Категории модулей над полупростыми конечномерными алгебрами Хопфа

В. А. АРТАМОНОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: artamon@mech.math.msu.su

УДК 512.667.7

Ключевые слова: алгебра Хопфа, представление.

Аннотация

В работе строится серия полупростых конечномерных алгебр Хопфа, имеющих только одно неодномерное неприводимое представление, размерность которого равна числу одномерных представлений алгебры.

Abstract

V. A. Artamonov, Categories of modules over semisimple finite-dimensional Hopf algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 5, pp. 5—18.

There is given a construction of a series of semisimple finite-dimensional Hopf algebras having a single irreducible representation of a dimension greater than 1. This dimension is equal to the number of one-dimensional representations.

Памяти Ю. П. Соловьёва

1. Введение

Важным направлением исследований в теории алгебр Хопфа является классификация полупростых конечномерных алгебр Хопфа с точностью до изоморфизма или, более грубо, до деформации. Последнее означает классификацию алгебр Хопфа с точностью до моноидальной эквивалентности их категорий модулей. Поэтому важным является подход, связанный с изучением моноидальных категорией модулей. Этот метод используется в настоящей работе. Исследуется класс алгебр Хопфа, у которых в каждой размерности, большей 1, имеется с точностью до изоморфизма не более одного неприводимого модуля. Напомним, что этим свойством обладают компактные группы $\mathbf{SU}(2,\mathbb{C})$, $\mathbf{SO}(3,\mathbb{R})$.

Полупростая алгебра Хопфа H над алгебраически замкнутым полем k является прямой суммой полных матричных алгебр. Одномерные компоненты находятся во взаимно-однозначном соответствии с элементами группы G групповых элементов дуальной алгебры Хопфа H^*. Таким образом, строение H как алгебры однозначно определяется порядком группы G и набором размерностей неприводимых представлений. Поэтому для описания H как алгебры Хопфа нужно найти вид коумножения.

В [6, 7] получено описание алгебр Хопфа H в случае, когда имеется одно неприводимое представление размерности $d > 1$ и $d^2 = |G|$. В [4] даётся полное описание алгебры Хопфа H в предположении, что G — циклическая группа порядка d, равного размерности единственного неприводимого представления размерности больше 1.

В настоящей работе рассматривается случай, когда у H имеется только одно неприводимое представление размерности $d > 1$. Тогда порядок $|G|$ делится на d и делит d^2 [8, §2.3].

Всюду в работе предполагается, что характеристика основного поля k равна нулю или больше размерности H.

Настоящая статья является продолжением работы [2], где в предположении, что $|G| = d$ и G — абелева группа, получено описание коумножения в алгебре Хопфа в терминах 3-коциклов. В статье показывается, что это описание сводится к 2-коциклам, удовлетворяющим более простым соотношениям. Это позволяет при некоторых ограничениях показать, что H и H^* изоморфны как алгебры.

Полученные результаты улучшают также результаты [1].

Автор признателен рецензенту за ряд полезных замечаний.

2. Тождества для коциклов

В [2] коумножение в алгебре Хопфа H при изложенных выше ограничениях описывается в терминах 3-коциклов $\kappa_{\alpha,\beta,\gamma} \in k$, где $\alpha, \beta, \gamma \in G^*$. Здесь $G^* = \mathrm{Hom}(G, k^*)$ — дуальная группа для абелевой группы G групповых элементов двойственной алгебры Хопфа H^*. По [2, формулы (22), (23), (27), теорема 6] при выполнении условий предложения 3.9 из [2] эти коциклы удовлетворяют системам уравнений

$$
\begin{aligned}
&\kappa_{\alpha\gamma,\xi,\beta\nu} = \sum_{\tau\eta=\xi} \kappa_{\alpha,\tau,\beta}\kappa_{\gamma,\eta,\nu};\\
&\sum_{\xi} \kappa_{\alpha,\xi,\beta} = 0;\\
&\kappa_{\alpha,\beta,\gamma}\kappa_{\beta,\sigma,\gamma} - \kappa_{\alpha,\beta,\sigma}\kappa_{\alpha,\sigma,\gamma} = \frac{1}{|G|}\left(\delta_{\alpha,\sigma} - \delta_{\beta,\gamma}\right),\\
&\kappa_{\alpha,\xi,\beta} = \kappa_{\beta^{-1},\xi^{-1},\alpha^{-1}} = \kappa_{\xi,\beta,\alpha},\\
&\kappa_{\alpha,\varepsilon,\varepsilon} = \delta_{\alpha,\varepsilon} - \frac{1}{|G|}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

В этом разделе мы найдём дополнительные соотношения для $\kappa_{\alpha,\beta,\gamma}$ и сведём вычисления элементов $\kappa_{\alpha,\beta,\gamma}$ к вычислению 2-коциклов $\omega_{\alpha,\beta}$ с соотношениями более простого вида.

Предложение 2.1. *Для любых $\beta, \gamma \in G^*$ выполнено равенство*

$$\kappa_{\beta,\gamma,\varepsilon}\kappa_{\gamma,\beta,\varepsilon} = \left(\delta_{\beta,\varepsilon} - \frac{1}{|G|}\right)\left(\delta_{\gamma,\varepsilon} - \frac{1}{|G|}\right) + \frac{1}{|G|}\left(1 - \delta_{\beta,\gamma}\right). \tag{2}$$

В частности,

$$\kappa_{\beta,\beta,\varepsilon} = \operatorname{sgn}\beta\left(\delta_{\beta,\varepsilon} - \frac{1}{|G|}\right),$$

где $\operatorname{sgn}\beta = \pm 1$ *и* $\operatorname{sgn}\varepsilon = 1$.

Доказательство. Для доказательства первого соотношения нужно в третьем равенстве из (1) положить $\alpha = \sigma = \varepsilon$ и воспользоваться равенствами

$$\kappa_{\alpha,\beta,\gamma} = \kappa_{\beta,\gamma,\alpha}, \quad \kappa_{\alpha,\varepsilon,\varepsilon} = \delta_{\alpha,\varepsilon} - \frac{1}{|G|}.$$

Для доказательства второго соотношения в (2) положим $\beta = \gamma$. Получаем

$$\kappa^2_{\beta,\beta,\varepsilon} = \left(\delta_{\beta,\varepsilon} - \frac{1}{|G|}\right)^2.$$

Отсюда вытекает второе равенство.

