О свойствах групп кобордизмов скошенно-оснащённых погружений*

П. М. АХМЕТЬЕВ
Институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн им. Н. В. Пушкова
Российской академии наук (*ИЗМИРАН*)
e-mail: pmakhmet@izmiran.ru

О. Д. ФРОЛКИНА
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: olga-frolkina@yandex.ru

УДК 515.146.6+515.164.635

Ключевые слова: проективное пространство, погружение, оснащение, кобордизм.

Аннотация

В данной статье представлена геометрическая техника работы со скошенно-оснащёнными многообразиями. Она позволяет изучать стабильные гомотопические группы некоторых пространств Тома геометрическими методами. Приводится схема применения полученных результатов (имеющих и самостоятельный интерес) к доказательству теоремы Баума—Браудера о непогружаемости $\mathbb{RP}^{10}$ в $\mathbb{R}^{15}$.

Abstract

P. M. Akhmet'ev, O. D. Frolkina, On properties of skew-framed immersions cobordism groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 5, pp. 19—46.

In this paper, we introduce geometric technique of working with skew-framed manifolds. It allows us to study stable homotopy groups of some Thom spaces by geometric means. We schematically describe how our results (which are also of independent interest) can be applied to obtain a proof of the Baum–Browder theorem stating nonimmersibility of $\mathbb{RP}^{10}$ to $\mathbb{R}^{15}$.

Введение

Наша работа является развитием идей спецкурса [1] и посвящается памяти Юрия Петровича Соловьёва.

В [10] авторы предложили и частично реализовали схему нового геометрического доказательства Теоремы Баума—Браудера о непогружаемости проективного пространства $\mathbb{RP}^{10}$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^{15}$ [11, следствие (9.9)].

*Работа поддержана грантом РФФИ, проект № 15-01-06302.

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 5, с. 19—46.

Оказывается, задача об исследовании группы препятствий к погружению $\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}$ в $\mathbb{R}^{15}$ тесно связана с группой $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5)$ кобордизма скошенно-оснащённых (в работе мы называем скошенно-оснащённое погружение кратко: скоснащённое погружение) погружений трёхмерных многообразий в евклидово пространство $\mathbb{R}^8$. Именно, группа $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5)$ реализуется как подгруппа в группе препятствий к указанному погружению [10]. В данной работе мы вычисляем эту группу кобордизма и изучаем некоторые её свойства геометрического характера.

Отметим, что конструкция Понтрягина—Тома [4, 6] предоставляет изоморфизм $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5) \cong \Pi_8(\mathbb{R}\mathrm{P}_5^\infty)$, где $\mathbb{R}\mathrm{P}_5^\infty = \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty/\mathbb{R}\mathrm{P}^4$ — усечённое проективное пространство. В этих терминах теорема 1 утверждает, что

$$\Pi_8(\mathbb{R}\mathrm{P}_5^8) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2; \quad \Pi_8(\mathbb{R}\mathrm{P}_5^\infty) \cong \mathbb{Z}/2.$$

Теоремы 2, 3 носят более технический характер и понадобятся для доказательства теоремы Баума—Браудера; оно будет дано в следующей статье авторов.

Обозначения, соглашения

Номер над стрелкой вида $\xrightarrow{(\mathrm{n})}$ означает, что данное отображение определено в тексте формулой (n).

Символ $\cong$ используется в работе в нескольких смыслах, ясных из контекста: диффеоморфизм многообразий, изоморфизм расслоений, изоморфизм групп.

Все многообразия и отображения по умолчанию предполагаются гладкими. Рассматриваемые многообразия могут иметь край. Размерность m многообразия M иногда отражаем в обозначении: M^m.

Через c обозначаем постоянное отображение (в точку c).

При рассмотрении прообразов подмногообразий предполагаем необходимую трансверсальность (об этом см. [17]).

Для погружения $f\colon M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}$ надстройка Ef есть погружение-композиция $M^n \overset{f}{\looparrowright} \mathbb{R}^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$, где второе вложение является стандартным на гиперплоскость $x_{n+k+1} = 0$.

Нормальное расслоение погружения $f\colon M \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}$ обозначаем через $\nu(f)$ или просто через $\nu(M)$, если ясно, о каком погружении идёт речь.

Для подмногообразия $M \subset N$ мы используем очевидный изоморфизм $\nu(M) \cong \nu(M,N) \oplus \big(\nu(N)\big)\big|_M$.

Позволяя вольность, через ε мы обозначаем тривиальное линейное расслоение (над любым пространством); через γ — тавтологическое линейное расслоение над проективным пространством (любой размерности).

Для расслоения ξ над базой B и отображения $\kappa\colon M \to B$ обратный образ расслоения $\kappa^*(\xi)$ определяется стандартным образом. Для $\xi = k\varepsilon$ изоморфизм $\kappa^*(\xi) \cong k\varepsilon$ фиксируется по очевидной формуле.

Для $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ через $\mathbb{R}\mathrm{P}^N$ обозначаем N-мерное вещественное проективное пространство, а через $\mathbb{R}\mathrm{P}^N_k = \mathbb{R}\mathrm{P}^N/\mathbb{R}\mathrm{P}^{k-1}$ — усечённое проективное пространство.

Точки тотального пространства $E(k_1\gamma \oplus k_2\varepsilon)$ расслоения $k_1\gamma \oplus k_2\varepsilon$ над $\mathbb{R}\mathrm{P}^N$ записываем наборами вида

$$[x; \lambda_1, \ldots, \lambda_{k_1}, \mu_1, \ldots, \mu_{k_2}], \quad \text{где} \quad x \in \mathrm{S}^N, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_{k_1}, \mu_1, \ldots, \mu_{k_2} \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Такие наборы — пары (отождествленных) наборов

$$(x; \lambda_1, \ldots, \lambda_{k_1}, \mu_1, \ldots, \mu_{k_2}) \sim (-x; -\lambda_1, \ldots, -\lambda_{k_1}, \mu_1, \ldots, \mu_{k_2}).$$

Через $\rho\colon \mathrm{S}^N \to \mathbb{R}\mathrm{P}^N$, $x \mapsto [x] = \{x, -x\}$, обозначаем стандартное 2-накрытие.

Записывая точки пространства $E\big(\rho^*(k\gamma)\big)$ наборами $(x; \lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, определяем изоморфизм $\rho^*(k\gamma) \cong k\varepsilon$ расслоений над S^N формулой

$$E\big(\rho^*(k\gamma)\big) \to E(k\varepsilon), \quad (x; \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \mapsto (x; \lambda_1, \ldots, \lambda_k). \tag{2}$$

В работе используются стандартные включения $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+k}$ и стандартные изоморфизмы $\nu(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, \mathbb{R}\mathrm{P}^{n+k}) \cong k\gamma$.

Через $\Pi_n(X)$ обозначается n-я стабильная гомотопическая группа пространства X; $\Pi_n = \Pi_n(\mathrm{S}^0)$. Мы будем использовать некоторые стабильные гомотопические группы пространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$, вычисленные в [23].

Наконец, $I = [0, 1]$.

1. Основные понятия

1.1. Определение группы $\mathrm{Imm}^{\xi,B}(n,k)$

Группы кобордизма оснащённых вложений были введены и изучались Л. С. Понтрягиным (см. [4]). Рассмотрение групп кобордизма погружений с дополнительной структурой нормального расслоения восходит к работам [5, 22, 28—30], см. также [7, упражнение 7.2.5]. (Об обобщениях см., например, [16, 26].)

Пусть ξ — k-мерное векторное расслоение над базой B, причём $k \geqslant 1$. Пусть $n \geqslant 0$.

Определение 1. Скажем, что погружение n-мерного компактного многообразия $f\colon M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}$ снабжено нормальной ξ-структурой, если даны $\kappa\colon M \to B$ — непрерывное отображение, $\Xi\colon \nu(f) \cong \kappa^*\xi$ — изоморфизм.

Такой объект мы будем называть погружением с нормальной (ξ, B)-структурой или короче (ξ, B)-погружением; записываем эти объекты тройками (f_M, κ_M, Ξ_M) или — если ясно, о каком многообразии речь — просто (f, κ, Ξ).

Замечание 1. Эквивалентно (ξ, B)-структуру $\Xi\colon \nu(f) \cong \kappa^*(\xi)$ над M удобно мыслить как послойный изоморфизм расслоений

$$\begin{tikzcd} \nu(f) \arrow[r] \arrow[d] & \xi \arrow[d] \\ M \arrow[r, "\kappa"] & B \end{tikzcd}.$$

Замечание 2. Для накрытия $p\colon \tilde{M} \to M$ (в частности, для диффеоморфизма $\varphi\colon M \to M$) и погружения $f\colon M \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}$ имеется естественный послойный изоморфизм нормальных расслоений

$$\begin{tikzcd} \nu(f \circ p) \arrow[r] \arrow[d] & \nu(f) \arrow[d] \\ \tilde{M} \arrow[r, "p"] & M \end{tikzcd}.$$

Соответствующий изоморфизм $\nu(f \circ p) \cong p^*\bigl(\nu(f)\bigr)$ расслоений над $\tilde{M}$ будем обозначать через p'.

Таким образом, по изоморфизму $\Xi\colon \nu(f) \cong \kappa^*(\xi)$ можно построить изоморфизм

$$p^*(\Xi) \circ p'\colon \nu(f \circ p) \cong p^*\bigl(\nu(f)\bigr) \cong p^*\bigl(\kappa^*(\xi)\bigr).$$

Определение 2. Два погружения с нормальной (ξ, B)-структурой

$$(f_0\colon M_0^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}, \kappa_0, \Xi_0), \quad (f_1\colon M_1^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}, \kappa_1, \Xi_1)$$

назовём бордантными, если существуют

1) компактное $(n+1)$-многообразие $\mathcal{M}$,
2) диффеоморфизм $\varphi_0 \sqcup \varphi_1\colon M_0 \sqcup M_1 \to \partial\mathcal{M}$,
3) погружение $\mathcal{F}\colon \mathcal{M} \looparrowright \mathbb{R}^{n+k} \times I$, подходящее в точках края ∂M ортогонально к краю $\mathbb{R}^{n+k} \times \partial I$ полосы $\mathbb{R}^{n+k} \times I$, такое что при $s = 0, 1$ ограничение $\mathcal{F}|_{\varphi_s(M_s)}$ совпадает с композицией $M_s \overset{f_s}{\looparrowright} \mathbb{R}^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k} \times \{s\}$;
4) непрерывное отображение $\kappa\colon \mathcal{M} \to B$, для которого при $s = 0, 1$ композиция $\kappa \circ \varphi_s$ равна $\kappa_s\colon M_s \to B$;
5) изоморфизм $\Xi\colon \nu(\mathcal{F}) \cong \kappa^*(\xi)$, для которого при $s = 0, 1$ композиция

$$\nu(f_s) = \varphi_s^*\bigl(\nu(\mathcal{F})\bigr) \overset{\varphi_s^* \circ \Xi}{\cong} \varphi_s^*(\kappa^*\xi) = \kappa_s^*\xi$$

над M_s совпадает с Ξ_s.

