

О частично упорядоченных алгебрах над полями

Е. Е. ШИРШОВА

Московский педагогический
государственный университет
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

УДК 512.545

Ключевые слова: частично упорядоченное поле, интерполяционная группа, направленная группа, выпуклая подгруппа.

Аннотация

Рассматриваются частично упорядоченные алгебры над частично упорядоченными полями. Описываются идеалы $\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр над направленными полями. Исследуются свойства выпуклых направленных идеалов интерполяционных $\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями. Получены некоторые результаты об идеалах линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр над направленными полями.

Abstract

E. E. Shirshova, On partially ordered algebras over fields, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 4, pp. 249–263.

Characteristics of partially ordered algebras over partially ordered fields are considered. Characteristics of ideals of $\mathcal{K}$ -ordered algebras over directed fields are described. Properties of convex directed ideals in interpolation $\mathcal{K}$ -ordered algebras over partially ordered fields are investigated. Some theorems are proved for ideals of linearly $\mathcal{K}$ -ordered algebras over directed fields.

1. Введение

Пусть $F = \langle F, +, \cdot \rangle$ — поле. Напомним, что F называется *частично упорядоченным полем* (см. [2, 13]), если $\langle F, +, \leq \rangle$ — частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию: если $a \leq b$ и $c > 0$ в $\langle F, +, \leq \rangle$, то $ac \leq bc$ и $ca \leq cb$.

Если группа $\langle F, +, \leq \rangle$ является направленной (см. лемму 9), то F называется *направленным полем*.

Так как в случае нетривиального порядка единицу частично упорядоченного кольца можно всегда сделать положительной (см. [13, с. 166]), то примем следующее соглашение.

Замечание А. Будем считать до конца статьи, что F — частично упорядоченное поле нулевой характеристики с положительной единицей.

В. М. Копытовым в 1972 году было введено определение частичного порядка для алгебр Ли (см. [3, 4]).

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 4, с. 249–263.

© 2016 Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»

Пусть F — частично упорядоченное поле, $L = \langle L, +, \alpha, [,], \leq \rangle$ — алгебра Ли над полем F .

Определение 1 [4]. Алгебра L называется частично упорядоченной алгеброй Ли, если $\langle L, +, \leq \rangle$ — частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условиям:

из того, что $a \leq b$, следует, что $\alpha a \leq \alpha b$ для всех $a, b \in L$ и $\alpha > 0$ из поля F ;

из того, что $a \leq b$, следует, что $a + [a, c] \leq b + [b, c]$ для всех $a, b, c \in L$.

Свойства частично упорядоченных алгебр Ли над частично упорядоченными полями исследовались также в работах Ю. В. Кочетовой [5–8] и работе Ю. В. Кочетовой и Е. Е. Ширшовой [10].

Позднее было определено понятие произвольной частично упорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем. Свойства таких алгебр над частично упорядоченными полями исследовались в работах Ю. В. Кочетовой и Е. Е. Ширшовой [11, 12] и в работе Ю. В. Кочетовой [9].

Определение 2 [11]. Алгебра $A = \langle A, +, \alpha, \cdot, \leq \rangle$ над частично упорядоченным полем F называется частично упорядоченной «по Копытову» ($\mathcal{K}$ -упорядоченной) алгеброй, если $\langle A, +, \leq \rangle$ — частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условиям:

из того, что $a \leq b$, следует, что $\alpha a \leq \alpha b$ для всех $a, b \in A$ и $\alpha > 0$ из поля F ;

из того, что $0 \leq a \in A$, следует, что $ab \leq a$ и $ba \leq a$ для всех $b \in A$.

В данной статье продолжается исследование свойств $\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями.

В статье используются терминология и обозначения, общепринятые в теории частично упорядоченных групп и колец (см. [2, 4, 13]).

Во втором разделе рассматриваются свойства (двусторонних) идеалов $\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр над направленными полями.

Напомним, что подгруппа M частично упорядоченной группы G называется *выпуклой*, если из неравенств $a \leq g \leq b$ следует, что $g \in M$ для всех $a, b \in M$ и $g \in G$.

Определение 3. Идеал (подпространство) I из $\mathcal{K}$ -упорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F называется выпуклым (направленным) идеалом (подпространством), если группа $\langle I, +, \leq \rangle$ является выпуклой (направленной) подгруппой группы $\langle A, +, \leq \rangle$.

Используя теорему 12 и лемму 13, мы можем доказать следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть A — $\mathcal{K}$ -упорядоченная алгебра над направленным полем F и $0 < a \in A$. Тогда в алгебре A существует выпуклый направленный идеал I_a алгебры, положительный конус которого состоит из элементов $x \in A$, удовлетворяющих неравенствам $0 \leq x \leq \alpha a$ для некоторых $\alpha > 0$ из поля F .

Теперь нам понадобится следующее определение.

Определение 4 [12]. Пусть $0 < a$ и $0 < b$ — элементы в $\mathcal{K}$ -упорядоченной алгебре A над частично упорядоченным полем F . Говорят, что элемент a бесконечно мал по сравнению с элементом b ($a \ll b$), если $\alpha a \leq b$ для всех $\alpha \in F$.

