X-*проективным*, если для каждого эпиморфизма $h\colon X \to \bar{X}$ и любого гомоморфизма $\bar{f}\colon M \to \bar{X}$ существует такой гомоморфизм $f\colon M \to X$, что $\bar{f} = hf$.

Модуль над кольцом A, проективный относительно любого A-модуля, называется *проективным* модулем. Модуль, проективный относительно себя, называется *квазипроективным* или *самопроективным* модулем.

Ясно, что все проективные модули квазипроективны, а циклическая группа любого простого порядка является квазипроективным непроективным простым $\mathbb{Z}$-модулем.

Напомним, что модуль M называется *инъективным относительно модуля* X или X-*инъективным*, если для любого подмодуля X_1 в X каждый гомоморфизм $X_1 \to M$ продолжается до гомоморфизма $X \to M$. Модуль называется *инъективным*, если он инъективен относительно любого модуля. Модуль называется *квазиинъективным*, если он инъективен относительно себя.

Пусть A — кольцо, M — правый A-модуль. Верны приведённые ниже утверждения.

1. Модуль M является свободным модулем ранга $\aleph$ в точности тогда, когда M изоморфен прямой сумме некоторого множества I мощности $\aleph$ изоморфных копий свободного циклического модуля A_A. В частности, существуют свободные модули любого ранга $\aleph$.
2. Если X_A — свободный модуль, то каждое отображение f базиса $\{x_i\}_{i\in I}$ модуля X в модуль M_A правилом $g\big(\sum x_ia_i\big) = \sum f(x_i)a_i$ корректно продолжается до гомоморфизма $g\colon X \to M$. При этом если $\{f(x_i)\}_{i\in I}$ — система образующих модуля M, то $g\colon X \to M$ — эпиморфизм.

3. Каждый модуль, имеющий систему образующих мощности $\aleph$, является гомоморфным образом свободного модуля ранга $\aleph$.
4. Каждый модуль проективен и инъективен относительно любого полупростого модуля.
5. Класс $\mathcal{X}$ всех модулей, относительно которых модуль M инъективен, содержит все подмодули, гомоморфные образы и прямые суммы модулей из $\mathcal{X}$. Класс $\mathcal{Y}$ всех модулей, относительно которых модуль M проективен, содержит все гомоморфные образы, подмодули и конечные прямые суммы модулей из $\mathcal{Y}$.
6. Если X — правый A-модуль, содержащий изоморфную копию модуля A_A, и модуль M инъективен относительно модуля X, то M — инъективный модуль. Следовательно, кольцо A инъективно справа в точности тогда, когда кольцо A квазиинъективно справа.
7. Все прямые слагаемые и прямые произведения модулей, инъективных относительно модуля M, M-инъективны. В частности, все прямые слагаемые и прямые произведения инъективных модулей инъективны. Все прямые слагаемые и прямые суммы модулей, проективных относительно модуля M, M-проективны. В частности, все прямые слагаемые и прямые суммы проективных модулей проективны.
8. Если модуль M инъективен относительно модуля X и существует мономорфизм $f\colon M \to X$, то $f(M)$ — прямое слагаемое в X, причём M самоинъективен и изоморфен прямому слагаемому модуля X. В частности, если либо модуль X неразложим, либо $f(M)$ — существенный подмодуль в X, то $f\colon M \to X$ — изоморфизм.
9. Если модуль M проективен относительно модуля X и существует эпиморфизм $h\colon X \to M$, то $\operatorname{Ker} h$ — прямое слагаемое в X и M — квазипроективный модуль, изоморфный прямому слагаемому модуля X. В частности, если модуль X неразложим, то $h\colon X \to M$ — изоморфизм.
10. Если Y — подмодуль модуля X и модуль X/Y проективен относительно X, то Y — прямое слагаемое в X. Кроме того, проективность циклического модуля xA равносильна как тому, что $r(x)$ — прямое слагаемое в A_A, так и тому, что $r(x) = eA$ для некоторого идемпотента $e \in A$.
11. Каждый свободный модуль проективен.
12. Модуль M является проективным в точности тогда, когда M изоморфен прямому слагаемому свободного модуля.
13. Модуль M является проективным в точности тогда, когда для каждого модульного эпиморфизма $h\colon X \to M$ модуль $\operatorname{Ker}(h)$ — прямое слагаемое в X.
14. Если $M = \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$ и для любого $i \in I$ модули M_i и $\bigoplus\limits_{j \neq i} M_j$ являются M_i-инъективными, то M — квазиинъективный модуль.

Доказательство. Утверждения 1, 2 проверяются непосредственно.

Докажем утверждение 3. Пусть $\{m_i\}_{i\in I}$ — система образующих мощности $\aleph$ для модуля M_A. Возьмём свободный модуль X_A с базисом $\{x_i\}_{i\in I}$ мощности $\aleph$. Зададим отображение $f\colon \{x_i\}_{i\in I} \to \{m_i\}_{i\in I}$, при котором $f(x_i) = m_i$ для всех $i \in I$. По утверждению 2 f продолжается до модульного эпиморфизма $X \to M$.

Утверждение 4 вытекает из того, что любой подмодуль произвольного полупростого модуля X является прямым слагаемым в X.

Проверим справедливость утверждения 5. Докажем только первое утверждение, поскольку второе утверждение доказывается аналогично. Если модуль M X-инъективен, то непосредственно проверяется, что M инъективен относительно любого подмодуля модуля X. Допустим, что $h\colon X \to \bar{X}$ — эпиморфизм, $\bar{Y}$ — подмодуль в $\bar{X}$, $\bar{g} \in \mathrm{Hom}(\bar{Y}, M)$. Обозначим через Y полный прообраз $\bar{Y}$ в X под действием h. Пусть h_Y — ограничение h на Y. По условию гомоморфизм $\bar{g}h_Y\colon Y \to M$ продолжается до гомоморфизма $f\colon X \to M$. Так как $\mathrm{Ker}(h) \subseteq Y$, то $\mathrm{Ker}(h) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$. Поэтому f продолжается до некоторого гомоморфизма $\bar{f}\colon \bar{X} \to M$ и модуль M $\bar{X}$-инъективен.

Пусть $\{X_i\}_{i\in I}$ — такое множество модулей, что модуль M X_i-инъективен для всех $i \in I$. Пусть $Y = \bigoplus\limits_{i\in I} X_i$, Y_1 — подмодуль в Y, $f_1 \in \mathrm{Hom}(Y_1, M)$, $\mathcal{E}$ — множество всех пар (L, f_L), где L — подмодуль в Y, содержащий Y_1, а f_L — гомоморфизм из L в M, продолжающий f_1. Определим отношение $\leqslant$ на $\mathcal{E}$ так, что $(L, f_L) \leqslant (Q, f_Q)$ в точности тогда, когда $L \subseteq Q$ и f_L продолжается до f_Q. Можно проверить, что $\leqslant$ — частичный порядок на $\mathcal{E}$ и каждая непустая цепь в $\mathcal{E}$ обладает верхней гранью. По лемме Цорна в $\mathcal{E}$ существует максимальный элемент $(\bar{Y}, \bar{f})$. Достаточно доказать, что $\bar{Y} = Y$, что равносильно включениям $X_i \subseteq \bar{Y}$ для всех $i \in I$. Так как модуль M X_i-инъективен, то ограничение гомоморфизма $\bar{f}$ на $X_i \cap \bar{Y}$ продолжается до некоторого гомоморфизма $f_i\colon X_i \to M$. Пусть $u\colon (X_i + \bar{Y}) \to M$ — такой гомоморфизм, что $u(x+y) = f_i(x) + \bar{f}(y)$ для всех $x \in X_i$ и $y \in \bar{Y}$. Этот гомоморфизм определён корректно (если $x + y = 0$, то $x = -y \in X_i \cap \bar{Y}$ и $u(x+y) = \bar{f}(-y) + \bar{f}(y) = 0$). По построению $X_i + \bar{Y} = \bar{Y}$. Поэтому $X_i \subseteq \bar{Y}$, что и требовалось.

Докажем утверждение 6. По утверждению 5 M инъективен относительно модуля A_A. Кроме того, любой правый A-модуль является гомоморфным образом прямой суммы некоторого множества копий модуля A_A. Теперь утверждение вытекает из утверждения 5.

Проверим справедливость утверждения 7. Докажем только первое утверждение, поскольку второе утверждение доказывается аналогично. Пусть N — правый A-модуль и $N = \prod\limits_{i\in I} N_i$. Ясно, что из M-инъективности модуля N следует M-инъективность всех модулей N_i. Допустим теперь, что все модули N_i M-инъективны. Пусть X — подмодуль в M, $f \in \mathrm{Hom}(X, N)$, $\pi_i\colon N \to N_i$ — естественные проекции. Все гомоморфизмы $\pi_i f\colon X \to N_i$ продолжаются до гомоморфизмов $g_i\colon M \to N_i$, определяющих естественное продолжение $g\colon M \to N$.

Докажем утверждение 8. По утверждению 5 M — $f(M)$-инъективный модуль. Так как $f(M) \cong M$, то M квазиинъективен. Поскольку $f(M)$ X-инъективен, то естественное вложение $f(M) \to X$ продолжается до гомоморфизма $g\colon X \to f(M)$. Тогда g — проекция X на $f(M)$. Поэтому $f(M)$ — прямое слагаемое в X.

Докажем утверждение 9. По утверждению 5 M — квазипроективный модуль. Так как M — X-проективный модуль, то существует такой гомоморфизм $g\colon M \to X$, что $1_M = hg$. Обозначим $\pi \equiv 1 - gh \in \operatorname{End}(X)$. Так как $\pi^2 = 1 - gh - gh + g(hg)h = 1 - gh = \pi$, то $X = \pi(X) \oplus (1-\pi)(X)$. Далее,

$$h\pi(X) = (h - hgh)(X) = (h-h)(X) = 0, \quad \pi(X) \subseteq \operatorname{Ker}(h),$$
$$\operatorname{Ker}(h) = gh\big(\operatorname{Ker}(h)\big) + (1-gh)\big(\operatorname{Ker}(h)\big) = \pi\big(\operatorname{Ker}(h)\big) \subseteq \pi(X).$$

Поэтому $\operatorname{Ker}(h) = \pi(X)$ и $M \cong (1-\pi)(X)$.

Проверим справедливость утверждения 10. Первое утверждение следует из 9. Второе утверждение следует из первого утверждения и того, что для любого циклического модуля xA существует такой изоморфизм $f\colon xA \to A_A/r(x)$, что $f(xa) = a + r(x)$ для всех $a \in A$.

Докажем утверждение 11. По утверждению 7 достаточно доказать, что A_A — проективный модуль. Пусть $h\colon X \to \bar{X}$ — произвольный эпиморфизм правых A-модулей и $\bar{f}\colon A_A \to \bar{X}$ — гомоморфизм. Существует такой элемент $x \in X$, что $h(x) = \bar{f}(1)$. По утверждению 2 отображение $f(a) = xa$ является корректно определённым гомоморфизмом из A_A в X. Кроме того, $hf = \bar{f}$.

Утверждения 12, 13 вытекают из утверждений 3, 7 и 11.

Утверждение 14 доказано в [40, утверждение 1.18]. □

1.2. Существенные подмодули, равномерные модули, инъективные оболочки, локальные кольца. Если X — подмодуль модуля M и $X \cap Y \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля Y в M, то X называется *существенным* подмодулем в M и говорят, что M — *существенное расширение* модуля X. Если M — существенное расширение модуля X, то M — существенное расширение любого существенного подмодуля Y модуля X и N — существенное расширение модуля $X \cap N$ для любого подмодуля N в M.

Модуль M называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение, т. е. M — существенное расширение любого своего ненулевого подмодуля.

Инъективной оболочкой модуля M называется любой инъективный модуль, являющийся существенным расширением модуля M. Часто M отождествляется с его изоморфной копией, и инъективной оболочкой модуля M называется инъективный модуль, являющийся существенным расширением изоморфной копии модуля M.

Кольцо A называется *локальным*, если для любого элемента $a \in A$ хотя бы один из элементов a, $1-a$ является обратимым.

Приведённые ниже утверждения хорошо известны.

1. Каждый модуль обладает инъективной оболочкой и все инъективные оболочки модуля M изоморфны между собой.

2. Модуль M инъективен в точности тогда, когда для любого модульного мономорфизма $f\colon M \to X$ модуль $f(M)$ — прямое слагаемое в X. В этом случае f — изоморфизм в точности тогда, когда $f(M)$ — существенный подмодуль в X.
3. Если M — квазиинъективный (например, инъективный) модуль, то неразложимость модуля M равносильна тому, что для любого эндоморфизма f модуля M хотя бы один из эндоморфизмов f, $1-f$ является автоморфизмом, т. е. кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End} M$ модуля M является локальным кольцом. В этом случае все подмодули модуля M равномерны.
4. Модуль M является квазиинъективным в точности тогда, когда M — эндоморфизм-инвариантный модуль, т. е. M — вполне инвариантный подмодуль своей инъективной оболочки.
5. Модуль M_A является квазиинъективным в точности тогда, когда M — квазиинъективный $A/r(M)$-модуль, где $r(M)$ — аннулятор модуля M.

1.3. Предложение. *Пусть A — кольцо и M — правый A-модуль. Равносильны следующие условия*:

1) *M — автоморфизм-инвариантный модуль*;
2) *$M = \alpha(M) = \alpha^{-1}(M)$ для любого автоморфизма α модуля E*;
3) *каждый изоморфизм между любыми существенными подмодулями модуля M продолжается до эндоморфизма модуля M*;
4) *каждый изоморфизм между любыми существенными подмодулями модуля M продолжается до автоморфизма модуля M*;
5) *M — характеристический подмодуль некоторого инъективного модуля Q.*

Следовательно, каждый псевдоинъективный модуль автоморфизм-инвариантен.

Доказательство. Пусть E — инъективная оболочка модуля M. Импликации 2) $\Longrightarrow$ 1), 5) $\Longrightarrow$ 1) 4) $\Longrightarrow$ 3) очевидны.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть α — автоморфизм модуля E, $X' = M \cap \alpha(M) \subseteq M$, $X = \alpha^{-1}(X') \subseteq M$. Так как $\alpha(M)$ — существенный подмодуль модуля $E = \alpha(E)$, то X' — существенный подмодуль модуля M. Кроме того, $X = alpha^{-1}(X')$ — существенный подмодуль модуля $E = alpha^{-1}E$. Так как α индуцирует изоморфизм модуля X на X', то по 3) найдётся эндоморфизм β модуля M, совпадающий с α на X. Допустим, что $z \in M \cap (\alpha-\beta)(M)$. Тогда $z = (\alpha-\beta)(y)$, где $y \in M$. Тогда $\alpha(y) = \beta(y) - z \in M$. Поэтому $y \in X$. Но по построению $(\alpha-\beta)(y) = z = 0$. Поэтому $M \cap (\alpha-\beta)(M) = 0$. Поэтому $(\alpha-\beta)(M) = 0$, так как M — существенный подмодуль в E. Поэтому $\alpha(M) \subseteq M$.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Так как M — автоморфизм-инвариантный модуль, то $\alpha(M) \subseteq M$ и $\alpha^{-1}(M) \subseteq M$. Поэтому $M = \alpha(M) = \alpha^{-1}(M)$.

Убедимся в справедливости импликации 2) $\Longrightarrow$ 4). Пусть X и X' — существенные подмодули модуля M и $\alpha'\colon X \to X'$ — изоморфизм. Так как E — инъективный модуль, то найдётся эндоморфизм α модуля E, совпадающий с α' на X. Поскольку X — существенный подмодуль в E и $X \cap \operatorname{Ker} \alpha = 0$, то α — мономорфизм. Поэтому $\alpha(E) \cong E$ и $\alpha(E)$ — инъективный модуль. Тогда $\alpha(E)$ — прямое слагаемое модуля E. Кроме того, $\alpha(E)$ содержит подмодуль $\alpha(X)$ и $X' = \alpha X$. Поэтому $\alpha(E)$ — существенное прямое слагаемое модуля E. Тогда $\alpha(E) = E$ и α — автоморфизм модуля E. Сужение α на M является по условию 2) эндоморфизмом модуля M, совпадающим с α' на X.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 5). Пусть $Q = E \oplus F$, где E — инъективная оболочка модуля M. Каждый автоморфизм α модуля E продолжается до автоморфизма β модуля Q с помощью правила $\beta(x + y) = \alpha(x) + y$. По условию $\beta(M) \subseteq M$. Тогда $\alpha(M) = \beta(M) \subseteq M$.

Эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 6) проверяется непосредственно, так как эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 3) уже доказана. $\square$

1.4. Лемма. *Пусть Q — инъективная оболочка модуля M, α — эндоморфизм модуля Q, $X = \{m \in M \mid \alpha(m) \in M\}$ и $f = \alpha|_X \colon X \to M$ — сужение эндоморфизма α на модуль X.*

1. *Если гомоморфизм $f =\colon X \to M$ продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля M, то $\alpha(M) \subseteq M$.*
2. *Если $f(X) \subseteq X$ и эндоморфизм f модуля X продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля M, то $\alpha(M) \subseteq M$.*
3. *Если $\alpha = \alpha^2$ и каждый идемпотентный эндоморфизм модуля X продолжается до некоторого эндоморфизма модуля M, то $\alpha(M) \subseteq M$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Так как Q — инъективный модуль, то эндоморфизм g модуля M продолжается до некоторого эндоморфизма β модуля Q.

Допустим, что $(\alpha - \beta)(M) = 0$. Тогда $\alpha(M) = \beta(M) \subseteq M$, что и требовалось доказать.

Допустим, что $(\alpha - \beta)(M) \neq 0$. Так как Q — существенное расширение модуля M и $X = \{m \in M \mid \alpha(m) \in M\}$, то X — существенный подмодуль в Q. Тогда $X \cap (\alpha - \beta)(M)$ — ненулевой подмодуль в M, поскольку Q — существенное расширение модуля X. Пусть $0 \neq x = (\alpha - \beta)(m) \in X \cap (\alpha - \beta)(M)$, где $m \in M$. Так как

$$\alpha(m) = (\alpha - \beta)(m) + \beta(m) = x + \beta(m) \in M,$$

то $m \in X$. Поэтому $(\alpha - \beta)(m) = 0$ и $x = 0$. Получено противоречие.

Утверждение 2 вытекает из утверждения 1.

Докажем утверждение 3. Так как $\alpha = \alpha^2$, то $f = f^2$ и $f^2(x) = f(x) \in X$ для любого элемента $x \in X$. Поэтому f — идемпотентный эндоморфизм модуля X. По условию f продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля M. По утверждению 2 $\alpha(M) \subseteq M$. $\square$

1.5. Квазинепрерывные, CS- и C_3-модули. Модуль M называется *CS-модулем* или *C_1-модулем*, если каждый подмодуль в M является существенным подмодулем некоторого прямого слагаемого модуля M.

Модуль M называется *C_3-модулем*, если $X \oplus Y$ — прямое слагаемое в M для любых таких прямых слагаемых X и Y в M, что $X \cap Y = 0$.

Модуль M называется *квазинепрерывным* [33] или *π-инъективным*, если выполнены следующие эквивалентные условия:

1) каждый идемпотентный эндоморфизм любого подмодуля в M продолжается до эндоморфизма модуля M;
2) каждый идемпотентный эндоморфизм любого подмодуля в M продолжается до идемпотентного эндоморфизма модуля M;
3) M — *идемпотент-инвариантный* модуль, т. е. $\alpha(M) \subseteq M$ для каждого идемпотентного эндоморфизма α инъективной оболочки модуля M;
4) M — CS-модуль и C_3-модуль;
5) $M = \bigoplus\limits_{i\in I}(M \cap Q_i)$ для любого прямого разложения $Q = \bigoplus\limits_{i\in I} Q_i$ инъективной оболочки Q модуля M;
6) для любого подмодуля $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_n$ модуля M существует такое прямое разложение $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n \oplus Y$ модуля M, что M_i — существенное расширение модуля X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Эквивалентности 2) $\Longleftrightarrow$ 3) $\Longleftrightarrow$ 4) доказаны в [33] (см. также [52]).

Эквивалентности 3) $\Longleftrightarrow$ 5) и 4) $\Longleftrightarrow$ 6) проверяются непосредственно (см. также [52]).

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) очевидна.

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 3) вытекает из утверждения 3 леммы 1.4. □

1.6. Квазинепрерывные и конечномерные модули. Области Оре. Кольцо без ненулевых делителей нуля называется *областью*. Область A называется *правой областью Оре*, если для любых двух ненулевых элементов $a, s \in A$ существуют такие элементы $b, t \in A$, что $at = sb \neq 0$.

Кольцо называется *телом*, если все его ненулевые элементы обратимы.

Модуль M называется *конечномерным*, если M не содержит прямых сумм бесконечного числа ненулевых подмодулей.

Пусть n — натуральное число. Говорят, что модуль M имеет *равномерную размерность n* или *размерность Голди n*, если M — существенное расширение прямой суммы n равномерных ненулевых модулей и M не содержит прямой суммы $n + 1$ равномерных ненулевых модулей.

Следующие утверждения 1)—3) проверяются непосредственно и хорошо известны.

1. A-модуль M квазинепрерывен в точности тогда, когда M — квазинепрерывный $A/r(M)$-модуль, где $r(M)$ — аннулятор модуля M.
2. Равномерные справа области совпадают с правыми областями Оре. Квазинепрерывные справа области совпадают с правыми областями Оре.
3. Все подмодули равномерного модуля являются квазинепрерывными конечномерными модулями.

Следующие утверждения 4—7 хорошо известны.

4. Конечномерные модули совпадают с модулями конечной размерности Голди, причём размерность Голди определяется однозначно.

5. Квазинепрерывные конечномерные модули являются конечными прямыми суммами равномерных модулей.
6. Конечномерные справа области совпадают с правыми областями Оре.
7. Пусть A — правая область Оре. Существует такое тело Q, что A — унитарное подкольцо в Q, каждый ненулевой элемент $a \in A$ обратим в Q и для любого ненулевого элемента $q \in Q$ существуют такие ненулевые элементы $a, b \in A$, что $q = ab^{-1}$. В этом случае тело Q называется *классическим правым телом частных* области A, модуль Q_A является инъективной оболочкой модуля A_A и тело Q можно естественным образом отождествить с кольцом эндоморфизмов $\operatorname{End} Q_A$.

1.7. Замечание. Если M — автоморфизм-инвариантный равномерный модуль, то M — квазиинъективный модуль.

Действительно, пусть Q — инъективная оболочка модуля M и $f \in \operatorname{End} Q$. Достаточно доказать, что $f(m) \in M$ для любого $m \in M$. Из определения автоморфизм-инвариантного модуля вытекает, что это верно, если f — автоморфизм. Допустим, что f не автоморфизм. Тогда $1_Q - f$ — автоморфизм по утверждению 3 пункта 1.2. Поэтому $(1_Q - f)(m) \in M$. Тогда $f(m) = m - (1_Q - f)(m) \in M$. □

1.8. Инвариантные модули и кольца. Модуль M называется *инвариантным* или *дуо-модулем*, если все его подмодули вполне инвариантны в M.

Кольцо A называется *инвариантным слева* кольцом или *левым дуо-кольцом*, если все его левые идеалы являются идеалами. *Инвариантные справа* кольца, или *правые дуо-кольца*, определяются аналогично.

Ясно, что A — инвариантное слева (справа) кольцо в точности тогда, когда ${}_AA$ (соответственно A_A) — инвариантный модуль.

Инвариантные слева и справа кольца называются *инвариантными* кольцами или *дуо-кольцами*. Все коммутативные кольца инвариантны. Пусть A — некоммутативное тело. Тогда A и $A[[x]]$ — некоммутативные инвариантные кольца.

1.9. Замечание. Пусть A — некоммутативное кольцо и $R = A[x]$ — кольцо многочленов. Если $a, b \in A$ и $ab \neq ba$, то правый идеал $(a + x)R$ кольца R не является левым идеалом. В частности, R не является инвариантным слева кольцом.

Действительно, допустим противное. Тогда существуют многочлен $f \in R$ и элемент $c \in A$, такие что $b(a+x) = (a+x)(c+xf)$. Так как $b(a+x)$ — многочлен степени 1, то $f = 0$. Поэтому $b(a + x) = (a + x)c$. Приравнивая коэффициенты при x, получаем, что $b = c$ и $b(a + x) = (a + x)b$. Поэтому $ba = ab$, и получено противоречие. □

1.10. Замечание.

1. Если A — правая область Оре, в которой каждый эндоморфизм любого главного правого идеала продолжается на модуль A_A, то A — инвариантная слева левая область Оре.

2. Если A — область, в которой каждый эндоморфизм любого 2-порождённого правого идеала продолжается на модуль A_A, то A — инвариантная слева квазинепрерывная справа правая и левая область Оре.
3. Пусть $\mathbb{H}$ — некоммутативное тело гамильтоновых кватернионов и $A=\mathbb{H}[x]$. Тогда A — квазинепрерывная область и не все эндоморфизмы 2-порождённых правых идеалов области A продолжаются до эндоморфизмов модуля A_A.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть a и b — ненулевые элементы области A. Правая область Оре A имеет классическое правое тело частных Q, содержащее элемент aba^{-1}. Отображение $f\colon aA \to aA$, $f(ax) = (aba^{-1})(ax) = abx$, является эндоморфизмом главного правого идеала aA. По условию существует такой элемент $c \in A$, что $ca = f(a) = (aba^{-1})a = ab$. Поэтому A — инвариантная слева область. Так как A — инвариантная слева область, то A — левая область Оре.

Докажем утверждение 2. Пусть x — ненулевой элемент в A и y — такой элемент области A, что $xA \cap yA = 0$. Существует такой эндоморфизм f 2-порождённого модуля $xA \oplus yA$, что $f(x) = x$ и $f(y) = 0$. По условию существует такой элемент $a \in A$, что $ax = f(x) = x$ и $ay = f(y) = 0$. Поскольку $(a-1)x = 0$ и A — область, то $a = 1$. Тогда $y = 0$, поэтому A — правая область Оре. Тогда A — квазинепрерывная справа правая область Оре. По утверждению 1 A — инвариантная слева левая область Оре.

Докажем утверждение 3. Хорошо известно, все правые (левые) идеалы кольца многочленов над телом являются главными. Поэтому A — область Оре. Следовательно, A — квазинепрерывная область. По замечанию 1.9 A не является инвариантным слева кольцом. Теперь применяем утверждение 2. $\square$

1.11. Квазиинъективные, эндоморфизм-продолжаемые и квазинепрерывные модули. Пусть A — кольцо и M — A-модуль. Рассмотрим следующие три условия для M.