Иными словами, тройка $(\mathcal{F}, \kappa, \Xi)$ задаёт кобордизм между (f_0, κ_0, Ξ_0) и (f_1, κ_1, Ξ_1); пишем

$$\partial(\mathcal{F}, \kappa, \Xi) = (f_0, \kappa_0, \Xi_0) \sqcup (f_1, \kappa_1, \Xi_1).$$

Далее почти везде мы будем опускать диффеоморфизм $\varphi_0 \sqcup \varphi_1$, отождествляя $\partial\mathcal{M}$ и $M_0 \sqcup M_1$.

Стандартным образом проверяется, что отношение бордантности рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Обозначим множество классов кобордизма погружений *замкнутых* m-мерных многообразий с нормальной ξ-структурой через $\mathrm{Imm}^{\xi,B}(m,k)$. Иногда будем допускать вольность и говорить о (ξ,B)-погружениях как об элементах этой группы.

Сумма двух классов кобордизма определяется как объединение любых двух дизъюнктных представителей этих классов, тем самым $\mathrm{Imm}^{\xi,B}(m,k)$ становится абелевой группой.

Из теоремы Уитни [7, теорема 1.3.5] и конструкции Понтрягина—Тома [4,6] (см. также [7, Упр. 7.2.5]) вытекает следующее предложение.

Предложение 1. *При $k \geqslant n+2$ имеем*

$$\mathrm{Imm}^{\xi,B}(n,k) \cong \mathrm{Emb}^{\xi,B}(n,k) \cong \pi_{n+k}\bigl(T(\xi)\bigr).$$

Это вместе с теоремой Хирша [19, теорема 6.4] даёт следующий результат (см. [22, теорема 1.1; 30, теорема 1]).

Предложение 2. *Если B — конечный комплекс, то имеет место изоморфизм $\mathrm{Imm}^{\xi,B}(n,k) \cong \Pi_{n+k}\bigl(T(\xi)\bigr)$.*

1.2. Основные частные случаи

Имея общее определение погружения с нормальной (ξ,B)-структурой, перечислим те основные частные случаи, которые будем исследовать в данной работе (см. [9, 10]).

1. Для $B=\mathrm{pt}$, $\xi=k\varepsilon$ группу $\mathrm{Imm}^{k\varepsilon,\mathrm{pt}}(n,k)$ обозначаем через $\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(k)}(n,k)$ и говорим о группе оснащённых погружений. Элементы этой группы представляются парами вида
$$(f\colon M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k},\ \Xi\colon \nu(f)\cong k\varepsilon).$$
Конструкция Понтрягина—Тома вместе с результатами Хирша даёт при $k\geqslant 1$ изоморфизм
$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(k)}(n,k)\cong \Pi_n.$$
2. Для $B=\mathbb{R}\mathrm{P}^N$, $\xi=k\gamma$ группу $\mathrm{Imm}^{k\gamma,\mathbb{R}\mathrm{P}^N}(n,k)$ обозначаем через $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k),\mathbb{R}\mathrm{P}^N}(n,k)$ и говорим о группе *скоснащённых* погружений с контролем в $\mathbb{R}\mathrm{P}^N$. (Термин «скоснащённый» придуман нами как сокращение слова «скошенно-оснащённый».) При $N=\infty$ группу обозначаем через $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k)}(n,k)$ и говорим просто о группе скоснащённых погружений. Цепочка стандартных включений $\mathbb{R}\mathrm{P}^0\subset\mathbb{R}\mathrm{P}^1\subset\ldots\subset\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ даёт нам цепочку гомоморфизмов
$$\begin{aligned}\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k),\mathbb{R}\mathrm{P}^0}(n,k)=\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(k)}(n,k)\to\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k),\mathbb{R}\mathrm{P}^1}(n,k)\to\ldots\to\\ \to\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k),\mathbb{R}\mathrm{P}^n}(n,k)\twoheadrightarrow\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k),\mathbb{R}\mathrm{P}^{n+1}}(n,k)\cong\ldots\cong\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k)}(n,k)\end{aligned}\tag{3}$$

(по теореме о клеточной аппроксимации во второй строке первое отображение сюръективно, а все остальные биективны). Предложение 2 и [8, теорема 15.1.8] дают нам изоморфизмы

$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k),\mathbb{R}\mathrm{P}^N}(n,k) \cong \Pi_{n+k}(\mathbb{R}\mathrm{P}_k^{k+N}), \quad \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k)}(n,k) \cong \Pi_{n+k}(\mathbb{R}\mathrm{P}_k^{\infty}).$$

3. Для $B=\mathbb{R}\mathrm{P}^N$, $\xi = k_1\gamma \oplus k_2\varepsilon$, $k_2 \geqslant 1$ имеется гомоморфизм надстройки
$$E\colon \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k_1)\times\mathrm{fr}(k_2-1),\mathbb{R}\mathrm{P}^N}(n,k_1+k_2-1) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k_1)\times\mathrm{fr}(k_2),\mathbb{R}\mathrm{P}^N}(n,k_1+k_2), \tag{4}$$
при $k_1+k_2 \geqslant 2$ он является изоморфизмом согласно [19, теорема 6.4]. Группу $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k_1)\times\mathrm{fr}(k_2),\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty}(n,k_1+k_2)$ обозначаем короче $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k_1)\times\mathrm{fr}(k_2)}(n,k_1+k_2)$.

Включение структурных групп $\{0\} \subset \mathbb{Z}/2$ порождает гомоморфизм
$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(k)}(n,k) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k)}(n,k). \tag{5}$$

Пример 1. Отображение
$$\iota\colon \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(k)}(n,k) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(k)\times\mathrm{sf}(0)}(n,k),$$
при котором
$$(f,\Xi) \mapsto (f,\mathrm{const},\Xi),$$
является мономорфизмом.

Отображение
$$r\colon \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(k)\times\mathrm{sf}(0)}(n,k) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(k)}(n,k),$$
при котором
$$\bigl(f,\kappa,\Xi\colon \nu(f) \cong \kappa^*(k\varepsilon \oplus 0\gamma)\bigr) \mapsto (f,\Psi\colon \nu(f) \overset{\Xi}{\cong} \kappa^*(k\varepsilon) \cong k\varepsilon),$$
является эпиморфизмом.

Композиция
$$r\circ\iota\colon \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(k)}(n,k) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(k)}(n,k)$$
есть тождественное отображение. Итак, группа $\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(k)}(n,k)$ выделяется прямым слагаемым в группе $\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(k)\times\mathrm{sf}(0)}(n,k)$.

1.3. Простые видоизменения троек (f,κ,Ξ)

Здесь мы опишем несколько простых процедур, которые будем применять далее при доказательствах. Читатель докажет их самостоятельно.

Предложение 3. *Для произвольных B, ξ справедливо следующее.*

1. *(ξ,B)-погружения $(f\colon M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}$, κ, $\Xi)$ и $(f\circ\varphi, \kappa\circ\varphi, \varphi^*(\Xi)\circ\varphi')$, где $\varphi\colon M \to M$ — диффеоморфизм, бордантны* (*относительно φ' см. замечание* 2).

2. *Пусть* (f,κ,Ξ_0) — (ξ,B)-*погружение и* $\{\Xi_t\}$, $t\in I$ — *семейство изоморфизмов расслоений* $\nu(f)\cong\kappa^*(\xi)$. *Тогда* (ξ,B)-*погружения* (f,κ,Ξ_0) *и* (f,κ,Ξ_1) *бордантны.*
3. *Пусть* $H\colon M\times I\to\mathbb{R}^N\times I$ — *регулярная гомотопия погружений* $f_0\simeq f_1$, *причём при* $t\in[0,1/10]$ *имеем* $f_t=f_0$, *а при* $t\in[9/10,1]$ *имеем, что* $f_t=f_1$. *Пусть даны непрерывное отображение* $\kappa\colon M\to B$ *и изоморфизм* $\Xi_0\colon\nu(H)|_{M\times\{0\}}=\nu(f_0)\cong\kappa^*(\xi)$. *Пусть* $\Xi\colon\nu(H)\cong(\kappa\circ p)^*(\xi)$ — *любой изоморфизм, продолжающий изоморфизм* Ξ_0; *здесь* $p\colon M\times I\to M$ — *проекция. Пусть* $\Xi_1=\Xi|_{M\times\{1\}}\colon\nu(H)|_{M\times\{1\}}=\nu(f_1)\cong\kappa^*(\xi)$ — *«результирующий» изоморфизм. Тогда* (ξ,B)-*погружения* (f_0,κ,Ξ_0) *и* (f_1,κ,Ξ_1) *бордантны.*

Рассмотрим теперь случай $B=\mathbb{R}\mathrm{P}^N$, $\xi=k_1\gamma\oplus k_2\varepsilon$. В этой ситуации мы можем «перетаскивать» ξ-структуру вслед за гомотопией отображения κ. Эта процедура обобщает описанное Понтрягиным «перетаскивание» для оснащённых вложений.

Итак, пусть даны $(k_1\gamma\oplus k_2\varepsilon,\mathbb{R}\mathrm{P}^N)$-погружение (f,κ_0,Ξ_0) и гомотопия $\{\kappa_t\}$.

Укажем способ построения соответствующего семейства $\{\Xi_t\colon\nu(f)\cong$ $\cong\kappa_t^*(k_1\gamma\oplus k_2\varepsilon)\}$.

Согласно замечанию 1 заменим изоморфизм $\Xi_0\colon\nu(f)\cong\kappa_0^*(\xi)$ на диаграмму

$$\begin{tikzcd} E\big(\nu(f)\big) \arrow[r, "\Psi_0"] \arrow[d, "\pi"'] & E(\xi=k_1\gamma\oplus k_2\varepsilon) \arrow[d] \\ M \arrow[r, "\kappa_0"] & \mathbb{R}\mathrm{P}^N \end{tikzcd},$$

где Ψ_0 — послойный изоморфизм.

Определим изоморфизм Ψ_t в диаграмме

$$\begin{tikzcd} E\big(\nu(f)\big) \arrow[r, "\Psi_t"] \arrow[d, "\pi"'] & E(k_1\gamma\oplus k_2\varepsilon) \arrow[d] \\ M \arrow[r, "\kappa_t"] & \mathbb{R}\mathrm{P}^N \end{tikzcd}.$$

Возьмём любую точку $X\in E\big(\nu(f)\big)$. Если

$$\Psi_0(X)=\big[\kappa_0\big(\pi(X)\big);\lambda_1(X),\dots,\lambda_{k_1}(X),\mu_1(X),\dots,\mu_{k_2}(X)\big],$$

то положим

$$\Psi_t(X)=\big[\kappa_t\big(\pi(X)\big);\lambda_1(X),\dots,\lambda_{k_1}(X),\mu_1(X),\dots,\mu_{k_2}(X)\big].$$

Соответствующий изоморфизм $\nu(f)\cong\kappa_t^*(k_1\gamma\oplus k_2\varepsilon)$ обозначим через Ξ_t.