Для $\mathcal{K}$ -упорядоченной алгебры над направленным полем справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть A — $\mathcal{K}$ -упорядоченная алгебра над направленным полем F , $0 < a \in A$ и $a \ll b$ для $b \in A$. Тогда существует направленный идеал I алгебры A , удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) I — наименьший выпуклый идеал алгебры, содержащий элемент a ;
- 2) $b \notin I$;
- 3) $x \ll b$ для всех элементов $x \in I$.

В. Н. Бибасовой и Е. Е. Ширшовой [1] определено понятие $\mathcal{K}$ -упорядоченного кольца.

Определение 5 [1]. Кольцо R называется частично $\mathcal{K}$ -упорядоченным кольцом, если $\langle R, +, \leq \rangle$ — частично упорядоченная группа, удовлетворяющая следующему условию: если $0 \leq a$ в $\langle R, +, \leq \rangle$, то $ab \leq a$ и $ba \leq a$ для всех $b \in R$.

В $\mathcal{K}$ -упорядоченном кольце существует идеал со свойствами, похожими на свойства идеала из теоремы 2 (см. лемму 14). Поскольку любая $\mathcal{K}$ -упорядоченная алгебра является $\mathcal{K}$ -упорядоченным кольцом, между данными идеалами существует зависимость.

Теорема 3. Пусть A — $\mathcal{K}$ -упорядоченная алгебра над направленным полем F , $0 < a \in A$ и $a \ll b$ для $b \in A$. Если I — идеал алгебры A , определённый в теореме 2, а J — идеал $\mathcal{K}$ -упорядоченного кольца $\langle A, +, \cdot, \leq \rangle$, определённый в лемме 14, то $J \subseteq I$.

Во втором разделе рассматриваются также алгебры над архимедовыми полями.

Определение 6 [2, 13]. Частично упорядоченное поле F называется архимедовым, если для любых $a, b \in F$ из соотношений $0 < a$ и $0 < b$ следует, что $na > b$ для некоторого целого числа $n > 0$.

Теорема 4. Если в условиях теоремы 3 поле F является архимедовым, то $I = J$.

Теорема 4 является прямым следствием теоремы 3 и следующей леммы.

Лемма 5. Если A — $\mathcal{K}$ -упорядоченная алгебра над архимедовым направленным полем, то любая выпуклая направленная подгруппа частично упорядоченной группы $\langle A, +, \leq \rangle$ является идеалом алгебры A .

Напомним определение.

Определение 7 [2, 12]. Векторное пространство V над частично упорядоченным полем F называется частично упорядоченным векторным пространством, если $\langle V, +, \leq \rangle$ — частично упорядоченная группа, удовлетворяющая условию: из того, что $0 \leq v$, следует, что $0 \leq \alpha v$ для всех $v \in V$ и $\alpha > 0$ из поля F .

Чтобы доказать лемму 5, нам следует убедиться в справедливости следующего утверждения о свойствах частично упорядоченных векторных пространств.

Теорема 6. Пусть V — векторное пространство над архимедовым направленным полем F . Тогда любая выпуклая направленная подгруппа частично упорядоченной группы $\langle V, +, \leq \rangle$ является подпространством пространства V .

Напомним, что частично упорядоченная группа G называется *интерполяционной группой* (см., например, [14, 16, 17]), если для любых элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ из неравенств $a_1, a_2 \leq b_1, b_2$ следует существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leq c \leq b_1, b_2$.

Определение 8. $\mathcal{K}$ -упорядоченную алгебру A над частично упорядоченным полем F будем называть интерполяционной алгеброй ($\mathcal{IK}$ -упорядоченной алгеброй), если группа $\langle A, +, \leq \rangle$ является интерполяционной группой.

Свойства множества всех выпуклых направленных идеалов $\mathcal{IK}$ -упорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями исследуются в третьем разделе. Здесь будет доказано следующее утверждение об идеалах $\mathcal{IK}$ -упорядоченных алгебр.

Теорема 7. Множество L всех выпуклых направленных идеалов $\mathcal{IK}$ -упорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F образует подрешётку в решётке всех идеалов алгебры A . Кроме того, L является полной решёткой сверху.

В четвёртом разделе приводятся некоторые утверждения об идеалах линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр над направленными полями.

Начнём с определений.

Определение 9 [11]. $\mathcal{K}$ -упорядоченную алгебру A над частично упорядоченным полем F называют линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченной алгеброй, если группа $\langle A, +, \leq \rangle$ является линейно упорядоченной группой.

Пусть $\mathcal{U}$ — система идеалов (подпространств) алгебры A , содержащая $\{0\}$ и A . Система $\mathcal{U}$ называется *полной*, если для любой её подсистемы $\mathcal{V}$ идеалов (подпространств) выполняется следующее условие: теоретико-множественные объединение и пересечение идеалов (подпространств), составляющих подсистему $\mathcal{V}$, принадлежат системе $\mathcal{U}$. Включение идеалов (подпространств) $I \subset J$ называется *скачком*, если из включений $I \subseteq K \subseteq J$ следует, что $I = K$ или $K = J$ для каждого идеала (подпространства) K алгебры A .

Следующая теорема является основным результатом четвёртого раздела.