1. M — *квазиинъективный* модуль, т. е. для любого подмодуля X в M каждый гомоморфизм $X \to M$ продолжается до эндоморфизма модуля M.
2. M — *эндоморфизм-продолжаемый* модуль, т. е. каждый эндоморфизм любого подмодуля X в M продолжается до эндоморфизма модуля M.
3. M — *квазинепрерывный* модуль, т. е. каждый идемпотентный эндоморфизм любого подмодуля в M продолжается до эндоморфизма модуля M.

Ясно, что верны импликации $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3$, причём каждый вполне инвариантный подмодуль любого квазиинъективного (эндоморфизм-продолжаемого, автоморфизм-продолжаемого, квазинепрерывного) модуля является квазиинъективным (соответственно эндоморфизм-продолжаемым, автоморфизм-продолжаемым, квазинепрерывным) модулем.

Импликация $3 \Longrightarrow 2$ неверна в общем случае по утверждению 3 замечания 1.10.

Импликация $2 \Longrightarrow 1$ неверна в общем случае.

Действительно, непосредственно проверяется, что $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ — эндоморфизм-продолжаемый модуль. Кроме того, $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ — неквазиинъективный модуль, поскольку $\mathbb{Z}$-модульный гомоморфизм $2\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$, $2z \to z$, не продолжается до эндоморфизма модуля $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$. □

1.12. Замкнутые подмодули и замыкания. Пусть M — модуль и X — подмодуль в M. Подмодуль X называется *замкнутым* подмодулем в M, если $X = X'$ для каждого подмодуля X' в M, являющегося существенным расширением модуля X.

Замкнутый подмодуль $\bar{X}$ модуля M называется *замыканием* модуля X в M, если $\bar{X}$ — существенное расширение модуля X.

Хорошо известно, что X имеет хотя бы одно замыкание в M и существует хотя бы один замкнутый подмодуль Y в M (называемый $\cap$-*дополнением* к X в M), такой что $X \cap Y = 0$ и $X \oplus Y$ — существенный подмодуль в M. В этих условиях Y также является $\cap$-дополнением к $\bar{X}$ в M

Приведённые ниже утверждения хорошо известны.

1. Пусть $X = \bigoplus\limits_{i \in I} X_i$, $\bar{X}_i$ — замыкание модуля X_i в M, $i \in I$, $X^* = \sum\limits_{i \in I} \bar{X}_i$. Тогда $X^* = \bigoplus\limits_{i \in I} \bar{X}_i$.
2. Пусть $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_n$, $\bar{X}_i$ — замыкание модуля X_i в M, $i = 1, 2, \ldots, n$, $X^* = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_n \subseteq M$, Q — инъективная оболочка модуля M. Тогда существует такое прямое разложение $Q = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \ldots \oplus Q_n \oplus P$, что $Q_i = M \cap \bar{X}_i$, $1, \ldots, n$, и $Q_1 \oplus Q_2 \oplus \ldots \oplus Q_n$ — инъективная оболочка модуля X. Если X — существенный подмодуль в M, то $Q_1 \oplus Q_2 \oplus \ldots \oplus Q_n$ — инъективная оболочка модуля M.

1.13. Аннуляторы и условия на аннуляторы. Приведённые ниже утверждения хорошо известны и проверяются непосредственно.

1. Пусть B — подмножество в A. Тогда $r\Big(\ell\big(r(B)\big)\Big) = r(B)$ и $\ell\Big(r\big(\ell(B)\big)\Big) = \ell(X)$. Если A — подкольцо некоторого кольца Q, то $r_A(B) = A \cap r_Q(B)$ и $\ell_A(B) = A \cap \ell_Q(B)$.
2. A является кольцом с условием максимальности для левых аннуляторов в точности тогда, когда A является кольцом с условием минимальности для правых аннуляторов. В этом случае любое подмножество B в A содержит такое конечное подмножество $B^* = \{b_1, \ldots, b_n\}$, что
$$r(B) = r(B^*) = r(b_1) \cap \ldots \cap r(b_n).$$

1.14. Сингулярные подмодули и идеалы. Пусть A — кольцо и M — A-модуль. Через $\operatorname{Sing} M$ обозначается подмножество в M, состоящее из всех таких элементов $m \in M$, что $r(m)$ — существенный правый идеал кольца A. Множество $\operatorname{Sing} M$ является подмодулем в M и называется *сингулярным подмодулем* модуля M. Сингулярные подмодули левых A-модулей определяются аналогично.

Приведённые ниже утверждения хорошо известны.

1. $f(\operatorname{Sing} M) \subseteq \operatorname{Sing} M$ для любого гомоморфизма $f\colon \operatorname{Sing} M \to M$. В частности, $\operatorname{Sing} M$ — вполне инвариантный подмодуль в M, причём *правый сингулярный идеал* $\operatorname{Sing} A_A$ и *левый сингулярный идеал* $\operatorname{Sing}{}_A A$ кольца A являются идеалами в A.
2. Если A — кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов, то его правый сингулярный идеал нильпотентен.

1.15. Сингулярные и несингулярные модули. Радикал Голди. Модуль M называется *несингулярным* (*сингулярным*), если $\operatorname{Sing} M = 0$ (соответственно $\operatorname{Sing} M = M$). Через $G(M)$ или $\operatorname{Sing}_2 M$ обозначается пересечение всех таких подмодулей X модуля M, что фактор-модуль M/X несингулярен. Подмодуль $G(M)$ называется *радикалом Голди* или *вторым сингулярным подмодулем* модуля M. Модуль M называется *радикальным по Голди*, если $G(M) = M$. Равенство $G(M) = 0$ равносильно равенству $\operatorname{Sing} M = 0$.

Приведённые ниже утверждения хорошо известны (см., например, [25, 52]).

1. Если $\{X_i\}_{i\in I}$ — некоторое множество подмодулей в M и все модули M/X_i несингулярны, то каждый модуль X_i замкнут в M, модуль $M/\big(\bigcap\limits_{i\in I}\big)$ несингулярен. В частности, фактор-модуль $M/G(M)$ несингулярен.
2. $f\big(G(M)\big) \subseteq G(M)$ для любого гомоморфизма $f\colon G(M) \to M$. В частности, $G(M)$ — вполне инвариантный подмодуль в M, причём *правый радикал Голди* $G(A_A)$ и *левый правый радикал Голди* $G({}_A A)$ кольца A являются идеалами в A.
3. $G(M)$ — замкнутый подмодуль в M и является замыканием сингулярного подмодуля $\operatorname{Sing} M$ в M.
4. Если X — подмодуль в M и $X \cap \operatorname{Sing} M = 0$, то $X \cap G(M) = 0$ и модуль X несингулярен.
5. Если X — существенный подмодуль в M, то модуль M/X сингулярен.
6. Если A — несингулярное справа кольцо и M — правый A-модуль, то $G(M) = \operatorname{Sing} M$ и модуль $M/\operatorname{Sing} M$ несингулярен.
7. Если M — несингулярный модули и X — замкнутый подмодуль в M, то M/X — несингулярный модуль.

1.16. Множества Оре, порядки и классические кольца частных. Пусть A — кольцо и A^* — мультипликативный моноид всех неделителей нуля кольца A.

Подмоноид S моноида A^* называется *правым* (*левым*) *множеством Оре* (в A), если выполнены следующие два эквивалентных условия:

(∗) для любых $a \in A$ и $s \in S$ существуют такие элементы $b \in A$ и $t \in S$, что $at = sb$ (соответственно $ta = bs$);

(∗∗) существует такое кольцо AS^{-1} (соответственно кольцо $S^{-1}A$), содержащее A в качестве унитарного подкольца, что все элементы из S обратимы в AS^{-1} (соответственно в $S^{-1}A$) и $AS^{-1} = \{as^{-1} \mid a \in A,\ s \in S\}$ (соответственно $S^{-1}A = \{s^{-1}a \mid a \in A,\ s \in S\}$).

Кольцо AS^{-1} ($S^{-1}A$) называется *правым* (соответственно *левым*) *кольцом частных* кольца A относительно S.

Подмоноид S моноида A^* является правым и левым множеством Оре в A в точности тогда, когда существует такое кольцо $S^{-1}AS^{-1}$, что $S^{-1}AS^{-1} = AS^{-1} = S^{-1}A$. В этом случае кольцо $S^{-1}AS^{-1}$ называется *двусторонним кольцом частных* кольца A относительно S.

В случае когда моноид A^* является правым (левым) множеством Оре, кольцо AS^{-1} (соответственно кольцо $S^{-1}A$) называется *правым* (соответственно *левым*) *классическим кольцом частных* кольца AS^{-1} и обозначается $Q_{\mathrm{cl}}(A)$ (соответственно ${}_{\mathrm{cl}}(A)Q(A)$), а кольцо A называется *правым* (соответственно *левым*) порядком в кольце $Q_{\mathrm{cl}}(A)(A)$ (соответственно ${}_{\mathrm{cl}}(A)Q(A)$).

В случае когда моноид A^* является правым и левым множеством Оре, кольцо $S^{-1}AS^{-1}$ называется *классическим кольцом частных* кольца AS^{-1} и обозначается ${}_{\mathrm{cl}}Q_{\mathrm{cl}}(A)$, а кольцо A называется *порядком* в кольце ${}_{\mathrm{cl}}Q_{\mathrm{cl}}(A)$.

1. Каждое инвариантное справа кольцо имеет классическое правое кольцо частных.
2. Каждое инвариантное кольцо имеет классическое кольцо частных.
3. Пусть A — кольцо, S — левое подмножество Оре в A, Q — левое кольцо частных кольца A относительно S, $q_1, \ldots, q_n \in Q$ и M — n-порождённый подмодуль $\sum\limits_{i=1}^{n} q_iA$ правого A-модуля Q. Тогда существуют такие элементы $a_1, \ldots, a_n \in A$ и $s \in S$, что $q_i = s^{-1}a_i$ при $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, соотношение $f(m) = sm$ задаёт изоморфизм модуля M_A на n-порождённый правый идеал sM кольца A.

Доказательство. Утверждения 1, 2 проверяются непосредственно.

Докажем утверждение 3. Достаточно рассмотреть случай $n = 2$. Существуют такие элементы $d_i \in A$ и $s_i \in S$, что $q_i = {s_i}^{-1}d_i$, $i = 1, 2$. Так как S — левое множество Оре, то $t_1s_1 = t_2s_2 \equiv s$ для некоторых элементов $t_1 \in S$ и $t_2 \in A$. Так как $s_1 \in S$ и $t_1 \in S$, то $s \in S$ и элемент s обратим в кольце Q. Обозначим $a_i = t_id_i$, $i = 1, 2$. Тогда ${s_i}^{-1} = s^{-1}t_i$,

$$s^{-1}a_i = s^{-1}t_id_i = (s^{-1}t_is_i){s_i}^{-1}d_i = q_i, \quad i = 1, 2. \qquad \square$$

1.17. Простые и полупростые модули. Цоколь. Ненулевой модуль называется *простым*, если он совпадает с любым своим ненулевым подмодулем. Прямые суммы простых модулей называются *полупростыми* модулями. Для модуля M через $\operatorname{Soc} M$ обозначается наибольший полупростой подмодуль модуля M; по определению $\operatorname{Soc} M = 0$, если M не содержит полупростых подмодулей. Модуль $\operatorname{Soc} M$ называется *цоколем* модуля M.

Хорошо известны следующие утверждения.

1. Полупростые модули совпадают с ненулевыми модулями, в которых все подмодули являются прямыми слагаемыми.

2. Теорема Веддербёрна—Артина. Полупростые справа (слева) артиновы справа (слева) кольца совпадают с кольцами, которые изоморфны прямым произведениям конечного числа колец матриц над телами.
3. Все ненулевые модули над полупростыми артиновыми кольцами являются инъективными полупростыми модулями.

1.18. Первичные и полупервичные кольца Голди. Порядки в классически полупростых кольцах. Конечномерное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов называется *правым кольцом Голди*.

Кольцо называется *первичным*, если произведение любых двух его ненулевых идеалов не равно нулю.

Кольцо A называется *полупервичным*, если A не имеет ненулевых нильпотентных идеалов.

Приведённые ниже утверждения 1—3 хорошо известны.

1. Для кольца A равносильны следующие условия:
   а) A — правый порядок в полупростом артиновом кольце;
   б) в A множество всех существенных правых идеалов совпадает с множеством всех правых идеалов, содержащих хотя бы один неделитель нуля;
   в) A — конечномерное справа полупервичное кольцо с условием максимальности для левых аннуляторов;
   г) A — полупервичное правое кольцо Голди;
   д) A — конечномерное справа несингулярное справа полупервичное кольцо.

   В этом случае A — кольцо с условием минимальности для правых аннуляторов и кольцо с условием минимальности для левых аннуляторов.
2. Для кольца A равносильны следующие условия:
   а) A — правый порядок в кольце матриц над телом;
   б) A — конечномерное справа первичное кольцо с условием максимальности для левых аннуляторов;
   в) A — первичное правое кольцо Голди;
   г) A — конечномерное справа несингулярное справа первичное кольцо.
3. Для кольца A равносильны следующие условия:
   а) A — порядок в кольце матриц над телом (в прямом произведении конечного числа колец матриц над телами);
   б) A — первичное (соответственно полупервичное) кольцо Голди;
   в) A — конечномерное несингулярное первичное (соответственно полупервичное) кольцо.

1.19. Модули над полупервичными кольцами Голди. Пусть A — полупервичное правое кольцо Голди и M — правый A-модуль. Обозначим через $t(M)$

множество всех элементов из M, аннулируемых некоторыми неделителями нуля кольца A. Модуль M называется *непериодическим* (*периодическим* модулем, модулем *без кручения*), если $t(M) \neq M$ (соответственно $t(M) = M$, $t(M) = 0$).

По утверждению 1 пункта 1.18 множество всех существенных правых идеалов кольца A совпадает с множеством всех правых идеалов, содержащих хотя бы один неделитель нуля. Из этого утверждения и утверждений пункта 1.15 вытекают приведённые ниже хорошо известные утверждения для модуля M над полупервичным правым кольцом Голди A.

1. $\operatorname{Sing} M = t(M)$. В частности, M несингулярен (сингулярен) в точности тогда, когда M — периодический модуль (соответственно модуль без кручения).
2. Существенное расширение любого сингулярного правого A-модуля является сингулярным модулем. Поэтому $\operatorname{Sing} M = G(M)$.
3. Если существует такой подмодуль X в M, что модули X и M/X сингулярны, то модуль M сингулярен.
4. $\operatorname{Sing} M$ — замкнутый подмодуль в M и модуль $M/\operatorname{Sing} M$ несингулярен.

1.20. Цепные и полуцепные модули и кольца. Модуль называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению. Прямые суммы цепных модулей называются *полуцепными* модулями.

1. Пусть A — артиново полуцепное кольцо. Хорошо известно (см., например, [16, 25.4.2] или [58, 55.16]), что каждый A-модуль M является прямой суммой цепных модулей конечной (композиционной) длины. В частности, M — прямая сумма равномерных модулей и если M — неразложимый модуль, то M — цепной артинов и нётеров модуль.
2. Пусть A — прямое произведение конечного числа артиновых цепных колец. Хорошо известно и непосредственно проверяется, что A — инвариантное кольцо, над которым каждый циклический модуль является квазиинъективным.

1.21. Наследственные и полунаследственные модули и кольца. Модуль называется *наследственным*, если все его подмодули проективны. Модуль называется *полунаследственным*, если все его конечно порождённые подмодули проективны. Как обычно, *наследственное* кольцо — это наследственное справа и слева кольцо. Кольцо A называется *ограниченным справа* (*слева*), если каждый его существенный правый (соответственно левый) идеал содержит ненулевой идеал. Модуль M называется *полуартиновым*, если каждый его ненулевой фактор-модуль имеет простой подмодуль.

1. Пусть A — наследственное нётерово первичное кольцо. Тогда для любого ненулевого идеала B кольца A фактор-кольцо A/B является полуцепным артиновым кольцом. Кроме того, по утверждению 1 пункта 1.19 сингулярные A-модули совпадают с периодическими A-модулями (см. [16, 25.5.1; 22]).

2. Каждое наследственное нётерово первичное кольцо является ограниченным (справа и слева) или примитивным (справа и слева), причём ограниченное примитивное наследственное нётерово первичное кольцо является простым артиновым кольцом (см. [39]).
3. Пусть A — наследственная нётерова область. Если A инвариантна слева, то A инвариантна справа.

Без ограничения общности можно считать, что A не тело. Так как каждое инвариантное слева примитивное слева кольцо является телом, то A не является примитивным слева кольцом. По утверждению 2 A — ограниченное справа кольцо. Надо доказать, что произвольный ненулевой собственный правый идеал C кольца A является идеалом. Так как A — правая область Оре, то C — существенный правый идеал. Поскольку A — ограниченное справа кольцо, то C содержит ненулевой собственный идеал B кольца A. По утверждению 1 A/B — полуцепное артиново кольцо. Кроме того, A/B — инвариантное слева кольцо. Поэтому A/B — прямое произведение конечного числа инвариантных слева, цепных справа и слева, артиновых справа и слева колец. Непосредственно проверяется, что каждое инвариантное слева, цепное справа и слева, артиново справа и слева кольцо является инвариантным справа кольцом. Поэтому A/B — инвариантное справа кольцо, откуда следует, что C/B — идеал в A/B. Кроме того, B — идеал в A. Поэтому C — идеал в A.

2. Автоморфизм-продолжаемые модули

Основные результаты данного раздела опубликованы в [9—14, 53, 54].

2.1. Автоморфизм-инвариантные, сильно автоморфизм-продолжаемые и автоморфизм-продолжаемые модули. Пусть A — кольцо и M — A-модуль. Рассмотрим следующие три условия для M.

1. M — *автоморфизм-инвариантный* модуль, т. е. M — характеристический подмодуль своей инъективной оболочки.
2. M — *сильно автоморфизм-продолжаемый* модуль, т. е. для любого подмодуля X в M каждый автоморфизм модуля X продолжается до автоморфизма модуля M.
3. M — *автоморфизм-продолжаемый* модуль, т. е. для любого подмодуля X в M каждый автоморфизм модуля X продолжается до эндоморфизма модуля M.

Ясно, что каждый характеристический подмодуль любого автоморфизм-инвариантного (сильно автоморфизм-продолжаемого) модуля является автоморфизм-инвариантным (соответственно сильно автоморфизм-продолжаемым) модулем.

2.2. Замечание. Верны импликации $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3$ из пункта 2.1. Автору неизвестно, верна ли импликация $3 \Longrightarrow 2$ в общем случае. Импликация $2 \Longrightarrow 1$

неверна в общем случае, поскольку $\mathbb{Z}$ — сильно автоморфизм-продолжаемый $\mathbb{Z}$-модуль, не являющийся автоморфизм-инвариантным модулем.

Импликация $1 \Longrightarrow 2$ вытекает из предложения 1.3, импликация $2 \Longrightarrow 3$ очевидна.

Аддитивная группа рациональных чисел $\mathbb{Q}$ является инъективной оболочкой модуля $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$. Кроме того, $\mathbb{Z}$ не является автоморфизм-инвариантным модулем, поскольку $\alpha(\mathbb{Z}) \not\subseteq \mathbb{Z}$, где $\alpha\colon q \to q/2$ — автоморфизм $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Q}$. Тем не менее непосредственно проверяется, что любой нетождественный автоморфизм α произвольного ненулевого подмодуля X модуля $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ является умножением на -1, поэтому α продолжается до автоморфизма модуля $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$. $\square$

2.3. Лемма. *Пусть M — модуль, Q — его инъективная оболочка, X — подмодуль в M, Y — произвольное $\cap$-дополнение к модулю X в модуле M, $X' = X \oplus Y$ — существенный подмодуль в M.*

1. *Для любого подмодуля X' в M каждый автоморфизм (эндоморфизм) f модуля X с помощью соотношения $f'(x+y) = f(x) + y$, где $x \in X$ и $y \in Y$, продолжается до автоморфизма (соответственно эндоморфизма) f' существенного подмодуля X' модуля M. В свою очередь, автоморфизм (эндоморфизм) f' модуля X' продолжается до автоморфизма (соответственно эндоморфизма) α инъективного модуля Q.*
2. *Любой гомоморфизм $g\colon X \to M$ с существенным в X ядром K с помощью соотношения $g'(x+y) = g(x)$, где $x \in X$ и $y \in Y$, продолжается до гомоморфизма $g'\colon X' \to M$ с существенным в M ядром $K' = K \oplus Y$. В свою очередь, гомоморфизм g' продолжается до эндоморфизма h инъективного модуля Q с существенным в Q ядром, причём $1_Q - h$ — автоморфизм модуля Q, который на существенном подмодуле K' модуля M совпадает с тождественным автоморфизмом модуля K'.*

Доказательство. Так как X' — существенный подмодуль в M и M — существенный подмодуль в Q, то X' — существенный подмодуль в Q.

Докажем утверждение 1. Непосредственно проверяется, что f' — автоморфизм (эндоморфизм) существенного подмодуля X' модуля Q. Так как модуль Q инъективен, то автоморфизм (эндоморфизм) f' модуля X' продолжается до эндоморфизма α модуля Q. Допустим, что f' — автоморфизм модуля X'. Так как X' — существенный подмодуль в Q и $X \cap \operatorname{Ker} \alpha = 0$, то α — мономорфизм, модуль $\alpha(Q)$ инъективен. Поэтому $\alpha(Q)$ — прямое слагаемое в Q. Кроме того, $X' = f'(X') = \alpha(X')$, откуда следует, что модуль $\alpha(Q)$ содержит существенный подмодуль X' модуля Q. Поэтому $\alpha(Q) = Q$, и α — автоморфизм.

Пусть f' — эндоморфизм (автоморфизм) модуля X', Y — подмодуль в M, максимальный среди подмодулей модуля M, имеющих нулевое пересечение с X'. Тогда $X = X' \oplus Y$ — существенный подмодуль в M. Теперь можно определить эндоморфизм (автоморфизм) f модуля X так, что $f(x'+y) = f(x') + y$ для любых $x' \in X'$ и $y \in Y$.

Докажем утверждение 2. Непосредственно проверяется, что $g'\colon X' \to M$ — гомоморфизм с существенным в M ядром $K' = K \oplus Y$. Так как модуль Q

инъективен, то гомоморфизм g' продолжается до эндоморфизма h модуля Q. Поскольку модуль $\operatorname{Ker} h$ содержит существенный подмодуль K' модуля M, то $\operatorname{Ker} h$ — существенный подмодуль в Q. Тогда ограничение эндоморфизма $1_Q - h$ инъективного модуля Q на модуль $\operatorname{Ker} h$ является тождественным автоморфизмом существенного подмодуля $\operatorname{Ker} h$ модуля Q. Тогда $1_Q - h$ — существенный инъективный подмодуль модуля Q. Поэтому $1_Q - h$ — автоморфизм модуля Q, который на существенном подмодуле K' модуля M совпадает с тождественным автоморфизмом модуля K'. $\square$

2.4. Замечание. Модуль M является сильно автоморфизм-продолжаемым в точности тогда, когда для любого существенного подмодуля X в M каждый автоморфизм модуля X продолжается до автоморфизма модуля M. Кроме того, модуль M является автоморфизм-продолжаемым (эндоморфизм-продолжаемым) в точности тогда, когда для любого существенного подмодуля X в M каждый автоморфизм (соответственно эндоморфизм) модуля X продолжается до эндоморфизма модуля M.

Замечание 2.4 вытекает из леммы 2.3.

2.5. Полупримарные кольца и полуартиновы модули. Кольцо A называется *полупримарным*, если его радикал Джекобсона $J(A)$ нильпотентен, а фактор-кольцо $A/J(A)$ является полупростым кольцом. В частности, каждое артиново справа или слева кольцо является полупримарным. Напомним, что модуль M называется *полуартиновым*, если каждый его ненулевой фактор-модуль имеет простой подмодуль.

Приведённые ниже утверждения хорошо известны и проверяются непосредственно.

1. Каждый правый модуль над полуартиновым справа кольцом является полуартиновым, и все полупримарные кольца полуартиновы. В частности, каждый модуль над полупримарным кольцом является полуартиновым.
2. Если M — такой модуль, что все его циклические подмодули являются артиновыми, то M — полуартинов модуль. В частности, каждый артинов модуль является полуартиновым.
3. Каждая периодическая абелева группа является полуартиновым $\mathbb{Z}$-модулем, и любая прямая сумма бесконечного числа ненулевых периодических абелевых групп является неартиновым полуартиновым $\mathbb{Z}$-модулем.

2.6. Пример. Существуют полуартиновы кольца, которые не являются полупримарными. Действительно, пусть F — поле и A — кольцо всех последовательностей элементов из F, которые стабилизируются на конечном номере, зависящем от последовательности. Тогда A — коммутативное полуартиново кольцо, не являющееся полупримарным кольцом.

2.7. Теорема [54]. *Для полуартинова модуля M равносильны следующие условия*:

1) M — *автоморфизм-инвариантный модуль*;

2) M — *сильно автоморфизм-продолжаемый модуль*;

3) M — *автоморфизм-продолжаемый модуль.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 3) вытекает из замечания 2.2.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 2). Пусть X_1 — подмодуль в M и f_1 — его автоморфизм. Надо доказать, что f_1 продолжается до автоморфизма модуля M. По второму утверждению леммы 2.3 можно считать, что X_1 — существенный подмодуль в M.

Обозначим через W множество всех таких пар (X', f'), что X' — подмодуль в M, $X_1 \subseteq X'$, f' — автоморфизм модуля X' и f' совпадает с f_1 на X_1. Определим такой частичный порядок на W, что

$$(X', f') \leqslant (X'', f'') \iff X' \subseteq X'' \text{ и } f'' \text{ совпадает с } f' \text{ на } X'.$$

Непосредственно проверяется, что объединение любой возрастающей цепи пар из W принадлежит W. По лемме Цорна существует максимальная пара (X, f). Тогда $X = X_2$ для любой такой пары $(X_2, f_2) \in W$, что $X \subseteq X_2$ и f_2 совпадает с f на X.

Если $X = M$, то f — автоморфизм модуля M, что и требовалось.

Допустим, что $X \neq M$. Тогда ненулевой полуартинов модуль M/X является существенным расширением своего ненулевого цоколя Y/X, где X — собственный подмодуль модуля $Y \subseteq M$. Так как M — автоморфизм-продолжаемый модуль, то автоморфизмы f и f^{-1} модуля X продолжаются до эндоморфизмов g и h модуля M соответственно. Тогда $(1 - gh)(X) = 0 = (1 - hg)(X)$. Так как $X \cap \operatorname{Ker} g = X \cap \operatorname{Ker} f = 0$ и X — существенный подмодуль в M, то g — мономорфизм. Кроме того, сужение g на X является автоморфизмом модуля X. Поэтому g индуцирует мономорфизм $\overline{(g)}\colon M/X \to M/X$. Так как цоколь Y/X модуля M/X является вполне инвариантным подмодулем в M/X, то $\overline{(g)}(Y/X) \subseteq Y/X$. Поэтому $g(Y) \subseteq Y$, причём $X = g(X) \subsetneq g(Y)$. Аналогично получаем, что $h(Y) \subseteq Y$, причём $X = h(X) \subsetneq h(Y)$.