Наконец, при $\beta = \varepsilon$ имеем

$$\kappa_{\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon} = \operatorname{sgn}\varepsilon\left(1 - \frac{1}{|G|}\right).$$

Но

$$\kappa_{\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon} = 1 - \frac{1}{|G|}$$

в силу последнего равенства из (1). Поэтому $\operatorname{sgn}\varepsilon = 1$. □

Предложение 2.2. *Если* $\operatorname{char} k > |G|$ *или* $\operatorname{char} k = 0$, *то* $\kappa_{\gamma,\beta,\varepsilon} \neq 0$ *для всех* γ, β.

Доказательство. Если $\kappa_{\gamma,\beta,\varepsilon} = 0$, то по (2)

$$\left(\delta_{\beta,\varepsilon} - \frac{1}{|G|}\right)\left(\delta_{\gamma,\varepsilon} - \frac{1}{|G|}\right) + \frac{1}{|G|}(1 - \delta_{\beta,\gamma}) = 0.$$

Пусть γ, β, ε различны. Тогда

$$0 = \frac{1}{|G|^2} + \frac{1}{|G|} = \frac{1}{|G|^2}(1 + |G|),$$

откуда следует, что $\operatorname{char} k < |G|$, что противоречит предположению.

Пусть $\gamma = \beta \neq \varepsilon$. В этом случае $0 = 1/|G|^2$, что невозможно, так как $|G|$ меньше размерности $\dim H$ и потому в силу предположения на характеристику поля обратим в k.

Пусть $\beta = \varepsilon \neq \gamma$. В этом случае

$$\left(1 - \frac{1}{|G|}\right)\left(-\frac{1}{|G|}\right) + \frac{1}{|G|} = \frac{1}{|G|^2} = 0,$$

что неверно. В силу симметрии β, γ в (2) случай $\gamma = \varepsilon \neq \beta$ аналогичен только что рассмотренному.

Предположим, наконец, что $\gamma = \beta = \varepsilon$. Тогда

$$\left(1 - \frac{1}{|G|}\right)^2 = 0,$$

т. е. $|G| = 1$ в k, что противоречит предположению. □

Следствие 2.1. *Если $\sigma \neq \alpha \neq \gamma$ и $\kappa_{\alpha,\sigma,\gamma} \neq 0$, то $\kappa_{\alpha,\alpha,\gamma} = \kappa_{\alpha,\alpha,\sigma}$. В частности, если $\varepsilon \neq \alpha \neq \gamma$, то $\kappa_{\alpha,\alpha,\gamma} = \kappa_{\alpha,\alpha,\varepsilon}$.*

Доказательство. Полагая $\alpha = \beta$ в третьем равенстве из (1), получаем, что

$$\kappa_{\alpha,\sigma,\gamma}\left(\kappa_{\alpha,\alpha,\gamma} - \kappa_{\alpha,\alpha,\sigma}\right) = \kappa_{\alpha,\alpha,\gamma}\kappa_{\alpha,\sigma,\gamma} - \kappa_{\alpha,\alpha,\sigma}\kappa_{\alpha,\sigma,\gamma} = \frac{1}{|G|}\left(\delta_{\alpha,\sigma} - \delta_{\alpha,\gamma}\right) = 0.$$

Поэтому если $\kappa_{\alpha,\sigma,\gamma} \neq 0$, то $\kappa_{\alpha,\alpha,\gamma} = \kappa_{\alpha,\alpha,\sigma}$, и первое равенство доказано.

В частности, при $\sigma = \varepsilon$ получаем второе равенство. □

Следствие 2.2. *Для любого $\alpha \neq \varepsilon \in G^*$ выполнено равенство*

$$\kappa_{\alpha,\alpha,\alpha} = -(|G| - 1)\kappa_{\alpha,\alpha,\varepsilon} = (|G| - 1)\frac{\operatorname{sgn}\alpha}{|G|} = \operatorname{sgn}\alpha(1 - \frac{1}{|G|}).$$

Доказательство. Согласно [2, формулы (22), (23), (27), теорема 6] и предложению 2.1

$$\kappa_{\alpha,\alpha,\alpha} = -\sum_{\xi\neq\alpha}\kappa_{\alpha,\alpha,\xi} = -(|G| - 1)\kappa_{\alpha,\alpha,\varepsilon}.$$ □

Следствие 2.3. *Если в каждой из троек α, β, ε и α, γ, ε все элементы различны, то*

$$\kappa_{\alpha,\beta,\gamma}\kappa_{\beta,\alpha,\gamma} = \frac{1}{|G|}(1 - \delta_{\beta,\gamma}) + \frac{1}{|G|^2}.$$

Доказательство. В третьем равенстве из (1) положим $\sigma = \alpha$. По условию получаем

$$\kappa_{\alpha,\beta,\gamma}\kappa_{\beta,\alpha,\gamma} - \kappa_{\alpha,\beta,\alpha}\kappa_{\alpha,\alpha,\gamma} = \frac{1}{|G|}(1 - \delta_{\beta,\gamma}).$$

По предложению 2.2

$$\kappa_{\alpha,\beta,\alpha}\kappa_{\alpha,\alpha,\gamma} = \kappa_{\alpha,\alpha,\beta}\kappa_{\alpha,\alpha,\gamma} = \kappa_{\alpha,\alpha,\varepsilon}\kappa_{\alpha,\alpha,\varepsilon} = \frac{1}{|G|^2}.$$

Отсюда вытекает утверждение. □

Предложение 2.3. *Справедливо равенство $\operatorname{sgn}(\alpha\beta) = \operatorname{sgn}\alpha\operatorname{sgn}\beta$.*

Доказательство. Рассмотрим несколько случаев.

Случай А. Предположим, что $\alpha\beta, \alpha, \beta \neq \varepsilon$.