Предложение 4. *Для* $B=\mathbb{R}\mathrm{P}^N$, $\xi=k_1\gamma\oplus k_2\varepsilon$ *приведённая конструкция даёт* $(k_1\gamma\oplus k_2\varepsilon,\mathbb{R}\mathrm{P}^N)$-*погружение* (f,κ_1,Ξ_1), *бордантное исходному* (f,κ_0,Ξ_0).

Пример 2. Для стандартного вложения $\mathbb{E}\colon\mathrm{S}^3\subset\mathbb{R}^4$ единичная внешняя нормаль задаёт тривиализацию $\Phi\colon\nu(\mathbb{E})\cong c^*(\gamma)$, где $c\colon\mathrm{S}^3\to c\in\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ — постоянное отображение.

Пара $(\mathbb{E}, \Phi)$ задаёт нулевой элемент в группе $\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)}(3,1)$; тройка $(\mathbb{E}, c, \Phi)$ задаёт нулевой элемент как в группе $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1), \mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,1)$, так и в группе $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(3,1)$.

Пример 3. В продолжение примера 2, возьмём гомотопию $H\colon \mathrm{S}^3 \times I \to \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ между отображениями c и $\mathrm{S}^3 \xrightarrow{\rho} \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$; здесь ρ — стандартное 2-накрытие. Предложение 4 строит по изоморфизму $\Phi\colon \nu(\mathbb{E}) \cong c^*(\gamma)$ изоморфизм $\Xi_{\mathbb{E}}\colon \nu(\mathbb{E}) \cong \rho^*(\gamma)$.

В группе $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(3,1)$ тройка $(\mathbb{E}, \rho, \Xi_{\mathbb{E}})$ бордантна исходной тройке $(\mathbb{E}, c, \Phi)$, т. е. представляет нулевой элемент.

Однако, поскольку образ гомотопии H не содержится в подпространстве $\mathbb{R}\mathrm{P}^3 \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$, мы не можем заключить, что тройка $(\mathbb{E}, \rho, \Xi_{\mathbb{E}})$ бордантна исходной тройке $(\mathbb{E}, c, \Phi)$ в группе $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1), \mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,1)$. Оказывается, тройка $(\mathbb{E}, \rho, \Xi_{\mathbb{E}})$ представляет в группе $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1), \mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,1)$ ненулевой элемент (см. замечание 4).

Замечание 3. Формально тройка $(\mathbb{E}, \rho, \Xi_{\mathbb{E}})$ из примера 3 зависит от выбора гомотопии H. Однако оказывается, что класс кобордизма от выбора гомотопии не зависит. Действительно, в силу односвязности S^3 при любом выборе гомотопии H результирующая тройка будет бордантна либо тройке $(\mathbb{E}, \rho, \Xi_{\mathbb{E}})$, либо тройке $(\mathbb{E}, \rho, -\Xi_{\mathbb{E}})$, где тривиализация $-\Xi_{\mathbb{E}}$ получена из тривиализации $\Xi_{\mathbb{E}}$ умножением в каждом слое на -1. Тройки $(\mathbb{E}, \rho, \Xi_{\mathbb{E}})$ и $(\mathbb{E}, \rho, -\Xi_{\mathbb{E}})$ бордантны в группе $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1), \mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,1)$ согласно предложению 8.

2. Некоторые геометрические конструкции

2.1. Построение обратного элемента

Пусть $R\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — отражение в гиперплоскости $x_d = 0$.

Для произвольного погружения $F\colon M \looparrowright \mathbb{R}^d$ естественным образом определён изоморфизм $R_{\nu(F)}$:

$$\begin{array}{ccc} \nu(F) & \xrightarrow{R_{\nu(F)}} & \nu(R \circ F) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ M & \xrightarrow{\mathrm{id}} & M \end{array}.$$

Если также дан изоморфизм $\Xi : \nu(F) \cong \kappa^*(k_1\gamma \oplus k_2\varepsilon)$, то можно определить изоморфизм-композицию

$$\Xi \circ \left(R_{\nu(F)}\right)^{-1} \colon \nu(R \circ F) \xrightarrow{(R_{\nu(F)})^{-1}} \nu(F) \xrightarrow{\Xi} \kappa^*(k_1\gamma \oplus k_2\varepsilon).$$

Имеет место несложное утверждение.

Предложение 5. *В группе* $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k_1) \times \mathrm{fr}(k_2), \mathbb{R}\mathrm{P}^N}(n, k_1 + k_2)$ *при* $k_2 \geqslant 1$ *и* $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ *тройки* (F, κ, Ξ) *и* $\left(R \circ F, \kappa, \Xi \circ \left(R_{\nu(F)}\right)^{-1}\right)$ *задают противоположные элементы.*

Пусть $k_2 \geqslant 1$. Обозначим через $\mathfrak{r}$ автоморфизм расслоения $k_1\gamma \oplus k_2\varepsilon$ над $\mathbb{R}\mathrm{P}^N$, переворачивающий последнее слагаемое ε:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] {[x;\lambda_1,\dots,\lambda_{k_1},\mu_1,\dots,\mu_{k_2}]} \arrow[rr] \arrow[dr] & & {[x;\lambda_1,\dots,\lambda_{k_1},\mu_1,\dots,-\mu_{k_2}]} \arrow[dl] \\ & {[x]} & \end{tikzcd}.$$

Предложение 6. *В группе* $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k_1)\times\mathrm{fr}(k_2),\mathbb{R}\mathrm{P}^N}(n, k_1+k_2)$ *при* $k_2 \geqslant 1$ *и* $N \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ *тройки* (F,κ,Ξ) *и* (F,κ,Ψ), *где* Ψ *есть композиция*

$$\nu(F) \overset{\Xi}{\cong} \kappa^*(k_1\gamma\oplus k_2\varepsilon) \overset{\kappa^*(\mathfrak{r})}{\cong} \kappa^*(k_1\gamma\oplus k_2\varepsilon),$$

задают противоположные элементы.

Доказательство. Согласно [19, теорема 6.4] можем применить регулярную гомотопию и считать, что образ $F(M)$ содержится в гиперплоскости $x_d = 0$ пространства $\mathbb{R}^{n+k_1+k_2}$. (При этом считаем, что отображение κ осталось неизменным, а изоморфизм Ξ изменился в соответствии с пунктом 3 предложения 3; обозначаем его тем же символом Ξ. При этом класс кобордизма не изменился.) Возьмём $R\colon \mathbb{R}^{n+k_1+k_2} \to \mathbb{R}^{n+k_1+k_2}$ — отражение в гиперплоскости $x_d = 0$. Согласно предложению 5 тройка $\bigl(R\circ F,\kappa,\Xi\circ\bigl(R_{\nu(F)}\bigr)^{-1}\bigr)$ представляет элемент, противоположный исходному. Однако $R\circ F = F$ и $\Xi\circ\bigl(R_{\nu(F)}\bigr)^{-1} = \Psi$. □

2.2. Переворот скоснащения не меняет элемент

Для произвольного векторного расслоения ξ над базой B определим послойную антиподальную инволюцию — автоморфизм Υ_ξ, положив для вектора $v \in F_x$ из слоя над точкой $x \in B$ $\Upsilon_\xi(v) = -v$. [Если понятно, о каком расслоении речь, символ ξ будем опускать.] Легко заметить, что для отображения $\kappa\colon M \to B$ справедливо $\kappa^*\circ\Upsilon_\xi = \Upsilon_{\kappa^*(\xi)}$.

Из предложения 6 вытекает следующее утверждение (ср. с [12, с. 206]).

Предложение 7. *В группе* $\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(k)}(n,k)$ *пары* (F,Ξ) *и* (F,Θ), *где*

$$\Theta\colon \nu(F) \overset{\Xi}{\cong} k\varepsilon \overset{\Upsilon}{\cong} k\varepsilon,$$

задают при нечётном k *противоположные элементы, при чётном* k — *равные элементы.*

В данном разделе мы докажем следующее утверждение.

Предложение 8. *В группе* $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k)}(n,k)$ *тройки* (F,κ,Ξ) *и* (F,κ,Θ), *где*

$$\Theta\colon \nu(F) \overset{\Xi}{\cong} \kappa^*(k\gamma) \overset{\Upsilon}{\cong} \kappa^*(k\gamma)$$

задают равные элементы. При нечётном n *то же верно для троек-представителей из группы* $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k),\mathbb{R}\mathrm{P}^n}(n,k)$.

Предварим доказательство необходимыми для него замечаниями.

Проективное пространство нечётной размерности $\mathbb{R}\mathrm{P}^{2d+1}$ состоит из элементов вида $[x] = \{x, -x\}$, где $x \in \mathrm{S}^{2d+1}$. Так как $\mathrm{S}^{2d+1} \subset \mathbb{R}^{2d+2} \cong \mathbb{C}^{d+1}$, то можем записать x набором комплексных чисел: $(z_1, \dots, z_{d+1})$.

Изотопию $h_t\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{2d+1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{2d+1}$, $t \in I$, определим формулой

$$h_t([(z_1, \dots, z_{d+1})]) = [(e^{\pi i t} \cdot z_1, \dots, e^{\pi i t} \cdot z_{d+1})].$$

Ясно, что $h_0 = h_1 = \mathrm{id}$.

Точки тотального пространства $E(\gamma)$ записываем наборами вида

$$[z_1, \dots, z_{d+1}; \lambda]$$

(см. (1)).

Определим при $t \in I$ отображение $H_t\colon E(\gamma) \to E(\gamma)$ формулой

$$H_t([z_1, \dots, z_{d+1}; \lambda]) = [e^{\pi i t} \cdot z_1, \dots, e^{\pi i t} \cdot z_{d+1}; \lambda]. \tag{6}$$

Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Лемма 1.

1. *Отображение H_t определено корректно.*
2. *Диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} E(\gamma) & \xrightarrow{H_t} & E(\gamma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}\mathrm{P}^{2d+1} & \xrightarrow{h_t} & \mathbb{R}\mathrm{P}^{2d+1} \end{array}$$

   коммутативна при $t \in I$.
3. *В индуцированной коммутативной диаграмме*

$$\begin{tikzcd} E(\gamma) \arrow[rr, "L_t"] \arrow[dr] & & E(h_t^*\gamma) \arrow[dl] \\ & \mathbb{R}\mathrm{P}^{2d+1} & \end{tikzcd}$$

   имеем $L_0 = \mathrm{id}$, $L_1 = \Upsilon_\gamma$.