Теорема 8. Пусть A — линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченная алгебра над направленным полем F . Тогда в ней существует полная система идеалов алгебры, в которой каждый скачок идеалов $I \subset J$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $JA \subseteq I$ и $AJ \subseteq I$;
- 2) I — выпуклый идеал в J ;
- 3) если $a \in I$, то $a \ll b$ для любого элемента $b \in J \setminus I$, где $b > 0$.

Множество всех положительных элементов частично упорядоченной алгебры A (положительный конус частично упорядоченной группы G) будем обозначать через A^+ (G^+).

2. Идеалы $\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр

Нам понадобятся некоторые свойства частично упорядоченных групп.

Лемма 9. Если G — частично упорядоченная группа, то следующие условия равносильны:

- 1) G является направленной группой;
- 2) для единицы группы G и каждого элемента $a \in G$ существует верхняя грань;
- 3) каждый элемент $g \in G$ представим в виде $g = ab^{-1}$, где $a, b \in G^+$.

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти в [13, предложение 1, с. 23]. $\square$

Пусть A — $\mathcal{K}$ -упорядоченная алгебра над направленным полем F , $0 < a \in A$ и

$$S = \{x \in A \mid 0 \leq x \leq \alpha a \text{ для некоторых } \alpha > 0 \text{ из поля } F\}.$$

Лемма 10. Множество S — выпуклая подполугруппа в группе $\langle A, +, \leq \rangle$.

Доказательство. Пусть $x, y \in S$. Тогда $0 \leq x \leq \alpha a$ и $0 \leq y \leq \beta a$ для некоторых элементов $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ из поля F .

В алгебре A справедливы неравенства $0 \leq x + y \leq (\alpha + \beta)a$ для положительного элемента $\alpha + \beta$ из поля F . Значит, $\langle S, + \rangle$ — полугруппа с нулём.

Если $x \leq u \leq y$ для $u \in A$, то $0 \leq u \leq \beta a$ для $0 < \beta$ из поля F . Это означает, что $u \in S$. $\square$

Пусть G — частично упорядоченная аддитивная абелева группа.

Доказательство следующего утверждения можно найти, например, в [4, 13].

Лемма 11. Пусть M — подмножество группы G . Тогда $M = G^+$ относительно некоторого частичного порядка $\leq$ в том и только в том случае, если M удовлетворяет следующим условиям:

- а) $M + M \subseteq M$;
- б) $M \cap -M = \{0\}$, где $-M = \{g \in G \mid -g \in M\}$.

Рассмотрим множество

$$H = \{h \in A \mid h = x - y \text{ для некоторых } x, y \in S\}.$$

Теорема 12. H — выпуклое направленное подпространство векторного пространства A , и S — положительный конус частично упорядоченной группы $\langle H, +, \leq \rangle$.

Доказательство. Пусть $h_1, h_2 \in H$, где $h_1 = x_1 - y_1$ и $h_2 = x_2 - y_2$ для некоторых элементов $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S$.

В алгебре A $h_1 + h_2 = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)$, где по лемме 10 $x_1 + x_2, y_1 + y_2 \in S$, т. е. $h_1 + h_2 \in H$.

Если $h \in H$, где $h = x - y$ для некоторых элементов $x, y \in S$, то элемент $-h = y - x$ лежит в алгебре A , т. е. $-h \in H$.

Так как $0 \in H$, то H — подгруппа группы $\langle A, + \rangle$.

Из леммы 10 следует, что множество S удовлетворяет условию а) леммы 11.

Пусть $x \in S \cap -S$. Тогда из определения множества S следует справедливость неравенств $0 \leq x$ и $x \leq 0$. Из последних неравенств следует, что $x = 0$. Таким образом, множество S удовлетворяет условию б) леммы 11. Следовательно, $S = H^+$. Значит, по условию 3) леммы 9, подгруппа H является направленной.

Допустим, что $u \leq x \leq v$, где $u = a - b, v \in H$ для $a, b \in H^+$ и $x \in A$. В группе H справедливы неравенства

$$0 \leq a \leq x + b \leq v + b.$$

Так как по лемме 10 H^+ — выпуклое подмножество в алгебре A , то $x + b \in H^+$. Следовательно, $x \in H$, т. е. H — выпуклая подгруппа группы $\langle A, +, \leq \rangle$.

Пусть $\gamma \in F$ и $h \in H$, где $h = x - y$ для некоторых элементов $x, y \in S$. Тогда $0 \leq x \leq \alpha a$ и $0 \leq y \leq \beta a$ для $0 < \alpha, 0 < \beta \in F$.

Если $0 < \gamma$, то в алгебре A справедливы следующие соотношения:

$$0 \leq \gamma x \leq \gamma(\alpha a) = (\gamma\alpha)a, \quad 0 \leq \gamma y \leq \gamma(\beta a) = (\gamma\beta)a$$

для $0 < \gamma\alpha$ и $0 < \gamma\beta$ из поля F .

Согласно лемме 10 элементы γx и γy принадлежат множеству S . Так как в алгебре A $\gamma h = \gamma x - \gamma y$, то $\gamma h \in H$.

Если $\gamma < 0$, то $-\gamma > 0$. В этом случае в алгебре A справедливы равенства

$$\gamma h = (-\gamma)(-h) = (-\gamma)y - (-\gamma)x,$$

где по доказанному ранее $(-\gamma)y, (-\gamma)x \in H$. Значит, $\gamma h \in H$.