По [2, формулы (22), (23), (27), теорема 6]

$$\frac{\operatorname{sgn}(\alpha\beta)}{|G|} = -\kappa_{\alpha\beta,\alpha\beta,\varepsilon} = -\kappa_{\alpha\beta,\varepsilon,\alpha\beta} = -\sum_{\tau} \kappa_{\alpha,\tau,\alpha}\kappa_{\beta,\tau^{-1},\beta} =$$
$$= -\kappa_{\alpha,\alpha,\alpha}\kappa_{\beta,\alpha^{-1},\beta} - \kappa_{\alpha,\beta^{-1},\alpha}\kappa_{\beta,\beta,\beta} - \sum_{\tau\neq\alpha,\beta^{-1}} \kappa_{\alpha,\tau,\alpha}\kappa_{\beta,\tau^{-1},\beta} =$$
$$= (|G|-1)\frac{\operatorname{sgn}\alpha}{|G|}\frac{\operatorname{sgn}\beta}{|G|} + (|G|-1)\frac{\operatorname{sgn}\beta}{|G|}\frac{\operatorname{sgn}\alpha}{|G|} - (|G|-2)\frac{\operatorname{sgn}\beta}{|G|}\frac{\operatorname{sgn}\alpha}{|G|} =$$
$$= \frac{\operatorname{sgn}\beta}{|G|}\frac{\operatorname{sgn}\alpha}{|G|}|G|.$$

Отсюда следует утверждение.

Случай Б. Пусть либо α, либо β равно ε.

Если $\alpha = \varepsilon$, то
$$\operatorname{sgn}(\alpha\beta) = \operatorname{sgn}\beta = \operatorname{sgn}\varepsilon \operatorname{sgn}\beta$$
по предложению 2.1.

Случай В. Пусть $\beta = \alpha^{-1}$ и существует элемент γ, отличный от α, β, ε.

Тогда в силу абелевости группы G получаем, что $\gamma = \alpha\gamma\alpha^{-1}$ и $\alpha\gamma \neq \varepsilon$. С учётом доказанного в случаях А и Б получаем, что
$$\operatorname{sgn}\gamma = \operatorname{sgn}(\alpha\gamma\alpha^{-1}) = \operatorname{sgn}(\alpha\gamma)\operatorname{sgn}(\alpha^{-1}) = \operatorname{sgn}\alpha \operatorname{sgn}\gamma \operatorname{sgn}(\alpha^{-1}).$$
Отсюда следует, что $\operatorname{sgn}\alpha \operatorname{sgn}(\alpha^{-1}) = 1 = \operatorname{sgn}\varepsilon$.

Случай Г. Пусть любой элемент группы равен одному из элементов α, α^{-1}, ε. Тогда группа G имеет порядок не более 3.

Если порядок G равен 3, то G — циклическая группа с порождающим α, причём $\alpha^2 = \alpha^{-1}$. Применяя доказанное в случае А с $\alpha = \beta$, получаем, что $\operatorname{sgn}\alpha^{-1} = (\operatorname{sgn}\alpha)^2 = 1$. Аналогично $\operatorname{sgn}(\alpha) = \big(\operatorname{sgn}(\alpha^{-1})\big)^2 = 1$. Отсюда вытекает утверждение.

Пусть порядок G равен 2, т. е. G — циклическая группа порядка 2 с порождающим $\alpha = \alpha^{-1}$. В этом случае $1 = \operatorname{sgn}\varepsilon$ и $\operatorname{sgn}\alpha = \operatorname{sgn}(\alpha^{-1}) = \pm 1$, откуда следует, что $1 = \operatorname{sgn}\varepsilon = \operatorname{sgn}\alpha \operatorname{sgn}\alpha$. □

Следствие 2.4. *Пусть F — множество всех таких $\chi \in G^*$, что $\operatorname{sgn}\chi = 1$. Тогда F является подгруппой в G^* индекса 2 или 1.*

Теорема 2.1. *Для всех $\alpha, \gamma \in G^*$ выполнено равенство*
$$\kappa_{\alpha,\alpha,\gamma} = sgn\alpha \left(\delta_{\alpha\gamma} - \frac{1}{|G|}\right).$$

Доказательство. Если $\gamma = \varepsilon$, то утверждение вытекает из предложения 2.1. Пусть $\gamma \neq \varepsilon$. Если $\alpha = \varepsilon$, то утверждение верно по (1). Итак, можно считать, что $\alpha \neq \varepsilon \neq \gamma$.

Если $\varepsilon \neq \alpha \neq \gamma$, то утверждение вытекает из предложения 2.1 и следствия 2.1. Если $\alpha = \gamma \neq \varepsilon$, то утверждение вытекает из следствия 2.2. □

Предложение 2.4. *Для всех $\alpha, \beta, \gamma \in G^*$ выполнено равенство*

$$\kappa_{\alpha,\beta,\gamma} = \operatorname{sgn} \alpha \kappa_{\varepsilon,\beta\alpha^{-1},\gamma\alpha^{-1}}.$$

В частности, $\kappa_{\alpha\zeta,\beta\zeta,\gamma\zeta} = \operatorname{sgn} \zeta \kappa_{\alpha,\beta,\gamma}$.

Доказательство. Согласно первому и второму равенствам из (1), теореме 2.1 и (3)

$$\kappa_{\alpha,\beta,\gamma} = \sum_{\tau\eta=\beta} \kappa_{\alpha,\tau,\alpha}\kappa_{\varepsilon,\eta,\gamma\alpha^{-1}} = \sum_{\tau\eta=\beta} \operatorname{sgn}\alpha \left(\delta_{\tau,\alpha} - \frac{1}{|G|}\right) \kappa_{\varepsilon,\eta,\gamma\alpha^{-1}} =$$
$$= \sum_{\tau\eta=\beta} \operatorname{sgn}\alpha \delta_{\tau,\alpha}\kappa_{\varepsilon,\eta,\gamma\alpha^{-1}} - \frac{1}{|G|} \sum_{\tau\eta=\beta} \kappa_{\varepsilon,\eta,\gamma\alpha^{-1}} = \operatorname{sgn}\alpha \kappa_{\varepsilon,\beta\alpha^{-1},\gamma\alpha^{-1}}.$$

Отсюда по предложению 2.3 получаем, что

$$\kappa_{\alpha\zeta,\beta\zeta,\gamma\zeta} = \operatorname{sgn}(\alpha\zeta)\kappa_{\varepsilon,\beta\alpha^{-1},\gamma\alpha^{-1}} = \operatorname{sgn}\zeta \operatorname{sgn}\alpha \kappa_{\varepsilon,\beta\alpha^{-1},\gamma\alpha^{-1}} = \operatorname{sgn}\zeta \kappa_{\alpha,\beta,\gamma}.$$ □

3. Сведение к двум параметрам

Положим

$$\omega_{\alpha,\beta} = \kappa_{\alpha,\beta,\varepsilon} + \frac{1}{|G|}. \tag{3}$$