Докажем теперь предложение 8.

Построим кобордизм $(\hat{F}, \hat{\kappa}, \hat{\Xi})$ указанных троек. Возьмём многообразие $\hat{M} = M \times I$ и погружение-произведение $\hat{F} = F \times \mathrm{id}_I\colon M \times I \looparrowright \mathbb{R}^{n+k} \times I$.

Пусть

$$N = \begin{cases} n, & \text{если } n \text{ нечётно;} \\ n+1, & \text{если } n \text{ чётно.} \end{cases}$$

Согласно теореме о клеточной аппроксимации можем считать, что $\kappa(M) \subset \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$. (В случае группы с контролем в $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ это включение выполнено изначально.)

Определим отображение $\hat{\kappa}\colon M\times I\to \mathbb{RP}^N$ формулой

$$\hat{\kappa}|_{M\times\{t\}} = h_t\circ\kappa\circ p,$$

где $p\colon M\times I\to M$ — проекция, а $h_t\colon \mathbb{RP}^N\to\mathbb{RP}^N$ задано формулой (6).

Заметим, что $\hat{\kappa}|_{M\times\{0\}}=\kappa$, $\hat{\kappa}|_{M\times\{1\}}=\kappa$, как и требуется.

Определим изоморфизм $\hat{\Xi}\colon \nu(\hat{F})\cong\hat{\kappa}^*(k\gamma)$. Для этого мы будем при каждом $t\in I$ определять изоморфизм

$$\hat{\Xi}_t\colon \nu(\hat{F}|_{M\times\{t\}})\cong(\hat{\kappa}|_{M\times\{t\}})^*(k\gamma).$$

Положим $\hat{\Xi}_t$ равным композиции

$$\nu(\hat{F}|_{M\times\{t\}})\cong\nu(\hat{F}|_{M\times\{0\}})\overset{\Xi}{\cong}\kappa^*(k\gamma)\overset{\kappa^*(L_t)}{\cong}\\ \cong\kappa^*\big(h_t^*(k\gamma)\big)=(h_t\circ\kappa)^*(k\gamma)=(\hat{\kappa}|_{M\times\{t\}})^*(k\gamma). \quad (7)$$

При этом $\hat{\Xi}|_{M\times\{0\}}=\Xi$ и $\hat{\Xi}|_{M\times\{1\}}=\Theta$, что и требуется. □

Из предложений 7, 8 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Пусть k нечётно. Тогда для гомоморфизма* (5)

$$\phi\colon \operatorname{Imm}^{\mathrm{fr}(k)}(n,k)\to\operatorname{Imm}^{\mathrm{sf}(k)}(n,k)$$

имеем $2\operatorname{Im}\phi=\{0\}$.

2.3. Гомоморфизм трансфера

Напомним определение гомоморфизма трансфера [9]

$$\operatorname{Imm}^{\mathrm{sf}(k),\mathbb{RP}^N}(n,k)\to\operatorname{Imm}^{\mathrm{fr}(k)}(n,k). \quad (8)$$

Для расслоения γ над $\mathbb{RP}^N$ пусть $S(\gamma)$ — соответствующее сферическое расслоение над $\mathbb{RP}^N$, и $\pi\colon S(\gamma)\to\mathbb{RP}^N$ — проекция. Обратный образ $\pi^*(\gamma)$ есть тривиальное линейное расслоение над $S(\gamma)$. Фиксируем изоморфизм $\tau\colon\pi^*(\gamma)\cong\varepsilon$.

Пусть дана тройка $\big(f\colon M\looparrowright\mathbb{R}^{n+k},\ \kappa\colon M\to\mathbb{RP}^N,\ \Xi\colon\nu(f)\cong\kappa^*(k\gamma)\big)$.

Возьмём $\tilde{M}=S\big(\kappa^*(\gamma)\big)$. Это n-многообразие, и $p=\kappa^*(\pi)\colon\tilde{M}\to M$ является двулистным накрытием:

$$\begin{tikzcd} \tilde{M}=S\big(\kappa^*(\gamma)\big) \arrow[r, "\tilde{\kappa}"] \arrow[d, "p=\kappa^*(\pi)"'] & S(\gamma) \arrow[d, "\pi"'] & \pi^*(\gamma)\overset{\tau}{\cong}\varepsilon \arrow[l] \arrow[d] \\ M \arrow[r, "\kappa"] & \mathbb{RP}^N & \gamma \arrow[l] \end{tikzcd}.$$

Имеет место цепочка изоморфизмов

$$p^*\kappa^*(\gamma)\cong(\kappa\circ p)^*(\gamma)\cong(\pi\circ\tilde{\kappa})^*(\gamma)=\tilde{\kappa}^*\big(\pi^*(\gamma)\big)\overset{\kappa^*(\tau)}{\cong}\tilde{\kappa}^*(\varepsilon)\cong\varepsilon. \quad (9)$$

В замечании 2 указан способ по данному изоморфизму $\Xi\colon\nu(f)\cong\kappa^*(k\gamma)$ построить изоморфизм $p^*(\Xi)\circ p'\colon\nu(f\circ p)\cong p^*\big(\kappa^*(k\gamma)\big)$. Беря его композицию с k-кратным изоморфизма (9), получаем изоморфизм $\tilde{\Xi}\colon\nu(\tilde{f})\cong k\varepsilon$.

Теперь исходной тройке $\big(f\colon M \looparrowright \mathbb{R}^{n+k},\ \kappa\colon M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^N,\ \Xi\colon \nu(f) \cong \kappa^*(k\gamma)\big)$, поставим в соответствие пару $(\tilde f = f\circ p\colon \tilde M \looparrowright \mathbb{R}^{n+k},\ \tilde\Xi\colon \nu(\tilde f) \cong k\varepsilon)$. Эта формула задаёт гомоморфизм (8).

Пример 4. Трансфер $\mathbb{Z}/2 \cong \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(0,1) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)}(0,1) \cong \mathbb{Z}$ является нулевым.

Пример 5. Композиция гомоморфизма (5) и трансфера

$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(k)}(n,k) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k)}(n,k) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(k)}(n,k)$$

при чётном k является удвоением, при нечётном k нулевая.

Пример 6. Трансфер

$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(5)}(3,5)$$

нулевой.

Действительно, согласно предыдущему примеру композиция

$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(5)}(3,5) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(5)}(3,5)$$

нулевая. Однако первый гомоморфизм

$$\mathbb{Z}/24 \cong \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(5)}(3,5) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5) \cong \mathbb{Z}/2$$

сюръективен (см. теорему 1 и [10, теорема 1]). Значит, рассматриваемый трансфер нулевой.

3. Примеры в малых размерностях

3.1. Размерность 0

Пример 7.

$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)}(0,1) \cong \Pi_0 \cong \mathbb{Z}, \tag{10}$$

но, поскольку $\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ — пространство Тома линейного универсального $O(1)$-расслоения,

$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(0,1) \cong \Pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty) \cong \mathbb{Z}/2. \tag{11}$$

Подчеркнём, что, хотя в обоих случаях представителями групп являются конечные наборы точек, а кобордизмами — наборы отрезков (над которыми любое линейное расслоение тривиально), в случае группы скоснащённых погружений мы должны строить характеристическое отображение $\kappa\colon M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ на кобордизме; в отличие от оснащённого случая (где κ постоянно) здесь есть дополнительные возможности.

Поясним кратко формулы (10) и (11).

Образующая a_0 первой группы может быть представлена погружением точки, т. е. парой $(f_0\colon p_0 \mapsto 0 \in \mathbb{R}^1,\ \Xi_0\colon \nu(f_0) \cong \varepsilon)$, где Ξ_0 — (произвольный, но фиксированный) изоморфизм.

Заданный в (5) гомоморфизм

$$\phi\colon \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)}(0,1) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(0,1)$$

сюръективен, и $\phi(a_0) \neq 0$. Из предложения 8 вытекает, что $\phi(a) = \phi(-a)$; таким образом, $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(0,1) \cong \mathbb{Z}/2$.

3.2. Размерность 1

Пример 8. Гомоморфизм (5)

$$\mathbb{Z}/2 \cong \Pi_1 \cong \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)}(1,1) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(1,1) \cong \Pi_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty) \cong \mathbb{Z}/2$$

является изоморфизмом.

Рассуждение 1. Всякое компактное 1-многообразие есть объединение окружностей. Пусть элемент $a_1 \in \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(1,1)$ представлен тройкой

$$\bigl(F\colon \mathrm{S}^1 \looparrowright \mathbb{R}^2,\ \kappa\colon \mathrm{S}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty,\ \Xi\colon \nu(F) \cong \kappa^*(\gamma)\bigr).$$

Так как $\nu(F)$ — тривиальное расслоение, то κ гомотопно постоянному отображению. Это означает, что $a_1 \in \operatorname{Im}\phi$, значит, ϕ — изоморфизм.

Рассуждение 2. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/2 = \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)}(1,1) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "q^{\mathrm{fr}}"'] & & \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(1,1) = \mathbb{Z}/2 \arrow[dl, "q^{\mathrm{sf}}"] \\
& \mathbb{Z}/2 &
\end{tikzcd}.$$

Здесь гомоморфизмы q^{fr}, q^{sf} ставят в соответствие погружению общего положения количество его двойных точек по модулю 2 [14, утверждение 2.2]. Рассмотрение погружения-восьмёрки показывает, что и q^{fr} и q^{sf} — эпиморфизмы, следовательно, изоморфизмы. Значит, и ϕ — изоморфизм.

Для двух следующих примеров введём обозначение. Для линейного расслоения ζ над замкнутым одномерным многообразием $M = \mathrm{S}^1_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathrm{S}^1_k$ определим вычет

$$s(\zeta) = w_1(\zeta|_{\mathrm{S}^1_1}) + \ldots + w_1(\zeta|_{\mathrm{S}^1_k}) \in \mathbb{Z}/2.$$

Напомним, что элементы группы $\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)\times\mathrm{sf}(0)}(1,1)$ представляются тройками вида (f,κ,Ξ), где $f\colon M \looparrowright \mathbb{R}^2$ — погружение замкнутого 1-многообразия, $\kappa\colon M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ — непрерывное отображение, $\Xi\colon \nu(f) \cong \kappa^*(1\varepsilon \oplus 0\gamma)$ — изоморфизм.

Пример 9. Имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)\times\mathrm{sf}(0)}(1,1) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)}(1,1) \oplus \mathbb{Z}/2,$$

он задаётся формулой

$$\bigl(f,\ \kappa,\ \Xi\colon \nu(f) \cong \kappa^*(1\varepsilon \oplus 0\gamma)\bigr) \mapsto \Bigl(\bigl(f,\ \Psi\colon \nu(f) \overset{\Xi}{\cong} \kappa^*(1\varepsilon) \cong \varepsilon\bigr), s\bigl(\kappa^*(\gamma)\bigr)\Bigr)$$

(ср. с примером 1).