Так как M — полуартинов модуль, то M — существенное расширение своего ненулевого цоколя S. Тогда $S \subseteq X$, поскольку X — существенный подмодуль в M и S — полупростой подмодуль в M. Кроме того, $(1 - gh)(X) = (1 - ff^{-1})(X) = 0$ и Y/X — полупростой модуль. Поэтому $(1 - gh)(Y) \subseteq S \subseteq X$. Тогда

$$Y \subseteq (1 - gh)(Y) + gh(Y) \subseteq X + g(Y) = g(Y).$$

Поэтому сужение g_Y мономорфизма g на Y является автоморфизмом модуля Y и g_Y — продолжение автоморфизма f модуля X. Это противоречит выбору X.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть Q — инъективная оболочка модуля M, u — автоморфизм модуля Q и S — цоколь модуля Q. Надо доказать, что $u(M) \subseteq M$.

Так как M — существенный полуартинов подмодуль в Q, то S содержится в M и является существенным подмодулем в M. Так как S — цоколь модуля Q, то $u(S) = S = u^{-1}(S)$. Обозначим через X сумму всех таких подмодулей X'

в M, что $u(X') = X' = u^{-1}(X')$. Тогда $u(X) = X = u^{-1}(X)$, $S \subseteq X$, X — существенный подмодуль в M.

Если $X = M$, то $u(M) = M$, что и требовалось.

Допустим, что $X \neq M$. Тогда ненулевой полуартинов модуль M/X является существенным расширением своего ненулевого цоколя Y/X, где $X \subsetneq Y \subseteq M$. Так как $u(X) = X = u^{-1}(X)$ и M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль, то существуют такие автоморфизмы f и g модуля M, что $(u-f)(X) = 0$ и $(u^{-1}-g)(X) = 0$. Кроме того, Y/X — полупростой модуль. Поэтому $(u-f)(Y) \subseteq S \subseteq X$ и $(u^{-1} - g)(Y) \subseteq S \subseteq X$. Так как f и g — автоморфизмы модуля M и $f(X) = X = g(X)$, то f и g индуцируют автоморфизмы $\bar{f}$ и $\bar{g}$ модуля M/X с ненулевым цоколем Y/X. Так как Y/X — цоколь модуля M/X, то $\bar{f}(Y/X) = Y/X = \bar{g}(Y/X)$, причём $f(X) = X = g(X)$. Поэтому $f(Y) = Y = g(Y)$. Кроме того, $(u-f)(Y) \subseteq Y$ и $(u^{-1} - g)(Y) \subseteq Y$. Тогда $u(Y) \subseteq (u-f)(Y) + f(Y) \subseteq Y$ и $u^{-1}(Y) \subseteq (u^{-1} - g)(Y) + g(Y) \subseteq Y$. Поэтому $u(Y) = Y = u^{-1}(Y)$ и Y строго содержит X, что противоречит выбору X. □

2.8. Следствие [10, 14]. *Пусть A — кольцо и M — A-модуль. Если M — артинов модуль или A — полупримарное кольцо, то равносильны следующие условия*:

1) M — *автоморфизм-инвариантный модуль*;
2) M — *сильно автоморфизм-продолжаемый модуль*;
3) M — *автоморфизм-продолжаемый модуль.*

В [38, теорема 12] доказано, что каждый автоморфизм-инвариантный модуль M обладает свойством C_3. В связи с этим мы докажем теорему 2.9, где доказательство первого утверждения аналогично доказательству в [38, теорема 12].

2.9. Теорема [11]. *Пусть M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль. Тогда M — C_3-модуль. Кроме того, если M — CS-модуль, то M — квазинепрерывный модуль.*

Доказательство. Пусть $M = A \oplus A' = B \oplus B'$ и $A \cap B = 0$. Надо доказать, что $A \oplus B$ — прямое слагаемое в M. Пусть $\pi\colon M \to A'$ — проекция с ядром A. Существует такой подмодуль C в M, что $(A + B) \cap C = 0$ and $A \oplus B \oplus C$ — существенный подмодуль в M. Обозначим $D = B \oplus C$. Тогда $A \oplus D = A \oplus \pi D$ и $\pi|_D\colon D \to \pi D$ — изоморфизм. Поэтому $1_A \oplus \pi_D\colon A \oplus D \to A \oplus \pi D$ — автоморфизм модуля $A \oplus D$. Так как M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль, то $1_A \oplus \pi_D$ продолжается до автоморфизма f модуля M. Поскольку B — прямое слагаемое модуля M, то $\pi B = fB$ — прямое слагаемое модуля M. Поэтому πB — прямое слагаемое модуля A', откуда следует, что $A \oplus B = A \oplus \pi B$ — прямое слагаемое модуля M. Поэтому M — C_3-модуль.

Теперь второе утверждение вытекает из определения квазинепрерывного модуля. □

2.10. Замечание. В связи с теоремой 2.9 заметим, что $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ — сильно автоморфизм-продолжаемый квазинепрерывный модуль, не являющийся автоморфизм-инвариантным.

2.11. Замечание. Пусть A — кольцо, X и Y — правые A-модули, $\{Y_i\}_{i\in I}$ — некоторое множество правых A-модулей и $\{f_i \in \mathrm{Hom}(Y_i, Y)\}_{i\in I}$ — некоторое множество гомоморфизмов. Кроме того, пусть X — Y_i-инъективный модуль для каждого $i \in I$.

1. Модуль X инъективен относительно подмодуля $\sum\limits_{i\in I} f_i(Y_i)$ модуля Y.
2. Если существует мономорфизм $A_A \to \sum\limits_{i\in I} f_i(Y_i)$, то модуль X инъективен.
3. Если существует мономорфизм $A_A \to \bigoplus\limits_{i\in I} Y_i$, то модуль X инъективен.

Замечания 2.11 вытекают из пункта 1.1.

2.12. Сильно первичные и сильно полупервичные кольца. Кольцо называется *сильно первичным справа* (см. [30]), если каждый его ненулевой идеал содержит конечное подмножество с нулевым правым аннулятором.

Кольцо A называется *сильно полупервичным справа* (см. [29]), если каждый идеал X кольца A, являющийся существенным правым идеалом, содержит конечное подмножество Y с нулевым правым аннулятором $r(Y)$.

1. Каждое сильно первичное справа кольцо является сильно полупервичным справа кольцом. Прямое произведение двух полей сильно полупервично, но не сильно первично.
2. Если A — область или простое кольцо, то A — сильно первичное (справа и слева) кольцо.
3. Если A — первичное кольцо с условием максимальности для левых аннуляторов, то A — сильно первичное справа кольцо. В частности, каждое первичное правое или левое кольцо Голди является сильно первичным справа кольцом.
4. Существует сильно первичное кольцо A, которое не является конечномерным справа или слева. В частности, A не является правым или левым кольцом Голди.
5. Если A — сильно первичное справа кольцо, то A — несингулярное справа первичное кольцо.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 проверяются непосредственно.

Утверждение 3 следует из второго утверждения пункта 1.13.

Докажем утверждение 4. Пусть A — свободная алгебра от двух переменных над полем. Тогда A — область. В частности, A — сильно первичное справа и слева кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов и с условием максимальности для левых аннуляторов. Однако A не является конечномерным справа или слева кольцом.

Докажем утверждение 5. Из определения сильно первичного справа кольца вытекает, что A — первичное кольцо, причём идеал $\operatorname{Sing} A_A$ содержит такое конечное подмножество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, что $r(X) = r(x_1) \cap \ldots \cap r(x_n) = 0$. Все правые идеалы $r(x_i)$ являются существенными. Поэтому $r(X)$ — существенный правый идеал. Так как $r(X) = 0$, то получено противоречие. $\square$

2.13. Замечание. Существует первичное кольцо, которое не является сильно первичным справа кольцом. Это вытекает из утверждения 5 пункта 2.12 и того, что существуют первичные кольца, не являющиеся несингулярными справа (см., например, [37]).

2.14. Предложение [53]. *Пусть A — кольцо, B — его правый идеал, AB — идеал, порождённый правым идеалом B, и X — B_A-инъективный правый A-модуль.*

1. *X — $(AB)_A$-инъективный модуль.*
2. *Если идеал AB содержит такое конечное подмножество $\{y_1, \ldots, y_n\}$, что $r(\{y_1, \ldots, y_n\}) = 0$, то модуль X инъективный.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть $\{a_i\}_{i \in I}$ — множество всех элементов кольца A. Для любого $i \in I$ обозначим через f_i гомоморфизм из B в Y_i, задаваемый соотношением $f_i(b) = a_i b$. Тогда $AB = \sum\limits_{i \in I} f_i(B)$. По утверждению 5 пункта 1.1 X — $(AB)_A$-инъективный модуль.

Докажем утверждение 2. Так как $r(y_1) \cap \ldots \cap r(y_n) = r(\{y_1, \ldots, y_n\}) = 0$ и $y_i A \cong A_A / r(y_i)$ для любого i, то существует мономорфизм $A_A \to \bigoplus\limits_{i=1}^{n} y_i A$. По утверждению 6 пункта 1.1 модуль AB инъективен. $\square$

2.15. Лемма. *Пусть A — кольцо и Y — правый A-модуль, не являющийся существенным расширением сингулярного модуля. Тогда существует такой ненулевой правый идеал B кольца A, что модуль B_A изоморфен подмодулю модуля Y.*

Доказательство. Так как модуль Y не является существенным расширением сингулярного модуля, то существует такой элемент y модуля Y, что yA — ненулевой несингулярный модуль. Поскольку $yA \cong A_A / r(y)$ и модуль yA несингулярен, то правый идеал $r(y)$ не является существенным. Поэтому найдётся такой ненулевой правый идеал B, что $B \cap r(y) = 0$. Кроме того, существует эпиморфизм $f \colon A_A \to yA$ с ядром $r(y)$. Так как $B \cap \operatorname{Ker} f = 0$, то f индуцирует мономорфизм $g \colon B \to yA$. Поэтому yA содержит ненулевой подмодуль $g(B)$, изоморфный модулю B_A. $\square$

2.16. Теорема [53]. *Пусть A — кольцо и M — автоморфизм-продолжаемый правый A-модуль.*

1. *Если X и Y — подмодули в M с условием $X \cap Y = 0$, причём модуль M/X несингулярен, то модуль X инъективен относительно Y.*
2. *Если A — несингулярное справа кольцо и Y — любой несингулярный подмодуль в M, то модуль $\operatorname{Sing} M$ инъективен относительно Y.*

3. *Если модуль M несингулярен и X, Y — замкнутые подмодули в M с условием $X \cap Y = 0$, то модуль X инъективен относительно Y и модуль Y инъективен относительно X.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть Y_1 — подмодуль модуля Y и $f_1\colon Y_1 \to X$ — гомоморфизм. Надо доказать, что f_1 продолжается до гомоморфизма $f\colon Y \to X$. Без ограничения общности можно считать, что Y_1 — существенный подмодуль в Y. (Действительно, по лемме Цорна существует такой подмодуль Z в Y, что $Y_1 \cap Z = 0$ и $Y_1 \oplus Z$ — существенный подмодуль в Y. Обозначим $Y_2 = Y_1 \oplus Z$. Гомоморфизм $f_1\colon Y_1 \to X$ продолжается до гомоморфизма $f_2\colon Y_2 \to X$ с помощью соотношения $f_2(y_1 + z) = f_1(y_1)$.)

Определим эндоморфизм α модуля $X \oplus Y_1$ соотношением $\alpha(x + y_1) = x + f(y_1) + y_1$ для всех $x \in X$ и $y_1 \in Y_1$. Допустим, что

$$0 = \alpha(x + y_1) = x + f(y_1) + y_1, \quad x \in X, \quad y_1 \in Y_1,$$
$$y_1 = -x - f(y_1) \in X \cap Y_1 = 0, \quad f(y_1) = 0,$$
$$x = x + f(y_1) + y_1 = \alpha(x + y_1) = 0.$$

Кроме того, для любых $x \in X$ и $y_1 \in Y_1$

$$x + y_1 = \big(x - f(y_1)\big) + (f(y_1) + y_1) = \alpha\big(x - f(y_1)\big) + \alpha(y_1) \in \alpha(X \oplus Y_1).$$

Поэтому α — автоморфизм модуля $X \oplus Y_1$. Из конструкции α ясно, что эндоморфизм $\alpha - 1$ модуля $X \oplus Y_1$ совпадает с гомоморфизмом $f_1\colon Y_1 \to X$ на модуле Y_1. Так как M — автоморфизм-продолжаемый модуль, то автоморфизм α модуля $X \oplus Y_1$ продолжается до эндоморфизма β модуля M. Обозначим через g эндоморфизм $\beta - 1$ модуля M. Тогда g совпадает с f_1 на Y_1.

Докажем, что $g(y) \in X$ для любого элемента y модуля Y. Пусть $h\colon M \to M/X$ — естественный эпиморфизм. Так как Y_1 — существенный подмодуль в Y, то по утверждению 5 пункта 1.15 $yB \subseteq Y_1$ для некоторого существенного правого идеала B кольца A. Тогда

$$g(y)B = g(yB) \subseteq g(Y_1) = f_1(Y_1) \subseteq X, \quad h\big(g(y)\big)B = h(g(y)B) \subseteq h(X) = 0.$$

Поэтому $h\big(g(y)\big) \in \operatorname{Sing}(M/X) = 0$ и $g(y) \in \operatorname{Ker} h = X$.

Так как $g(Y) \subseteq X$, то g индуцирует гомоморфизм $f\colon Y \to X$. Поэтому модуль X инъективен относительно Y.

Докажем утверждение 2. Обозначим $X = \operatorname{Sing} M$. Так как A — несингулярное справа кольцо, то по утверждению 6 пункта 1.15 модуль M/X несингулярен. Так как модуль X сингулярен и модуль Y несингулярен, то по утверждению 1 модуль X инъективен относительно Y.

Докажем утверждение 3. Так как X и Y — замкнутые подмодули несингулярного модуля M, то по утверждению 7 пункта 1.15 модули M/X и M/Y несингулярны. По утверждению 1 X инъективен относительно Y и модуль Y инъективен относительно X. $\square$

2.17. Предложение [11]. *Пусть M — модуль и Q — его инъективная оболочка. Равносильны следующие условия:*

1) *M — автоморфизм-продолжаемый модуль и для любого существенного подмодуля Y в M каждый гомоморфизм $Y \to M$ с существенным в Y ядром продолжается до эндоморфизма модуля M с существенным в M ядром;*
2) *M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль и для каждого подмодуля Y в M любой гомоморфизм $Y \to M$ с существенным в Y ядром продолжается до эндоморфизма модуля M с существенным в M ядром;*
3) *$\alpha(M) \subseteq M$ для любого такого автоморфизма α модуля Q, что $\alpha(X) = X$ для некоторого существенного подмодуля X модуля M;*
4) *$\alpha(M) = M$ для любого такого автоморфизма α модуля Q, что $\alpha(X) = X$ для некоторого существенного подмодуля X модуля M.*

Доказательство. Импликации 4) $\Longrightarrow$ 3) и 2) $\Longrightarrow$ 1) проверяются непосредственно.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3). Пусть α — автоморфизм модуля Q и $\alpha(X) = X$ для некоторого существенного подмодуля X модуля M. Обозначим через Y подмодуль

$$\alpha^{-1}\big(M \cap \alpha(M)\big) = \{y \in M \mid \alpha(y) \in M\}$$

модуля M. Тогда $\alpha(Y) \subseteq M$, $X \subseteq Y$ и Y — существенный подмодуль в M. Кроме того, α индуцирует автоморфизм φ_1 модуля X. Так как M — автоморфизм-продолжаемый модуль, то φ_1 продолжается до эндоморфизма φ_2 модуля M. Так как модуль Q инъективен, то φ_2 продолжается до эндоморфизма φ модуля Q. Обозначим через g ограничение гомоморфизма $\alpha - \varphi$ на модуль Y. Так как $\varphi(Y) \subseteq M$, $\alpha(Y) \subseteq M$ и $g(X) = 0$, то g — гомоморфизм из Y в M с существенным в Y ядром. По условию g продолжается до эндоморфизма g_1 модуля M. Так как модуль Q инъективен, то g_1 продолжается до эндоморфизма β модуля Q. Тогда $(\alpha - \varphi - \beta)(Y) = (g - \beta)(Y) = 0$. Обозначим через Z подмодуль

$$\{z \in M \mid (\alpha - \varphi - \beta)(z) \in M\}$$

модуля M. Тогда Z — полный прообраз в M модуля $M \cap (\alpha - \varphi - \beta)(M)$ при действии гомоморфизма $\alpha - \varphi - \beta$, $Y \subseteq Z$ и

$$\alpha(Z) \subseteq (\alpha - \varphi - \beta)(Z) + (\varphi + \beta)(Z) \subseteq M.$$

Поэтому $Y \subseteq Z \subseteq Y$ и $Z = Y$. Тогда

$$(\alpha - \varphi - \beta)(Z) = (\alpha - \varphi - \beta)(Y) = 0.$$

Если $(\alpha - \varphi - \beta)(M) = 0$, то $\alpha(M) = (\varphi - \beta)(M) \subseteq M$, что и требовалось.

Допустим, что $(\alpha - \varphi - \beta)(M) \neq 0$. Так как M — существенный подмодуль в Q, то $M \cap (\alpha - \varphi - \beta)(M)$ — существенный подмодуль ненулевого модуля $(\alpha - \varphi - \beta)(M)$. Так как Z — полный прообраз в M ненулевого модуля $M \cap (\alpha - \varphi - \beta)(M)$ при действии гомоморфизма $\alpha - \varphi - \beta$, то $(\alpha - \varphi - \beta)(Z) \neq 0$. Получено противоречие.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 4). Пусть X — существенный подмодуль модуля M и α — такой автоморфизм модуля Q, что $\alpha(X) = X$. Из условия 3) следует, что $\alpha(M) \subseteq M$ и $\alpha^{-1}(M) \subseteq M$. Тогда $\alpha(M) = M$.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 2). Пусть X — подмодуль модуля M и φ — автоморфизм модуля X. По первому утверждению леммы 2.3 с учётом того, что M — существенный подмодуль в Q, можно считать, что X — существенный подмодуль в Q. По первому утверждению леммы 2.3 автоморфизм φ модуля X продолжается до автоморфизма α инъективного модуля Q. По условию $\alpha(M) = M$. Поэтому φ продолжается до автоморфизма модуля M.

Пусть $h_1 \colon Y \to M$ — гомоморфизм с существенным в Y ядром K_1. По второму утверждению леммы 2.3 можно считать, что Y и K_1 — существенные подмодули в Q. Гомоморфизм h_1 продолжается до эндоморфизма h инъективного модуля Q, причём h имеет существенное ядро K. Обозначим через α эндоморфизм $1_Q - h$ модуля Q. Тогда ограничение эндоморфизма $1_Q - h$ на K является тождественным автоморфизмом существенного подмодуля K инъективного модуля Q. Поэтому $\mathrm{Ker}(1_Q - h) = 0$ и $(1_Q - h)(Q)$ — инъективный существенный подмодуль в Q. Поэтому $1_Q - h$ — автоморфизм модуля Q и $(1_Q - h)(K) = K$. По утверждению 4) $(1_Q - h)(M) = M$. Поэтому $(1_Q - h)|_M$ — автоморфизм модуля M. Тогда $1_M - (1_Q - h)|_M$ — эндоморфизм модуля M с существенным в M ядром, причём $1_M - (1_Q - h)|_M$ совпадает с h_1 на Y. □

2.18. Теорема [11]. *Пусть M — модуль, Q — инъективная оболочка модуля M и $M = T \oplus U$, где T — инъективный модуль и U — несингулярный модуль. Равносильны следующие условия:*

1) *M — автоморфизм-продолжаемый модуль;*
2) *M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль;*
3) *$\alpha(M) \subseteq M$ для любого автоморфизма α модуля Q, такого что $\alpha(X) = X$ для некоторого существенного подмодуля X модуля M.*

Доказательство. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 2) следует из предложения 2.17.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) очевидна.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3). Пусть Y — существенный подмодуль в M, $h \colon Y \to M$ — гомоморфизм с существенным в Y ядром, $\pi \colon M = T \oplus U \to U$ — проекция с ядром T. Тогда модуль $\pi h(Y)$ сингулярен и содержится в несингулярном модуле U. Поэтому $\pi h(Y) = 0$. Тогда $h(Y) \subseteq T$ и h — гомоморфизм из модуля Y в модуль T. Так как модуль T инъективен, то h продолжается до гомоморфизма $M \to T \subseteq M$. Этот гомоморфизм является искомым эндоморфизмом модуля M, продолжающим h. □

2.19. Следствие [11]. *Пусть M — несингулярный модуль и Q — его инъективная оболочка. Равносильны следующие условия:*

1) *M — автоморфизм-продолжаемый модуль;*
2) *M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль;*
3) *$\alpha(M) \subseteq M$ для любого автоморфизма α модуля Q, такого что $\alpha(X) = X$ для некоторого существенного подмодуля X модуля M.*

Следствие 2.19 вытекает из теоремы 2.18 и того, что нулевой модуль является инъективным.

2.20. Теорема [11]. *Пусть $M = T \oplus U$, где T — инъективный модуль, U — несингулярный модуль, и $\mathrm{Hom}(T', U) = 0$ для любого подмодуля T' модуля T. Равносильны следующие условия*:

1) *M — автоморфизм-продолжаемый модуль*;
2) *M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль*;
3) *U — автоморфизм-продолжаемый модуль*;
4) *U — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.*

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 2) вытекает из теоремы 2.18.

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 3) проверяется непосредственно.

Эквивалентность 3) $\Longleftrightarrow$ 4) вытекает из следствия 2.19.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть Q — инъективная оболочка модуля M, X — существенный подмодуль модуля M и α — такой автоморфизм модуля Q, что $\alpha(X) = X$. Ввиду теоремы 2.18 достаточно доказать, что $\alpha(M) \subseteq M$. Для инъективной оболочки Q модуля $M = T \oplus U$ существует прямое разложение $Q = T \oplus U_1$, где U_1 — инъективная оболочка несингулярного модуля U. Так как α — автоморфизм модуля $T \oplus U_1$ и $\mathrm{Hom}(T', U) = 0$ для любого подмодуля T' модуля T, то непосредственно проверяется, что $\alpha(T) = T$. Пусть $h\colon Q \to Q/T$ — естественный эпиморфизм. (Можно считать, что h — проекция модуля $Q = T \oplus U_1$ на модуль U_1 с ядром T.) Тогда α индуцирует автоморфизм α_1 инъективной оболочки $h(Q)$ модуля $h(U)$. Так как $\alpha(X) = X$, то $\alpha_1\big(h(X)\big) = h(X)$. Применяя следствие 2.19 к автоморфизм-продолжаемому несингулярному модулю $h(M) = h(U)$, получаем, что $\alpha_1\big(h(M)\big) \subseteq h(M)$. Тогда $\alpha(M) \subseteq M + T = M$. $\square$

2.21. Следствие. *Пусть $M = T \oplus U$, где T — инъективный модуль, являющийся существенным расширением сингулярного модуля, и U — несингулярный модуль. Равносильны следующие условия*:

1) *M — автоморфизм-продолжаемый модуль*;
2) *M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль*;
3) *U — автоморфизм-продолжаемый модуль*;
4) *U — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.*

2.22. Предложение. *Пусть A — кольцо, M — автоморфизм-продолжаемый правый A-модуль и X, Y — подмодули в M с условием $X \cap Y = 0$.*

1. *Если $f\colon Y \to X$ — гомоморфизм, то существует эндоморфизм g модуля M, совпадающий с $f\colon Y \to X$ на Y.*
2. *Если $M = X \oplus Y$, то модуль X инъективен относительно Y.*
3. *Если модуль M/X несингулярен, то X инъективен относительно Y.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Определим эндоморфизм α модуля $X \oplus Y$ соотношением $\alpha(x+y) = x + f(y) + y$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Допустим, что

$$0 = \alpha(x+y) = x + f(y) + y, \quad x \in X, \quad y \in Y.$$

Тогда α — мономорфизм, поскольку

$$y = -x - f(y) \in X \cap Y = 0, \quad f(y) = 0,$$
$$x = x + f(y) + y = \alpha(x+y) = 0.$$

Кроме того, для любых $x \in X$ и $y \in Y$ имеем

$$x + y = \big(x - f(y)\big) + (f(y) + y) = \alpha\big(x - f(y)\big) + \alpha(y) \in \alpha(X \oplus Y).$$

Поэтому α — автоморфизм модуля $X \oplus Y$. Кроме того, эндоморфизм $\alpha - 1_{X \oplus Y}$ модуля $X \oplus Y$ совпадает с гомоморфизмом $f\colon Y \to X$ на Y. Так как M — автоморфизм-продолжаемый модуль, то автоморфизм α модуля $X \oplus Y$ продолжается до эндоморфизма β модуля M. Обозначим через g эндоморфизм $\beta - 1_M$ модуля M. Тогда g совпадает с f на Y.

Докажем утверждение 2. Пусть Y_1 — подмодуль в Y и f_1 — гомоморфизм из Y_1 в X. По утверждению 1 существует эндоморфизм g модуля M, который совпадает с $f_1\colon Y_1 \to X$ на Y_1. Пусть π — проекция модуля $M = X \oplus Y$ на X с ядром Y и $u\colon Y \to M$ — естественное вложение. Обозначим через f гомоморфизм $\pi g u$ из Y в X. Тогда f совпадает с f_1 на Y_1. Поэтому модуль X инъективен относительно Y.

Докажем утверждение 3. Пусть Y_1 — подмодуль в Y и f_1 — гомоморфизм из Y_1 в X. По лемме Цорна существует такой подмодуль Z в Y, что $Y_1 \cap Z = 0$ и $Y_1 \oplus Z$ — существенный подмодуль в Y. Обозначим $Y_2 = Y_1 \oplus Z$. Гомоморфизм $f_1\colon Y_1 \to X$ продолжается до гомоморфизма $f_2\colon Y_2 \to X$ с помощью соотношения $f_2(y_1 + z) = f_1(y_1)$. По утверждению 1 существует эндоморфизм g модуля M, который совпадает с $f_2\colon Y_2 \to X$ на Y_2.