В частности, $\omega_{\alpha,\varepsilon} = \omega_{\varepsilon,\alpha} = \delta_{\alpha,\varepsilon}$. Из предложения 2.4 получаем, что

$$\kappa_{\alpha,\beta,\gamma} = \operatorname{sgn}\alpha \left(\omega_{\beta\alpha^{-1},\gamma\alpha^{-1}} - \frac{1}{|G|}\right). \tag{4}$$

Предложение 3.1. *Для любых $\alpha, \beta, \in G^*$ выполнены равенства*

$$\omega_{\alpha,\beta} - \frac{1}{|G|} = \operatorname{sgn}\alpha \left(\omega_{\alpha\beta^{-1},\alpha^{-1}} - \frac{1}{|G|}\right) = \operatorname{sgn}\beta \left(\omega_{\alpha\beta^{-1},\beta} - \frac{1}{|G|}\right).$$

Доказательство. По четвёртому равенству из (1) и предложению 2.4 получаем

$$\kappa_{\xi,\mu,\nu} = \operatorname{sgn}\xi \left(\omega_{\mu\xi^{-1},\nu\xi^{-1}} - \frac{1}{|G|}\right) = \kappa_{\mu,\nu,\xi} = \operatorname{sgn}\mu \left(\omega_{\nu\mu^{-1},\xi\mu^{-1}} - \frac{1}{|G|}\right) =$$
$$= \kappa_{\nu^{-1},\mu^{-1},\xi^{-1}} = \operatorname{sgn}(\nu^{-1}) \left(\omega_{\nu\mu^{-1},\xi^{-1}\nu} - \frac{1}{|G|}\right).$$

Положим $\alpha = \mu\xi^{-1}$, $\beta = \nu\xi^{-1}$. Тогда

$$\nu\mu^{-1} = \alpha\beta^{-1}, \quad \xi\mu^{-1} = \alpha^{-1}, \quad \xi^{-1}\nu = \beta,$$

и получаем требуемые равенства. □

Следствие 3.1. *Для любых $\alpha, \beta \in G^*$ выполнены равенства*

$$\omega_{\zeta,\tau} - \frac{1}{|G|} = \operatorname{sgn}\zeta\left(\omega_{\zeta,\zeta^{-1}\tau^{-1}} - \frac{1}{|G|}\right).$$

Доказательство. Достаточно положить $\alpha\beta^{-1} = \zeta$, $\alpha^{-1} = \tau$ в предыдущем предложении. Тогда $\beta = \zeta^{-1}\tau^{-1}$. □

Предложение 3.2. *Справедливо равенство*

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(\beta)\left[\left(\omega_{\beta,\gamma} - \frac{1}{|G|}\right)\left(\omega_{\sigma\beta^{-1},\gamma\beta^{-1}} - \frac{1}{|G|}\right) - \right.\\ \left. - \left(\omega_{\sigma\beta^{-1},\beta^{-1}} - \frac{1}{|G|}\right)\left(\omega_{\sigma,\gamma} - \frac{1}{|G|}\right)\right] = \frac{1}{|G|}\left(\delta_{\sigma,\varepsilon} - \delta_{\beta,\gamma}\right).\end{aligned}$$

Доказательство. Имеем по (4), что

$$\begin{aligned}&\kappa_{\alpha,\beta,\gamma}\kappa_{\beta,\sigma,\gamma} - \kappa_{\alpha,\beta,\sigma}\kappa_{\alpha,\sigma,\gamma} = \kappa_{\alpha,\beta,\gamma}\kappa_{\beta,\sigma,\gamma} - \kappa_{\beta,\sigma,\alpha}\kappa_{\alpha,\sigma,\gamma} =\\ &= \operatorname{sgn}(\alpha\beta)\left[\left(\omega_{\beta\alpha^{-1},\gamma\alpha^{-1}} - \frac{1}{|G|}\right)\left(\omega_{\sigma\beta^{-1},\gamma\beta^{-1}} - \frac{1}{|G|}\right) - \right.\\ &\left. - \left(\omega_{\sigma\beta^{-1},\alpha\beta^{-1}} - \frac{1}{|G|}\right)\left(\omega_{\sigma\alpha^{-1},\gamma\alpha^{-1}} - \frac{1}{|G|}\right)\right] = \frac{1}{|G|}\left(\delta_{\alpha,\sigma} - \delta_{\beta,\gamma}\right).\end{aligned}\tag{5}$$

Положим

$$\beta\alpha^{-1} = \beta_1, \quad \gamma\alpha^{-1} = \gamma_1, \quad \sigma\alpha^{-1} = \sigma_1.\tag{6}$$

Тогда $\operatorname{sgn}(\alpha\beta) = \operatorname{sgn}\beta_1$ и

$$\sigma\beta^{-1} = \sigma_1\beta_1^{-1}, \quad \gamma\beta^{-1} = \gamma_1\beta_1^{-1}, \quad \delta_{\alpha,\sigma} = \delta_{\sigma_1,\varepsilon}, \quad \delta_{\beta,\gamma} = \delta_{\beta_1,\gamma_1}.$$

Осуществим замену (6) в (5). Отбрасывая в полученном равенстве индекс 1, получаем требуемое равенство. □

Обозначим через Ω квадратную матрицу, строки и столбцы которой индексированы элементами группы G^*, причём на месте (α, β) стоит элемент $\omega_{\alpha,\beta}$.

Предложение 3.3. *Справедливы равенства*

$$\sum_{\xi}\omega_{\alpha,\xi} = \sum_{\xi}\omega_{\xi,\beta} = 1.$$

Из них вытекает второе равенство в (1). *В частности, матрица Ω дважды стохастична, т. е. сумма элементов каждой строки и каждого столбца равна* 1.