Пример 10. Гомоморфизм трансфера

$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)\times\mathrm{sf}(0)}(1,1)\xrightarrow{(8)}\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)\times\mathrm{fr}(0)}(1,1)\cong\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)}(1,1)\cong\mathbb{Z}/2$$

вычисляется отображением

$$(f,\kappa,\Xi)\mapsto s\big(\kappa^*(\gamma)\big);$$

в частности, он сюръективен.

Пример 11. Коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)\times\mathrm{sf}(0)}(1,1) & \longrightarrow & \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)}(1,1)\\
{\scriptstyle\cong}\big\downarrow & & {\scriptstyle\cong}\big\downarrow\\
\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)\times\mathrm{sf}(4k)}(1,1+4k) & \longrightarrow & \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1+4k)}(1,1+4k).\\
{\scriptstyle\cong}\big\downarrow & & {\scriptstyle\cong}\big\downarrow\\
\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(4k)}(1,4k) & \longrightarrow & \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(4k)}(1,4k)
\end{array}$$

(Здесь все горизонтальные стрелки — гомоморфизмы трансфера (8), правые вертикальные — изоморфизмы надстройки (4), левые вертикальные — изоморфизмы из следствия 2.) Поэтому из примера 10 следует, что гомоморфизм трансфера $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(4k)}(1,4k)\to\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(4k)}(1,4k)$ сюръективен.

3.3. Размерность 2

Изучение группы бордизмов погружений n-мерных многообразий в $\mathbb{R}^{n+k}$ (без дополнительных структур) и её ориентированного варианта восходит к [5, 27, 30]. Обозначим здесь эти группы через $\mathrm{Imm}^{\mathrm{O}}(n,k)$ и $\mathrm{Imm}^{\mathrm{SO}}(n,k)$ соответственно. Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\Pi_n\cong\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(k)}(n,k) & \longrightarrow & \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k)}(n,k)\cong\Pi_{n+k}(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty_k)\\
\big\downarrow & & \big\downarrow\\
\mathrm{Imm}^{\mathrm{SO}}(n,k) & \longrightarrow & \mathrm{Imm}^{\mathrm{O}}(n,k)
\end{array}.$$

При $k=1$ вертикальные стрелки являются изоморфизмами (см. предложение 6).

В частном случае, если $k=1$ и $n=2$, из результатов [18, 25] и предложения 8 вытекает предложение 9 Здесь через Arf обозначен изоморфизм, устанавливаемый при помощи Arf-инварианта [25], а через Brown — его обобщение [13] (см. также [2, 3]).

Предложение 9.

1. *Гомоморфизм*

$$\mathbb{Z}/2\overset{\mathrm{Arf}}{\cong}\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)}(2,1)\xrightarrow{(5)}\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(2,1)\overset{\mathrm{Brown}}{\cong}\mathbb{Z}/8$$

имеет нулевое ядро.

2. *Группа* $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(2,1) \cong \mathbb{Z}/8$ *порождается как поверхностью Боя* $B\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$*, так и её зеркальным образом* $\bar{B}$ *(с любым скоснащением).*
3. *Всякое погружение* $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ *регулярно гомотопно либо поверхности Боя, либо её зеркальному отражению.*

3.4. Размерность 3

В размерности 3 мы уже рассмотрели примеры 2, 3.

Пример 12. Из [15, замечание 1] вытекает, что существует такое погружение общего положения $\mathbb{F}\colon \mathrm{S}^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$, что пара $(\mathbb{F}, \Xi_{\mathbb{F}})$, где изоморфизм $\Xi_{\mathbb{F}}\colon \nu(\mathbb{F}) \cong \varepsilon$ построен по внешней нормали, представляет образующую группы $\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)}(3,1) \cong \Pi_3 \cong \mathbb{Z}/24$.

Пример 13. Из основной теоремы работы [15] вытекает, что гомоморфизм

$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)}(3,1) \xrightarrow{(5)} \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(3,1) \cong \Pi_4(\mathbb{R}\mathrm{P}_1^{\infty}) \cong \mathbb{Z}/2$$

сюръективен. Значит, тройка $\big(\mathbb{F},\ c = \mathrm{const},\ \Xi_{\mathbb{F}}\colon \nu(\mathbb{F}) \cong c^*(\gamma)\big)$ представляет образующую группы $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(3,1)$.

Пример 14. Тройка $(\mathbb{F}, c, \Xi_{\mathbb{F}})$ как элемент группы $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,1)$ отлична от нуля, поскольку естественный гомоморфизм $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,1) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(3,1)$ (см. формулу (3)) сюръективен.

Согласно следствию 1 тройка $(\mathbb{F}, c, \Xi_{\mathbb{F}})$ как элемент группы $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,1)$ имеет порядок 2.

4. Скручивание и раскручивание скоснащённых погружений с контролем в $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$

Пусть $\big(f\colon M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}, \kappa\colon M^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3, \Xi\colon \nu(f) \cong \kappa^*(k\gamma)\big)$ — некоторое $(k\gamma, \mathbb{R}\mathrm{P}^3)$-погружение.

Мы определим две операции: скручивания — превращения $(k\gamma \oplus 4\varepsilon, \mathbb{R}\mathrm{P}^3)$-погружения n-многообразия в $\big((k+4)\gamma, \mathbb{R}\mathrm{P}^3\big)$-погружение того же многообразия — и раскручивания — превращения $\big((k+4)\gamma, \mathbb{R}\mathrm{P}^3\big)$-погружения n-многообразия в $(k\gamma \oplus 4\varepsilon, \mathbb{R}\mathrm{P}^3)$-погружение того же многообразия.

Точки сферы S^3 можно интерпретировать как кватернионы единичного модуля, в частности перемножать. Точки тотального пространства 4γ над $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ мы договорились во введении записывать наборами вида $[x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]$, где $x \in \mathrm{S}^3$, $\lambda_k \in \mathbb{R}$; такой набор — это пара отождествлённых наборов

$$(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \sim (-x; -\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3, -\lambda_4).$$

Нам удобно отождествить $\mathbb{R}^4$ с кватернионами, тем самым заменить четвёрку чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ на один кватернион w и записывать точки тотального пространства 4γ над $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ наборами $[x; w]$, где $x \in \mathrm{S}^3$, $w \in \mathbb{H}$.

Пользуясь этой записью, зададим изоморфизм $I_{\mathbb{R}\mathrm{P}^3} \colon 4\varepsilon \cong 4\gamma$ над $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ формулой

$$([x]; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \mapsto [x; (\lambda_1 + \lambda_2 i + \lambda_3 j + \lambda_4 k) \cdot x]. \tag{12}$$

4.1. Операция скручивания $\mathbb{T}$

Пусть дано $(k\gamma \oplus 4\varepsilon, \mathbb{R}\mathrm{P}^3)$-погружение n-мерного многообразия:

$$\big(f \colon M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k+4},\ \kappa \colon M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3,\ \Xi \colon \nu(f) \cong \kappa^*(k\gamma \oplus 4\varepsilon)\big).$$

Через $\Xi^{\mathcal{T}}$ обозначим изоморфизм-композицию

$$\nu(f) \overset{\Xi}{\cong} \kappa^*(k\gamma \oplus 4\varepsilon) \cong \kappa^*(k\gamma) \oplus \kappa^*(4\varepsilon) \overset{\mathrm{id} \oplus \kappa^*(I_{\mathbb{R}\mathrm{P}^3})}{\cong} \kappa^*(k\gamma) \oplus \kappa^*(4\gamma) = \kappa^*\big((k+4)\gamma\big).$$

(Символ $\mathcal{T}$ является первой буквой слова «Twist», скручивание.)

Тройка

$$\Big(f \colon M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k+4},\ \kappa \colon M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3,\ \Xi^{\mathcal{T}} \colon \nu(f) \cong \kappa^*\big((k+4)\gamma\big)\Big)$$

является $\big((k+4)\gamma, \mathbb{R}\mathrm{P}^3\big)$-погружением.

Скручивание $\mathbb{T}$ определим формулой

$$\mathbb{T}(f, \kappa, \Xi) = (f, \kappa, \Xi^{\mathcal{T}}).$$

4.2. Операция раскручивания $\mathbb{U}$

Пусть теперь дано $\big((k+4)\gamma, \mathbb{R}\mathrm{P}^3\big)$-погружение n-многообразия:

$$\Big(f \colon M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k+4},\ \kappa \colon M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3,\ \Xi \colon \nu(f) \cong \kappa^*\big((k+4)\gamma\big)\Big).$$

Определим изоморфизм $\Xi^{\mathcal{U}}$ как композицию

$$\nu(f) \overset{\Xi}{\cong} \kappa^*\big((k+4)\gamma\big) = \kappa^*(k\gamma) \oplus \kappa^*(4\gamma) \overset{\mathrm{id} \oplus \kappa^*(I^{-1}_{\mathbb{R}\mathrm{P}^3})}{\cong} \kappa^*(k\gamma) \oplus \kappa^*(4\varepsilon) = \kappa^*(k\gamma \oplus 4\varepsilon).$$

(Символ $\mathcal{U}$ является первой буквой слова «Untwist», раскручивание.)

Тройка

$$\big(f \colon M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k+4},\ \kappa \colon M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3,\ \mathcal{U}(\Xi) \colon \nu(f) \cong \kappa^*(k\gamma \oplus 4\varepsilon)\big)$$

является $(k\gamma \oplus 4\varepsilon, \mathbb{R}\mathrm{P}^3)$-погружением.

Раскручивание $\mathbb{U}$ определим формулой

$$\mathbb{U}(f, \kappa, \Xi) = (f, \kappa, \Xi^{\mathcal{U}}).$$

Следующие два предложения очевидны.

Предложение 10. *Для любого* $(k\gamma \oplus 4\varepsilon, \mathbb{R}\mathrm{P}^3)$*-погружения*

$$\big(f\colon M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k+4},\ \kappa\colon M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3,\ \Xi\colon \nu(f) \cong \kappa^*(k\gamma \oplus 4\varepsilon)\big)$$

имеем

$$\mathbb{U} \circ \mathbb{T}(f, \kappa, \Xi) = (f, \kappa, \Xi).$$

Для любого $\big((k+4)\gamma, \mathbb{R}\mathrm{P}^3\big)$*-погружения*

$$\Big(f\colon M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k+4},\ \kappa\colon M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3,\ \Xi\colon \nu(f) \cong \kappa^*\big((k+4)\gamma\big)\Big)$$

имеем

$$\mathbb{T} \circ \mathbb{U}(f, \kappa, \Xi) = (f, \kappa, \Xi).$$

Предложение 11. *Операции* $\mathbb{T}$ *и* $\mathbb{U}$ *индуцируют взаимно-обратные изоморфизмы*

$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k)\times\mathrm{fr}(4),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(n, k+4) \xleftrightarrow{\mathbb{T},\mathbb{U}} \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k+4),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(n, k+4).$$

Теперь из (4), (3) получаем известную интерпретацию изоморфизма Джеймса [20], данную и использованную М. Маховальдом [24]. Это утверждение неоднократно использовалось нами в [10]:

Следствие 2. *При* $n = 0, 1, 2$ *имеются изоморфизмы*

$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k)}(n, k) \cong \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k+4)}(n, k+4).$$

В трёхмерном случае аналог следствия 2 места не имеет. Более того, скручивания бордантных элементов могут не быть бордантными.