Остаётся доказать, что $g(y) \in X$ для любого элемента y модуля Y. Пусть $h\colon M \to M/X$ — естественный эпиморфизм. Так как Y_2 — существенный подмодуль в Y, то модуль Y/Y_2 сингулярен, $yB \subseteq Y_2$ для некоторого существенного правого идеала B кольца A (см., например, [52, 4.4 (1)]). Тогда

$$g(y)B = g(yB) \subseteq g(Y_2) = f_2(Y_2) = f_1(Y_1) \subseteq X,$$
$$h\big(g(y)\big)B = h(g(y)B) \subseteq h(X) = 0.$$

Поэтому $h\big(g(y)\big) \in \operatorname{Sing}(M/X) = 0$ и $g(y) \in \operatorname{Ker} h = X$. □

2.23. Теорема [53]. *Пусть A — сильно первичное справа кольцо и X — правый A-модуль.*

1. *Если X инъективен относительно некоторого ненулевого правого идеала кольца A, то X — инъективный модуль.*

2. *Если X инъективен относительно некоторого правого A-модуля Y, не являющегося существенным расширением сингулярного модуля, то X — инъективный модуль.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Так как модуль X инъективен относительно некоторого ненулевого правого идеала B, то по первому утверждению предложения 2.14 модуль X инъективен относительно некоторого ненулевого идеала AB. Поскольку кольцо A сильно первично справа, то идеал AB содержит такое конечное подмножество $\{y_1, \ldots, y_n\}$, что $r(\{y_1, \ldots, y_n\}) = 0$. По второму утверждению предложения 2.14 модуль X инъективен.

Докажем утверждение 2. По лемме 2.15 существует такой ненулевой правый идеал B кольца A, что модуль B_A изоморфен подмодулю модуля Y. Так как модуль X инъективен относительно модуля Y, то по утверждению 6 пункта 1.1 модуль X инъективен. $\square$

2.24. Предложение [53]. *Пусть A — сильно первичное справа кольцо и M — правый A-модуль, не являющийся сингулярным. Равносильны следующие условия*:

1) *M — автоморфизм-продолжаемый модуль*;
2) *M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль*;
3) *$M = X \oplus Y$, где X — инъективный сингулярный модуль, Y — ненулевой несингулярный автоморфизм-продолжаемый модуль, и либо модуль Y равномерен, либо Y — инъективный неравномерный модуль.*

Доказательство. Импликация $3) \Longrightarrow 2)$ проверяется с помощью теоремы 2.20.

Импликация $2) \Longleftarrow 1)$ верна для модулей над любыми кольцами.

Докажем импликацию $1) \Longrightarrow 3)$. Обозначим $X = \operatorname{Sing} M$. По утверждению 5 из пункта 2.12 сильно первичное справа кольцо A несингулярно справа. По утверждению 6 из пункта 1.15 модуль M/X несингулярен. Так как кольцо A несингулярно справа и модуль M_A не является сингулярным, то M не является существенным расширением сингулярного модуля X. Поэтому $X \cap Y' = 0$ для некоторого несингулярного подмодуля Y' в M. По второму утверждению теоремы 2.16 модуль X инъективен относительно Y'. По утверждению 2 теоремы 2.23 X — инъективный модуль. Поэтому $M = X \oplus Y$, где X — инъективный сингулярный модуль и Y — ненулевой несингулярный автоморфизм-продолжаемый модуль. Если модуль Y равномерен, то всё доказано.

Допустим, что Y — неравномерный модуль. Тогда существуют такие ненулевые замкнутые подмодули Y_1 и Y_2 в Y, что $Y_1 \cap Y_2 = 0$ и $Y_1 \oplus Y_2$ — существенный подмодуль в Y. Так как Y_1 и Y_2 — замкнутые подмодули несингулярного модуля Y, то модули M/Y_1 и M/Y_2 несингулярны. По первому утверждению теоремы 2.16 модуль Y_1 инъективен относительно ненулевого несингулярного модуля Y_2, и модуль Y_2 инъективен относительно ненулевого несингулярного модуля Y_1. По утверждению 2) модули Y_1 и Y_2 инъективны. Тогда Y — существенное расширение инъективного модуля $Y_1 \oplus Y_2$. Поэтому $Y = Y_1 \oplus Y_2$, Y — инъективный неравномерный модуль. $\square$

В [31, теорема 6] доказано, что каждый псевдоинъективный несингулярный модуль над первичным правым кольцом Голди инъективен. В связи с этим мы докажем теорему 2.25.

2.25. Теорема [53]. *Пусть A — сильно первичное справа кольцо и M — правый A-модуль. Равносильны следующие условия*:

1) *M — автоморфизм-инвариантный модуль*;
2) *либо M — сингулярный автоморфизм-инвариантный модуль, либо M — инъективный модуль.*

Доказательство. Импликация 2) $\Longleftarrow$ 1) очевидна.

Докажем импликацию 1) $\Longleftarrow$ 2). Автоморфизм-инвариантный модуль M является автоморфизм-продолжаемым модулем. Из предложения 2.24 следует, что $M = X \oplus Y$, где X — инъективный сингулярный модуль и Y — ненулевой несингулярный автоморфизм-инвариантный модуль, причём либо Y — инъективный неравномерный модуль, либо модуль Y равномерен. Достаточно рассмотреть случай, когда Y — ненулевой автоморфизм-инвариантный равномерный модуль. По замечанию 1.7 Y — квазиинъективный модуль. По второму утверждению теоремы 2.23 модуль Y инъективен. Тогда модуль M инъективен. $\square$

2.26. Предложение. *Пусть M — автоморфизм-продолжаемый модуль и $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$.*

1. *Если M_i — квазиинъективный модуль для любого $i \in I$, то M — квазиинъективный модуль.*
2. *Если M_i — автоморфизм-инвариантный равномерный модуль для любого $i \in I$, то M — квазиинъективный модуль.*
3. *Если M_i — полуартинов равномерный модуль для любого $i \in I$, то M — квазиинъективный модуль.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Так как M — автоморфизм-продолжаемый модуль и $M = M_i \oplus \bigoplus_{j\neq i} M_j$ для любого $i \in I$, то по второму утверждению предложения 2.22 для любого $i \in I$ модуль $\bigoplus_{j\neq i} M_j$ является M_i-инъективным. По утверждению 14 пункта 1.1 M — квазиинъективный модуль.

Докажем утверждение 2. Зафиксируем $i \in I$. По утверждению 1 достаточно доказать, что M_i — квазиинъективный модуль. Пусть Q_i — инъективная оболочка модуля M_i и f — эндоморфизм модуля Q_i. По утверждению 4 пункта 1.2 достаточно доказать, что $f(M_i) \subseteq M_i$.

Допустим, что $\operatorname{Ker} f = 0$. Тогда $f(Q_i)$ — ненулевой инъективный подмодуль неразложимого модуля Q_i. Поэтому $f(Q_i) = Q_i$ и f — автоморфизм модуля Q_i.

Так как Q_i — инъективная оболочка автоморфизм-инвариантного модуля M_i, то $f(M_i) \subseteq M_i$.

Теперь допустим, что $\operatorname{Ker} f \neq 0$. Так как $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker}(f-1) = 0$ и Q_i — равномерный модуль, то $\operatorname{Ker}(f-1) = 0$, $f-1$ — мономорфизм и $(f-1)(Q_i)$ — ненулевой инъективный подмодуль неразложимого модуля Q_i. Поэтому $(f-1)(Q_i) = Q_i$ и $f-1$ — автоморфизм модуля Q_i. Так как Q_i — инъективная оболочка автоморфизм-инвариантного модуля M_i, то $(f-1)(M_i) \subseteq M_i$. Поэтому $f(M_i) \subseteq \subseteq (f-1)(M_i) + M_i \subseteq M_i$.

Мы показали, что $f(M_i) \subseteq M_i$ при $\operatorname{Ker} f = 0$ и при $\operatorname{Ker} f \neq 0$, что и требовалось.

Докажем утверждение 3. Зафиксируем $i \in I$. Так как M — автоморфизм-продолжаемый модуль, то M_i — автоморфизм-продолжаемый модуль. Кроме того, M_i — полуартинов модуль. По теореме 2.7 M_i — автоморфизм-инвариантный модуль. По утверждению 2 M — квазиинъективный модуль. □

2.27. Теорема. *Пусть A — кольцо и M — A-модуль. Если либо A — полуцепное артиново кольцо, либо $r(M) \neq 0$ и A — наследственное нётерово первичное кольцо, то равносильны следующие условия*:

1) M — *автоморфизм-продолжаемый модуль*;
2) M — *автоморфизм-инвариантный модуль*;
3) M — *сильно автоморфизм-инвариантный модуль*;
4) M — *квазиинъективный модуль.*

Доказательство. Импликации $4) \Longleftarrow 3) \Longleftarrow 2) \Longleftarrow 1)$ верны для модулей над любыми кольцами.

Докажем импликацию $1) \Longleftarrow 4)$. Допустим, что A — полуцепное артиново кольцо. По первому утверждению пункта 1.20 $M = \sum_{i \in I} M_i$, где все M_i — цепные модули конечной длины. Зафиксируем $i \in I$. Так как A — артиново кольцо, то M_i — полуартинов модуль. По третьему утверждению предложения 2.26 M — квазиинъективный модуль.

Теперь допустим, что $r(M) \neq 0$. По первому утверждению пункта 1.21 фактор-кольцо $A/r(M)$ является полуцепным артиновым кольцом. Так как M — автоморфизм-продолжаемый A-модуль, то M — автоморфизм-продолжаемый $A/r(M)$-модуль. По доказанному выше M — квазиинъективный $A/r(M)$-модуль. Поэтому M — квазиинъективный A-модуль. □

2.28. Лемма. *Пусть M — модуль и $M = \sum_{i \in I} M_i$, где все M_i — существенные квазиинъективные подмодули в M. Тогда M — квазиинъективный модуль.*

Доказательство. Пусть Q — инъективная оболочка модуля M. Так как все M_i — существенные подмодули в M, то все M_i — существенные подмодули инъективного модуля Q. Поэтому Q — инъективная оболочка модуля M_i для любого

$i \in I$. Пусть f — эндоморфизм модуля Q. Так как все модули M_i квазиинъективны, то $f(M_i) \subseteq M_i$ для любого $i \in I$. Тогда

$$f(M) = f\biggl(\sum_{i\in I} M_i\biggr) = \sum_{i\in I} f(M_i) \subseteq \sum_{i\in I} M_i = M.$$

Поэтому модуль M квазиинъективен. □

2.29. Лемма. *Пусть A — наследственное нётерово первичное кольцо и M — автоморфизм-продолжаемый A-модуль.*

1. *Если B — ненулевой идеал кольца A и $X = \{m \in M \mid mB = 0\}$, то X — квазиинъективный модуль.*
2. *Пусть $\{B_i\}_{i\in I}$ — некоторое множество ненулевых идеалов кольца A и $X_i = \{m \in M \mid mB_i = 0\}$, $i \in I$. Если $M = \sum\limits_{i\in I} X_i$ и все X_i являются существенными подмодулями в M, то M — квазиинъективный модуль.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть f — эндоморфизм модуля M. Тогда

$$f(X)B = f(XB) = f(0) = 0, \quad f(X) \subseteq X.$$

Поэтому X — вполне инвариантный подмодуль автоморфизм-продолжаемого модуля M. Поэтому X — автоморфизм-продолжаемый A-модуль с ненулевым аннулятором. По теореме 2.27 X — квазиинъективный модуль.

Докажем утверждение 2. По утверждению 1 все модули M_i квазиинъективны. По лемме 2.28 модуль M квазиинъективен. □

В [31, теорема 5] доказано, что каждый псевдоинъективный периодический модуль над ограниченным наследственным нётеровым первичным кольцом квазиинъективен. В связи с этим мы докажем теорему 2.30.

2.30. Теорема [11]. *Пусть A — ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо и M — правый A-модуль. Равносильны следующие условия*:

1) *M — автоморфизм-продолжаемый модуль*;
2) *M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль*;
3) *либо M — квазиинъективный сингулярный модуль, либо M — инъективный модуль, не являющийся сингулярным, либо $M = X \oplus Y$, где X — инъективный сингулярный модуль и Y — ненулевой автоморфизм-продолжаемый равномерный несингулярный модуль.*

Доказательство. Импликация 3) $\Longleftarrow$ 2) вытекает из предложения 2.24 и того, что каждый квазиинъективный модуль является сильно автоморфизм-продолжаемым.

Импликация 2) $\Longleftarrow$ 1) верна для модулей над любыми кольцами.

Докажем импликацию 1) $\Longleftarrow$ 3). Если модуль M не является сингулярным, то по предложению 2.24 $M = X \oplus Y$, где X — инъективный сингулярный модуль, Y — ненулевой несингулярный автоморфизм-продолжаемый модуль, и либо модуль Y равномерен, либо Y — инъективный неравномерный модуль.

Теперь допустим, что M — сингулярный автоморфизм-продолжаемый модуль. Пусть $\{B_j\}_{j\in J}$ — множество всех собственных обратимых идеалов кольца A, $\{P_i\}_{i\in I}$ — множество всех максимальных элементов множества $\{B_j\}_{j\in J}$. Для любого $i \in I$ обозначим через M_i подмодуль в M, образованный всеми элементами из M, которые аннулируются некоторой степенью идеала P_i.

В [44] доказано, что каждый сингулярный модуль M обладает следующими двумя свойствами:

i) для любого подмодуля X в M верно, что $X = \bigoplus\limits_{i\in I} X_i$, где $X_i = X \cap M_i$, $i \in I$, и $\mathrm{Hom}(X_i, X_j) = 0$ для любых несовпадающих индексов $i, j \in I$;

ii) $M_{i,k} \subseteq M_{i,k+1}$ для каждого $k \in \mathbb{N}$, $M_i = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} M_{i,k} = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} M_{i,k}$ и Mi,k — существенный вполне инвариантный подмодуль в M_i для каждого $k \in \mathbb{N}$.

С помощью утверждения i) непосредственно проверяются следующие два свойства:

iii) модуль M является автоморфизм-продолжаемым в точности тогда, когда все модули M_i являются автоморфизм-продолжаемыми;

iv) модуль M является квазиинъективным в точности тогда, когда все модули M_i являются квазиинъективными.

Из iii) вытекает, что все M_i — автоморфизм-продолжаемые модули. В силу iv) достаточно доказать, что все M_i — квазиинъективные модули.

Зафиксируем $i \in I$ и обозначим через $M_{i,k}$, $k \in \mathbb{N}$, подмодуль в M_i, аннулируемый идеалом P_i^k. По ii) $M_{i,k} \subseteq M_{i,k+1}$ для каждого $k \in \mathbb{N}$, $M_i = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} M_{i,k} = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} M_{i,k}$ и $M_{i,k}$ — существенный вполне инвариантный подмодуль в M_i для каждого $k \in \mathbb{N}$. Вполне инвариантные подмодули $M_{i,k}$ автоморфизм-продолжаемого модуля M_i являются автоморфизм-продолжаемыми модулями с ненулевыми аннуляторами. По теореме 2.27 каждый существенный подмодуль $M_{i,k}$ в M_i является квазиинъективным модулем. По лемме 2.28 M — квазиинъективный модуль. □

2.31. Теорема. *Пусть A — ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо и M — правый A-модуль. Равносильны следующие условия*:

1) *M — автоморфизм-инвариантный модуль*;
2) *M — квазиинъективный модуль*;
3) *либо M — квазиинъективный сингулярный модуль, либо M — инъективный модуль, не являющийся сингулярным.*

Доказательство. Импликации 3) $\Longleftarrow$ 2) $\Longleftarrow$ 1) верны для модулей над любыми кольцами.

Докажем импликацию 1) $\Longleftarrow$ 3). По теореме 2.30 либо M — квазиинъективный сингулярный модуль, либо M — инъективный модуль, не являющийся сингулярным, либо $M = X \oplus Y$, где X — инъективный сингулярный модуль и Y — ненулевой автоморфизм-инвариантный равномерный несингулярный модуль.

Достаточно рассмотреть только случай, когда $M = X \oplus Y$, где X — инъективный сингулярный модуль и Y — ненулевой автоморфизм-инвариантный равномерный несингулярный модуль. По замечанию 1.7 Y — квазиинъективный модуль. По второму утверждению теоремы 2.23 Y — инъективный модуль. Так как $M = X \oplus Y$, то M — инъективный модуль. □

2.32. Замечание. Пусть A — ограниченное наследственное первичное кольцо. Квазиинъективные A-модули описаны в [43]. Поэтому теорема 2.31 полностью описывает все автоморфизм-инвариантные A-модули, а теорема 2.30 описывает все автоморфизм-продолжаемые A-модули с точностью до описания автоморфизм-продолжаемых равномерных несингулярных модулей.

2.33. Замечание. Пусть A — правая область Оре, Q — её классическое правое тело частных и Y — ненулевой правый A-модуль.

1. Q_A — инъективная оболочка модуля A_A, и для каждого эндоморфизма f модуля Q_A существует такой элемент $q \in Q$, что $f(x) = qx$ для всех $x \in Q_i$.
2. Модуль Y является равномерным несингулярным модулем в точности тогда, когда Y изоморфен подмодулю модуля Q_A. В последнем случае Q_A — инъективная оболочка модуля Y.
3. Для любых ненулевых элементов $q_1, \ldots, q_n \in Q$ существуют такие ненулевые элементы $s, a_1, \ldots, a_n \in A$, что $q_i = a_i s^{-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, отображение
$$h\colon \sum_{i=1}^{n} Aq_i \to \sum_{i=1}^{n} Aq_i s \subseteq_A A$$
является мономорфизмом левых A-модулей.

Все утверждения замечания 2.33 хорошо известны.

2.34. Замечание. Пусть A — правая область Оре, Q — её классическое правое тело частных, M — правый A-модуль, не являющийся сингулярным. Равносильны следующие условия:

1) M — автоморфизм-продолжаемый модуль;
2) M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль;
3) либо M — инъективный модуль, не являющийся сингулярным, либо $M = X \oplus Y$, где X — инъективный сингулярный модуль и Y — автоморфизм-продолжаемый модуль, который изоморфен ненулевому подмодулю в Q_A.

Замечание 2.34 вытекает из второго утверждения замечания 2.33 и предложения 2.24.

2.35. Сильно эндоморфизм-продолжаемые модули. Модуль M называется *сильно эндоморфизм-продолжаемым*, если для любого подмодуля X в M каждый гомоморфизм $X \to M$, переводящий в себя некоторый существенный подмодуль из X, продолжается до гомоморфизма $M \to M$.

1. Каждый сильно эндоморфизм-продолжаемый модуль является эндоморфизм-продолжаемым.
2. Каждый квазиинъективный модуль является сильно эндоморфизм-продолжаемым.
3. $\mathbb{Z}$ — сильно эндоморфизм-продолжаемый неквазиинъективный $\mathbb{Z}$-модуль.

2.36. Лемма. *Пусть A — инвариантная наследственная область и Q — тело частных области A.*

1. *Для любого ненулевого идеала B кольца A фактор-кольцо A/B является конечным прямым произведением инвариантных цепных артиновых колец.*
2. *Пусть M — произвольный подмодуль любого циклического сингулярного A-модуля. Тогда $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$, где все M_i — цепные модули конечной длины. Кроме того, $f(m) \in mA$ для любого элемента $m \in M$ и каждого гомоморфизма $f\colon mA \to M$.*
3. *Если X — любой ненулевой подмодуль в Q_A и M — такой подмодуль в Q_A, что $X \subseteq M$ и M/X — конечно порождённый модуль, то $\bar{f}(\bar{m}) \in \bar{m}A$ для любого элемента $\bar{m} \in M/X$ и каждого гомоморфизма $\bar{f}\colon \bar{m}A \to M/X$.*
4. *Если X — любой ненулевой подмодуль в Q_A и Y — такой подмодуль в Q_A, что $X \subseteq Y$, то $\bar{f}(\bar{y}) \in \bar{y}A$ для любого элемента $\bar{y} \in Y/X$ и каждого гомоморфизма $\bar{f}\colon \bar{y}A \to Y/X$.*
5. *Каждый подмодуль Y модуля Q_A является сильно автоморфизм-продолжаемым, сильно эндоморфизм-продолжаемым модулем.*
6. *Каждый равномерный несингулярный A-модуль является сильно автоморфизм-продолжаемым, сильно эндоморфизм-продолжаемым модулем.*

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из утверждения 1 пункта 1.21.

Утверждение 2 вытекает из утверждения 1.

Докажем утверждение 3. Так как M/X — конечно порождённый модуль, то существует такой конечно порождённый подмодуль N в M, что $M = N + X$. Существует естественный изоморфизм $g\colon M/X \to N/(N \cap X)$. Так как N — конечно порождённый A-подмодуль тела частных Q области A, то из лево-право симметричного аналога утверждения 3 замечания 2.33 вытекает, что существует мономорфизм $h\colon N \to A_A$. Тогда модуль $h(N)/h(N \cap X)$ изоморфен подмодулю циклического сингулярного модуля $A_A/h(N \cap X)$. По утверждению 2 $f(m) \in mA$ для любого элемента $m \in h(N)/h(N \cap X)$ и каждого гомоморфизма $f\colon mA \to h(N)/h(N \cap X)$. Так как существует естественный изоморфизм $M/X \to N/(N \cap X)$, то $\bar{f}(\bar{m}) \in \bar{m}A$ для любого элемента $\bar{m} \in M/X$ и каждого гомоморфизма $\bar{f}\colon \bar{m}A \to M/X$.

Докажем утверждение 4. Пусть $\bar{y} = y + X \in Y/X$, где $y \in Y$. Обозначим $M = X + yA$. Тогда M/X — циклический модуль. По утверждению 3 $\bar{f}(\bar{y}) \in \bar{y}A$ для каждого гомоморфизма $\bar{f}\colon \bar{y}A \to Y/X$.

Докажем утверждение 5. Покажем, что Y — сильно эндоморфизм-продолжаемый модуль. Пусть M — ненулевой подмодуль в Y, X — существенный подмодуль в M и $g\colon M\colon Y$ — такой гомоморфизм, что $g(X) \subseteq X$. Так как модуль Q_A

инъективен и $g(X) \subseteq X$, то гомоморфизм g продолжается до эндоморфизма f модуля Q_A и $f(X) \subseteq X$. Тогда f индуцирует эндоморфизм $\bar{f}$ модуля Q/X. По утверждению 4 $\bar{f}(Y/X) \subseteq Y/X$. Поэтому Y — сильно эндоморфизм-продолжаемый модуль.

Аналогично доказывается, что Y — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.

Утверждение 6 вытекает из утверждения 5 и второго утверждения замечания 2.33. □

2.37. Теорема. *Пусть A — инвариантная наследственная область, Q — тело частных области A и M — правый A-модуль. Равносильны следующие условия:*

1) *M — автоморфизм-продолжаемый модуль;*
2) *M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль;*
3) *M — эндоморфизм-продолжаемый модуль;*
4) *M — сильно эндоморфизм-продолжаемый модуль;*
5) *либо M — квазиинъективный сингулярный модуль, либо M — инъективный модуль, не являющийся сингулярным, либо $M = X \oplus Y$, где X — инъективный сингулярный модуль и модуль Y изоморфен ненулевому подмодулю в Q_A.*

Доказательство. Импликации $5) \Longrightarrow 4)$ и $5) \Longrightarrow 2)$ следуют из пятого утверждения леммы 2.36.

Импликации $4) \Longrightarrow 3) \Longrightarrow 1)$ и $2) \Longrightarrow 1)$ верны для модулей над любыми кольцами.

Импликация $1) \Longrightarrow 5)$ вытекает из теоремы 2.30 и второго утверждения замечания 2.33. □

2.38. Замечание. Если A — кольцо и каждый правый A-модуль является прямой суммой равномерных модулей, то каждый автоморфизм-продолжаемый правый A-модуль M является квазиинъективным модулем. Действительно, A — артиново кольцо (см., например, [23, теорема]). Поэтому каждый A-модуль является полуартиновым. По утверждению 3 предложения 2.26 M — квазиинъективный модуль.

2.39. Предложение. *Пусть A — область главных правых идеалов и U — её группа обратимых элементов. Равносильны следующие условия:*

1) *A_A — автоморфизм-продолжаемый модуль;*
2) *A_A — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль;*
3) *$aU \subseteq Ua$ для любого элемента $a \in A$.*

Доказательство. Импликация $2) \Longrightarrow 1)$ проверяется непосредственно.

Докажем импликацию $1) \Longrightarrow 3)$. Надо показать, что $au \in Ua$ для любых элементов $a \in A$ и $u \in U$. Без ограничения общности можно считать, что $a \neq 0$. Обозначим через φ такое отображение из aA в A, что $\varphi(ab) = aub$ для любого элемента $b \in A$. Так как $aA = auA$ и A — область, то φ — автоморфизм модуля

aA. Так как A_A — автоморфизм-продолжаемый модуль, то автоморфизм φ продолжается до некоторого эндоморфизма f модуля A_A. Обозначим $v = f(1) \in A$. Так как $vA = A$ и A — область, то $v \in U$. Тогда $va = f(a) = au$ и $aU \subseteq Ua$.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 2). Пусть X — подмодуль в A_A и φ — его автоморфизм. Так как A — область главных правых идеалов, то $X = aA$ для некоторого элемента $a \in X$. Без ограничения общности можно считать, что $a \neq 0$. Так как $aA = \varphi(a)A$, то существуют такие элементы $u, w \in A$, что $\varphi(a) = au$ и $a = auw$. Поскольку A — область, то $1 = uw$ и $u \in U$. По условию $aU \subseteq Ua$. Поэтому $au = va$ для некоторого $v \in U$. Обозначим через f такой автоморфизм модуля A_A, что $f(b) = vb$ для всех $b \in A$. Тогда $f(a) = va = au = \varphi(a)$. Поэтому автоморфизм f — продолжение автоморфизма φ. $\square$

2.40. Предложение. *Пусть D — некоммутативное тело. Тогда $D[x]$ — область главных правых (левых) идеалов, не являющаяся автоморфизм-продолжаемым правым или левым $D[x]$-модулем. Кроме того, если тело D имеет конечную размерность над своим центром F, то $D[x]$ — ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо.*

Доказательство. Хорошо известно, что $D[x]$ — область главных правых (левых) идеалов, причём её группа обратимых элементов U совпадает с мультипликативной группой тела D. В частности, $D[x]$ — наследственное нётерово первичное кольцо. Допустим, что $D[x]_{D[x]}$ — автоморфизм-продолжаемый модуль. По условию $dd_1 \neq d_1d$ для некоторых ненулевых элементов d и d_1 тела D. По предложению 2.39 $(d+x)d_1 \subseteq Ud$. Кроме того, $U = D \setminus 0$. Поэтому $(d+x)d_1 = d_2(d+x)$ для некоторого элемента d_2 тела D. Тогда $d_1x = d_2x$ и $dd_1 = d_2d$. Поэтому $dd_1 = d_1d$. Получено противоречие. Аналогично показывается, что модуль ${}_{D[x]}D[x]$ тоже не является автоморфизм-продолжаемым.