Если $\gamma \parallel 0$, то в направленном поле F по условию 3) леммы 9 $\gamma = \delta - \tau$ для некоторых элементов $\delta > 0$ и $\tau > 0$ из поля F .

В алгебре A имеет место равенство $\gamma h = \delta h - \tau h$, где по доказанному ранее элементы δh и τh принадлежат подгруппе H . Таким образом, $FH \subseteq H$. Следовательно, H — подпространство векторного пространства A . Остаётся вспомнить определение 3. $\square$

Для описания свойств идеалов $\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр полезна следующая лемма.

Лемма 13. Если I — выпуклое направленное подпространство в $\mathcal{K}$ -упорядоченной алгебре A над частично упорядоченным полем F , то I — идеал алгебры A .

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти в [11, предложение 1] или в [12, предложение 2.2.3]. $\square$

Доказательство теоремы 2. Из теоремы 1 следует существование выпуклого направленного идеала $I = I_a$ алгебры A .

Рассмотрим условие 1). Пусть J — произвольный выпуклый идеал алгебры A , для которого $a \in J$. Тогда $\alpha a \in J$ для всех $\alpha \in F$.

Если $x \in I^+$, то по теореме 12 справедливы неравенства $0 \leq x \leq \alpha a$ для некоторого $\alpha > 0$ из поля F . Так как по определению 3 $\langle J, + \rangle$ — выпуклая подгруппа аддитивной группы алгебры A и $\alpha a \in J$, то $x \in J$. Следовательно, $I^+ \subseteq J$.

Из условия 3) леммы 9 следует, что $I \subseteq J$, так как по определению 3 $\langle I, + \rangle$ — направленная группа.

Рассмотрим условие 2). Пусть, от противного, $b \in I$. Тогда по теореме 12 найдётся $\alpha > 0$ в поле F , для которого справедливо неравенство $b \leq \alpha a$. Отсюда следует, что в алгебре A $b + b \leq (\alpha + \alpha)a$. Так как $0 < b$, то по условию теоремы и определению 2 справедливо неравенство $(\alpha + \alpha)a \leq b$ для $\alpha + \alpha \in F$. Значит, $b \leq 0$, что противоречит выбору элемента b .

Рассмотрим условие 3). Рассмотрим элементы $x \in I$ и $\gamma \in F$. Пусть $0 \leq x$. Тогда по теореме 12 $x \leq \alpha a$ для некоторого элемента $\alpha > 0$ из F .

Если $0 < \gamma$, то в алгебре A верны соотношения

$$\gamma x \leq \gamma(\alpha a) = (\gamma \alpha) a$$

для элемента $\gamma \alpha$ из поля F . Но по условию теоремы и определению 2 $(\gamma \alpha) a \leq b$. Отсюда по свойству транзитивности следует, что $\gamma x \leq b$.

Если $\gamma < 0$, то $-\gamma > 0$. Так как $-x \leq 0 \leq a$, то в алгебре A имеют место соотношения

$$\gamma x = (-\gamma)(-x) \leq (-\gamma)a.$$

Так как по условию теоремы и определению 2 $(-\gamma)a \leq b$, то $\gamma x \leq b$.

Пусть $\gamma \parallel 0$. Тогда в направленном поле F по условию 3) леммы 9 $\gamma = \delta - \tau$ для некоторых элементов $\delta > 0$ и $\tau > 0$ из поля F . В этом случае в алгебре A верны соотношения

$$\delta x \leq \delta(\alpha a) = (\delta \alpha) a, \quad -\tau x = (-\tau)x = \tau(-x) < \tau a.$$

Учитывая условие теоремы и определение 2, заключаем, что в алгебре A справедливы соотношения

$$\gamma x = \delta x + (-\tau x) < (\delta \alpha) a + \tau a = (\delta \alpha + \tau) a \leq b.$$

Следовательно, если $0 \leq x$, то $\gamma x \leq b$ для всех $\gamma \in F$.

Если $x < 0$, то $-x > 0$. В алгебре A по доказанному ранее верны соотношения

$$\gamma x = (-\gamma)(-x) \leq b$$

для всех $\gamma \in F$.

Пусть $x \parallel 0$. Так как I — направленный идеал алгебры A , то по определению 3 и условию 3) леммы 9 $x = u - v$ для некоторых элементов $u > 0$ и $v > 0$ из идеала I .

Если $\gamma > 0$, то $\gamma v > 0$ и $-\gamma v < 0$. Поэтому имеют место следующие соотношения в алгебре A :

$$\gamma x = \gamma u - \gamma v < \gamma u,$$

где по ранее доказанному $\gamma u \leq b$.

Если $\gamma < 0$, то $-\gamma > 0$. Тогда $(-\gamma)u > 0$, откуда с учётом ранее доказанного получаем, что в алгебре A

$$\gamma x = (-\gamma)(-x) = (-\gamma)v - (-\gamma)u < (-\gamma)v \leq b.$$

Пусть $\gamma \parallel 0$. Тогда в направленном поле F по условию 3) леммы 9 $\gamma = \delta - \tau$ для некоторых элементов $\delta > 0$ и $\tau > 0$ из поля F . В этом случае в алгебре A справедливы соотношения

$$\gamma x = \gamma u - \gamma v = (\delta - \tau)u - (\delta - \tau)v = (\delta u + \tau v) - (\tau u + \delta v) < \delta u + \tau v,$$

так как $\tau u + \delta v > 0$.