Пример 15. Возьмём 4-надстройку тройки $(\mathbb{E}, c, \Phi)$ из примера 2. Эта тройка $E^4(\mathbb{E}, c, \Phi)$ представляет нулевой элемент группы $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)\times\mathrm{fr}(4)}(3, 5)$. Так как c — постоянное отображение, то скручивание не изменяет тройку $E^4(\mathbb{E}, c, \Phi)$. Итак,

$$\mathbb{T}\big(E^4(\mathbb{E}, c, \Phi)\big) = 0 \quad \text{в группе} \quad \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3, 5).$$

Пример 16. Возьмём 4-надстройку для тройки $(\mathbb{F}, c, \Xi_{\mathbb{F}})$ из примера 13. Эта тройка $E^4(\mathbb{F}, c, \Xi_{\mathbb{F}})$ порождает группу $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)\times\mathrm{fr}(4)}(3, 5) \cong \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(3, 1) \cong \mathbb{Z}/2$. Так как c — постоянное отображение, то скручивание эту тройку не изменяет.

Далее, результат скручивания $E^4(\mathbb{F}, c, \Xi_{\mathbb{F}})$ отличен от нуля в группе $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3, 5)$. В самом деле, тройка $E^4(\mathbb{F}, c, \Xi_{\mathbb{F}})$ является образом образующей $E^4(\mathbb{F}, \Xi_{\mathbb{F}})$ группы $\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(5)}(3, 5) \cong \mathbb{Z}/24$ при гомоморфизме $\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(5)}(3, 5) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3, 5)$ (см. (5)). Этот гомоморфизм ненулевой [10, теорема 1].

(Ниже мы докажем, что $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3, 5) \cong \mathbb{Z}/2$, см. теорему 1.)

Пример 17. В примере 3 построена тройка $(\mathbb{E}, \rho, \Xi_{\mathbb{E}})$. Она как элемент группы $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(3, 1)$ равна нулю. Рассмотрим образ этой тройки при композиции гомоморфизмов

$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3, 1) \overset{E^4}{\cong} \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)\times\mathrm{fr}(4),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3, 5) \overset{\mathbb{T}}{\cong} \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3, 5) \twoheadrightarrow \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3, 5). \tag{13}$$

Вложение $\mathbb{E}$ останется неизменным. Изменится лишь структура нормального расслоения. Несложно проверить, что с точностью до знака мы получим элемент $t_1(\nu)$, где ν — образующая группы $\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(5)}(3,5) \cong \mathbb{Z}/24$ (см. [10, утверждения 4, 5]), а гомоморфизм $t_1\colon \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(5)}(3,5) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5)$ определён формулой (5). Этот гомоморфизм ненулевой [10, теорема 1].

Замечание 4. Рассуждение примера 17 также показывает, что тройка $(\mathbb{E}, \rho, \Xi_{\mathbb{E}})$ представляет ненулевой элемент в группе $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,1)$.

5. Вычисление группы $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5)$

Теорема 1. *Имеют место изоморфизмы*

$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,5) \cong \Pi_8(\mathbb{R}\mathrm{P}^8_5) \cong \pi_8(\mathbb{R}\mathrm{P}^8_5) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2,$$
$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5) \cong \Pi_8(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty_5) \cong \pi_8(\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty_5) \cong \mathbb{Z}/2.$$

Доказательство. Первые изоморфизмы в каждой строке хорошо известны [30]. Вторые изоморфизмы в обеих строках вытекают из соображений размерности (см. предложение 1).

Докажем, что $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,1) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$. Тем самым будет вычислена и изоморфная группа $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,5)$.

Напомним, что скоснащённые погружения $(\mathbb{F}, c, \Xi_{\mathbb{F}})$ и $(\mathbb{E}, \rho, \Xi_{\mathbb{E}})$ введены в примерах 13 и 2.

Лемма 2. *Для произвольного скоснащённого погружения 3-мерного многообразия*

$$\big(f_M\colon M^3 \looparrowright \mathbb{R}^4,\ \kappa_M\colon M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3,\ \Xi_M\colon \nu(f_M) \cong \kappa_M^*(\gamma)\big)$$

существует скоснащённый кобордизм

$$\big(F_W\colon W \looparrowright \mathbb{R}^4 \times I,\ \kappa_W\colon W \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3,\ \Xi_W\colon \nu(F_W) \cong \kappa_W^*(\gamma)\big)$$

между (f_M, κ_M, Ξ_M) и скоснащённым погружением вида

$$\delta \cdot (\mathbb{F}, c, \Xi_{\mathbb{F}}) \sqcup m \cdot (\mathbb{E}, \rho, \Xi_{\mathbb{E}}),$$

где $\delta \in \{0;1\}$ и $m \geqslant 0$.

Подчеркнём, что здесь мы добиваемся включения $\kappa_W(W) \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^3$.

Доказательство леммы 2. Поскольку $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(3,1) \cong \mathbb{Z}/2$, то существует скоснащённый кобордизм

$$\big(F_V\colon V \looparrowright \mathbb{R}^4 \times I,\ \kappa_V\colon V \to \mathbb{R}\mathrm{P}^4,\ \Xi_V\colon \nu(F_V) \cong \kappa_V^*(\gamma)\big)$$

между (f_M, κ_M, Ξ_M) и одним из скоснащённых погружений $(\mathbb{F}, c, \Xi_{\mathbb{F}})$, $(\mathbb{E}, c, \Phi)$.

Подчеркнём, что, вообще говоря, образ $\kappa_V(V) \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^4$ не гомотопируется в $\mathbb{R}\mathrm{P}^3 \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^4$.

Изменим кобордизм V; мы добьёмся того, что для нового кобордизма W будет выполняться включение $\kappa_W(W) \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^3$; при этом, вообще говоря, изменится граница: $\partial W \neq \partial V$.

Будем считать отображение κ_V гладким. Пусть $\mathrm{pt} \in \mathbb{R}\mathrm{P}^4$ — такая выделенная точка, что она является регулярным значением для κ_V и $\mathrm{pt} \notin \kappa_V(\partial V)$. Тогда $\kappa_V^{-1}(\mathrm{pt}) = \{p_1, \ldots, p_m\}$. Существует такая открытая дисковая окрестность $O(\mathrm{pt})$ точки $\mathrm{pt} \in \mathbb{R}\mathrm{P}^4$, что для $k = 1, \ldots, m$ прообразы $O(p_k) = \kappa_V^{-1}\bigl(O(\mathrm{pt})\bigr)$ являются попарно непересекающимися дисковыми окрестностями точек p_k и отображаются посредством κ_V на $O(\mathrm{pt})$ диффеоморфно.

Заменим кобордизм V на $W = V - \bigcup\limits_{k=1}^{m} O(p_k)$. Положим $f_W = f_V|_W$, $\kappa_W = \kappa_V|_W$, $\Xi_W = \Xi_V|_W$.

Гомотопируя отображение $\kappa_W \colon W \to \mathbb{R}\mathrm{P}^4 - O(\mathrm{pt})$, можем считать, что выполнено включение $\kappa_W(W) \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^4 - O(\mathrm{pt})$. (При этом гомотопию можно выбрать так, что отображение κ_W возле $M \subset \partial W$ не изменится.) Ссылка на пример 3 и замечание 3 завершает доказательство. $\square$

Лемма 2 означает, что группа $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,1)$ порождается двумя элементами: $(\mathbb{F}, c, \Xi_{\mathbb{F}})$ и $(\mathbb{E}, \rho, \Xi_{\mathbb{E}})$. Каждый из них отличен от нуля (см. пример 14, замечание 4).

Элемент $(\mathbb{F}, c, \Xi_{\mathbb{F}})$ имеет порядок 2 (следствие 1). Пользуясь предложением 8, можно показать, что и тройка $(\mathbb{E}, \rho, \Xi_{\mathbb{E}})$ имеет порядок 2 в группе $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,1)$.

Покажем, что тройки $(\mathbb{E}, \rho, \Xi_{\mathbb{E}})$ и $(\mathbb{F}, c, \Xi_{\mathbb{F}})$ представляют различные элементы в группе $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,1)$. Для этого рассмотрим эпиморфизм $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,1) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(3,1) \cong \mathbb{Z}/2$. Согласно примеру 3, первая тройка переходит в ноль. Согласно примеру 13 вторая тройка переходит в ненулевой элемент. Следовательно, они не бордантны в группе $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,1)$.

Наконец, эта группа абелева. Итак, мы доказали, что $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,1) \cong$ $\cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$. Первая часть теоремы 1 доказана.

Докажем, что $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5) \cong \mathbb{Z}/2$. Согласно [10, теорема 1] элемент $t_1(\nu)$ этой группы отличен от нуля; здесь $\nu \in \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(5)}(3,5) \cong \Pi_3 \cong \mathbb{Z}/24$ — образующая, $t_1 \colon \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(5)}(3,5) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5)$ — определённый формулой (5) гомоморфизм.

Рассмотрим эпиморфизм

$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,1) \cong \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,5) \twoheadrightarrow \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5).$$

Согласно примерам 16, 17 эта композиция переводит образующие $(\mathbb{F}, c, \Xi_{\mathbb{F}})$ и $(\mathbb{E}, \rho, \Xi_{\mathbb{E}})$ группы $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,1)$ в $t_1(\nu)$ с точностью до знака. Значит, группа $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5)$ циклическая, а $t_1(\nu)$ — её образующая. Так как $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1),\mathbb{R}\mathrm{P}^3}(3,1) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, то $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5) \cong \mathbb{Z}/2$.

Теорема доказана. $\square$

6. Теорема о замене

Возьмём 5-скоснащённое погружение 3-многообразия

$$\big(f\colon M^3 \looparrowright \mathbb{R}^8,\ \kappa\colon M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3,\ \Xi\colon \nu(f) \cong \kappa^*(5\gamma)\big).$$

Пусть $\mathcal{A}\colon 5\gamma \to 5\gamma$ — изоморфизм над $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$. Изоморфизм

$$\nu(f) \overset{\Xi}{\cong} \kappa^*(5\gamma) \overset{\kappa^*(\mathcal{A})}{\cong} \kappa^*(5\gamma)$$

обозначим через $\Xi^{\mathcal{A}}$.