Доказательство. По второму равенству из (1) получаем

$$\sum_{\xi}\omega_{\alpha,\xi} = \sum_{\xi}\left(\kappa_{\alpha,\xi,\varepsilon} + \frac{1}{|G|}\right) = \sum_{\xi}\kappa_{\alpha,\xi,\varepsilon} + 1 = 1.$$

Аналогично проверяются второе равенство и последнее утверждение. □

Предложение 3.4. *Справедливы равенства*

$$\omega_{\alpha\gamma,\xi} = \sum_{\tau\eta=\xi} \omega_{\alpha,\tau}\omega_{\gamma,\eta}, \quad \omega_{\xi,\beta\nu} = \sum_{\tau\eta=\xi} \omega_{\tau,\beta}\omega_{\eta,\nu}.$$

Доказательство. Имеем

$$\sum_{\tau\eta=\xi} \omega_{\alpha,\tau}\omega_{\gamma,\eta} = \sum_{\tau\eta=\xi} \left(\kappa_{\alpha,\tau,\varepsilon} + \frac{1}{|G|}\right)\left(\kappa_{\gamma,\eta,\varepsilon} + \frac{1}{|G|}\right) =$$
$$= \sum_{\tau\eta=\xi} \kappa_{\alpha,\tau,\varepsilon}\kappa_{\gamma,\eta,\varepsilon} + \frac{1}{|G|}\sum_{\tau}\kappa_{\alpha,\tau,\varepsilon} + \frac{1}{|G|}\sum_{\eta}\kappa_{\gamma,\eta,\varepsilon} + |G|\frac{1}{|G|^2}.$$

По второму равенству из (1) второе и третье слагаемые равны нулю. Из первого равенства в (1) получаем, что

$$\sum_{\tau\eta=\xi} \omega_{\alpha,\tau}\omega_{\gamma,\eta} = \kappa_{\alpha\gamma,\xi,\varepsilon} + \frac{1}{|G|} = \omega_{\alpha\gamma,\xi}.$$

Аналогично проверяется второе равенство. □

Следствие 3.2. *Матрица Ω обратима, и в Ω^{-1} на месте (α,β) стоит $\omega_{\beta^{-1},\alpha^{-1}}$.*

Доказательство. По предложению 3.4 получаем, что

$$\delta_{\alpha,\beta} = \delta_{\alpha\beta^{-1},\varepsilon} = \sum_{\tau} \omega_{\alpha,\tau}\omega_{\beta^{-1},\tau^{-1}}.$$

Это означает, что произведение Ω и матрицы, в которой на месте (α,β) стоит $\omega_{\beta^{-1},\alpha^{-1}}$, равно единичной матрице. Отсюда следует утверждение. □

Предложение 3.5. *Справедливы равенства*

$$\sum_{\mu} \omega_{\alpha,\mu}\omega_{\mu,\beta} = \delta_{\alpha,\beta}.$$

В частности, $\Omega^{-1} = \Omega$ и $\omega_{\alpha,\beta} = \omega_{\beta^{-1},\alpha^{-1}}$ для всех α, β.

Доказательство. Полагая $\gamma = \varepsilon$ в третьем равенстве в (1) и суммируя по β, получаем по второму равенству в (1) и предложению 3.3, что

$$\delta_{\alpha,\sigma} - \frac{1}{|G|} = \sum_{\beta}\left(\omega_{\alpha,\beta} - \frac{1}{|G|}\right)\left(\omega_{\beta,\sigma} - \frac{1}{|G|}\right) - \left(\sum_{\beta}\kappa_{\alpha,\beta,\sigma}\right)\left(\omega_{\alpha,\sigma} - \frac{1}{|G|}\right) =$$
$$= \sum_{\beta}\omega_{\alpha,\beta}\omega_{\beta,\sigma} - \frac{1}{|G|}\left(\sum_{\beta}\omega_{\alpha,\beta} + \sum_{\beta}\omega_{\beta,\sigma}\right) + \frac{1}{|G|} = \sum_{\beta}\omega_{\alpha,\beta}\omega_{\beta,\sigma} - \frac{1}{|G|}.$$

Отсюда вытекает первое утверждение. Полученное равенство означает, что $\Omega^2 = E$, что доказывает последнее утверждение ввиду следствия 3.2. $\square$

Теорема 3.1. *Пусть набор элементов $\omega_{\alpha,\beta} \in k$, где $\alpha, \beta \in G^*$, удовлетворяет условиям предложений* 3.1—3.5. *Тогда элементы $\kappa_{\alpha,\beta,\gamma}$, определённые равенством* (4), *удовлетворяют соотношениям* (1) *и потому задают полупростую алгебру Хопфа.*

Доказательство. Проверим первое равенство в (1). По предложениям 3.3, 3.4 имеем

$$\sum_{\tau\eta=\xi} \kappa_{\alpha,\tau,\beta}\kappa_{\gamma,\eta,\nu} = \sum_{\tau\eta=\xi} \operatorname{sgn}\alpha\left(\omega_{\tau\alpha^{-1},\beta\alpha^{-1}} - \frac{1}{|G|}\right)\operatorname{sgn}\gamma\left(\omega_{\eta\gamma^{-1},\nu\gamma^{-1}} - \frac{1}{|G|}\right) =$$

$$= \operatorname{sgn}(\alpha\gamma)\Bigg[\sum_{\tau\eta=\xi} \omega_{\tau\alpha^{-1},\beta\alpha^{-1}}\omega_{\eta\gamma^{-1},\nu\gamma^{-1}} -$$

$$- \frac{1}{|G|}\left(\sum_{\tau} \omega_{\tau\alpha^{-1},\beta\alpha^{-1}} + \sum_{\eta} \omega_{\eta\gamma^{-1},\nu\gamma^{-1}}\right) + \frac{1}{|G|}\Bigg] =$$

$$= \operatorname{sgn}(\alpha\gamma)\left[\omega_{\xi\alpha^{-1}\gamma^{-1},\beta\nu\alpha^{-1}\gamma^{-1}} - \frac{2}{|G|} + \frac{1}{|G|}\right] = \kappa_{\alpha\gamma,\xi,\beta\nu}.$$

Рассмотрим второе равенство из (1). По предложению 3.3 получаем

$$\sum_{\xi} \kappa_{\alpha,\xi,\beta} = \operatorname{sgn}\alpha\sum_{\xi}\left(\omega_{\xi\alpha^{-1},\beta\alpha^{-1}} - \frac{1}{|G|}\right) =$$

$$= \operatorname{sgn}\alpha\left(\sum_{\xi}\omega_{\xi,\beta\alpha^{-1}} - 1\right) = \operatorname{sgn}\alpha(1-1) = 0.$$

Третье равенство в (1) вытекает из предложения 3.2, а четвёртое — из предложения 3.1.

Наконец, последнее равенство вытекает из доказанного третьего и (4). Действительно,

$$\kappa_{\alpha,\varepsilon,\varepsilon} = \kappa_{\varepsilon,\varepsilon,\alpha} = \operatorname{sgn}\varepsilon\left(\omega_{\varepsilon,\alpha} - \frac{1}{|G|}\right) = \delta_{\varepsilon,\alpha} - \frac{1}{|G|}. \qquad \square$$

Таким образом, задача описания элементов $\kappa_{\alpha,\beta,\gamma}$ сводится к описанию элементов $\omega_{\alpha,\beta}$.