Допустим, что D имеет конечную размерность над своим центром F. Хорошо известно, что для любого многочлена $f \in D[x]$ найдётся такой многочлен $g \in D[x]$, что fg — ненулевой многочлен из $F[x]$ (см., например, [36, 16.9]). Тогда fg — ненулевой центральный элемент области $D[x]$, лежащий в области главных правых (левых) идеалов $fD[x]$. Поэтому $D[x]$ — ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо. $\square$

2.41. Пример. Пусть $\mathbb{H}$ — тело гамильтоновых кватернионов и $\mathbb{R}$ — поле действительных чисел. Так как некоммутативное тело $\mathbb{H}$ имеет конечную размерность над своим центром $\mathbb{R}$, то по предложению 2.40 $\mathbb{H}[x]$ — ограниченная область главных правых (левых) идеалов, не являющаяся автоморфизм-продолжаемым правым или левым $D[x]$-модулем. В частности, $\mathbb{H}[x]$ — ограниченное наследственное нётерово первичное кольцо, не являющееся автоморфизм-продолжаемым правым или левым $D[x]$-модулем.

2.42. Лемма. *Пусть M — автоморфизм-продолжаемый модуль и для любого его эндоморфизма h, ядро которого является существенным подмодулем в M, эндоморфизм $1_M - h$ модуля M является автоморфизмом. Тогда M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.*

Доказательство. Пусть X — подмодуль в M и f — автоморфизм модуля X. Надо доказать, что f продолжается до автоморфизма модуля M. Без ограничения общности можно считать, что X — существенный подмодуль в M. Так как M — автоморфизм-продолжаемый модуль, то f и f^{-1} продолжаются до эндоморфизмов α и β модуля M соответственно. Обозначим через h_1 и h_2 эндоморфизмы $1_M - \beta\alpha$ и $1_M - \alpha\beta$ модуля M соответственно. Так как $h_1(X) = 0 = h_2(X)$, то $\operatorname{Ker} h_1$ и $\operatorname{Ker} h_2$ — существенные подмодули в M. Так как $\beta\alpha = 1_M - h_1$ и $\alpha\beta = 1_M - h_2$, то по условию $\beta\alpha$ и $\alpha\beta$ — автоморфизмы модуля M. Поэтому α — автоморфизм модуля M. □

2.43. Лемма. *Пусть M — автоморфизм-продолжаемый модуль и для каждого элемента $x \in M$ и любого эндоморфизма $h \in \operatorname{End} M$, ядро которого является существенным подмодулем в M, существует такое натуральное число $n = n(x, h)$, что $h^n(x) = 0$. Тогда M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль.*

Доказательство. Пусть $h \in \operatorname{End} M$ и $\operatorname{Ker} h$ — существенный подмодуль в M. По лемме 2.42 достаточно доказать, что эндоморфизм $1_M - h$ модуля M является автоморфизмом. Составим формальный ряд $1_M + \sum\limits_{k=1}^{\infty} h^k$. Так как для каждого элемента $x \in M$ существует такое натуральное число $n = n(x, h)$, что $h^n(x) = 0$, то $1_M + \sum\limits_{k=1}^{\infty} h^k$ — корректно определённый эндоморфизм модуля M. Непосредственно проверяется, что

$$(1_M - h)\left(1_M + \sum_{k=1}^{\infty} h^k\right) = \left(1_M + \sum_{k=1}^{\infty} h^k\right)(1_M - h) = 1_M.$$

Поэтому $1_M - h$ — автоморфизм модуля M. □

2.44. Лемма. *Пусть M — модуль, X — нётеров подмодуль в M и h — эндоморфизм подмодуля M, ядро которого является существенным подмодулем в M. Тогда существует такое натуральное число $n = n(X, h)$, что $h^n(X) = 0$.*

Доказательство. Обозначим $X_0 = 0$ и $X_i = X \cap \operatorname{Ker} h^i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда $X_{i-1} \subseteq X_i$ и $h(X_i) \subseteq h(X_{i-1})$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Так как X — нётеров модуль, то $X_n = X_{n+1}$ для некоторого натурального числа n. Пусть $f \colon X \to M$ — ограничение гомоморфизма h^n на модуль X. Поскольку $X_n = X \cap \operatorname{Ker} h_n = \operatorname{Ker} f$, то гомоморфизм f индуцирует изоморфизм $g \colon X/X_n \to g(X/X_n) \subseteq M$. Так как $\operatorname{Ker} h$ — существенный подмодуль модуля M, то $\operatorname{Ker} h \cap g(X/X_n)$ — существенный подмодуль в $g(X/X_n)$. Поскольку $g \colon X/X_n \to g(X/X_n)$ — изоморфизм, то $g^{-1}\big(\operatorname{Ker} h \cap g(X/X_n)\big)$ — существенный подмодуль в X/X_n. Обозначим через Y полный прообраз в X подмодуля $g^{-1}\big(\operatorname{Ker} h \cap g(X/X_n)\big)$ в X/X_n при действии g. Тогда

$$h^{n+1}(Y) = h\big(h^n(Y)\big) = h\big(f(Y)\big) = h\Big(g\Big(g^{-1}\big(\operatorname{Ker} h \cap g(X/X_n)\big)\Big)\Big) \subseteq$$
$$\subseteq h\big(\operatorname{Ker} h \cap g(X/X_n)\big) = 0.$$

Поэтому $Y \subseteq X_{n+1}$ и $Y/X \subseteq X_{n+1}/X_n = 0$. Тогда $\operatorname{Ker} h \cap g(X/X_n) = g(Y/X) = 0$. Так как $\operatorname{Ker} h \cap g(X/X_n)$ — существенный подмодуль в $g(X/X_n)$, то $g(X/X_n) = 0$. Поэтому $h^n(X) = f(X) = g(X/X_n) = 0$, что и требовалось. $\square$

2.45. Теорема. *Пусть M — автоморфизм-продолжаемый модуль и каждый циклический подмодуль модуля M является нётеровым модулем. Тогда M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль. В частности, каждый автоморфизм-продолжаемый правый модуль над нётеровым справа кольцом является сильно автоморфизм-продолжаемым модулем.*

Доказательство. Пусть X — произвольный циклический подмодуль в M и h — такой эндоморфизм модуля M, что $\operatorname{Ker} h$ — существенный подмодуль в M. По лемме 2.44 существует такое натуральное число $n = n(X, h)$, что $h^n(X) = 0$. По лемме 2.43 M — сильно автоморфизм-продолжаемый модуль. $\square$

3. Эндоморфизм-продолжаемые и эндоморфизм-поднимаемые модули

Основные результаты данного раздела опубликованы в [1—8, 52].

3.1. Теорема. *Каждый эндоморфизм-продолжаемый полуартинов модуль M квазиинъективен. В частности, каждый эндоморфизм-продолжаемый правый модуль над полуартиновым справа кольцом квазиинъективен.*

Доказательство. Пусть Q — инъективная оболочка модуля M, S — цоколь модуля Q и f — эндоморфизм модуля Q. Достаточно доказать, что $f(M) \subseteq M$. Заметим, что $f(S) \subseteq S$. Кроме того, $S \subseteq M$, поскольку M — существенный подмодуль в Q.

Обозначим через X сумму всех таких подмодулей X' в M, что $f(X') \subseteq X'$. Тогда $f(X) \subseteq X$, $S \subseteq X$ и X — существенный подмодуль в M.

Если $X = M$, то $f(M) \subseteq M$, что и требовалось.

Допустим, что $X \neq M$. Тогда ненулевой полуартинов модуль M/X является существенным расширением своего ненулевого цоколя Y/X, где $X \subsetneq Y \subseteq M$. Так как $f(X) \subseteq X$ и M — эндоморфизм-продолжаемый модуль, то существует такой эндоморфизм g модуля M, что $(f - g)(X) = 0$. Кроме того, Y/X — полупростой модуль. Поэтому $(f - g)(Y) \subseteq S \subseteq X$. Так как $f(X) \subseteq X$, то f индуцирует эндоморфизм $\bar{f}$ модуля M/X с ненулевым цоколем Y/X. Поскольку Y/X — цоколь модуля M/X, то $\bar{f}(Y/X) \subseteq Y/X$, причём $f(X) \subseteq X$. Поэтому $f(Y) \subseteq Y$. Кроме того, Y строго содержит X, что противоречит выбору X. $\square$

3.2. Пусть A — кольцо, Q — правый A-модуль и M — существенный подмодуль в Q.

1. Пусть X — модуль, $f\colon X \to Q$ — гомоморфизм и существует такой гомоморфизм $g\colon X \to M$, что f совпадает с g на $f^{-1}(M)$. Тогда $f(X) \subseteq M$.

2. Если f — эндоморфизм модуля Q и существует такой эндоморфизм g модуля M, что f совпадает с g на $M \cap f^{-1}(M)$, то $f(M) \subseteq M$.
3. Для любого модульного гомоморфизма $f\colon X \to Q$ $f^{-1}(M)$ — существенный подмодуль в X.
4. Q/M — сингулярный модуль.
5. Если M — несингулярный модуль, то Q — несингулярный модуль и ядро любого ненулевого модульного гомоморфизма $f\colon X \to Q$ не является существенным подмодулем в X. В частности, Q не имеет ненулевых эндоморфизмов с существенным ядром.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Допустим, что $m = (f-g)(x) \in \in M \cap (f-g)(M')$, где $x \in X$. Тогда

$$f(x) = (f-g)(x) + g(x) = m + g(x) \in M,$$
$$x \in f^{-1}(M), \quad m \in (f-g)\big(f^{-1}(X)\big) = 0,$$
$$M \cap (f-g)(X) = 0.$$

Так как Q — существенное расширение модуля M, то $(f-g)(X) = 0$. Поэтому $f(X) = g(X) \subseteq M$.

Утверждение 2 вытекает из утверждения 1 при $X = M$.

Докажем утверждение 3. Пусть Y — ненулевой подмодуль в X. Если $f(Y) = 0$, то

$$0 \neq Y \subseteq f^{-1}(0) \subseteq Y \cap f^{-1}(M).$$

Допустим, что $f(Y) \neq 0$. Тогда $M \cap f(Y) \neq 0$, откуда следует, что

$$0 \neq f^{-1}\big(M \cap f(Y)\big) \subseteq f^{-1}(M)$$

и $Y \cap f^{-1}(M) \neq 0$.

Докажем утверждение 4. Пусть $q \in Q$ и $f\colon A_A \to Q$ — такой гомоморфизм, что $f(a) = qa$ для всех $a \in A$. По утверждению 3 $f^{-1}(M)$ — существенный правый идеал кольца A. Так как $f^{-1}(M)$ — аннулятор элемента $q + X \in Q/X$, то Q/M — сингулярный модуль.

Докажем утверждение 5. Так как $M \cap \operatorname{Sing} Q = 0$ и Q — существенное расширение модуля M, то модуль Q несингулярен. Если $f \in \operatorname{Hom}(X, Q)$ и X — существенное расширение модуля $\operatorname{Ker} f$, то по утверждению 4

$$\operatorname{Sing}(N/\operatorname{Ker} f) = N/\operatorname{Ker} f \cong f(N),$$

откуда следует, что

$$f(N) = \operatorname{Sing}\big(f(N)\big) \subseteq \operatorname{Sing}(M) = 0,$$

f — нулевой гомоморфизм. □

3.3. Сильно эндоморфизм-продолжаемые модули. Напомним, что модуль M называется *сильно эндоморфизм-продолжаемым* или *вполне целозамкнутым*, если для любого подмодуля X в M каждый гомоморфизм $X \to M$, переводящий в себя некоторый существенный подмодуль из X, продолжается до гомоморфизма $M \to M$.

1. Пусть M — модуль с инъективной оболочкой Q. Равносильны следующие условия:
   i) M — сильно эндоморфизм-продолжаемый модуль;
   ii) $f(M) \subseteq M$ для любого эндоморфизма f модуля Q, переводящего в себя некоторый существенный подмодуль модуля M;
   iii) M — эндоморфизм-продолжаемый модуль и $h(M) \subseteq M$ для любого такого эндоморфизма h модуля Q, что $\operatorname{Ker} h$ — существенный подмодуль в Q.
2. Каждый несингулярный эндоморфизм-продолжаемый модуль M является сильно эндоморфизм-продолжаемым.

Доказательство. Рассмотрим утверждение 1. Докажем импликацию i) $\Longrightarrow$ ii). Пусть X — существенный подмодуль модуля M и f — такой эндоморфизм модуля Q, что $f(X) \subseteq X$. Обозначим $Y = M \cap f^{-1}(M)$. Тогда $X \subseteq Y$, f индуцирует гомоморфизм $g_1 \colon Y \to M$ и $g_1(X) = f(X) \subseteq X$. Так как M — сильно эндоморфизм-продолжаемый модуль, то гомоморфизм g_1 продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля M. По второму утверждению пункта 3.2 $f(M) \subseteq M$.

Докажем импликацию ii) $\Longrightarrow$ iii). Обозначим через X существенный подмодуль $M \cap \operatorname{Ker} h$ модуля M. Так как $h(X) = 0 \subseteq X$, то из условия ii) вытекает, что $h(M) \subseteq M$.

Пусть X — существенный подмодуль в M и g_1 — эндоморфизм модуля X. Так как модуль Q инъективен, то g_1 продолжается до эндоморфизма f модуля Q. По условию ii) f индуцирует эндоморфизм g модуля M, являющийся продолжением эндоморфизма g_1. По замечанию 2.4 M — эндоморфизм-продолжаемый модуль.

Докажем утверждение 2. По пятому утверждению пункта 3.2 инъективная оболочка Q несингулярного модуля M не имеет ненулевых эндоморфизмов с существенными ядрами. Поэтому утверждение 2 вытекает из утверждения 1. $\square$

3.4. Предложение. *Пусть A — кольцо, M — эндоморфизм-продолжаемый правый A-модуль и Q — инъективная оболочка модуля M.*

1. *Если каждый существенный подмодуль в M вполне инвариантен в M, то M — сильно эндоморфизм-продолжаемый модуль.*
2. *Если для любого существенного подмодуля N в M фактор-модуль M/N полуартинов, то M — сильно эндоморфизм-продолжаемый модуль.*
3. *Если для любого $m \in M$ и каждого эндоморфизма g модуля M с существенным в M ядром существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $g^{n+1}(m) \in \sum_{i=0}^{n} g^i(m)A$, то M — сильно эндоморфизм-продолжаемый модуль.*
4. *Если каждый эндоморфизм g модуля M с существенным в M ядром локально нильпотентен, то M — сильно эндоморфизм-продолжаемый модуль.*
5. *Если M — локально нётеров модуль, то M — сильно эндоморфизм-продолжаемый модуль.*

Доказательство. Пусть h — такой эндоморфизм инъективной оболочки Q модуля M, что $\operatorname{Ker} h$ — существенный подмодуль в Q. По первому утверждению пункта 3.3 достаточно доказать, что $h(M) \subseteq M$ во всех рассматриваемых случаях 1—5.

Пусть $P \equiv M \cap h^{-1}(M)$ и

$$N \equiv \{m \in M \mid h^n(M) \subseteq M \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}.$$

Так как $N \supseteq M \cap \operatorname{Ker} h$, то Q и M — существенные расширения модуля N. Кроме того, N — наибольший подмодуль в M со свойством $h(N) \subseteq N$. Так как M — эндоморфизм-продолжаемый модуль и $h(N) \subseteq N$, то $(h-g)(N) = 0$ для некоторого $g \in \operatorname{End} M$. Так как $g(M \cap \operatorname{Ker} h) = 0$, то $g \in \operatorname{sg} M$. Обозначим $\bar{M} = M/N$. Если $\bar{M} = 0$, то $M = N$, $h(M) \subseteq M$, и в данном случае утверждение доказано.

Теперь допустим, что $\bar{M} \neq 0$. Тогда$(h-g)(N) = 0$ и правилом $t(x+N) = (h-g)(x)$ корректно определён гомоморфизм $t\colon \bar{M} \to Q$. Пусть

$$\bar{V} \equiv t^{-1}(N) \subseteq \bar{M},$$

V — такой подмодуль в M, что $V \supseteq N$ и $V/N = \bar{V}$. Так как Q — существенное расширение модуля M, то $\bar{M}$ — существенное расширение модуля $\bar{V}$. Поэтому $\bar{V} \neq 0$. Кроме того,

$$h(V) \subseteq t(V) + g(V) \subseteq N + g(V) \subseteq M.$$

Так как $V \supseteq N$, то M — существенное расширение модуля V.

Докажем утверждение 1. По условию $g(V) \subseteq V$. Поэтому

$$h(V) \subseteq N + g(V) \subseteq N + V = V.$$

Так как N — наибольший подмодуль в M со свойством $h(N) \subseteq N$, то $V = N$. Поэтому $\bar{V} = 0$. Получено противоречие.

Докажем утверждение 2. Так как $h(V) \subseteq M$ и $h(N) \subseteq N$, то h индуцирует гомоморфизм $\bar{h}\colon \bar{V} \to \bar{M}$. Поскольку M — существенное расширение модуля V, то по условию ненулевой модуль $\bar{M}$ — существенное расширение своего ненулевого цоколя $\bar{S} = S/N$, где $N \in \operatorname{Lat}(S)$. Так как $\bar{V}$ — существенный подмодуль в $\bar{M}$, то $\bar{S} \subseteq \bar{V}$, откуда следует, что $\bar{h}(\bar{S}) \subseteq \bar{S}$. Поэтому $h(S) \subseteq S$. Так как N — наибольший подмодуль в M со свойством $h(N) \subseteq N$, то $S = N$. Поэтому $\bar{S} = 0$. Получено противоречие.

Докажем утверждение 3. Пусть $m \in M \setminus N$, $0 \neq \bar{m} = m+N \in \bar{M}$. По условию $g^{n+1}(m) \in \sum\limits_{i=0}^{n} g^i(m)A$ для некоторого n. Так как $(h^i - g^i)(N) = 0$ для всех i, то правилом $t_i(\bar{m}x) = (h^i - g^i)(mx)$, $x \in A$, корректно определены гомоморфизмы $t_i\colon \bar{m}A \to E$. Пусть $\bar{V}_i \equiv {t_i}^{-1}(N) \subseteq \bar{m}A$ и $\bar{W} \equiv \bar{V}_1 \cap \ldots \cap \bar{V}_n \subseteq mA$. Так как Q — существенное расширение модуля M, то $\bar{m}A$ — существенное расширение каждого из модулей $\bar{V}_i$. Поэтому $\bar{m}A$ — существенное расширение модуля $\bar{W}$. Тогда $0 \neq \bar{m}a \in \bar{W}$ для некоторого $a \in A$. Поэтому $h^i(ma) = t_i(ma) + g^i(ma) \in M$

для всех $i = 1, \ldots, n$ и $h^{n+1}(ma) \in \sum\limits_{i=0}^{n} h^i(ma)A \in M$. Тогда $h^{n+j}(ma) \in M$ для всех $j \geqslant 1$. Поэтому $h^k(ma) \in M$ для всех $k \geqslant 1$, $ma \in N$, $\bar{m}a = 0$. Получено противоречие.

Утверждение 4 вытекает из утверждения 3.

Докажем утверждение 5. Пусть X — произвольный циклический подмодуль в M. По лемме 2.44 существует такое натуральное число $n = n(X, h)$, что $h^n(X) = 0$. Поэтому утверждение вытекает из утверждения 4. $\square$

3.5. Теорема. *Пусть A — эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо.*

1. *Если в кольце A каждый существенный правый идеал является идеалом, то A — сильно эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо.*
2. *Если для любого существенного правого идеала N кольца A модуль A/N является полуартиновым, то A — сильно эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо.*
3. *Если для любого элемента $a \in A$ и каждого элемента $s \in \operatorname{Sing} A_A$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $s^{n+1}a \in \sum\limits_{i=0}^{n} s^i aA$, то A — сильно эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо.*
4. *Если каждый элемент идеала $\operatorname{Sing} A_A$ нильпотентен, то A — сильно эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо.*
5. *Если A — нётерово справа кольцо, то A — сильно эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо.*

Теорема 3.5 вытекает из предложения 3.4.

3.6. Идеал $\operatorname{sg} M$ кольца $\operatorname{End} M$, редуцированные, нормальные и бэровские кольца. Пусть A — кольцо, M — правый A-модуль и $\operatorname{sg} M$ — множество всех эндоморфизмов модуля M, ядра которых являются существенными подмодулями в M. При естественном изоморфизме кольца $\operatorname{End} A_A$ на кольцо A подмножество $\operatorname{sg} A_A$ в $\operatorname{End} A_A$ переходит на правый сингулярный идеал $\operatorname{Sing} A_A$ кольца A.

Кольцо без ненулевых нильпотентных элементов называется *редуцированным* кольцом.

Кольцо, в котором все идемпотенты центральны, называется *нормальным* или *абелевым* кольцом.

Кольцо A называется *бэровским*, если выполнены следующие эквивалентные условия:

i) для любого подмножества X в A существует такой идемпотент $e \in A$, что $r(X) = eA$;

ii) для любого подмножества Y в A существует такой идемпотент $f \in A$, что $\ell(Y) = Af$.

Докажем, например, импликацию i) $\Longrightarrow$ ii). По условию i) существует такой идемпотент $e \in A$, что $r\big(\ell(Y)\big) = eA$. Тогда

$$\ell(Y) = \ell\Big(r\big(\ell(Y)\big)\Big) = \ell(eA) = A(1-e).$$

1. $\operatorname{sg} M$ — идеал кольца эндоморфизмов $\operatorname{End} M$, следовательно, $\sum\limits_{h\in \operatorname{sg} M} h(M)$ — вполне инвариантный подмодуль модуля M, причём этот подмодуль лежит в $\operatorname{Sing} M$. В частности, если M — несингулярный модуль, то $\operatorname{sg} M = 0$.
2. Каждое редуцированное кольцо A является несингулярным (справа и слева) нормальным кольцом, в котором левый аннулятор любого подмножества X совпадает с правым аннулятором множества X и является идеалом кольца A.
3. Каждое бэровское кольцо несингулярно (справа и слева).
4. Каждое несингулярное справа квазинепрерывное справа кольцо A является бэровским кольцом. В частности, A несингулярно слева.
5. Если M — квазинепрерывный модуль, то существует естественный кольцевой изоморфизм кольца $\operatorname{End} M/\operatorname{sg} M$ на прямое произведение инъективного справа регулярного кольца и редуцированного кольца.
6. Любое несингулярное справа квазинепрерывное справа кольцо является прямым произведением инъективного справа регулярного кольца и квазинепрерывного справа редуцированного бэровского кольца.

Приведённые выше утверждения 1—6 хорошо известны. Например, утверждения 1 и 5 доказаны в [40, раздел 3.1], утверждение 2, например, в [48, раздел 12.5, лемма 5.1], утверждение 4 — в [21, раздел 12.2]. Утверждение 3 проверяется непосредственно, а утверждение 6 вытекает из утверждений 4 и 5.

3.7. Теорема. *Если A — эндоморфизм-продолжаемое справа регулярное кольцо, то A — инъективное справа кольцо.*

Доказательство. Так как A — эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо, то A — квазинепрерывное справа кольцо по пункту 1.11. По шестому и второму утверждениям пункта 3.6 A — прямое произведение инъективного справа регулярного кольца и нормального кольца. Поэтому можно без ограничения общности рассмотреть только случай, когда каждый главный правый идеал кольца A порождается центральным идемпотентом. Достаточно доказать, что для произвольного правого идеала B кольца A каждый гомоморфизм $f\colon B_A \to A_A$ продолжается до гомоморфизма $A_A \to A_A$. Пусть $b \in B$. Тогда $bA = eA$ для некоторого центрального идемпотента $e \in bA \subseteq B$, Тогда $f(b) = f(be) = f(b)e = ef(b) \in B$. Поэтому $f(B) \subseteq B$. Так как A_A — эндоморфизм-продолжаемый модуль, то гомоморфизм $f\colon B_A \to A_A$ продолжается до гомоморфизма $A_A \to A_A$. $\square$

3.8. Аннуляторы, являющиеся идеалами. Пусть A — кольцо.

1. Для любого элемента $a \in A$ правый идеал $r(a)$ является идеалом в A в точности тогда, когда $aAb = 0$ для любых таких элементов $a, b \in A$, что $ab = 0$.
2. Для любого элемента $a \in A$ правый идеал $r(a)$ является идеалом в A в точности тогда, когда для любого элемента $b \in A$ левый идеал $\ell(b)$ является идеалом в A.

Утверждение 1 проверяется непосредственно, а утверждение 2 вытекает из утверждения 1.

3.9. Конечно эндоморфизм-продолжаемые и n-эндоморфизм-продолжаемые модули. Пусть n — натуральное число. Модуль M называется *n-эндоморфизм-продолжаемым*, если каждый эндоморфизм любого n-порождённого подмодуля в M продолжается до эндоморфизма модуля M. Модуль M называется *конечно эндоморфизм-продолжаемым*, если каждый эндоморфизм любого конечно порождённого подмодуля в M продолжается до эндоморфизма модуля M.

1. Пусть A — 1-эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо и $a \in A$. Правый идеал $r(a)$ является идеалом кольца A в точности тогда, когда левый идеал Aa является идеалом. В частности, если a — произвольный левый неделитель нуля в A, то Aa — идеал.
2. Кольцо A инвариантно слева в точности тогда, когда A — 1-эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо и $r(a)$ — идеал в A для любого элемента $a \in A$.
3. Пусть A — 1-эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо. Тогда A имеет левое классическое кольцо частных Q и $aAa^{-1} \subseteq A$ для любого неделителя нуля $a \in A$. Если A имеет классическое правое кольцо частных, то Q — двустороннее классическое кольцо частных кольца A. Если A — область, то A — инвариантная слева область, обладающая классическим левым телом частных.
4. Если 1-эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо A является редуцированным или инвариантным справа кольцом, то A — инвариантное слева кольцо.
5. Пусть A — конечно эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо. По утверждению 3 A имеет классическое левое кольцо частных Q и $sAs^{-1} \subseteq A$ для любого неделителя нуля s в A. Если $q \in Q$ и $q^{n+1} = q^n a_n + \ldots + q_1 a + a_0$ для некоторых элементов $a_0, \ldots, a_n \in A$, то $q \in s^{-1}As$ для некоторого неделителя нуля s в A.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Допустим, что $r(a)$ — идеал в A и $b \in A$. Тогда $r(a) \subseteq r(ab)$. Поэтому $f(a) = ab$ для некоторого эпиморфизма $f\colon aA \to abA$. Тогда $f \in \operatorname{End}(aA)$. По условию $ta = f(a) = ab$ для некоторого $t \in A$. Поэтому $Aa \supseteq aA$ и Aa — идеал.