Теорема 2. *Если $\mathcal{A}\colon 5\gamma \to 5\gamma$ — изоморфизм над $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$, в каждом слое сохраняющий ориентацию, то для любого 5-скоснащённого погружения 3-многообразия $\big(f\colon M^3 \looparrowright \mathbb{R}^8,\ \kappa\colon M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3,\ \Xi\colon \nu(f) \cong \kappa^*(5\gamma)\big)$ тройки $(f, \kappa, \Xi^{\mathcal{A}})$ и (f, κ, Ξ) бордантны в группе* $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5)$.

Доказательство. Из леммы 2 вытекает, что существует кобордизм

$$\big(F_W\colon W \looparrowright \mathbb{R}^8 \times I,\ \kappa_W\colon W \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3,\ \Xi_W\colon \nu(F_W) \cong \kappa_W^*(5\gamma)\big)$$

между исходной тройкой (f, κ, Ξ) и тройкой вида

$$\delta \cdot \mathbb{T}\big(E^4(\mathbb{F}, c, \Xi_{\mathbb{F}})\big) \sqcup m \cdot \mathbb{T}\big(E^4(\mathbb{E}, \rho, \Xi_{\mathbb{E}})\big), \quad \text{где} \quad \delta \in \{0; 1\}, \quad m \geqslant 0.$$

Имеем $\mathbb{T}\big(E^4(\mathbb{F}, c, \Xi_{\mathbb{F}})\big) = E^4(\mathbb{F}, c, \Xi_{\mathbb{F}})$ (пример 16). Обозначим для удобства тройку $\mathbb{T}\big(E^4(\mathbb{E}, \rho, \Xi_{\mathbb{E}})\big)$ через $(E^4\mathbb{E}, \rho, \Psi_{\mathbb{E}})$. Итак, тройка (F_W, κ_W, Ξ_W) задаёт кобордизм между (f, κ, Ξ) и тройкой вида

$$\delta \cdot E^4(\mathbb{F}, c, \Xi_{\mathbb{F}}) \sqcup m \cdot (E^4(\mathbb{E}, \rho, \Psi_{\mathbb{E}}), \quad \text{где} \quad \delta \in \{0; 1\}, \quad m \geqslant 0.$$

Так как $\kappa_W(W) \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^3$, то замену $\mathcal{A}$ можно совершить над всем кобордизмом W. Иными словами, тройка $(f_W, \kappa_W, \Xi_W^{\mathcal{A}})$ будет кобордизмом между $(f, \kappa, \Xi^{\mathcal{A}})$ и погружением вида

$$\delta \cdot (E^4\mathbb{F}, c, (E^4\Xi_{\mathbb{F}})^{\mathcal{A}}) \sqcup m \cdot (E^4\mathbb{E}, \rho, \Psi_{\mathbb{E}}^{\mathcal{A}}), \quad \text{где} \quad \delta \in \{0; 1\}, \quad m \geqslant 0.$$

Идея доказательства: показать, что кобордантны тройки $(E^4\mathbb{F}, c, (E^4\Xi_{\mathbb{F}})^{\mathcal{A}})$ и $(E^4\mathbb{F}, c, E^4\Xi_{\mathbb{F}})$, а также кобордантны тройки $(E^4\mathbb{E}, \rho, \Psi_{\mathbb{E}}^{\mathcal{A}})$ и $(E^4\mathbb{E}, \rho, \Psi_{\mathbb{E}})$. Тогда, склеивая два кобордизма, мы получим кобордизм между тройками $(f, \kappa, \Xi^{\mathcal{A}})$ и (f, κ, Ξ).

Для тройки $(E^4\mathbb{F}, c, E^4\Xi_{\mathbb{F}})$ доказательство просто: можем считать, что изоморфизм $\mathcal{A}$ тождествен над точкой-значением c характеристического отображения, так что

$$(E^4\mathbb{F}, c, (E^4\Xi_{\mathbb{F}})^{\mathcal{A}}) = (E^4\mathbb{F}, c, E^4\Xi_{\mathbb{F}}) = E^4(\mathbb{F}, c, \Xi_{\mathbb{F}}).$$

Тройка $(E^4\mathbb{E}, \rho, \Psi_{\mathbb{E}}^{\mathcal{A}})$ нуждается в более подробном изучении. Оно проводится в несколько шагов.

Шаг 1. *Всякий сохраняющий ориентацию в слоях автоморфизм $\mathcal{A}\colon 5\gamma \to 5\gamma$ над $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ послойно гомотопен автоморфизму вида $\mathcal{B} \oplus \mathrm{id}_\gamma$, где $\mathrm{id}\colon \gamma \to \gamma$ тождественный, $\mathcal{B}\colon 4\gamma \to 4\gamma$ сохраняет ориентацию в слоях.*

В самом деле, достаточно доказать, что всякое отображение $\mu\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \to \mathrm{SO}(5)$ гомотопируется в отображение, образ которого лежит в $\mathrm{SO}(4)$. С этой целью вспомним, что имеется расслоение $\pi\colon \mathrm{SO}(5) \to \mathrm{S}^4$ со слоем $\mathrm{SO}(4)$. Композиция $\pi \circ \mu\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \to \mathrm{S}^4$ гомотопна клеточному отображению, но 3-остов S^4 тривиален, так что $\pi \circ \mu\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \to \mathrm{S}^4$ гомотопно нулю. Эта гомотопия поднимается в расслоённое пространство $\mathrm{SO}(5)$ и даёт гомотопию исходного отображения μ к отображению, образ которого содержится в слое, т. е. в $\mathrm{SO}(4)$.

Итак, будем считать, что $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \mathrm{id}_\gamma$, где $\mathcal{B}\colon 4\gamma \to 4\gamma$ сохраняет ориентацию в слоях.

Шаг 2. Построим изоморфизм Θ как композицию

$$\nu(E^4\mathbb{E}) \overset{\Psi_{\mathbb{E}}}{\cong} \rho^*(5\gamma) \overset{(2)}{\cong} 5\varepsilon$$

и изоморфизм $\Theta^{\mathcal{A}}$ как композицию

$$\nu(E^4\mathbb{E}) \overset{\Psi_{\mathbb{E}}^{\mathcal{A}}}{\cong} \rho^*(5\gamma) \overset{(2)}{\cong} 5\varepsilon.$$

2.1. Из предложений 4, 8 вытекает, что при гомоморфизме

$$t_1\colon \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(5)}(3,5) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5)$$

(см. формулу (5)) образ пары $(E^4\mathbb{E}, \Theta)$ бордантен тройке $(E^4\mathbb{E}, \rho, \Psi_{\mathbb{E}})$, а образ пары $(E^4\mathbb{E}, \Theta^{\mathcal{A}})$ — тройке $(E^4\mathbb{E}, \rho, \Psi_{\mathbb{E}}^{\mathcal{A}})$.

2.2. В оснащениях Θ, $\Theta^{\mathcal{A}}$ скручены вектора с номерами со второго по пятый. Удобнее считать, что скручены вектора с номерами с первого по четвертый. Точнее, определим изоморфизм Θ_1 как композицию

$$\nu(E^4\mathbb{E}) \cong \nu(\mathbb{E}) \oplus 4\varepsilon = 5\varepsilon = 4\varepsilon \oplus \varepsilon \overset{I_{\mathrm{S}^3} \oplus \mathrm{id}_\varepsilon}{\cong} 4\varepsilon \oplus \varepsilon$$

и изоморфизм $\Theta_1^{\tilde{\mathcal{A}}}$ как композицию

$$\nu(E^4\mathbb{E}) \cong \nu(\mathbb{E}) \oplus 4\varepsilon = 5\varepsilon = 4\varepsilon \oplus \varepsilon \overset{I_{\mathrm{S}^3} \oplus \mathrm{id}_\varepsilon}{\cong} 4\varepsilon \oplus \varepsilon \overset{\rho^*(\mathcal{B}) \oplus \mathrm{id}_\varepsilon}{\cong} 4\varepsilon \oplus \varepsilon.$$

Здесь $I_{\mathrm{S}^3}\colon 4\varepsilon \to 4\varepsilon$ — автоморфизм тривиального расслоения над S^3, заданный формулой

$$(x; a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto (x; (a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) \cdot x)$$

(ср. с (12)). Тогда с точностью до знака бордантны пары $(E^4\mathbb{E}, \Theta)$ и $(E^4\mathbb{E}, \Theta_1)$, а также пары $(E^4\mathbb{E}, \Theta^{\tilde{\mathcal{A}}})$ и $(E^4\mathbb{E}, \Theta_1^{\tilde{\mathcal{A}}})$. Таким образом, для гомоморфизма $t_1\colon \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(5)}(3,5) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5)$ имеем, что

$$t_1(E^4\mathbb{E}, \Theta_1) \ \text{ бордантно } \ (E^4\mathbb{E}, \rho, \Psi_{\mathbb{E}}),$$

$$t_1(E^4\mathbb{E}, \Theta_1^{\tilde{\mathcal{A}}}) \ \text{ бордантно } \ (E^4\mathbb{E}, \rho, \Psi_{\mathbb{E}}^{\tilde{\mathcal{A}}}).$$

2.3. $\Theta_1^{\tilde{\mathcal{A}}} = \tilde{\mathcal{A}} \circ \Theta_1$, где $\tilde{\mathcal{A}}$ — композиция изоморфизмов

$$5\varepsilon \overset{(2)}{\cong} \rho^*(5\gamma) \overset{\rho^*(\mathcal{A})}{\cong} \rho^*(5\gamma) \overset{(2)}{\cong} 5\varepsilon$$

над S^3.

2.4. $\tilde{\mathcal{A}}$ разлагается в прямую сумму $\tilde{\mathcal{B}} \oplus \mathrm{id}_\varepsilon$, где $\tilde{\mathcal{B}}\colon 4\varepsilon \to 4\varepsilon$ — изоморфизм, сохраняющий ориентацию в каждом слое над S^3.

2.5. Изоморфизм $\tilde{\mathcal{B}}\colon 4\varepsilon \to 4\varepsilon$ обладает свойством чётности: для соответствующего ему отображения $\mu_{\tilde{\mathcal{B}}} : \mathrm{S}^3 \to \mathrm{SO}(4)$ имеем

$$\mu_{\tilde{\mathcal{B}}}(x) = \mu_{\tilde{\mathcal{B}}}(-x), \quad x \in \mathrm{S}^3.$$

Шаг 3. *Денадстройка.* Вместо вложения $E^4\mathbb{E}\colon \mathrm{S}^3 \to \mathbb{R}^8$ рассмотрим стандартное вложение $E^3\mathbb{E}\colon \mathrm{S}^3 \to \mathbb{R}^7$. Построим два его оснащения.