В подгруппе $\langle I, +, \leq \rangle$ существует элемент $w = u + v$, для которого $u, v < w$. Поэтому верны соотношения

$$\delta u + \tau v \leq \delta w + \tau w = (\delta + \tau)w,$$

где $\delta + \tau \in F$. Так как $0 < w$, то по определению 2 $(\delta + \tau)w \leq b$. Из последнего неравенства по свойству транзитивности получаем, что $\gamma x < b$. Таким образом, $\gamma x \leq b$ для всех $\gamma \in F$.

Теорема доказана полностью. $\square$

Далее нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 14 [1, теорема 8]. Пусть R — частично K -упорядоченное кольцо, a и b принадлежат множеству $R^+ \setminus \{0\}$ и неравенство $na \leq b$ справедливо для всех целых чисел n . Тогда существует направленный идеал J кольца R , положительный конус которого состоит из $x \in R$, удовлетворяющих неравенствам $0 \leq x \leq na$ для некоторых целых чисел $n > 0$. Кроме того, идеал J удовлетворяет следующим условиям:

- 1) J — наименьший выпуклый идеал, содержащий элемент a ;
- 2) $b \notin J$;
- 3) если $x \in J$, то $nx \leq b$ для всех целых чисел n .

Здесь и далее если $n > 0$, то

$$nx = \underbrace{x + x + \dots + x}_n.$$

Доказательство теоремы 3. Пусть $0 \leq x \in J$. По определению идеала J в лемме 14 справедливо неравенство $x \leq na$ для некоторого целого числа $n > 0$. Для единицы 1 поля F в алгебре A имеют место следующие равенства:

$$na = \underbrace{a + a + \dots + a}_n = \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_n \cdot a = \alpha a.$$

Из замечания А следует, что верны соотношения

$$0 < \alpha = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n \in F.$$

Таким образом, справедливо неравенство $x \leq \alpha a$, где $\alpha \in F$ и $0 < \alpha$.

Согласно определению идеала I в теореме 2 имеет место включение $J^+ \subseteq I$. Следовательно, по условию 3) леммы 9 $J \subseteq I$, так как по условию теоремы и определению 3 $\langle J, + \rangle$ является направленной группой.

Теорема доказана полностью. $\square$

Доказательство теоремы 6. Пусть H — выпуклая направленная подгруппа группы $\langle V, +, \leq \rangle$. Рассмотрим элементы $0 < a \in H$ и $\alpha \in F$. Положим $\alpha > 0$. Тогда по определению 7 $\alpha a > 0$.

Согласно замечанию А для единицы 1 поля F имеет место неравенство $1 > 0$. Так как поле F является архимедовым, то по определению 6 существует целое число $n > 0$, для которого справедливо неравенство $n \cdot 1 > \alpha$, т. е. $n \cdot 1 - \alpha > 0$. Тогда по определению 7 получаем, что $(n \cdot 1 - \alpha)a > 0$.

В пространстве V имеют место следующие соотношения:

$$na = \underbrace{a + a + \dots + a}_n = \underbrace{(1 + 1 + \dots + 1)}_n \cdot a = (n \cdot 1)a > \alpha a.$$

Таким образом, $0 < \alpha a < na$, где $na \in H$. Значит, $\alpha a \in H$, так как H — выпуклая подгруппа группы $\langle V, +, \leq \rangle$.

Если $\alpha < 0$, то $-\alpha > 0$. Тогда в пространстве V по доказанному $-\alpha a = (-\alpha)a \in H$. Отсюда следует, что $\alpha a \in H$, так как H — подгруппа.

Пусть $\alpha \parallel 0$. Тогда по условию 3) леммы 9 $\alpha = \beta - \gamma$ для некоторых элементов $\beta > 0, \gamma > 0 \in F$, так как F — направленное поле. По доказанному ранее $\beta a, \gamma a \in H$. Так как $\alpha a = \beta a - \gamma a$ в пространстве V , то $\alpha a \in H$. Таким образом, если $0 < a \in H$, то $\alpha a \in H$ для любого $\alpha \in F$.

Если $a < 0$, то $-a > 0$. Тогда в пространстве V по доказанному $-\alpha a = \alpha(-a) \in H$. Значит, $\alpha a \in H$, так как H — подгруппа.

Если $a \parallel 0$, то по условию 3) леммы 9 $a = u - v$ для некоторых элементов $u > 0, v > 0 \in H$, так как H — направленная группа. Тогда в пространстве V $\alpha a = \alpha u - \alpha v$, где по доказанному $\alpha u, \alpha v \in H$. Следовательно, $FH \subseteq H$.

Теорема доказана полностью. $\square$

3. Интерполяционные алгебры

Нам понадобится следующее свойство частично упорядоченных групп.

Лемма 15. Для частично упорядоченной группы $G = \langle G, \cdot \rangle$ равносильны следующие условия:

- 1) G является интерполяционной группой;
- 2) если $x \leq ab$ для $x, a, b \in G^+$, то $x = a_1 b_1$ для некоторых $a_1, b_1 \in G^+$, удовлетворяющих неравенствам $a_1 \leq a$ и $b_1 \leq b$.