Допустим, что Aa — идеал в A и $b \in A$. Тогда $ab = ca$ для некоторого $c \in A$. Поэтому $abr_A(a) = car_A(a) = 0$, $br_A(a) \subseteq r_A(a)$ и $r(a)$ — идеал.

Докажем утверждение 2. Пусть A — инвариантное слева кольцо. Из второго утверждения пункта 3.8 вытекает, что $r(a)$ — идеал в A для любого элемента $a \in A$. Пусть $f \in \operatorname{End} aA$. Тогда $f(a) = ab$ для некоторого элемента $b \in A$ и $f(ax) = f(a)x = abx$ для любого $x \in A$. Так как A — инвариантное слева кольцо, то $ab = ca$ для некоторого элемента $c \in A$. Соотношение $g(y) = cy$ задаёт эндоморфизм $g \in \operatorname{End} A_AS$. Кроме того, $g(ax) = cax = abx = f(ax)$ для всех $x \in A$. Поэтому g — продолжение гомоморфизма f.

Обратная импликация утверждения 2 вытекает из утверждения 1.

Докажем утверждение 3. Пусть S — множество всех неделителей нуля в A, $s \in S$, $a \in A$. Так как по утверждению 1 $sa = bs$ для некоторого $b \in A$, то S — левое множество Оре. Поэтому A имеет классическое левое кольцо частных. Включение $aAa^{-1} \subseteq A$ следует из утверждения 1.

Если A имеет классическое правое кольцо частных, то Q — двустороннее классическое кольцо частных кольца A, поскольку если произвольное кольцо имеет классическое правое кольцо частных и классическое левое кольцо частных, то эти два кольца частных можно естественным образом отождествить.

Последний результат утверждения 3 вытекает из первого утверждения.

Докажем утверждение 4. В обоих случаях все правые аннуляторы элементов кольца A является идеалами, см. второе утверждение пункта 3.6. Поэтому утверждение 4 следует из утверждения 2.

Докажем утверждение 5. Обозначим через M n-порождённый подмодуль $\sum\limits_{i=1}^{n} q^i A$ модуля Q_A. Тогда $qM \subseteq M$. По третьему утверждению пункта 1.15 $sM \subseteq A$ для некоторого неделителя нуля $s \in A$. Правый идеал sM в A конечно порождён и $s \in sM$. Кроме того,

$$qs^{-1} \cdot sM = qM \subseteq M = s^{-1} \cdot sM.$$

Поэтому правилом $f(x) = sqs^{-1}x$ задаётся эндоморфизм f конечно порождённого правого идеала sM кольца A. По условию f продолжается до эндоморфизма g модуля A_A. Обозначим $c = g(1)$. Тогда

$$sq = sqs^{-1} \cdot s = f(s) = cs, \quad q = s^{-1}cs \in s^{-1}As. \qquad \square$$

3.10. Вполне целозамкнутые справа и классически вполне целозамкнутые справа подкольца. Пусть Q — кольцо и A — унитарное подкольцо в Q.

Кольцо A называется *вполне целозамкнутым справа* подкольцом в Q, если A содержит любой такой элемент $q \in Q$, что $qB \subseteq B$ для некоторого существенного правого идеала B кольца A.

Кольцо A называется *классически вполне целозамкнутым справа* подкольцом в Q, если A содержит любой такой элемент $q \in Q$, что $q^n a \in A$ для некоторого неделителя нуля a кольца A и всех натуральных чисел n.

1. Если Q — максимальное правое кольцо частных кольца A и кольцо Q инъективно справа, то A является вполне целозамкнутым справа подкольцом в Q в точности тогда, когда A — сильно эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо.

Так как кольцо Q инъективно справа, то хорошо известно, что Q_A — инъективная оболочка модуля A_A и кольцо $\operatorname{End} Q_A$ можно естественным образом отождествить с кольцом Q (см., например, [48, раздел 14.4, утверждение 4.1]. Поэтому утверждение 1 вытекает из первого утверждения пункта 3.3.

2. Если A — несингулярное справа кольцо и Q — максимальное правое кольцо частных кольца A, то A является вполне целозамкнутым справа подкольцом в Q в точности тогда, когда A — (сильно) эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо.

Так как кольцо A несингулярно справа, то хорошо известно, что кольцо Q инъективно справа (см., например, [15, теорема 16.12]). Поэтому утверждение 2 вытекает из утверждения 1 и второго утверждения пункта 3.3.

3.11. Предложение. *Пусть A — полупервичное правое кольцо Голди и Q — полупростое артиново классическое правое кольцо частных кольца A (см. пункт 1.18). Равносильны следующие условия:*

1) *A — классически вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q;*
2) *A — вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q;*
3) *A — сильно эндоморфизм-продолжаемым справа кольцо;*
4) *A — эндоморфизм-продолжаемым справа кольцо.*

Доказательство. По первому утверждению пункта 1.18 полупервичное правое кольцо Голди A несингулярно справа. Кроме того, полупростое артиново кольцо Q является максимальным правым кольцом частных кольца A по [15, теорема 16.14]. Поэтому эквивалентность условий 2)—4) вытекает из второго утверждения пункта 3.10.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть B — существенный правый идеал кольца A и q — такой элемент кольца Q, что $qB \subseteq B$. По первому утверждению пункта 1.18 существенный правый идеал B содержит некоторый неделитель нуля b. Так как $qB \subseteq B$, то $q^nB \subseteq B$ для всех неотрицательных целых чисел n. Поэтому $q^nb \in B \subseteq A$ для всех неотрицательных целых чисел n. Так как A — классически вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q, то $q \in Q$ и A — вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть q — такой элемент кольца Q, что $q^nb \in A$ для некоторого неделителя нуля $b \in A$ и всех неотрицательных целых чисел n. Обозначим через B правый идеал $\sum_{n=0}^{\infty} q^nbA$ кольца A. Так как B содержит неделитель нуля b, то B — существенный правый идеал по первому утверждению пункта 1.18. Кроме того, $qB \subseteq B$. Так как A — вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q, то $q \in Q$ и A — классически вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q. □

3.12. Теорема. *Для кольца A равносильны следующие условия:*

1) *A — эндоморфизм-продолжаемое справа несингулярное справа кольцо;*
2) *A — сильно эндоморфизм-продолжаемое справа несингулярное справа кольцо;*
3) *$A = B \times C$, где B — инъективное справа регулярное кольцо, C — инвариантное слева бэровское редуцированное кольцо и C — вполне целозамкнутое справа подкольцо своего максимального правого кольца частных Q.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) вытекает из второго утверждения пункта 3.3.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Так как по пункту 1.11 каждый эндоморфизм-продолжаемый модуль квазинепрерывен, то по шестому утверждению пункта 3.6 $A = B \times C$, где B — инъективное справа регулярное кольцо, C — сильно эндоморфизм-продолжаемое справа бэровское редуцированное кольцо. По второму утверждению пункта 3.10 C — вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q. По второму утверждению пункта 3.9 C — инвариантное слева кольцо.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) вытекает из второго утверждения пункта 3.10. □

3.13. Следствие. *Для кольца A равносильны следующие условия:*

1) *A — эндоморфизм-продолжаемое справа несингулярное справа неразложимое кольцо;*
2) *A — сильно эндоморфизм-продолжаемое справа несингулярное справа неразложимое кольцо;*
3) *либо A — инъективное справа регулярное неразложимое кольцо, либо A — инвариантная слева, правая и левая область Оре, являющаяся классически вполне целозамкнутым справа подкольцом своего классического тела частных Q.*

Доказательство. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) вытекает из предложения 3.11.

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) вытекает из второго утверждения пункта 3.3.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). По теореме 3.12 A — либо инъективное справа регулярное неразложимое кольцо, либо инвариантное слева неразложимое бэровское редуцированное кольцо, являющееся вполне целозамкнутым справа подкольцом своего максимального правого кольца частных Q. Достаточно рассмотреть только второй случай. Инвариантное слева нормальное неразложимое бэровское кольцо A является инвариантной слева областью. По второму утверждению замечания 1.10 A — правая и левая область Оре. Пусть Q — классическое тело частных области A. По предложению 3.11 A — классически вполне целозамкнутое справа подкольцо в Q. □

3.14. Предложение. *Пусть M — сильно эндоморфизм-продолжаемый модуль и S — сумма образов всех эндоморфизмов модуля M с существенными ядрами.*

1. *Идеал $\operatorname{sg} M$ содержится в радикале Джекобсона $J(\operatorname{End} M)$.*
2. *Если M — существенное расширение некоторого квазиинъективного модуля S, то M — квазиинъективный модуль. В частности, если M — существенное расширение полупростого модуля, то M — квазиинъективный модуль.*
3. *Если M — существенное расширение модуля S, то M — квазиинъективный модуль и $M = G(M)$.*

4. *Если M — неразложимый модуль, то M — равномерный модуль и либо M — квазиинъективный модуль и $M = G(M)$, либо каждый ненулевой эндоморфизм модуля M является мономорфизмом и $\operatorname{End} M$ — область.*

Доказательство. Пусть Q — инъективная оболочка модуля M.

Докажем утверждение 1. Пусть $h \in \operatorname{sg} M$. Тогда $h(X) = 0$ для некоторого существенного подмодуля X в M. Так как $\operatorname{sg} M$ — идеал кольца $\operatorname{End} M$, то достаточно доказать, что $1 - h$ — автоморфизм модуля M. Так как модуль Q инъективен, то $1_M - h$ продолжается до эндоморфизма f модуля Q, который действует тождественно на существенном подмодуле X инъективного модуля Q. Поэтому $f(Q)$ — инъективный существенный подмодуль модуля Q. Тогда f — автоморфизм инъективного модуля Q. Обратный автоморфизм f^{-1} также действует тождественно на существенном подмодуле X модуля Q. Поэтому $1_Q - f^{-1} \in \operatorname{sg} Q$. По первому утверждению пункта 3.3 $(1_Q - f^{-1})(M) \subseteq M$. Тогда $f^{-1}(M) \subseteq M$. Поэтому $M \subset f(M) = (1_M - h)(M) \subseteq M$. Тогда $1_M - h$ — автоморфизм модуля M.

Докажем утверждение 2. Достаточно доказать, что $f(M) \subseteq M$ для любого эндоморфизма f модуля Q. Так как M — существенное расширение модуля X, то Q — инъективная оболочка квазиинъективного модуля X. Поскольку X — квазиинъективный модуль, то $f(X) \subseteq X$. По первому утверждению пункта 3.3 $f(M) \subseteq M$. Второй результат вытекает из первого, поскольку каждый полупростой модуль квазиинъективен.

Докажем утверждение 3. По первому утверждению пункта 3.3 $h(M) \subseteq M$ для любого $h \in \operatorname{sg} Q$. Поэтому $\sum\limits_{h \in \operatorname{sg} Q} h(Q) = S$ — существенный подмодуль в M. Тогда Q — инъективная оболочка модуля S. По первому утверждению пункта 3.6 $S \subseteq \operatorname{Sing} Q$ и S — вполне инвариантный инвариантный подмодуль в Q. Поэтому $M = G(M)$ и S — квазиинъективный модуль. По утверждению 2 M — квазиинъективный модуль.

Докажем утверждение 4. Так как M — неразложимый квазинепрерывный модуль, то M — равномерный модуль.

Если $S \neq 0$, то M — существенное расширение модуля S и по утверждению 2 M — квазиинъективный модуль и $M = G(M)$.

Допустим, что $S = 0$, т. е. ядро каждого ненулевого эндоморфизма модуля M не является существенным в M. Так как M — равномерный модуль, то каждый ненулевой эндоморфизм модуля M является мономорфизмом. Поэтому $\operatorname{End} M$ — область. $\square$

3.15. Следствие. *Пусть A — сильно эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо.*

1. $\operatorname{Sing} A_A \subseteq J(A)$.
2. *Если A имеет существенный квазиинъективный правый идеал, то кольцо A инъективно справа. В частности, если A имеет существенный полупростой правый идеал, то кольцо A инъективно справа.*

3. *Если* $\operatorname{Sing} A_A$ — *существенный правый идеал кольца* A, *то кольцо* A *инъективно справа.*

Следствие 3.15 вытекает из утверждений 1—3 предложения 3.14 и утверждения 6 пункта 1.1.

3.16. Теорема. *Для кольца* A *равносильны следующие условия:*

1) A — *сильно эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо без нетривиальных идемпотентов*;
2) *либо* A — *инъективное справа равномерное справа локальное кольцо и* $J(A) = \operatorname{Sing} A_A$ — *ненулевой идеал, либо* A — *инвариантная слева правая и левая область Оре, являющаяся классически вполне целозамкнутым справа подкольцом своего классического тела частных.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Так как A — кольцо без нетривиальных идемпотентов, то A_A — неразложимый модуль. По четвёртому утверждению предложения 3.14 A — равномерное справа кольцо и либо A квазиинъективно справа и $A_A = G(A_A)$, либо A — область. По следствию 3.13 достаточно рассмотреть случай, когда кольцо A квазиинъективно справа. По шестому утверждению пункта 1.1 A — инъективное справа кольцо. Тогда $J(A) = \operatorname{Sing} A_A$ [16, теорема 19.27]. Так как A — инъективное справа кольцо без нетривиальных идемпотентов, то A — локальное кольцо.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) вытекает из следствия 3.13. □

3.17. Эндоморфизм-поднимаемые и π-проективные модули. Модуль M называется *эндоморфизм-поднимаемым* или *малопроективным*, если для любого эпиморфизма $h\colon M \to \bar{M}$ и каждого эндоморфизма $\bar{f}$ модуля $\bar{M}$ существует такой эндоморфизм f модуля M, что $\bar{f}h = hf$.

Модуль M называется *π-проективным*, если для любого эпиморфизма $h\colon M \to \bar{M}$ и каждого идемпотентного эндоморфизма $\bar{f}$ модуля $\bar{M}$ существует такой эндоморфизм f модуля M, что $\bar{f}h = hf$.

1. Каждый квазипроективный модуль является эндоморфизм-поднимаемым. Любая квазициклическая абелева группа $\mathbb{Z}(p^\infty)$ является эндоморфизм-поднимаемым неквазипроективным $\mathbb{Z}$-модулем.
2. Каждый цепной модуль является π-проективным. Кольцо $\mathbb{Z}$ является π-проективным нецепным $\mathbb{Z}$-модулем.
3. Каждый эндоморфизм-поднимаемый модуль является π-проективным. Если A — неполная область дискретного нормирования и Q — поле частных области A, то Q — π-проективный A-модуль, не являющийся эндоморфизм-поднимаемым.
4. Пусть M — π-проективный модуль и X, Y — такие подмодули в M, что $X + Y = M$. Тогда существуют такие гомоморфизмы $f\colon M \to X$ и $g\colon M \to Y$, что
$$f(Y) + g(X) \subseteq X \cap Y, \quad (f + g - 1_M)(M) \subseteq X \cap Y,$$
$$M = (f + g)(M) + X \cap Y, \quad \operatorname{Ker}(f + g) \subseteq X \cap Y.$$

Доказательство. Утверждения 1—3 проверяются непосредственно.

Докажем утверждение 4. Пусть $h\colon M \to M/(X \cap Y)$ — естественный эпиморфизм. Так как $h(M) = h(X) \oplus h(Y)$, то существуют естественные проекции $\bar{f}\colon h(M) \to h(X)$ и $\bar{g}\colon h(M) \to h(Y)$. Поскольку M π-проективен, то $\bar{f}h = hf$ и $\bar{g}h = hg$ для некоторых $f, g \in \mathrm{End}(M)$. Поэтому

$$f(M) \subseteq X, \quad g(M) \subseteq Y, \quad f(Y) + g(X) \subseteq X \cap Y.$$

Так как $(\bar{f} + \bar{g} - 1_{h(M)}) = 0$, то $(f + g - 1_M)(M) \subseteq X \cap Y$. Так как $M = (f+g)(M)+(f+g-1_M)(M)$, то $M = (f+g)(M)+X\cap Y$. Если $x \in \mathrm{Ker}(f+g)$, то $x = (1_M - f - g)(x) \in X \cap Y$. Тогда $\mathrm{Ker}(f + g) \subseteq X \cap Y$. □

3.18. Лемма. *Для модуля M равносильны следующие условия*:

1) *M — эндоморфизм-поднимаемый модуль, и каждый его фактор-модуль является эндоморфизм-продолжаемым*;
2) *M — эндоморфизм-продолжаемый модуль, и каждый его подмодуль является эндоморфизм-поднимаемым.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть N — подмодуль в M, $\bar{f}$ — эндоморфизм фактор-модуля $\bar{N} = N/P$ и $h\colon M \to M/P$ — естественный эпиморфизм. Так как M/P — эндоморфизм-продолжаемый модуль, то $\bar{f}$ продолжается до эндоморфизма $\bar{g}$ модуля M/P. Поскольку M — эндоморфизм-поднимаемый модуль, то $\bar{g}h = hg$ для некоторого $g \in \mathrm{End}\, M$. Поэтому $g(N) \subseteq N$. Тогда g индуцирует $f \in \mathrm{End}(N)$ и $\bar{f}h_N = h_N f$, где $h_N\colon N \to N/P$ — естественный эпиморфизм. Поэтому N — эндоморфизм-поднимаемый модуль.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть M/P — произвольный фактор-модуль, $h\colon M \to M/P$ — естественный эпиморфизм, N/P — подмодуль в M/P, h_N — ограничение h на N и $\bar{f}$ — эндоморфизм модуля N/P. По условию N — эндоморфизм-поднимаемый модуль. Поэтому существует такой эндоморфизм f модуля N, что $\bar{f}h_N = h_N f$. Так как M — эндоморфизм-продолжаемый модуль, то эндоморфизм f продолжается до эндоморфизма g модуля M/P, причём $g(P) = f(P) \subseteq P$. Поскольку $g(P) \subseteq P$, то g индуцирует эндоморфизм $\bar{g}$ модуля M/P, являющийся продолжением эндоморфизма $\bar{f}$ модуля N/P. Поэтому M/P — эндоморфизм-продолжаемый модуль. □

3.19. Кольца с квазинепрерывными циклическими модулями [21, раздел 14.7]. Пусть A — кольцо, над которыми все циклические правые модули квазинепрерывны. Тогда $A = B \times C$, где B — полупростое артиново кольцо, $C = C_1 \times \ldots \times C_n$ и все C_i — равномерные справа кольца. Кольцо C_i является локальным в точности тогда, когда C_i — цепное справа кольцо. Если все циклические правые A-модули квазиинъективны, то для любого i верно, что C_i — инъективное справа, цепное справа и слева, инвариантное справа и слева кольцо и $J(C_i)$ — ниль-идеал.

3.20. Предложение. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *каждый циклический правый A-модуль является эндоморфизм-продолжаемым*;

2) *A — эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо и каждый правый идеал кольца A является эндоморфизм-поднимаемым*;
3) *$A = B\times C$, где B — полупростое артиново кольцо, $C = C_1\times\ldots\times C_n$ и все C_i — равномерные справа кольца, в которых все правые идеалы являются эндоморфизм-поднимаемыми*;
4) *$A = B\times C$, где B — полупростое артиново кольцо, $C = C_1\times\ldots\times C_n$ и все C_i — равномерные справа кольца, над которыми все циклические модули являются эндоморфизм-продолжаемыми.*

Доказательство. Проективный модуль A_A является эндоморфизм-поднимаемым. Поэтому эквивалентности 1) $\Longleftrightarrow$ 2) и 3) $\Longleftrightarrow$ 4) вытекают из леммы 3.18.

Импликация 4) $\Longrightarrow$ 1) проверяется непосредственно.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 4). Так как каждый эндоморфизм-продолжаемый модуль квазинепрерывен, то все циклические правые A-модули квазинепрерывны. По пункту 3.19 $A = B\times C$, где B — полупростое артиново кольцо, $C = C_1\times\ldots\times C_n$ и все C_i — равномерные справа кольца. Ясно, что все циклические правые C_i-модули являются эндоморфизм-продолжаемыми. □

3.21. Предложение. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — сильно эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо и каждый циклический правый A-модуль является эндоморфизм-продолжаемым*;
2) *A — сильно эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо и каждый правый идеал кольца A является эндоморфизм-поднимаемым*;
3) *$A = A_1\times\ldots\times A_n$ и для каждого A_i верно, что каждый правый идеал кольца A_i является эндоморфизм-поднимаемым и либо A_i — простое артиново кольцо, либо A_i — цепное справа инъективное справа кольцо и $J(A)$ совпадает с ненулевым идеалом $\operatorname{Sing} A_A$, либо A_i — инвариантная слева правая и левая область Оре, являющаяся классически вполне целозамкнутым справа подкольцом своего классического тела частных.*

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 2) вытекает из предложения 3.20.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 2) вытекает из следствия 3.13.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). По предложению 3.20 достаточно рассмотреть случай, когда A — равномерное справа кольцо.

Если A — область, то по следствию 3.13 A — инвариантная слева правая и левая область Оре, являющаяся классически вполне целозамкнутым справа подкольцом своего классического тела частных.

Допустим, что A не область. Так как A — равномерное справа кольцо с левыми делителями нуля, то $\operatorname{Sing} A_A$ — существенный правый идеал кольца A. По теореме 3.16 A — инъективное справа равномерное справа локальное кольцо и $J(A) = \operatorname{Sing} A_A$ — ненулевой идеал. По пункту 3.19 A — цепное справа кольцо. □

3.22. Кольца, целые над своим центром. Кольцо A называется *целым над своим центром*, если для любого элемента $s \in A$ существуют такие центральные элементы $c_1, \ldots, c_n$ кольца A, что $s^{n+1} = \sum\limits_{i=0}^{n} s^i c_i$.

3.23. Следствие. *Если кольцо A цело над своим центром, то равносильны следующие условия:*

1) *A — сильно эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо и каждый циклический правый A-модуль является эндоморфизм-продолжаемым;*
2) *A — сильно эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо и каждый правый идеал кольца A является эндоморфизм-поднимаемым;*
3) *$A = A_1 \times \ldots \times A_n$ и для каждого A_i верно, что каждый правый идеал кольца A_i является эндоморфизм-поднимаемым и либо A_i — простое артиново кольцо, либо A_i — цепное справа инъективное справа кольцо и $J(A)$ совпадает с ненулевым идеалом $\operatorname{Sing} A_A$, либо A_i — инвариантная слева правая и левая область Оре, являющаяся классически вполне целозамкнутым справа подкольцом своего классического тела частных.*

Следствие 3.23 вытекает из предложения 3.21 и утверждения 3 теоремы 3.5.

3.24. Теорема. *Пусть все существенные правые идеалы кольца A являются идеалами. Равносильны следующие условия:*

1) *каждый циклический правый A-модуль является эндоморфизм-продолжаемым;*
2) *$A = A_1 \times \ldots \times A_n$ и для каждого A_i верно, что каждый правый идеал кольца A_i является эндоморфизм-поднимаемым и либо A_i — простое артиново кольцо, либо A_i — инвариантное справа цепное справа инъективное справа кольцо и $J(A)$ совпадает с ненулевым идеалом $\operatorname{Sing} A_A$, либо A_i — инвариантная область, являющаяся классически вполне целозамкнутым справа подкольцом своего классического тела частных.*

Доказательство. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) вытекает из предложения 3.21.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). По предложению 3.20 достаточно рассмотреть случай, когда A — равномерное справа кольцо. Тогда все ненулевые правые идеалы кольца A являются существенными. Так как все существенные правые идеалы кольца A являются идеалами, то равномерное справа кольцо A инвариантно справа. По утверждению 1 теоремы 3.5 A — сильно эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо. Теперь применяем предложение 3.21. □

Нам потребуется следующий хорошо известный критерий проективности.

3.25. Теорема (лемма о дуальном базисе). *Для модуля M равносильны следующие условия:*

1) *M — проективный модуль;*
2) *существуют подмножество $\{m_i\}_{i \in I} \subseteq M$ и множество $\{f_i\}_{i \in I}$ гомоморфизмов $f_i \colon M \to A_A$, такие что $m = \sum\limits_{i \in I} m_i f_i(m)$ для любого $m \in M$ (где $f_i(m) = 0$ для почти всех индексов i);*

3) *существуют система образующих* $\{m_i\}_{i\in I}$ *модуля* M *и множество* $\{f_i\}_{i\in I}$ *таких гомоморфизмов* $f_i\colon M \to A_A$, *что* $m = \sum_{i\in I} m_i f_i(m)$ *для любого* $m \in M$, *где* $f_i(m) = 0$ *для почти всех индексов* i.

Доказательство. Докажем импликацию $1) \Longrightarrow 2)$. По утверждению 12 пункта 1.1 можно считать, что $M \oplus P = Q_A$, где Q_A — свободный модуль с базисом $\{x_i\}_{i\in I}$. Пусть $g_i\colon x_iA \to A_A$ — такие изоморфизмы, что $g(x_i) = 1$, $t\colon Q \to M$ — проекция с ядром P, $m_i \equiv t(x_i)$, $h_i\colon Q \to x_iA$ — естественные проекции и $f_i \equiv g_ih_i|_M\colon M \to A_A$. Рассмотрим $m \in M$. Существует такое конечное подмножество $J \subseteq I$, что $m = \sum_{i\in J} x_ia_i$. Так как

$$\sum_{i\in J} m_if_i(m) = \sum_{i\in J} m_ig_i\bigl(h_i(m)\bigr) = \sum_{i\in J} m_ig_i(x_ia_i) = \sum_{i\in J} m_ia_i = m,$$

то множества $\{m_i\}_{i\in I}$ и $\{f_i\}_{i\in I}$ обладают требуемыми свойствами.

Докажем импликацию $2) \Longrightarrow 3)$. Так как $m = \sum_{i\in I} m_if_i(m)$ для всех $m \in M$, то множество $\{m_i\}_{i\in I}$ порождает M.

Докажем импликацию $3) \Longrightarrow 1)$. Пусть Q_A — свободный модуль с базисом $\{x_i\}_{i\in I}$, $u_i\colon A_A \to x_iA$ — такие изоморфизмы, что $u_i(1) = x_i$, и $t\colon Q \to M$ — такой эпиморфизм, что $t(x_i) = m_i$ для любого $i \in I$. Пусть гомоморфизм $f\colon M \to Q$ задаётся правилом

$$f(m) = \sum_{i\in I} u_i\bigl(f_i(m)\bigr) = \sum_{i\in I} x_if_i(m).$$

Можно проверить, что f определён корректно. Тогда

$$(tf)(m) = t\left(\sum_{i\in I} x_if_i(m)\right) = \sum_{i\in I} m_if_i(m) = m.$$

Поэтому $tf = 1_M$ и модуль M изоморфен прямому слагаемому свободного модуля Q. По утверждению 12 пункта 1.1 M — проективный модуль. □

3.26. Пусть A — унитарное подкольцо кольца B, M — подмодуль модуля B_A и существуют такие $m_1, \ldots, m_n \in M$ и $b_1, \ldots, b_n \in B$, что $1 = \sum_{i=1}^{n} m_ib_i$ и $b_iM \subseteq A$ для всех i. Тогда $M = \sum_{i=1}^{n} m_iA$ — проективный n-порождённый модуль.