4. Групповые элементы

По [2, формула (17); 5, формулы (12), (13)] умножение и коумножение в H имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\Delta(e_g) = \sum_{f,h\in G} e_f\otimes e_h + \frac{1}{|G|^2}\sum_{\alpha,\beta\in G^*}\alpha_g^{-1}R_{\alpha\beta}\otimes R_{\beta\alpha},\\
&\Delta(R_{\alpha\beta}) = \sum_{g\in G}(\beta_g R_{\alpha\beta}\otimes e_g + \alpha_g e_g\otimes R_{\alpha\beta}) + \sum_{\xi\in G^*}\kappa_{\alpha,\xi,\beta}R_{\alpha\xi}\otimes R_{\xi\beta},\\
&e_g e_f = \delta_{f,g}e_g,\quad R_{\alpha\beta}e_g = e_g R_{\alpha\beta} = 0,\quad R_{\alpha\beta}R_{\tau\xi} = \mu_{\alpha,\tau,\beta,\xi}R_{\alpha\tau,\beta\xi}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Рассмотрим групповые элементы x в H из [2]. Пусть

$$
x = \sum_{g\in G}\chi_g e_g + \sum_{\alpha,\beta\in G^*} a_{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}.
$$

По [2; 5, лемма 3.1]

$$
\begin{aligned}
\Delta(x) = \sum_{g\in G}\chi_g\Bigg(\sum_{f,h\in G,\ fh=g} e_f\otimes e_h + \frac{1}{|G|^2}\sum_{\alpha,\beta\in G^*}\alpha_g^{-1}R_{\alpha\beta}\otimes R_{\beta\alpha}\Bigg) +\\
+ \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}\Bigg(\sum_g(\beta_g R_{\alpha\beta}\otimes e_g + \alpha_g e_g\otimes R_{\alpha\beta}) + \sum_\xi \kappa_{\alpha,\xi,\beta}R_{\alpha\xi}\otimes R_{\xi\beta}\Bigg).
\end{aligned}
$$

С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
x\otimes x = \sum_{f,h\in G}\chi_f\chi_h e_f\otimes e_h + \sum_{g,\alpha\beta}\chi_g a_{\alpha\beta}e_g\otimes R_{\alpha\beta} +\\
+ \sum_{g,\alpha,\beta}\chi_g a_{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\otimes e_g + \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} a_{\alpha\beta}a_{\alpha'\beta'}R_{\alpha\beta}\otimes R_{\alpha'\beta'}.
\end{aligned}
$$

Так как $\Delta(x) = x\otimes x$, то, приравнивая коэффициент при $e_f\otimes e_h$ в двух последних равенствах, получаем, что $\chi_f\chi_h = \chi_{fh}$, т. е. $\chi\in G^*$.

Приравнивая коэффициент при $e_g\otimes R_{\alpha\beta}$ в тех же равенствах, получаем $a_{\alpha\beta}\alpha_g = \chi_g a_{\alpha\beta}$ для всех g. Если $a_{\alpha\beta}\neq 0$, то $\alpha = \chi$. Аналогично, приравнивая коэффициент при $R_{\alpha\beta}\otimes e_g$, получаем, что $\beta = \chi$.

Итак,

$$
x = \sum_{g\in G}\chi_g e_g + a_\chi R_{\chi\chi},
$$

и потому

$$
\begin{aligned}
\Delta(x) = \sum_{g\in G}\chi_g\Bigg(\sum_{f,h\in G,\ fh=g} e_f\otimes e_h + \frac{1}{|G|^2}\sum_{\alpha,\xi\in G^*}\alpha_g^{-1}R_{\alpha\xi}\otimes R_{\xi\alpha}\Bigg) +\\
+ a_\chi\Bigg(\sum_g \chi_g(R_{\chi\chi}\otimes e_g + e_g\otimes R_{\chi\chi}) + \sum_\xi \kappa_{\chi,\xi,\chi}R_{\chi\xi}\otimes R_{\xi\chi}\Bigg) =\\
= x\otimes x = \sum_{f,g}\chi_f\chi_h e_f\otimes e_h + a_\chi\sum_g\chi_g(e_g\otimes R_{\chi\chi} + R_{\chi\chi}\otimes e_g) + a_\chi^2 R_{\chi\chi}\otimes R_{\chi\chi}.
\end{aligned}
$$

Поэтому, приравнивая коэффициенты при $R_{\alpha\xi}\otimes R_{\xi\alpha}$, получаем

$$
\frac{1}{|G|^2}\sum_g\chi_g\alpha_g^{-1} + a_\chi\kappa_{\chi,\xi,\chi}\delta_{\chi,\alpha} = \delta_{\alpha\chi}\delta_{\xi\chi}a_\chi^2.
$$

Заметим, что $\chi, \alpha^{-1}, \chi\alpha^{-1} \in G^*$. Поэтому

$$\sum_{g\in G} \chi_g \alpha_g^{-1} = \delta_{\alpha,\chi}|G|.$$

Следовательно, последнее равенство имеет вид

$$\frac{1}{|G|}\delta_{\alpha\chi} + a_\chi \kappa_{\chi,\xi,\chi}\delta_{\chi,\alpha} = \delta_{\alpha\chi}\delta_{\xi\chi}a_\chi^2.$$

Это равенство заведомо выполнено, если $\alpha \neq \chi$. Пусть $\chi = \alpha$. Тогда получаем равенство

$$\frac{1}{|G|} + a_\chi \kappa_{\chi,\xi,\chi} = \delta_{\xi\chi}a_\chi^2. \tag{8}$$

Напомним, что

$$\kappa_{\chi,\xi,\chi} = \operatorname{sgn}\chi\left(\delta_{\chi\xi} - \frac{1}{|G|}\right)$$

по теореме 2.1. Полагая $\xi \neq \chi$ в (8), получаем, что $a_\chi = \operatorname{sgn}\chi$. Если же $\xi = \chi$ в (8), то

$$\frac{1}{|G|} + \operatorname{sgn}\chi\left(1 - \frac{1}{|G|}\right) = 1,$$

и поэтому $\operatorname{sgn}\chi = 1$.