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти в [16, лемма 4], в [14, теорема 1] или в [15, предложение 13]. $\square$

Теорема 16. Пусть I и J — выпуклые направленные идеалы $\mathcal{IK}$ -упорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F . Тогда и сумма идеалов $I + J$ — выпуклый направленный идеал алгебры A .

Доказательство. Так как I и J — подпространства векторного пространства A над полем F , то сумма подпространств $I + J$ — подпространство пространства A .

Пусть $x \in I + J$. Тогда $x = u + v$ для некоторых элементов $u \in I$ и $v \in J$. По определению 3 $\langle I, + \rangle$ и $\langle J, + \rangle$ — направленные подгруппы в группе $\langle A, +, \leq \rangle$. По условию 2) леммы 9 существуют элементы $a \in I^+$ и $b \in J^+$, для которых верны неравенства $u \leq a$ и $v \leq b$. Таким образом, в группе $\langle A, +, \leq \rangle$ справедливы неравенства $0, x \leq a + b$ для элемента $a + b \in I + J$. Значит, по условию 2) леммы 9 $\langle I + J, + \rangle$ — направленная группа.

Пусть $w \in A$ и $0 \leq w \leq r \in I + J$, где $r = u + v$ для $u \in I$ и $v \in J$. По лемме 15 найдутся элементы $s \in I$ и $t \in J$, для которых верны соотношения

$$0 \leq s \leq u, \quad 0 \leq t \leq v, \quad w = s + t.$$

Таким образом, $w \in I + J$, т. е. $\langle I + J, + \rangle$ — выпуклая подгруппа группы $\langle A, +, \leq \rangle$. Следовательно, по определению 3 $I + J$ — выпуклое направленное подпространство пространства A .

По лемме 13 множество $I + J$ является идеалом алгебры A . $\square$

Для множества всех выпуклых направленных подгрупп интерполяционной группы справедливо следующее утверждение.

Лемма 17. Пусть G — интерполяционная группа и $\{H_i \mid i \in I\}$ — семейство выпуклых направленных подгрупп группы G . Если H — подгруппа, порождённая теоретико-множественным объединением подгрупп H_i , то H является выпуклой направленной подгруппой группы G .

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти в [16, лемма 9] или в [14, теорема 2]. $\square$

Теорема 18. Пусть $\{M_i \mid i \in J\}$ — семейство выпуклых направленных идеалов $\mathcal{IK}$ -упорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F . Если M — подгруппа, порождённая теоретико-множественным объединением подгрупп $\langle M_i, + \rangle$ в группе $\langle A, + \rangle$, то M является выпуклым направленным идеалом алгебры A .

Доказательство. По определению 3 семейство $\{\langle M_i, + \rangle \mid i \in J\}$ является семейством выпуклых направленных подгрупп в группе $\langle A, +, \leq \rangle$. По лемме 17 подгруппа M является выпуклой направленной подгруппой в группе $\langle A, +, \leq \rangle$. Пусть $m \in M$, тогда $m = m_{k_1} + m_{k_2} + \dots + m_{k_s}$ для некоторых $m_{k_j} \in M_{k_j}$.

Если $\gamma \in F$, то в алгебре A справедливо равенство

$$\gamma m = \gamma m_{k_1} + \gamma m_{k_2} + \dots + \gamma m_{k_s}$$

для $\gamma m_{k_j} \in M_{k_j}$, так как M_{k_j} является подпространством пространства A для любого индекса k_j . Следовательно, $\gamma m \in M$. Поэтому по определению 3 группа M — выпуклое направленное подпространство алгебры A .

По лемме 13 подгруппа M является идеалом алгебры A . $\square$

Следствие 19. Пусть $M_1, M_2, \dots, M_s$ — выпуклые направленные идеалы $\mathcal{IK}$ -упорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F . Если M — подгруппа, порождённая теоретико-множественным объединением подгрупп $\langle M_i, + \rangle$ в группе $\langle A, + \rangle$, то выпуклый направленный идеал M алгебры A равен сумме идеалов $M_1 + M_2 + \dots + M_s$.

Напомним свойство подгрупп интерполяционных групп.

Лемма 20. Если A и B — выпуклые направленные подгруппы абелевой интерполяционной группы G , то $A \cap B$ — выпуклая направленная подгруппа группы G .

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти, например, в [16, следствие 1]. $\square$

Лемма 21. Пусть I и J — выпуклые направленные идеалы $\mathcal{IK}$ -упорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F . Тогда $I \cap J$ также является выпуклым направленным идеалом алгебры A .

Доказательство. Согласно условию леммы и определению 3 группы $\langle I, + \rangle$ и $\langle J, + \rangle$ являются выпуклыми направленными подгруппами абелевой интерполяционной группы $\langle A, +, \leq \rangle$. Согласно лемме 20 $\langle I \cap J, + \rangle$ — выпуклая направленная подгруппа группы $\langle A, +, \leq \rangle$.