Доказательство. Пусть $f_1, \ldots, f_n\colon M_A \to A_A$ — такие гомоморфизмы, что $f(m) = b_im$ для $m \in M$. Тогда $m = \sum_{i=1}^{n} m_if_i(m)$ для любого $m \in M$ и утверждение следует из теоремы 3.25. □

3.27. Теорема [47]. *Пусть* A — *полунаследственное слева кольцо. Если для любого натурального числа* n *кольцо всех матриц размера* $n\times n$ *не содержит бесконечного множества ортогональных идемпотентов, то* A — *полунаследственное справа кольцо.*

3.28. Предложение. *Пусть A — эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо, у которого все его правые идеалы π-проективны.*

1. *В кольце A для любых правых идеалов B и C существуют такие элементы $x, y \in A$, что*
$$x(B+C) \subseteq B, \quad y(B+C) \subseteq C, \quad xB + yC \subseteq B \cap C,$$
$$(x+y-1)(B+C) \subseteq B \cap C, \quad B + C = (x+y)(B+C) + B \cap C,$$
$$(B+C) \cap r(x+y) \subseteq B \cap C.$$
2. *Для любых правых идеалов B и C кольца A существуют такие элементы $s, t \in A$, что $s + t = 1$ и $sB + tC \subseteq B \cap C$.*
3. *Если $d_1, \ldots, d_n$ — неделители нуля кольца A и $D = \sum\limits_{i=1}^{n} Ad_i$, то конечно порождённый левый идеал D является проективным левым A-модулем.*
4. *Если A — область, то A — инвариантная слева, полунаследственная справа и слева правая и левая область Оре.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Обозначим $M = B + C$. Так как M_A — π-проективный модуль, то по четвёртому утверждению пункта 3.17 существуют такие гомоморфизмы $f\colon M \to B$ и $g\colon M \to C$, что
$$f(B) + g(C) \subseteq B \cap C, \quad (f + g - 1_M)(M) \subseteq B \cap C,$$
$$M = (f+g)(M) + B \cap C, \quad \operatorname{Ker}(f+g) \subseteq B \cap C.$$
Так как f и g — эндоморфизмы правого идеала M эндоморфизм-продолжаемого справа кольца A, то существуют такие элементы $x, y \in A$, что $f(m) = xm \in B$ и $g(m) = ym \in C$ для всех $m \in M$. Поэтому
$$xM \subseteq B, \quad yM \subseteq C, \quad xB + yC \subseteq B \cap C,$$
$$(x+y-1)M \subseteq B \cap C, \quad M = (x+y)M + B \cap C,$$
$$M \cap r(x+y) \subseteq B \cap C.$$

Докажем утверждение 2. По утверждению 1 существуют такие элементы $x, y \in A$, что $xB + yC \subseteq B \cap C$ и $(x+y-1)(B+C) \subseteq B \cap C$. Обозначим $s = y$, $t = 1 - y = x - (x+y-1)$. Тогда
$$s + t = 1, \quad sB + tC \subseteq yB + xC + (x+y-1)C \subseteq B \cap C.$$

Докажем утверждение 3. По третьему утверждению пункта 3.9 A имеет классическое левое кольцо частных Q и $d_iAd_i{}^{-1} \subseteq A$ для любого неделителя нуля d_i. Поэтому $d_1 \cdot \ldots \cdot d_n d_i{}^{-1} \equiv a_i \in A$ для всех i. Все a_i — неделители нуля в A. Поэтому $a_i{}^{-1} \in Q$. По утверждению 1 для правых идеалов $a_{n-1}A$ и a_nA существует такой элемент $t_{n-1} \in A$, что
$$(1 - t_{n-1})a_{n-1}A + t_{n-1}a_nA \equiv B_{n-1} \subseteq a_{n-1}A \cap a_nA.$$
По утверждению 1 для правых идеалов $a_{n-2}A$ и B_{n-1} существует такой элемент $t_{n-2} \in A$, что
$$(1 - t_{n-2})a_{n-2}A + t_{n-2}B_{n-1} \equiv B_{n-2} \subseteq a_{n-2}A \cap B_{n-1} \subseteq a_{n-2}A \cap a_{n-1}A \cap a_nA.$$

Допустим, что $k < n-1$ и найден правый идеал

$$B_{n-k} \subseteq \bigcap_{i=0}^{k} a_{n-i}A.$$

По утверждению 1 для правых идеалов $a_{n-k-1}A$ и B_{n-k} существует такой элемент $t_{n-k-1} \in A$, что

$$(1-t_{n-k-1})a_{n-k-1}A + t_{n-k-1}B_{n-k} \equiv B_{n-k-1} \subseteq a_{n-k-1}A \cap B_{n-k} \subseteq \bigcap_{i=0}^{k} a_{n-i}A.$$

Наконец, существует такой элемент $t_1 \in A$, что

$$B_1 = (1-t_1)a_1A + t_1B_2 \subseteq a_1A \cap B_2 \subseteq \bigcap_{i=0}^{n-1} a_{n-i}A = \bigcap_{i=1}^{n} a_iA,$$

$$\begin{aligned} B_1 &= (1-t_1)a_1A + t_1\big((1-t_2)a_2A + t_2\big((1-t_3)a_3A + \ldots t_{n-1}a_nA\big)\ldots\big) = \\ &= (1-t_1)a_1A + t_1(1-t_2)a_2A + t_1t_2(1-t_3)a_3A + \ldots + \\ &+ t_1t_2\ldots t_{n-2}(1-t_{n-1})a_nA + t_1t_2\ldots t_{n-1}a_nA \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} a_iA, \end{aligned}$$

$$(1-t_1)a_1 \in \bigcap_{i=1}^{n} a_iA, \quad t_1(1-t_2)a_2 \in \bigcap_{i=1}^{n} a_iA,$$
$$t_1t_2(1-t_3)a_3 \in \bigcap_{i=1}^{n} a_iA, \ \ldots, \ t_1t_2\ldots t_{n-1}a_n \in \bigcap_{i=1}^{n} a_iA.$$

Пусть $(1-t_1)a_1 = a_if_{1i} = b_1$, $t_1(1-t_2)a_2 = a_if_{2i} = b_2, \ldots,$ $t_1t_2\ldots t_{n-1}a_n = a_if_{ni} = b_n$,

$$M \equiv \sum_{i=1}^{n} Aa_i{}^{-1} \subseteq Q.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} b_ia_i{}^{-1} = 1.$$

Кроме того, для любого b_j имеем

$$Mb_j = \sum_{i=1}^{n} Aa_i{}^{-1}b_j = \sum_{i=1}^{n} Aa_i{}^{-1}a_if_{ji} = \sum_{i=1}^{n} Af_{ji} \subseteq A \subseteq M.$$

По пункту 3.26 модуль ${}_AM$ проективен. Поэтому

$${}_AD = \sum_{i=1}^{n} Ad_i(d_1\cdot\ldots\cdot d_n)^{-1}d_1\cdot\ldots\cdot d_n = \sum_{i=1}^{n} Aa_i{}^{-1}d_1\cdot\ldots\cdot d_n = {}_AMd_1\cdot\ldots\cdot d_n \cong {}_AM,$$

откуда следует, что ${}_AD$ — проективный модуль.

Докажем утверждение 4. По утверждению 3 A — полунаследственная слева область. По следствию 3.13 A — инвариантная слева правая и левая область Оре с классическим телом частных Q. Для любого натурального числа n кольцо Q_n всех матриц размера $n \times n$ над телом Q не содержит бесконечного множества ортогональных идемпотентов. Поэтому его подкольцо A_n не содержит бесконечного множества ортогональных идемпотентов. По теореме 3.27 A — полунаследственная справа область. □

3.29. Теорема. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — нётерово справа кольцо, над которым все циклические правые модули являются эндоморфизм-продолжаемыми*;
2) *A — нётерово слева кольцо, над которым все циклические левые модули являются эндоморфизм-продолжаемыми*;
3) *$A = A_1 \times \ldots \times A_n$, где A_i, $i = 1, \ldots, n$, — либо простое артиново кольцо, либо цепное артиново кольцо, либо инвариантная наследственная нётерова область.*

Доказательство. Достаточно доказать эквивалентность условий 1) и 3).

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3). По пятому утверждению теоремы 3.5 A — сильно эндоморфизм-продолжаемое справа кольцо. По предложению 3.21 достаточно рассмотреть случай, когда либо A — цепное справа инъективное справа кольцо, либо A — инвариантная слева область.

Допустим, что A — цепное справа инъективное справа кольцо. Так как A — нётерово справа инъективное справа кольцо, то A — артиново кольцо [16, теорема 24.5]. По теореме 3.1 все циклические правые A-модули квазиинъективны. По пункту 3.19 A — цепное справа и слева инвариантное справа и слева кольцо.

Допустим, что A — инвариантная слева область. Так как A — нётерово справа инвариантное слева кольцо, то A — нётерово слева кольцо. По четвёртому утверждению предложения 3.28 A — полунаследственная справа и слева область. Нётерова справа и слева полунаследственная справа и слева область A является наследственной областью. По третьему утверждению пункта 1.21 A — инвариантная наследственная нётерова область.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). По предложению 3.20 можно считать, что A — либо цепное артиново кольцо, либо инвариантная наследственная нётерова область. Пусть M — ненулевой циклический правый A-модуль. Если A — цепное артиново кольцо, то M — эндоморфизм-продолжаемый модуль по второму утверждению пункта 1.20.

Допустим, что A — инвариантная наследственная нётерова область. Если M — несингулярный модуль, то M — равномерный модуль и M — эндоморфизм-продолжаемый модуль по теореме 2.37. Если циклический модуль M не является несингулярным, то M имеет ненулевой аннулятор B. По первому утверждению леммы 2.36 A/B — конечное прямое произведение инвариантных цепных артиновых колец. По второму утверждению пункта 1.20 M — квазиинъективный A/B-модуль. Поэтому M — квазиинъективный A-модуль. В частности, M — эндоморфизм-продолжаемый модуль. □

3.30. Лемма. *Пусть Q — эндоморфизм-поднимаемый модуль, f — эндоморфизм модуля Q, N — такой малый подмодуль в Q, что Q/N — эндоморфизм-поднимаемый модуль. Обозначим*

$$X_n = N + \sum_{i=1}^{n} f^i(N), \quad X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n = N + \sum_{i=1}^{\infty} f^i(N).$$

Тогда $X \subseteq J(Q)$ и существует такой эндоморфизм g модуля Q, что $(f-g)(Q) \subseteq X$, $(f-g)(X) \subseteq J(X)$ и $g(N) \subseteq N$. Для любого натурального числа n обозначим

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} f^{i-1}(f-g)(N), \quad Y = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n.$$

Тогда $X_n = N + Y_n$, $X = N + Y$, Y_n — малый подмодуль в X_n, $Y \subseteq J(X)$ и $X = N + J(X)$.

Доказательство. Так как $J(Q)$ — вполне инвариантный подмодуль в Q и $N \subseteq J(Q)$, то

$$X = N + \sum_{i=1}^{n} f^i(N) \subseteq J(Q).$$

Поскольку $f(X) \subseteq X$, то f индуцирует эндоморфизм f' модуля Q/X. Обозначим через h естественный эпиморфизм $Q/N \to Q/X$. Так как Q/N — эндоморфизм-поднимаемый модуль, то существует такой эндоморфизм $\bar{g}$ модуля Q/N, что $h\bar{g} = f'h$.

Обозначим через t естественный эпиморфизм $Q \to Q/N$. Так как Q — эндоморфизм-поднимаемый модуль, то существует такой эндоморфизм g модуля Q, что $tg = \bar{g}t$. По построению имеем $ht(f-g)(Q) = 0$. Поэтому $(f-g)(Q) \subseteq X$. Ясно, что $g(N) \subseteq N$. Кроме того, $X \subseteq J(Q)$. Поэтому $(f-g)(X) \subseteq J(X)$, поскольку $(f-g)(Q) \subseteq X$ и при модульном гомоморфизме радикал Джекобсона переходит в радикал Джекобсона.

Докажем по индукции, что $X_n = N + Y_n$. Пусть $n = 1$. Так как $g(N) \subseteq N$, то

$$X_1 = N + f(N) + g(N) \supseteq N + (f-g)(N) = N + Y_1 \supseteq N + g(N) + (f-g)(N) \supseteq X_1.$$

Теперь допустим, что $X_n = N + Y_n$. Тогда

$$\begin{aligned} X_{n+1} = X_n + f^{n+1}(N) = X_n + f^n\big(f(N)\big) + f^n\big(g(N)\big) \supseteq N + Y_n + f^n(f-g)(N) = \\ = N + Y_{n+1} \supseteq X_n + f^n g(N) + f^n(f-g)(N) \supseteq X_{n+1}. \end{aligned}$$

Так как $(f-g)(Q) \supseteq X$ и N — малый подмодуль в Q, то $(f-g)(N)$ — малый подмодуль в X. Поэтому $f^n(f-g)(N)$ — малый подмодуль в X для всех n, так как $f^n(X) \subseteq X$. Поэтому Y_n — малый подмодуль в X для всех n и $Y \subseteq J(X)$. Так как $X = N + Y$ и $Y \subseteq J(X)$, то $X = N + J(X)$. □

3.31. Лемма. *Пусть выполнены условия леммы* 3.30 *и одно из следующих условий*:

1) Y — *малый подмодуль в* X;

2) $X = X_n$ *для некоторого* n;

3) $J(X)$ — *малый подмодуль в* X;

4) *эндоморфизм* f *либо идемпотентен, либо нильпотентен.*

Тогда $f(N) \subseteq N$.

Доказательство. Для доказательства включения $f(N) \subseteq N$ достаточно доказать, что каждое из условий 1)—4) влечёт за собой равенство $X = N$.

Если Y — малый подмодуль в X, то $X = N$, поскольку $X = N + Y$.

Если $X = X_n$, то $X = N + Y_n$, откуда следует, что $X = N$, поскольку Y_n — малый подмодуль в X по лемме 3.30.

Если выполнено условие 3), то $X = N$ по лемме 3.30.

Если $f^2 = f$ или $f^n = 0$, то $X_2 = X$ или $X_n = X$. Значит, выполнено условие 2), и $X = N$. □

3.32. Замечание. Пусть Q — модуль и N — вполне инвариантный подмодуль в Q. Если Q — эндоморфизм-поднимаемый (квазипроективный) модуль, то непосредственно проверяется, что Q/N — эндоморфизм-поднимаемый (соответственно квазипроективный) модуль.

3.33. Замечание. Пусть M — эндоморфизм-поднимаемый модуль, Q — квазипроективный модуль, N — малый подмодуль в Q. Если $M \cong Q/N$ и для каждого подмодуля X в $J(Q)$ модуль $J(X)$ — малый подмодуль в X, то M — квазипроективный модуль. Действительно, выполнено условие 3) леммы 3.31. По лемме 3.31 N — вполне инвариантный подмодуль в Q. По замечанию 3.32 M — квазипроективный модуль.

Напомним понятие проективного накрытия модуля. Пусть Q — проективный модуль и N — малый подмодуль в Q. Если некоторый модуль M изоморфен модулю Q/N, то модуль Q называется *проективным накрытием* модуля M с *ядром* N.

3.34. Замечание. Пусть M — эндоморфизм-поднимаемый модуль, который обладает проективным накрытием Q с ядром N. Если для каждого подмодуля X в $J(Q)$ модуль $J(X)$ — малый подмодуль в X, то по замечанию 3.33 M — квазипроективный модуль.

Кольцо A называется *совершенным справа*, если выполнены следующие эквивалентные условия:

1) каждый правый A-модуль обладает проективным накрытием;

2) $A/J(A)$ — артиново кольцо и $X \neq J(X)$ для каждого ненулевого правого A-модуля X;

3) $A/J(A)$ — артиново кольцо и $J(A)$ — t-нильпотентный слева идеал.

Эквивалентность вышеуказанных условий доказана, например, в [18, теорема 28.4].

3.35. Замечание. Пусть A — совершенное справа кольцо. Из замечания 3.34 вытекает, что $J(X)$ — малый подмодуль в X для каждого ненулевого правого A-модуля X.

3.36. Теорема [2]. *Пусть A — совершенное справа кольцо и M — правый A-модуль. Равносильны следующие условия:*

1) *M — эндоморфизм-поднимаемый модуль;*
2) *M — квазипроективный модуль;*
3) *M — проективный модуль над фактор-кольцом $A/r(M)$.*

Доказательство. Эквивалентность 2) $\Longleftrightarrow$ 3) для правых модулей над совершенными справа кольцами известна (см. [18, пример 16, с. 203]).

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) верна всегда.

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) вытекает из замечаний 3.34 и 3.35. □

3.37. Замечание. В связи с теоремой 3.36 заметим, что каждая квазициклическая абелева группа является эндоморфизм-поднимаемым неквазипроективным $\mathbb{Z}$-модулем.

4. Модули над сильно полупервичными кольцами и автоморфизм-инвариантные кольца

Основные результаты данного раздела опубликованы в [55—57].

4.1. Бесквадратные модули. Модуль M называется *бесквадратным*, если M не имеет таких ненулевых подмодулей $X \oplus Y$, что $X \cong Y$.

4.2. Теорема [24, теоремы 3, 6]. *Пусть M — несингулярный автоморфизм-инвариантный модуль. Тогда существует такое прямое разложение $M = X \oplus Y$, что X — квазиинъективный несингулярный модуль, Y — бесквадратный несингулярный автоморфизм-инвариантный модуль, модули X и Y инъективны относительно друг друга, любая сумма замкнутых подмодулей модуля Y является автоморфизм-инвариантным модулем, $\mathrm{Hom}(X, Y) = \mathrm{Hom}(Y, X) = 0$ и $\mathrm{Hom}(Y_1, Y_2) = 0$ для любых подмодулей Y_1 и Y_2 в Y с условием $Y_1 \cap Y_2 = 0$.*

4.3. Лемма. *Пусть A — кольцо и Y — несингулярный правый A-модуль. Если $\{y_i\}_{i\in I}$, $|I| \geqslant 2$, — такое подмножество модуля Y, что $\mathrm{Hom}(Y_i, Y_j) = 0$ для любых подмодулей $Y_i \subseteq y_iA$ и $Y_j \subseteq y_jA$ для всех $i \neq j$, то найдётся такое множество $\{B_i\}_{i\in I}$ ненулевых правых идеалов кольца A, что для любого i правый A-модуль B_i изоморфен подмодулю в y_iA и $B_iB_j = 0$ для всех $i \neq j$.*

Доказательство. В I зафиксируем несовпадающие индексы i и j. По лемме 2.15 существуют такие ненулевые правые идеалы B_i и B_j кольца A, что y_iA содержит ненулевой подмодуль Y_i, изоморфный правому A-модулю B_i, и y_jA содержит ненулевой подмодуль Y_j, изоморфный правому A-модулю B_j. По условию $\mathrm{Hom}(Y_i, Y_j) = 0$. Тогда $\mathrm{Hom}(B_i, B_j) = 0$, поскольку $B_i \cong Y_i$ и $B_j \cong Y_j$. Для любого элемента $b_j \in B_j$ правилом $x \to b_jx$, $x \in B_i$, задаётся гомоморфизм из B_i в B_j. Так как $\mathrm{Hom}(B_i, B_j) = 0$, то $b_jB_i = 0$, откуда следует, что $B_iB_j = 0$. □

4.4. Теорема [35, теоремы 3.4, 3.8]. *Пусть A — кольцо с правым радикалом Голди $G(A_A)$. Каждый несингулярный квазиинъективный правый A-модуль является инъективным в точности тогда, когда A/G — сильно полупервичное справа кольцо.*

4.5. Предложение. *Пусть A — кольцо и Y — несингулярный бесквадратный автоморфизм-инвариантный правый A-модуль.*

1. *Если Y является существенным расширением прямой суммы равномерных модулей, то Y — существенное расширение квазиинъективного модуля M, являющегося прямой суммой равномерных квазиинъективных модулей.*
2. *Если Y — конечномерный модуль, то Y — существенное расширение квазиинъективного модуля, являющегося конечной прямой суммой равномерных квазиинъективных модулей.*
3. *Если модуль Y не является конечномерным, то существует такое бесконечное множество $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ ненулевых правых идеалов кольца A, что $B_iB_j = 0$ для всех $i \neq j$.*
4. *Если A — конечное подпрямое произведение первичных колец, то Y — конечномерный модуль, являющийся существенным расширением квазиинъективного модуля $Y_1 \oplus \ldots \oplus Y_n$, где все Y_i — квазиинъективные равномерные модули.*
5. *Если кольцо A сильно полупервично справа, то Y — инъективный модуль.*
6. *Если фактор-кольцо $A/G(A_A)$ сильно полупервично справа, то Y — инъективный модуль.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. По условию Y — существенное расширение прямой суммы равномерных модулей Y_i, $i \in I$. Каждый равномерный модуль Y_i является существенным подмодулем некоторого замкнутого равномерного подмодуля M_i модуля M. Обозначим $M = \sum\limits_{i \in I} M_i$. Тогда $M = \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$ и Y — существенное расширение модуля M. По теореме 4.2 M — автоморфизм-инвариантный модуль. Кроме того, M — прямая сумма равномерных модулей. По второму утверждению предложения 2.26 модуль M квазиинъективен. Все равномерные прямые слагаемые M_i квазиинъективного модуля M тоже квазиинъективны.

Докажем утверждение 2. Конечномерный модуль Y является существенным расширением конечной прямой суммы равномерных модулей. По утверждению 1 Y — существенное расширение квазиинъективного модуля, являющегося конечной прямой суммой равномерных квазиинъективных модулей.

Докажем утверждение 3. Так как модуль Y не является конечномерным, то Y содержит бесконечную прямую сумму $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} y_iA$ ненулевых циклических подмодулей. Для любых несовпадающих натуральных чисел i, j и произвольных подмодулей $Y_i \subseteq y_iA$, $Y_j \subseteq y_jA$ имеем $Y_i \cap Y_j \subseteq y_iA \cap y_jA = 0$, откуда по теореме 4.2 выводим, что $\operatorname{Hom}(Y_i, Y_j) = 0$. По лемме 4.3 найдётся такое множество $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ ненулевых правых идеалов кольца A, что для любого натурального числа i правый A-модуль B_i изоморфен подмодулю в y_iA и $B_iB_j = 0$ для всех $i \neq j$.

Докажем утверждение 4. По утверждению 2 достаточно доказать, что Y — конечномерный модуль. Допустим противное. По утверждению 3 существует такое бесконечное множество $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ ненулевых правых идеалов кольца A, что $B_iB_j = 0$ для всех $i \neq j$. Так как A — конечное подпрямое произведение первичных колец, то существует такое конечное множество $\{P_k\} \sum\limits_{k=1}^{n}$ первичных идеалов кольца A, что $P_1 \cap \ldots \cap P_n = 0$. Так как $B_i \neq 0$ для всех i и $P_1 \cap \ldots \cap P_n = 0$, то для любого натурального числа i найдётся такой первичный идеал $P_{\alpha(i)} \in \{P_i\}_{i=1}^{n}$, что B_i не содержится в $P_{\alpha(i)}$. Так как $P_{\alpha(i)}$ — первичный идеал и $B_iB_j = 0 \subseteq P_{\alpha(i)}$ для всех $j \neq i$, то B_j содержится в $P_{\alpha(i)}$ для всех $j \neq i$. Кроме того, B_j не содержится в $P_{\alpha(j)}$. Отсюда следует, что все идеалы $P_{\alpha(i)}$ различны. Это противоречит тому, что $\{P_k\} \sum\limits_{k=1}^{n}$ — конечное множество.

Докажем утверждение 5. Так как кольцо A сильно полупервично справа, то A — конечное подпрямое произведение первичных колец (см. [29, теорема 1]). По утверждению 4 Y — существенное расширение некоторого квазиинъективного модуля Y'. По теореме 4.4 все несингулярные квазиинъективные правые A-модули инъективны. Поэтому Y' — инъективный существенный подмодуль модуля Y. Тогда $Y = Y'$, и модуль Y инъективен.

Докажем утверждение 6. Так как модуль Y несингулярен, то $G(Y) = 0$. Тогда $YG(A_A) \subseteq G(M) = 0$. Поэтому Y естественным образом является правым $A/G(A_A)$-модулем. Непосредственно проверяется, что Y — несингулярный бесквадратный $A/G(A_A)$-модуль. С помощью предложения 1.3 проверяется, что Y — автоморфизм-инвариантный $A/G(A_A)$-модуль. Так как фактор-кольцо $A/G(A_A)$ сильно полупервично справа, то по утверждению 5 Y — инъективный $A/G(A_A)$-модуль. Поэтому Y — квазиинъективный A-модуль. По теореме 4.4 Y — инъективный A-модуль. □

4.6. Теорема. *Пусть A — кольцо и $G(A_A)$ — его правый радикал Голди. Равносильны следующие условия*:

1) *все несингулярные автоморфизм-инвариантные правые A-модули инъективны*;
2) *$A/G(A_A)$ — сильно полупервичное справа кольцо.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) вытекает из теоремы 4.4 и того, что каждый квазиинъективный модуль является автоморфизм-инвариантным.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть M — несингулярный автоморфизм-инвариантный правый A-модуль. По теореме 4.2 существует такое прямое разложение $M = X \oplus Y$, что X — квазиинъективный модуль, Y — бесквадратный несингулярный автоморфизм-инвариантный модуль. По утверждению 6 предложения 4.5 Y — инъективный модуль. По теореме 4.4 модуль X инъективен. Тогда $M = X \oplus Y$ — инъективный модуль. □

4.7. Замечание. Несингулярные автоморфизм-инвариантные модули не обязательно квазиинъективны (см. пример 2).