Итак, в обозначениях следствия 2.4

$$x = \sum_g \chi_g e_g + R_{\chi\chi}, \quad \chi \in F. \tag{9}$$

Теорема 4.1. *Группа $G(H)$ изоморфна группе элементов вида (9). В частности, ставя в соответствие элементу $\chi \in F$ элемент вида (9), получаем изоморфизм групп $G(H) \simeq F$. Таким образом, если $|G|$ нечётен, то $F = G$ и число одномерных полупростых компонент в H^* равно порядку группы G.*

5. Дуальная алгебра

Дуальная алгебра H^* для H является прямой суммой групповой алгебры kG и дуального подпространства $\mathrm{Mat}(d,k)^*$.

Найдём вид произведения $*$ и коумножения Δ^* в H^*. Через $\langle x, y\rangle$ будем обозначать спаривание $x \in H^*$ и $y \in H$. Обозначим через $\{R^*_{\alpha,\beta} \mid \alpha,\beta \in G^*\}$ дуальный базис для базиса $\{R_{\alpha,\beta} \mid \alpha,\beta \in G^*\}$ в $\mathrm{Mat}(d,k)^*$.

Пусть

$$R^*_{\alpha\beta} * R^*_{\gamma\eta} = \sum_{\tau,\sigma} \omega^{\tau\sigma}_{\alpha,\gamma,\beta,\eta} R^*_{\tau\sigma} + \sum_g \rho_g g.$$

Тогда

$$\langle R^*_{\alpha\beta} * R^*_{\gamma\eta}, R_{\tau\sigma}\rangle = \omega^{\tau\sigma}_{\alpha,\gamma,\beta,\eta} = \sum_\xi \kappa_{\sigma,\xi,\tau}\langle R^*_{\alpha\beta}, R_{\tau\xi}\rangle\langle R^*_{\gamma\eta}, R_{\xi\sigma}\rangle = \kappa_{\eta,\beta,\alpha}\delta_{\beta,\gamma}\delta_{\alpha,\tau}\delta_{\eta,\sigma}.$$

Далее по (7)

$$\langle R^*_{\alpha\beta} * R^*_{\gamma\eta}, e_g\rangle = \rho_g = \frac{1}{|G|^2}\sum_{\sigma,\tau\in G^*}\sigma_g^{-1}\langle R^*_{\alpha\beta}, R_{\sigma\tau}\rangle\langle R^*_{\gamma\eta}, R_{\tau\sigma}\rangle =$$
$$= \frac{1}{|G|^2}\sum_{\sigma,\tau\in G^*}\sigma_g^{-1}\delta_{\alpha,\sigma}\delta_{\beta,\tau}\delta_{\gamma,\tau}\delta_{\eta,\sigma} = \frac{1}{|G|^2}\alpha_g^{-1}\delta_{\alpha,\eta}\delta_{\beta,\gamma}.$$

Итак,

$$R^*_{\alpha\beta} * R^*_{\gamma\eta} = \kappa_{\eta,\beta,\alpha}\delta_{\beta,\gamma}R^*_{\alpha,\eta} + \frac{\delta_{\alpha,\eta}\delta_{\beta,\gamma}}{|G|^2}\sum_{g\in G}\alpha_g^{-1}g. \tag{10}$$

Аналогичные соображения показывают, что

$$R^*_{\alpha\beta} * g = \beta_g R^*_{\alpha\beta}, \quad g * R^*_{\alpha\beta} = \alpha_g R^*_{\alpha\beta}, \quad g * f = gf.$$

Вычислим теперь $\Delta^*(g)$, $\Delta^*(R^*_{\alpha\beta})$.

Имеем

$$\Delta^*(g)(e_f\otimes e_h) = \langle g, e_f e_h\rangle = \delta_{g,f}\delta_{f,h},$$
$$\Delta^*(g)(e_f\otimes R_{\alpha\beta}) = \Delta^*(g)(R_{\alpha\beta}\otimes e_f) = 0,$$
$$\Delta^*(g)(R_{\alpha\beta}\otimes R_{\gamma\eta}) = \langle g, R_{\alpha\beta}R_{\gamma\eta}\rangle = \mu_{\alpha,\gamma,\beta,\eta}\langle g, R_{\alpha\gamma,\beta\eta}\rangle = 0.$$

Таким образом,

$$\Delta^*(g) = g\otimes g. \tag{11}$$

Имеем

$$\Delta^*(R^*_{\alpha\beta})(e_f\otimes e_h) = \langle R^*_{\alpha\beta}, e_f e_h\rangle = 0,$$
$$\Delta^*(R^*_{\alpha\beta})(R_{\tau\eta}\otimes e_h) = \langle R^*_{\alpha\beta}, R_{\tau\eta}e_h\rangle = 0,$$
$$\Delta^*(R^*_{\alpha\beta})(e_h\otimes R_{\tau\eta}) = \langle R_{\alpha\beta}, e_h R_{\tau\eta}\rangle = 0,$$
$$\Delta^*(R^*_{\alpha\beta})(R_{\tau\eta}\otimes R_{\lambda\xi}) = \mu_{\tau,\lambda,\eta,\xi}\langle R^*_{\alpha\beta}, R_{\tau\lambda,\eta\xi}\rangle = \mu_{\tau,\lambda,\eta,\xi}\delta_{\alpha,\tau\lambda}\delta_{\beta,\eta\xi}.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta^*(R^*_{\alpha\beta}) = \sum_{\tau\lambda=\alpha,\ \eta\xi=\beta}\mu_{\tau,\lambda,\eta,\xi}R^*_{\tau\eta}\otimes R^*_{\lambda\xi}. \tag{12}$$

6. Центр H^*

Пусть элемент

$$z = \sum_{g\in G}\alpha_g g + \sum_{\gamma,\lambda\in G^*}\omega_{\gamma,\lambda}R^*_{\gamma\lambda}$$

лежит в центре H^*. Тогда $z * f = f * z$ и $z * R^*_{\tau\eta} = R^*_{\tau\eta} * z$ для всех $f\in G$ и всех $\tau,\eta\in G^*$.