Пусть $\gamma \in F$ и $x \in I \cap J$. Так как I и J — подпространства в векторном пространстве A над полем F , то $\gamma x \in I \cap J$. Значит, $I \cap J$ — выпуклое направленное подпространство алгебры A . Из леммы 13 следует, что $I \cap J$ — идеал алгебры A . $\square$

Доказательство теоремы 7. Пусть S — множество всех идеалов алгебры A над полем F . Известно, что S образует решётку относительно теоретико-множественных включений, т. е. для идеалов I и J алгебры A считают, что

$$I \vee J = I + J, \quad I \wedge J = I \cap J.$$

Из теоремы 16 и леммы 21 следует, что множество L является подрешёткой решётки S .

Второе утверждение теоремы является следствием теоремы 18. $\square$

4. Линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченные алгебры над направленными полями

Сначала отметим, что свойства идеалов линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр над линейно упорядоченными полями рассматривались Ю. В. Кочетовой и Е. Е. Ширшовой [11, 12].

Пусть A — линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F и $0 < a \in A$. Рассмотрим множество

$$M_a = \{u \in A \mid u \ll a\}.$$

Лемма 22. Если A — линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F , то множество M_a является подпространством векторного пространства A над полем F .

Доказательство. Доказательство данного утверждения можно найти в [11, теорема 4] или в [12, теорема 2.2.1]. $\square$

Из леммы 22 вытекает следующее утверждение.

Лемма 23. Если A — линейно $\mathcal{K}$ -упорядоченная алгебра над направленным полем F , то множество M_a является выпуклым подпространством алгебры A .

Доказательство. Пусть $u \leq x \leq v$, где $u, v \in M_a$ и $x \in A$. Рассмотрим элемент $\gamma \in F$.

Если $\gamma > 0$, то в алгебре A верно неравенство $\gamma x \leq \gamma v$, в котором по лемме 22 $\gamma v \in M_a$. Из определения множества M_a следует, что $\gamma v \leq a$. Из последнего неравенства по свойству транзитивности выводим неравенство $\gamma x \leq a$.

Если $\gamma < 0$, то $-\gamma > 0$. Так как $-x \leq -u$, то в алгебре A справедливы соотношения

$$\gamma x = (-\gamma)(-x) \leq (-\gamma)(-u) = \gamma u,$$

где по лемме 22 $\gamma u \in M_a$. Из определения множества M_a следует, что $\gamma u \leq a$, и по свойству транзитивности $\gamma x \leq a$.

Пусть $\gamma \parallel 0$. Тогда в направленном поле F по условию 3) леммы 9 $\gamma = \delta - \tau$ для некоторых элементов $\delta > 0$ и $\tau > 0$ из поля F . В этом случае в алгебре A имеет место равенство $\gamma x = \delta x - \tau x$. Из доказанного следует, что $\delta x, \tau x \in M_a$.

Если $x > 0$, то в алгебре A справедливы неравенства $\tau x > 0$ и $-\tau x < 0$. Поэтому в алгебре A справедливы соотношения

$$\gamma x = \delta x - \tau x < \delta x \leq a.$$

Если $x < 0$, то $-x > 0$. В этом случае в алгебре A справедливы соотношения

$$\gamma x = (-\gamma)(-x) = (\tau - \delta)(-x) = \tau(-x) - \delta(-x).$$

Так как $\delta x > 0$, то $-\delta x < 0$. Из последнего неравенства следуют соотношения

$$\tau(-x) - \delta(-x) < \tau(-x) = (-\tau)x,$$

где по лемме 22 $(-\tau)x = -\tau x \in M_a$. Таким образом, $(-\tau)x \leq a$, и по свойству транзитивности $\gamma x \leq a$. Значит, $\gamma x \leq a$ для любого элемента $\gamma \in F$. Это означает, что $x \ll a$. Следовательно, $x \in M_a$. $\square$

Замечание В. Известно, что выпуклые подгруппы линейно упорядоченной группы образуют цепь.

Прежде чем доказать основной результат данного раздела, докажем два утверждения.

Лемма 24. Пусть A — линейно K -упорядоченная алгебра над направленным полем F и $K \subset L$ — скачок выпуклых подпространств алгебры A . Тогда $K = M_b$ для любого элемента $b \in L^+ \setminus K$.

Доказательство. Рассмотрим элементы $b \in L^+ \setminus K$ и $x \in M_b^+ \setminus \{0\}$. В алгебре A имеют место соотношения $x = 1 \cdot x \leq b$. Значит, $x \in L$, так как по определению 3 $\langle L, + \rangle$ является выпуклой подгруппой группы $\langle A, +, \leq \rangle$. Таким образом, $M_b^+ \subseteq L$.

Из условия 3) леммы 9 и леммы 23 следует, что $M_b \subseteq L$. Если $b \in M_b$, то в алгебре A имеют место соотношения $b + b = (1 + 1)b \leq b$, т. е. $b \leq 0$. Но это противоречит выбору элемента b . Значит, $M_b \subset L$.

По лемме 23 множество M_b является выпуклым подпространством алгебры A . Так как по условию леммы подпространства K и L образуют скачок, то, учитывая замечание В и определение 9, заключаем, что $M_b \subseteq K$.

Допустим, что существует элемент $a \in K^+ \setminus M_b$. Так как $a \notin M_b$, то найдётся элемент $\alpha \in F$, для которого верны соотношения $0 < b < \alpha a$. При этом $\alpha a \in K$, так как K — подпространство алгебры A . Значит, $b \in K$, так как по определению 3 $\langle K, + \rangle$ является выпуклой подгруппой группы $\langle A, +, \leq \rangle$. Но это противоречит выбору элемента b . Следовательно, $K = M_b$. $\square$

Лемма 25. Пусть A — линейно K -упорядоченная алгебра над направленным полем F и $I \subset J$ — скачок выпуклых идеалов алгебры A . Тогда $AJ \subset I$ и $JA \subset I$.