4.8. Лемма. *Пусть A — кольцо, X — несингулярный ненулевой правый A-модуль, $\{C_i \mid i \in I\}$ — множество всех таких ненулевых правых идеалов кольца A, что никакой ненулевой подмодуль A-модуля C_i не изоморфен подмодулю модуля X, и $\{D_j \mid j \in J\}$ — множество всех таких ненулевых правых идеалов D_j кольца A, что D_j изоморфен подмодулю модуля X. Обозначим*

$$C = \sum_{i \in I} C_i, \quad D = \sum_{j \in J} D_j, \quad B = C + D.$$

1. *Для любого подмодуля C' модуля C_A каждый гомоморфизм $f\colon C'_A \to X$ является нулевым.*
2. *Модуль X инъективен относительно модуля C_A.*
3. *B — существенный правый идеал кольца A.*
4. *Если модуль X квазиинъективен, то X инъективен относительно существенного правого идеала B.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Допустим, что $f \neq 0$. Так как X — несингулярный модуль и $C'/\operatorname{Ker} f \cong f(C') \subseteq X$, то $\operatorname{Ker} f$ не является существенным подмодулем в C'_A. Существует такой ненулевой элемент $c \in C'$, что $cA \cap \operatorname{Ker} f = 0$. Тогда ненулевой подмодуль cA модуля C' изоморфен ненулевому подмодулю $f(cA)$ модуля X. Поэтому $f(c) \neq 0$. Существует такое конечное подмножество K в I, что $c = \sum\limits_{k \in K} c_k$ и $c_k \in C_k$ для всех $k \in K$. Так как $f(c) \neq 0$, то $f(c_k) \neq 0$ для некоторого $k \in K \subseteq I$. Поэтому $c_k A$ — ненулевой подмодуль A-модуля C_k, который изоморфен ненулевому подмодулю модуля X. Это противоречит тому, что $C_k \in \{C_i \mid i \in I\}$.

Утверждение 2 вытекает из утверждения 1.

Докажем утверждение 3. Допустим, что B не является существенным правым идеалом. Тогда $B \cap E = 0$ для некоторого ненулевого правого идеала E. Тогда $C \cap E = 0$ и $D \cap E = 0$. Так как $C \cap E = 0$, то $E \notin \{C_i \mid i \in I\}$. Поэтому существует ненулевой подмодуль E_1 модуля E, который изоморфен подмодулю модуля X. Тогда $E_1 \in \{D_j \mid j \in J\}$. Поэтому $E_1 \subseteq D \cap E = 0$. Получено противоречие.

Докажем утверждение 4. Так как X — квазиинъективный модуль, то X инъективен относительно любого модуля, который изоморфен подмодулю модуля X. Поэтому X инъективен относительно каждого A-модуля D_j. По пятому утверждению пункта 1.1 модуль X инъективен относительно модуля D_A. Кроме того, X инъективен относительно модуля C_A по утверждению 2. По пятому утверждению пункта 1.1 модуль X инъективен относительно модуля $C + D = B$. □

4.9. Теорема. *Пусть A — сильно полупервичное справа кольцо и X — правый A-модуль. Если найдётся такой существенный правый идеал B кольца A, что X инъективен относительно модуля B_A, то X — инъективный модуль.*

Доказательство. По предложению 2.14 X инъективен относительно модуля $(AB)_A$, где AB — идеал, порождённый правым идеалом B. Так как B — существенный правый идеал и $B \subseteq AB$, то идеал AB — существенный правый идеал. Поскольку A — сильно полупервичное справа кольцо, то идеал AB содержит конечное подмножество $K = \{k_1, \ldots, k_n$ с нулевым правым аннулятором $r(K)$. Так как $r(K) = r(k_1) \cap \ldots \cap r(k_n) = 0$, то модуль A_A изоморфен подмодулю прямой суммы n копий модуля $(AB)_A$. Кроме того, модуль X инъективен относительно модуля $(AB)_A$. По пятому утверждению пункта 1.1 модуль X инъективен. $\square$

4.10. Замечание. В связи с теоремой 4.9 заметим, что существуют конечное коммутативное кольцо A, существенный идеал B кольца A и неинъективный B-инъективный A-модуль X. Обозначим через A, B и X конечное коммутативное кольцо $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, идеал $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ и модуль B_A соответственно. Тогда B — существенный идеал и модуль X инъективен относительно B_A. Так как X не является прямым слагаемым в A_A, то X — неинъективный модуль.

4.11. Следствие. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — сильно полупервичное справа кольцо*;
2) *каждый правый A-модуль, который инъективен относительно какого-нибудь существенного правого идеала кольца A, является инъективным модулем и A несингулярно справа.*

Следствие 4.11 вытекает из теоремы 4.9 и того, что каждое сильно полупервичное справа кольцо несингулярно справа [29].

4.12. Лемма. *Пусть A — кольцо, $G = G(A_A)$ — правый радикал Голди кольца A, $h\colon A \to A/G$ — естественный кольцевой эпиморфизм и X — несингулярный правый A-модуль.*

1. *Если B — существенный правый идеал кольца A, то $h(B)$ — существенный правый идеал кольца $h(A)$.*
2. *Если B — такой правый идеал кольца A, что $G \subseteq B$ и $h(B)$ — существенный правый идеал кольца $h(A)$, то B — существенный правый идеал кольца A.*
3. *$MG \subseteq G(M)$ для любого правого A-модуля M.*
4. *$XG = 0$ и естественный $h(A)$-модуль X несингулярен. Кроме того, если Y — произвольный несингулярный правый A-модуль, то $YG = 0$ и $h(A)$-модульные гомоморфизмы $Y \to X$ совпадают с A-модульными гомоморфизмами $Y \to X$. Следовательно, X является Y-инъективным A-модулем в точности тогда, когда X является Y-инъективным $h(A)$-модулем. Существенные подмодули $h(A)$-модуля X совпадают с существенными подмодулями A-модуля X.*
5. *X — инъективный $h(A)$-модуль в точности тогда, когда X — инъективный A-модуль.*
6. *$X_{h(A)}$ — существенное расширение прямой суммы равномерных модулей в точности тогда, когда X_A — существенное расширение прямой суммы равномерных модулей.*

7. *X_A — существенное расширение некоторого модуля, являющегося прямой суммой модулей, каждый из которых изоморфен некоторому ненулевому правому идеалу кольца A.*
8. *Если кольцо A конечномерно справа, то X_A — существенное расширение некоторого модуля, являющегося прямой суммой модулей, каждый из которых изоморфен некоторому ненулевому равномерному правому идеалу кольца A.*
9. *Если кольцо $h(A)$ конечномерно справа, то $X_{h(A)}$ — существенное расширение некоторого модуля, являющегося прямой суммой модулей, каждый из которых изоморфен некоторому ненулевому равномерному правому идеалу кольца $h(A)$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Допустим, что $h(B)$ не является существенным правым идеалом кольца $h(A)$. Тогда существует такой правый идеал C кольца A, что C строго содержит G и $h(B)\cap h(C)=h(0)$. Поскольку $h(B)\cap h(C)=h(0)$, то $B\cap C\subseteq G$. Так как C строго содержит замкнутый правый идеал G, то C_A содержит такой ненулевой подмодуль D, что $D\cap G=0$. Так как B — существенный правый идеал, то $B\cap D\neq 0$, причём $(B\cap D)\cap G=0$. Тогда $h(0)\neq h(B\cap D)\subseteq h(B)\cap h(C)=h(0)$. Получено противоречие.

Докажем утверждение 2. Допустим, что B не является существенным правым идеалом кольца A. Тогда $B\cap C=0$ для некоторого ненулевого правого идеала C кольца A и $G\cap C\subseteq B\cap C=0$. Поэтому $h(C)\neq h(0)$. Так как $h(B)$ — существенный правый идеал кольца $h(A)$, то $h(B)\cap h(C)\neq h(0)$. Пусть $h(0)\neq h(b)=h(c)\in h(B)\cap h(C)$, где $b\in B$ и $c\in C$. Тогда $c-b\in G\subseteq B$. Поэтому $c\in B\cap C=0$, откуда следует, что $h(c)=h(0)$. Получено противоречие.

Докажем утверждение 3. Для любого элемента $m\in M$ модуль mG_A является радикальным по Голди, так как mG_A — гомоморфный образ радикального по Голди модуля G. Поэтому $mG\subseteq G(M)$ и $MG\subseteq G(M)$.

Докажем утверждение 4. По утверждению 3 $XG=0$. Допустим, что $x\in X$ и $xh(B)=0$ для некоторого существенного правого идеала $h(B)$, где $B=h^{-1}\big(h(B)\big)$ — полный прообраз для $h(B)$ в кольце A. По утверждению 2 B — существенный правый идеал кольца A. Тогда $xB=0$ и $x\in \operatorname{Sing}X=0$. Поэтому X — несингулярный $h(A)$-модуль. Оставшаяся часть утверждения 4 проверяется непосредственно.

Докажем утверждение 5. Пусть R — одно из колец A, $h(A)$ и M — правый R-модуль. По шестому утверждению пункта 1.1 модуль M инъективен в точности тогда, когда M инъективен относительно модуля R_R. Теперь утверждение вытекает из утверждения 4.

Утверждение 6 вытекает из утверждения 4.

Докажем утверждение 7. Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех подмодулей модуля X, являющихся прямыми суммами модулей, каждый из которых изоморфен ненулевому правому идеалу кольца A. Множество $\mathcal{M}$ не пусто по лемме 2.15. Существует такой частичный порядок в $\mathcal{M}$, что для любых $M,M'\in\mathcal{M}$ соотношение

$M \subsetneqq M'$ равносильно тому, что $M' = M \oplus N$ для некоторого $N \in \mathcal{M}$. По лемме Цорна множество $\mathcal{M}$ содержит хотя бы один максимальный элемент K.

Допустим, что K не является существенным подмодулем модуля X. Тогда существует такой ненулевой подмодуль L несингулярного модуля X, что $K \cap L = 0$. По лемме 2.15 существует такой ненулевой правый идеал B кольца A, что модуль B_A изоморфен некоторому подмодулю L' модуля L. Это противоречит тому, что K — максимальный элемент множества $\mathcal{M}$.

Докажем утверждение 8. Так как кольцо A конечномерно справа, то каждый ненулевой правый идеал кольца A является существенным расширением конечной прямой суммы ненулевых равномерных правых идеалов. Теперь утверждение вытекает из утверждения 7.

Утверждение 9 вытекает из утверждений 6 и 8. □

4.13. Теорема. *Пусть A — кольцо и $G = A/G(A_A)$. Равносильны следующие условия:*

1) *каждый несингулярный правый A-модуль X, который инъективен относительно какого-нибудь существенного правого идеала кольца A, является инъективным модулем;*
2) *каждый квазиинъективный несингулярный правый A-модуль X, который инъективен относительно какого-нибудь существенного правого идеала кольца A, является инъективным модулем;*
3) *каждый квазиинъективный несингулярный правый A-модуль является инъективным модулем;*
4) *A/G — сильно полупервичное справа кольцо.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) очевидна.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) вытекает из утверждения 4 леммы 4.8.

Эквивалентность условий 3) и 4) следует из теоремы 4.4.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 1). Пусть R — одно из колец A, $A/G(A_A)$ и M — правый R-модуль. По шестому утверждению пункта 1.1 модуль M инъективен в точности тогда, когда M инъективен относительно модуля R_R.

Пусть $h\colon A \to A/G$ — естественный кольцевой эпиморфизм, X — несингулярный правый A-модуль, который инъективен относительно некоторого существенного правого идеала B кольца A. По утверждению 4 леммы 4.12 $XG = 0$ и X является естественным несингулярным $h(A)$-модулем. По утверждению 1 леммы 4.12 $h(B)$ — существенный правый идеал кольца $h(A)$. По утверждению 4 леммы 4.12 модуль X инъективен относительно $h(B)$. По теореме 4.9 X — инъективный $h(A)$-модуль. По утверждению 5 леммы 4.12 X — инъективный A-модуль. □

4.14. Лемма. *Пусть A — кольцо с правым радикалом Голди $G(A_A)$ и M — автоморфизм-инвариантный несингулярный правый A-модуль, являющийся существенным расширением прямой суммы равномерных модулей.*

1. *M — существенное расширение некоторого квазиинъективного несингулярного модуля K, являющегося прямой суммой равномерных модулей, замкнутых в M.*
2. *Если фактор-кольцо $A/G(A_A)$ — строго полупервичное справа кольцо, то M — инъективный модуль.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. По теореме 4.2 $M = X \oplus Y$, где X — квазиинъективный модуль, Y — автоморфизм-инвариантный бесквадратный модуль. Поэтому можно считать, что M — автоморфизм-инвариантный бесквадратный модуль. Так как M — существенное расширение прямой суммы равномерных подмодулей, то M — существенное расширение некоторого модуля K, являющегося прямой суммой равномерных замкнутых подмодулей K_i в M, $i \in I$. По теореме 4.2 K — автоморфизм-инвариантный модуль. По утверждению 2 предложения 2.26 K — квазиинъективный модуль.

Докажем утверждение 2. По утверждению 1 M — существенное расширение некоторого квазиинъективного несингулярного модуля K. По теореме 4.4 K — инъективный существенный подмодуль модуля M. Поэтому K — существенное прямое слагаемое модуля M. Тогда $M = K$ и M — инъективный модуль. □

4.15. Лемма. *Пусть A — кольцо с правым радикалом Голди $G(A_A)$ и M — автоморфизм-инвариантный несингулярный правый A-модуль. Если фактор-кольцо $A/G(A_A)$ — полупервичное правое кольцо Голди, то M — инъективный модуль.*

Доказательство. По утверждению 9 леммы 4.12 M — существенное расширение прямой суммы равномерных модулей. Кроме того, полупервичное правое кольцо Голди $A/G(A_A)$ является строго полупервичным справа кольцом [29]. По второму утверждению леммы 4.14 M — инъективный модуль. □

4.16. Теорема [57]. *Для кольца A с правым радикалом Голди $G(A_A)$ равносильны следующие условия*:

1) *$A/G(A_A)$ — полупервичное правое кольцо Голди*;
2) *любая прямая сумма автоморфизм-инвариантных несингулярных правых A-модулей является автоморфизм-инвариантным модулем*;
3) *любая прямая сумма автоморфизм-инвариантных несингулярных правых A-модулей является инъективным модулем.*

Доказательство. Импликации 3) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 1) очевидны.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3). Пусть M — прямая сумма автоморфизм-инвариантных несингулярных правых A-модулей M_i, $i \in I$. По лемме 4.15 все модули M_i инъективны. По утверждению 2 предложения 2.26 M — квазиинъективный модуль. По теореме 4.4 M — инъективный модуль. □

4.17. Следствие [38, теорема 18]. *Если A — полупервичное правое кольцо Голди, то все несингулярные автоморфизм-инвариантные правые A-модули инъективны.*

4.18. Лемма [41, раздел 3.3]. *Пусть A — несингулярное справа кольцо с максимальным правым кольцом частных Q. Тогда Q — инъективное справа регулярное кольцо, причём можно естественным образом отождествить Q с кольцом $\operatorname{End} Q_A$ и Q_A — инъективная оболочка модуля A_A.*

4.19. Лемма. *Если A — несингулярное справа кольцо с максимальным правым кольцом частных Q, то A является автоморфизм-инвариантным справа кольцом в точности тогда, когда A содержит все обратимые элементы кольца Q.*

Лемма 4.19 вытекает из леммы 4.18.

4.20. Лемма [48, гл. 12, разделы 5.1—5.4]. *Пусть A — редуцированное кольцо с максимальным правым кольцом частных Q. Тогда кольцо A несингулярно справа и слева. Если все замкнутые правые идеалы кольца A являются идеалами, то A — редуцированное кольцо и Q — инъективное справа и слева строго регулярное кольцо.*

4.21. Лемма. *Пусть A — несингулярное справа кольцо, в котором все замкнутые правые идеалы являются идеалами. Тогда A — редуцированное кольцо.*

Доказательство. Пусть a — такой элемент кольца A, что $a^2 = 0$. Существует такой замкнутый правый идеал B кольца A, что $B \cap aA = 0$ и $B + aA$ — существенный правый идеал кольца A. По условию замкнутый правый идеал B является идеалом. Поэтому $aB = 0$, поскольку aB содержится в пересечении aA и B. Тогда $a(B + aA) = 0$ и $B + aA$ — существенный правый идеал. Так как кольцо A несингулярно справа, то $a = 0$. $\square$

4.22. Замечание. В [24, теоремы 7, 8, пример 9] доказано, что если A — несингулярное справа автоморфизм-инвариантное справа кольцо, то $A = S \times T$, где кольцо S инъективно справа, T_T — бесквадратный модуль, любая сумма замкнутых правых идеалов кольца T — двусторонний идеал, являющийся автоморфизм-инвариантным правым T-модулем, и для любого первичного идеала P кольца T, не являющегося существенным в T_T, фактор-кольцо T/P является телом.

4.23. Лемма. *Если A — автоморфизм-инвариантное справа несингулярное справа кольцо, то $A = S \times T$, где S — инъективное справа регулярное кольцо и T — строго регулярное кольцо, содержащее все обратимые элементы своего максимального правого кольца частных.*

Доказательство. По замечанию 4.22 и лемме 4.18 $A = S \times T$, где S — инъективное справа регулярное кольцо, T — автоморфизм-инвариантное справа несингулярное справа кольцо и каждый замкнутый правый идеал T является идеалом. По лемме 4.21 T — редуцированное кольцо. Пусть Q — максимальное правое кольцо частных кольца T. По лемме 4.19 T — редуцированное кольцо и Q — инъективное справа и слева строго регулярное кольцо. Чтобы доказать, что T — строго регулярное кольцо, достаточно показать, что произвольный элемент t

кольца T является произведением центрального идемпотента на обратимый элемент. Так как t — элемент строго регулярного кольца Q, то $t = eu$, где e — центральный идемпотент кольца Q и u — обратимый элемент кольца Q. По лемме 4.19 T содержит все обратимые элементы кольца Q. Поэтому $u \in T$. Тогда $e = tu^{-1} \in T$ и каждый элемент кольца T является произведением центрального идемпотента на обратимый элемент. $\square$

4.24. Теорема [55]. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — автоморфизм-инвариантное справа несингулярное справа кольцо*;
2) *A — автоморфизм-инвариантное справа регулярное кольцо*;
3) *$A = S \times T$, где S — инъективное справа регулярное кольцо и T — строго регулярное кольцо, содержащее все обратимые элементы своего максимального правого кольца частных.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 3) вытекает из леммы 4.23, импликация 3) $\Longrightarrow$ 2) вытекает из того, что прямое произведение регулярных колец S и T является регулярным кольцом, а импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) вытекает из того, что каждое регулярное кольцо несингулярно справа и слева. $\square$

4.25. Следствие [55]. *Если A — автоморфизм-инвариантное справа несингулярное справа неразложимое кольцо, то A — инъективное справа кольцо.*

Следствие 4.25 вытекает из теоремы 4.24 и того, что каждое строго регулярное неразложимое кольцо является телом и, следовательно, инъективным справа кольцом.

4.26. Следствие [55]. *Пусть A — автоморфизм-инвариантное справа несингулярное справа кольцо, не содержащее бесконечное множество ненулевых центральных ортогональных идемпотентов. Тогда A — инъективное справа кольцо.*

Следствие 4.26 вытекает из следствия 4.25 и того, что каждое кольцо, не содержащее бесконечное множество ненулевых центральных ортогональных идемпотентов, является конечным прямым произведением неразложимых колец.

Литература

[1] Туганбаев А. А. Строение модулей, близких к инъективным // Сиб. матем. журн. — 1977. — Т. 18, № 4. — С. 890—898.

[2] Туганбаев А. А. Характеризации колец, использующие малоинъективные и малопроективные модули // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1979. — № 3. — С. 48—51.

[3] Туганбаев А. А. Кольца, над которыми все циклические модули малоинъективны // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1981. — Вып. 6. — С. 257—262.

[4] Туганбаев А. А. Целозамкнутые кольца // Матем. сб. — 1981. — Т. 115, № 4. — С. 544—559.

[5] Туганбаев А. А. Малоинъективные модули // Матем. заметки. — 1982. — Т. 31, № 3. — С. 447—456.

[6] Туганбаев А. А. Кольца с малоинъективными циклическими модулями // Абелевы группы и модули. — 1986. — С. 151—158.

[7] Туганбаев А. А. Кольца с малоинъективными фактор-кольцами // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1991. — № 1. — С. 80—88.

[8] Туганбаев А. А. Кольца, над которыми все циклические модули вполне целозамкнуты // Дискрет. матем. — 2011. — Т. 23, № 3. — С. 120—137.

[9] Туганбаев А. А. Автоморфизм-инвариантные модули // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 4. — Р. 129—135.

[10] Туганбаев А. А. Автоморфизмы подмодулей и их продолжение // Дискрет. матем. — 2013. — Т. 25, № 1. — С. 144—151.

[11] Туганбаев А. А. Продолжения автоморфизмов подмодулей // Фундамент. и прикл. матем. — 2013. — Т. 18, вып. 3. — С. 179—198.

[12] Туганбаев А. А. Характеристические подмодули инъективных модулей // Дискрет. матем. — 2013. — Т. 25, № 2. — С. 85—90.

[13] Туганбаев А. А. Характеристические подмодули инъективных модулей над строго первичными кольцами // Дискрет. матем. — 2014. — Т. 26, № 3. — С. 121—126.

[14] Туганбаев А. А. Автоморфизм-продолжаемые модули // Дискрет. матем. — 2015. — Т. 27, № 2. — С. 106—111.

[15] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. — М.: Мир, 1979.

[16] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. — М.: Мир, 1979.

[17] Alahmadi A., Er N., Jain S. K. Modules which are invariant under monomorphisms of their injective hulls // J. Aust. Math. Soc. — 2005. — Vol. 79, no. 3. — P. 349—360.

[18] Anderson F., Fuller K. R. Rings and Categories of Modules. — Berlin: Springer, 1973.

[19] Camillo V. Distributive modules // J. Algebra. — 1975. — Vol. 36, no. 1. — P. 16—25.

[20] Dickson S. E, Fuller K. R. Algebras for which every indecomposable right module is invariant in its injective envelope // Pacific J. Math. — 1969. — Vol. 31, no. 3. — P. 655—658.

[21] Dung N. V., Huynh D. V., Smith P. F., Wisbauer R. Extending Modules. — New York: Wiley, 1994.

[22] Eisenbud D., Griffith P. Serial rings // J. Algebra. — 1971. — Vol. 17. — P. 389—400.

[23] Er N. Rings whose modules are direct sums of extending modules // Proc. Amer. Math. Soc. — 2009. — Vol. 137, no. 7. — P. 2265—2271.

[24] Er N., Singh S., Srivastava A. K. Rings and modules which are stable under automorphisms of their injective hulls // J. Algebra. — 2013. — Vol. 379. — P. 223—229.

[25] Goodearl K. R. Ring Theory. — New York: Marcel Dekker, 1976.

[26] Goodearl K. R., Warfield R. B. An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.

[27] Gordon R., Robson J. C. Krull dimension // Mem. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 133. — P. 1—78.

[28] Guil Asensio P. A., Srivastava A. K. Automorphism-invariant modules satisfy the exchange property // J. Algebra. — 2013. — Vol. 388. — P. 101—106.

[29] Handelman D. Strongly semiprime rings // Pacific J. Math. — 1975. — Vol. 60, no. 1. — P. 115—122.

[30] Handelman D., Lawrence J. Strongly prime rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 211. — P. 209—223.

[31] Jain S. K., Singh S. Quasi-injective and pseudo-injective modules // Can. Math. Bull. — 1975. — Vol. 18, no. 3. — P. 359—366.

[32] Jain S. K., Srivastava A. K., Tuganbaev A. A. Cyclic Modules and the Structure of Rings. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2012.

[33] Jeremy L. Modules et anneaux quasi-continus // Can. Math. Bull. — 1974. — Vol. 17, no. 2. — P. 217—228.

[34] Johnson R. E., Wong F. T. Quasi-injective modules and irreducible rings // J. London Math. Soc. — 1961. — Vol. 36. — P. 260—268.

[35] Kutami M., Oshiro K. Strongly semiprime rings and nonsingular quasi-injective modules // Osaka J. Math. — 1980. — Vol. 17. — P. 41—50.

[36] Lam T. Y. Exercises in Classical Ring Theory. — New York: Springer, 1995.

[37] Lawrence J. A singular primitive ring // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 45, no. 1. — P. 59—62.

[38] Lee T. K., Zhou Y. Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls // J. Algebra Appl. — 2013. — Vol. 6, no. 2. — 1250159.

[39] Lenagan T. H. Bounded hereditary Noetherian prime rings // J. London Math. Soc. — 1973. — Vol. 6. — P. 241—246.

[40] Mohamed S. H., Müller B. J. Continuous and Discrete Modules. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.

[41] Rowen L. H. Ring Theory. Vol. I. — Boston: Academic Press, 1988.

[42] Singh S. On pseudo-injective modules // Riv. Mat. Univ. Parma. — 1969. — Vol. 9. — P. 59—65.

[43] Singh S. Quasi-injective and quasi-projective modules over hereditary Noetherian prime rings // Can. J. Math. — 1974. — Vol. 26, no. 5. — P. 1173—1185.

[44] Singh S. Modules over hereditary Noetherian prime rings // Can. J. Math. — 1975. — Vol. 27, no. 4. — P. 867—883.

[45] Singh S., Jain S. K. On pseudo-injective modules and self-pseudo-injective rings // J. Math. Sci. — 1967. — Vol. 2. — P. 23—31.

[46] Singh S., Srivastava A. K. Rings of invariant module type and automorphism-invariant modules // Ring Theory and Its Applications. — Providence: Amer. Math. Soc., 2014. — (Contemp. Math.; Vol. 609). — P. 299—311.

[47] Small L. W. Semihereditary rings // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — Vol. 73, no. 5. — P. 656—658.

[48] Stenström B. Rings of Quotients. — Berlin: Springer, 1975.

[49] Stephenson W. Modules whose lattice of submodules is distributive // Proc. London Math. Soc. — 1974. — Vol. 28, no. 2. — P. 291—310.

[50] Tachikawa H. QF-3 rings and categories of projective modules // J. Algebra. — 1974. — Vol. 28, no. 3. — P. 408—413.

[51] Teply M. L. Pseudo-injective modules which are not quasiinjective // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 49, no. 2. — P. 305—310.

[52] Tuganbaev A. Semidistributive Modules and Rings. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.

[53] Tuganbaev A. A. Modules over strongly prime rings // J. Algebra Appl. — 2015. — Vol. 14, no. 5. — 1550076.

[54] Tuganbaev A. A. Automorphism-extendable semi-Artinian modules // J. Algebra Appl. — 2017. — Vol. 16, no. 2. — 1750029.

[55] Tuganbaev A. A. Automorphism-invariant non-singular rings and modules // J. Algebra. — 2017. — Vol. 485. — P. 247—253.

[56] Tuganbaev A. A. Modules over strongly semiprime rings. — arXiv:1701.07117.

[57] Tuganbaev A. A. Injective and automorphism-invariant non-singular modules // Commun. Algebra. — To appear.

[58] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.