Как отмечено в предыдущем разделе, ввиду абелевости группы G

$$z*f=\sum_{g\in G}\alpha_g(fg)+\sum_{\gamma,\lambda\in G^*}\omega_{\gamma\lambda}\lambda_f R^*_{\gamma\lambda}=f*z=\sum_{g\in G}\alpha_g(fg)+\sum_{\gamma,\lambda\in G^*}\omega_{\gamma\lambda}\gamma_f R^*_{\gamma\lambda}.$$

Поскольку $f\in G$ любое, то отсюда следует, что если $\omega_{\gamma\lambda}\neq 0$, то $\gamma=\lambda$, и поэтому

$$z=\sum_{g\in G}\alpha_g g+\sum_{\lambda\in G^*}\omega_\lambda R^*_{\lambda\lambda}.$$

При $\tau\neq\eta$

$$z*R^*_{\tau\eta}=\sum_g\alpha_g\eta_g R^*_{\tau\eta}+\sum_\lambda\omega_\lambda R^*_{\lambda\lambda}*R^*_{\tau\eta}=\sum_g\alpha_g\eta_g R_{\tau\eta}+\omega_\tau\kappa_{\eta,\tau,\tau}R^*_{\tau\eta}=$$

$$=R^*_{\tau\eta}*z=\sum_g\alpha_g\tau_g R^*_{\tau\eta}+\sum_\chi\omega_\chi R^*_{\tau\eta}*R^*_{\chi\chi}=\sum_g\alpha_g\tau_g R^*_{\tau\eta}+\omega_\eta\kappa_{\eta,\tau,\eta}R^*_{\tau\eta}. \qquad (13)$$

Таким образом, для всех $\tau\neq\eta$

$$\sum_g\alpha_g\eta_g+\omega_\tau\kappa_{\eta,\tau,\tau}=\sum_g\alpha_g\tau_g+\omega_\eta\kappa_{\eta,\tau,\eta}.$$

Эти равенства по теореме 2.1 могут быть записаны в виде

$$\sum_g\alpha_g(\eta_g-\tau_g)=\omega_\eta\kappa_{\eta,\tau,\eta}-\omega_\tau\kappa_{\eta,\tau,\tau}=(\omega_\eta\operatorname{sgn}\eta-\omega_\tau\operatorname{sgn}\tau)\left(\delta_{\eta,\tau}-\frac{1}{|G|}\right). \qquad (14)$$

Это равенство верно при $\eta=\tau$. Если $\eta\neq\tau$, то (14) имеет вид

$$\sum_g\alpha_g(\eta_g-\tau_g)=-\frac{1}{|G|}(\omega_\eta\operatorname{sgn}\eta-\omega_\tau\operatorname{sgn}\tau). \qquad (15)$$

Полученная система равенств (15) при всех $\eta\neq\tau$ эквивалентна системе равенств с $\tau=\varepsilon\neq\eta$ вида

$$\sum_{g\neq 1}\alpha_g(\eta_g-1)=-\frac{1}{|G|}\omega_\eta\operatorname{sgn}\eta+\frac{1}{|G|}\omega_\varepsilon. \qquad (16)$$

Рассмотрим матрицы

$$A=\begin{pmatrix}\tau^{(2)}_{g_2}-1 & \dots & \tau^{(2)}_{g_d}-1\\ \dots & \dots & \dots\\ \tau^{(d)}_{g_2}-1 & \dots & \tau^{(d)}_{g_d}-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & \varepsilon_{g_2} & \dots & \varepsilon_{g_d}\\ \tau^{(2)}_1 & \tau^{(2)}_{g_2} & \dots & \tau^{(2)}_{g_d}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \tau^{(d)}_1 & \tau^{(d)}_{g_2} & \dots & \tau^{(d)}_{g_d}\end{pmatrix}.$$

Матрица B невырожденная, поскольку разные характеры $\varepsilon,\tau^{(2)},\dots,\tau^{(d)}$ линейно независимы. Отметим, что

$$\varepsilon_1=\dots=\varepsilon_{g_d}=\tau^{(2)}_1=\dots=\tau^{(d)}_1=1.$$

Поэтому, вычитая из всех строк матрицы A её первую строку, получаем матрицу
$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$
Отсюда следует, что ранг A равен $d-1$. Это означает, что система (16) относительно α_g, $g \neq 1$, имеет единственное решение при любых ω_η.

Теорема 6.1. *Размерность центра H^* равна $|G|+1$.*

Доказательство. Действительно, по любому набору значений ω_* система (16) позволяет построить центральный элемент. Следовательно, имеется $|G|$ независимых элементов центра. Кроме того, в центре лежит ещё один элемент 1. □

Из теорем 6.1 и 4.1 вытекает следующий результат.

Теорема 6.2. *Если порядок $|G|$ нечётен, то дуальная полупростая алгебра Хопфа H^* имеет $|G|$ одномерных представлений и одно неприводимое представление размерности $|G|$. В частности, H и H^* изоморфны как алгебры.*

Доказательство. Действительно, в обеих алгебрах число одномерных простых слагаемых равно $|G|$ и имеется ещё одно неприводимое представление, соответствующее прямому полному матричному слагаемому размера $|G|$. □

Литература

[1] Артамонов В. А. Полупростые алгебры Хопфа // Чебышёвский сб. — 2014. — Т. 15, вып. 1. — С. 1—12.

[2] Артамонов В. А. Полупростые алгебры Хопфа с ограничениям на неприводимые неодномерные модули // Алгебра и анализ. — 2014. — Т. 26, № 2. — С. 21—44.

[3] Спиридонова С. Ю. О некоторых полупростых алгебрах Хопфа размерности $n(n+1)$ // Мат. заметки. — 2012. — Т. 91, № 2. — С. 253—269.

[4] Спиридонова С. Ю. Обобщённая кокоммутативность некоторых алгебр Хопфа и их связь с конечными полями // Алгебра и анализ. — 2013. — Т. 25, № 5. — С. 202—220.

[5] Artamonov V. A. On semisimple Hopf algebras with few representations of dimension greater than one // Rev. Unión Mat. Argentina. — 2010. — Vol. 51, no. 2. — P. 91—105.

[6] Artamonov V. A., Chubarov I. A. Dual algebras of some semisimple finite dimensional Hopf algebras // Modules and Comodules. — Basel: Birkhäuser, 2008. — (Trends in Mathematics). — P. 65—85.

[7] Artamonov V. A., Chubarov I. A. Properties of some semisimple Hopf algebras // Algebras, Representations and Applications. A Conference in Honour of Ivan Shestakov's 60th Birthday, August 26 — September 1, 2007, Maresias, Brazil / V. Futorny, V. Kac, I. Kashuba, and E. Zelmanov, eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 2009. — (Contemp. Math.; Vol. 483). — P. 23—36.

[8] Natale S., Plavnik J. Y. On fusion categories with few irreducible degrees // Algebra and Number Theory. — 2012. — Vol. 6, no. 6. — P. 1171—1197.