Доказательство. Если элемент $u \in I$, то $au, ua \in I$ для любого элемента $a \in A$, так как I — идеал алгебры A . Допустим, что $u \in J \setminus I$.

Если $u > 0$, то по определению 2 в алгебре A выполняются соотношения

$$\alpha(au) = (\alpha a)u \leq u, \quad \alpha(ua) = u(\alpha a) \leq u$$

для любых элементов $a \in A$ и $\alpha \in F$. По определению 4 это означает, что $au \ll u$ и $ua \ll u$. Следовательно, $au, ua \in M_u$. Так как выпуклый идеал I алгебры A является выпуклым подпространством, то из леммы 24 следует, что $au, ua \in I$.

Если $u < 0$, то $-u > 0$. Тогда в алгебре A по определению 2 выполняются соотношения

$$\alpha(au) = (-\alpha a)(-u) \leq (-u), \quad \alpha(ua) = (-u)(-\alpha a) \leq (-u)$$

для любых элементов $a \in A$ и $\alpha \in F$. По определению 4 это означает, что $ai \ll -i$ и $ia \ll -i$. Значит, $ai, ia \in M_{-i}$. Следовательно, по лемме 24 $ai, ia \in I$. $\square$

Доказательство теоремы 8. Рассмотрим множество $\mathcal{U}$ всех выпуклых идеалов алгебры A . Оно содержит идеалы $\{0\}$ и A . Если I является произвольным выпуклым идеалом алгебры A , то по определению 3 группа $\langle I, +, \leq \rangle$ — выпуклая подгруппа группы $\langle A, +, \leq \rangle$. По условию теоремы и определению 9 группа $\langle A, +, \leq \rangle$ является линейно упорядоченной. По замечанию В можно заключить, что множество $\mathcal{U}$ является линейно упорядоченным.

Рассмотрим цепь идеалов

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots \subset I_s,$$

где $I_j \in \mathcal{U}$ для каждого индекса $j = 1, 2, 3, \dots, s$. Если

$$K = \bigcup_j I_j, \quad L = \bigcap_j I_j,$$

то легко убедиться, что $K, L \in \mathcal{U}$. Значит, $\mathcal{U}$ — полная система выпуклых идеалов алгебры A . Если $I \subset J$ — скачок идеалов в системе $\mathcal{U}$, то из леммы 25 следует справедливость утверждения 1).

Утверждение 2) очевидно.

Так как любой идеал алгебры является её подпространством, то $I \subset J$ — скачок выпуклых подпространств алгебры A . Если $b \in J^+ \setminus I$, то по лемме 24 $I = M_b$. Из определения множества M_b следует справедливость утверждения 3). $\square$

Литература

- [1] Бибаева В. Н., Ширшова Е. Е. О линейно K -упорядоченных кольцах // Фундамент. и прикл. матем. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 4. — С. 13—23.
- [2] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.
- [3] Копытов В. М. Упорядочение алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 3. — С. 295—325.
- [4] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.
- [5] Кочетова Ю. В. О некоторых свойствах идеалов решёточно упорядоченных алгебр Ли // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. Математика. — 2007. — Т. 57, № 7. — С. 73—83.
- [6] Кочетова Ю. В. Первичный радикал решёточно упорядоченных алгебр Ли // УМН. — 2008. — Т. 63, № 5. — С. 191—192.
- [7] Кочетова Ю. В. О нижнем слабо разрешимом l -радикале решёточно упорядоченных алгебр Ли // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 8. — С. 137—149.
- [8] Кочетова Ю. В. Первичные и полупервичные решёточно упорядоченные алгебры Ли // Фундамент. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14, вып. 7. — С. 137—143.

- [9] Кочетова Ю. В. Радикальность решёточно $\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2015. — Т. 20, вып. 5. — С. 89—93.
- [10] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О гомоморфизмах частично упорядоченных алгебр Ли // *Избранные вопросы алгебры: Сб. статей, посвящённый памяти Н. Я. Медведева.* — Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2007. — С. 131—142.
- [11] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О линейно упорядоченных линейных алгебрах // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2009. — Т. 15, вып. 1. — С. 53—63.
- [12] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал решёточно $\mathcal{K}$ -упорядоченных алгебр // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2013. — Т. 18, вып. 1. — С. 85—158.
- [13] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.
- [14] Ширшова Е. Е. О выпуклых подгруппах групп с интерполяционным условием // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2011/2012. — Т. 17, вып. 7. — С. 187—199.
- [15] Ширшова Е. Е. О значениях элементов частично упорядоченных групп // *Фундамент. и прикл. матем.* — 2013. — Т. 18, вып. 3. — С. 199—212.
- [16] Ширшова Е. Е. О свойствах интерполяционных групп // *Матем. заметки.* — 2013. — Т. 93, № 2. — С. 295—304.
- [17] Glass A. M. W. Polars and their application in directed interpolation groups // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1972. — Vol. 166. — P. 1—25.