Вернемся к пункту 2.2 и обозначим через Γ изоморфизм-композицию

$$\nu(E^3\mathbb{E}) \cong \nu(\mathbb{E}) \oplus 3\varepsilon = 4\varepsilon \overset{I_{\mathrm{S}^3}}{\cong} 4\varepsilon$$

и через $\Gamma^{\tilde{\mathcal{B}}}$ композицию $\tilde{\mathcal{B}} \circ \Gamma\colon \nu(E^3\mathbb{E}) \cong 4\varepsilon$. Тогда при надстройке (4)

$$E\colon \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(4)}(3,4) \cong \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(5)}(3,5)$$

имеем

$$(E^3\mathbb{E}, \Gamma) \mapsto (E^4\mathbb{E}, \Theta_1), \quad (E^3\mathbb{E}, \Gamma^{\tilde{\mathcal{B}}}) \mapsto (E^4\mathbb{E}, \Theta_1^{\tilde{\mathcal{A}}}).$$

Шаг 4. Стабильный инвариант Хопфа $h^{\mathrm{st}}\colon \Pi_3 \to \mathbb{Z}/2$ и гомоморфизм t_1 сюръективны, так что существует изоморфизм h^{sf}, превращающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}/24 \cong \Pi_3 \cong \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(5)}(3,5) \arrow[r, "t_1"] \arrow[dr, "h^{\mathrm{st}}"'] & \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5) \arrow[d, dotted, "h^{sf}"] \\
& \mathbb{Z}/2
\end{tikzcd}$$

в коммутативную. Таким образом, для элементов $a, b \in \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(4)}(3,4)$ имеем

$$t_1(a) = t_1(b) \iff h^{\mathrm{st}}(a) = h^{\mathrm{st}}(b).$$

Шаг 5. Коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(4)}(3,4) & \xrightarrow{E} & \mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(5)}(3,5) \\
{\scriptstyle h}\big\downarrow & & {\scriptstyle h^{\mathrm{st}}}\big\downarrow \\
\mathbb{Z} & \xrightarrow{\mathrm{mod}\ 2} & \mathbb{Z}/2
\end{array}.$$

Поэтому осталось показать, что

$$h(E^3\mathbb{E}, \Gamma) \equiv h(E^3\mathbb{E}, \Gamma^{\tilde{\mathcal{B}}}) \bmod 2. \tag{14}$$

Шаг 6. Известно, что $(E^3\mathbb{E}, \Gamma)$ является образующей группы $\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(4)}(3,4)$ и имеет инвариант Хопфа 1.

Докажем, что $h(E^3\mathbb{E}, \Gamma^{\tilde{\mathcal{B}}})$ нечётен.

Разность $h(E^3\mathbb{E}, \Gamma) - h(E^3\mathbb{E}, \Gamma^{\tilde{\mathcal{B}}})$ совпадает с точностью до знака со степенью отображения, которое определено первым базисным вектором оснащения

$\Gamma^{\tilde{\mathcal{B}}}$, т. е. отображения $\Delta_{\tilde{\mathcal{B}}}\colon \mathrm{S}^3 \to \mathrm{S}^3$, где сфера-образ — это слой сферизации нормального расслоения, определённый по Γ [4]. Из чётности отображения $\mu_{\tilde{\mathcal{B}}}$ (п. 2.5) вытекает чётность отображения $\Delta_{\tilde{\mathcal{B}}}$, т. е. $\Delta_{\tilde{\mathcal{B}}}(x) = \Delta_{\tilde{\mathcal{B}}}(-x)$ для всех $x \in \mathrm{S}^3$. Чётное отображение $\Delta_{\tilde{\mathcal{B}}}\colon \mathrm{S}^3 \to \mathrm{S}^3$ факторизуется через проекцию $\rho\colon \mathrm{S}^3 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3$. Эта проекция имеет степень 2, следовательно, $\deg \Delta_{\tilde{\mathcal{B}}}$ чётна.

Итак, сравнение (14) доказано.

Шаг 7. Проведённое рассуждение доказывает, что тройки $(E^4\mathbb{E}, \rho, \Psi_{\mathbb{E}})$ и $(E^4\mathbb{E}, \rho, \Psi_{\mathbb{E}}^{\mathcal{A}})$ бордантны в $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5)$. Как уже сказано, это позволяет соединить два кобордизма: $(F_W, \kappa_W, \Xi_W^{\mathcal{A}})$ и (F_W, κ_W, Ξ_W). В результате получим кобордизм троек (f, κ, Ξ) и $(f, \kappa, \Xi^{\mathcal{A}})$. Теорема доказана. □

7. Теорема о произведении и о трансфере

Инвариантная (построенная при помощи октав Кэли) тривиализация $T\mathbb{R}\mathrm{P}^7 \cong 7\varepsilon$ индуцирует по теореме Хирша [19, теорема 6.3] погружение $f\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^7 \looparrowright \mathbb{R}^8$. Зафиксируем изоморфизм $\Xi\colon \nu(f) \cong \varepsilon$. Возьмём также тождественное отображение $\kappa\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^7 \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{R}\mathrm{P}^7 \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$. Тройка (f, κ, Ξ) представляет собой элемент группы $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(0)\times\mathrm{fr}(1)}(7,1)$; обозначим его через $\mathfrak{p}$.

Напомним, что

$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)\times\mathrm{fr}(1)}(2,6) \cong \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(2,1) \cong \mathbb{Z}/8$$

и что в качестве образующей последней группы можно взять поверхность Боя $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \looparrowright \mathbb{R}^3$ с любым из скоснащений. В [10] мы выбрали такую образующую и обозначили её через $\upsilon \in \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(2,1)$. Скручивание $\mathbb{T}\big(E^4(\upsilon)\big)$ является образующей группы $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(2,5)$.

Определим гомоморфизм

$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k)}(n,k) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(k+m)}(n-m, m+k) \tag{15}$$

(при $m = 1$ см. [9]). Пусть дан представитель первой группы, т. е. тройка

$$\big(f_M\colon M^n \looparrowright \mathbb{R}^{n+k},\ \kappa_M\colon M^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n,\ \Xi_M\colon \nu(f) \cong \kappa_M^*(k\gamma)\big).$$

Считая, что κ_M трансверсально $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-m} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, положим $N = \kappa_M^{-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-m})$. Это $(n-m)$-мерное подмногообразие в M, причём имеется естественный изоморфизм

$$\nu(N, M) \cong \kappa_M^*\big(\nu(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-m}, \mathbb{R}\mathrm{P}^n)\big) \cong \kappa_M^*(m\gamma).$$

Пусть $f_N\colon N \subset M \looparrowright \mathbb{R}^{n+k}$ — ограничение погружения f_M, $\kappa_N\colon N \subset M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ — ограничение отображения κ_M, и пусть изоморфизм $\Xi_N\colon \nu(f_N) \cong \kappa_N^*\big((k+m)\gamma\big)$ получен по формуле

$$\nu(f_N) \cong \nu(N, M) \oplus \nu(f_M) \cong \kappa_N^*(m\gamma) \oplus \kappa_N^*(k\gamma) = \kappa_N^*\big((m+k)\gamma\big).$$

Правило

$$(f_M, \kappa_M, \Xi_M) \mapsto (f_N, \kappa_N, \Xi_N)$$

определяет гомоморфизм (15).

Предложение 12. *Образ элемента* $\mathfrak{p}$ *при гомоморфизме (15)*
$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(0)\times\mathrm{fr}(1)}(7,1)\to\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)\times\mathrm{fr}(1)}(2,6)$$
является образующей группы $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)\times\mathrm{fr}(1)}(2,6)\cong\mathbb{Z}/8$.

Доказательство. Согласно определению образ элемента $\mathfrak{p}$ представлен тройкой (f_0,κ_0,Ξ_0), где
$$\begin{aligned}
&f_0\colon M_0=\kappa^{-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)\subset\mathbb{R}\mathrm{P}^7\overset{f}{\looparrowright}\mathbb{R}^8,\\
&\kappa_0=\kappa|_{M_0}\colon M_0\to\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty,\\
&\Xi_0=\Xi_{M_0}\oplus\kappa_0^*\bigl(\nu(\mathbb{R}\mathrm{P}^2,\mathbb{R}\mathrm{P}^7)\bigr)\colon\nu(f_0)\cong\varepsilon\oplus5\kappa_0^*\gamma.
\end{aligned}$$

Ясно, что $M_0=\kappa^{-1}(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)=\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Итак, образ элемента $\mathfrak{p}$ в группе $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)\times\mathrm{fr}(1)}(2,6)$ представлен погружением проективной плоскости. Чтобы показать, что он бордантен $\pm E\bigl(\mathbb{T}(E^4\upsilon)\bigr)$, применим обратный изоморфизм $\mathbb{U}\circ E^{-1}\colon\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)\times\mathrm{fr}(1)}(2,6)\cong\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(1)}(2,1)$. Конструкция предписывает заменить скоснащение Ξ_0 на
$$\Psi\colon\nu(f_0)\overset{\Xi_0}{\cong}\varepsilon\oplus5\kappa_0^*\gamma\overset{\mathrm{id}\oplus\kappa_0^*(I^{-1}_{\mathbb{R}\mathrm{P}^3})}{\cong}\varepsilon\oplus\kappa_0^*\gamma\oplus4\varepsilon$$
и в соответствии с теоремой Хирша заменить погружение $f_0\colon\mathbb{R}\mathrm{P}^2\looparrowright\mathbb{R}^8$ на регулярно гомотопное ему погружение вида $g\colon\mathbb{R}\mathrm{P}^2\looparrowright\mathbb{R}^3\subset\mathbb{R}^8$.

В силу пунктов 3 и 2 предложения 9 результирующий элемент бордантен $\pm\upsilon$. $\square$

Для формулировки теоремы 3 введём обозначения c_1, c_2 для элементов из $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(8)}(1,8)\cong\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2$ представленных тройками
$$c_1=(f_1,\kappa_1,\Xi_1),\quad c_2=(f_2,\kappa_2,\Xi_2),\tag{16}$$
где $f_1\colon\mathrm{S}^1\subset\mathbb{R}^2\subset\mathbb{R}^9$ — стандартное вложение, $\kappa_1\colon\mathrm{S}^1\to\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ — гомотопически нетривиальное, $\Xi_1\colon\nu(f_1)\cong\kappa_1^*(8\gamma)$ — (любой) изоморфизм; $f_2\colon\mathrm{S}^1\subset\mathbb{R}^2\subset\mathbb{R}^9$ — погружение на восьмёрку, $\kappa_2\colon\mathrm{S}^1\to\mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ — гомотопически нетривиальное, $\Xi_2\colon\nu(f_2)\cong\kappa_2^*(8\gamma)$ — (любой) изоморфизм. Через $\eta\in\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)}(1,1)\cong\mathbb{Z}/2$ обозначена образующая. Символ $\times$ здесь обозначает гомоморфизм перемножения (см., например, [10, (8)]).

Теорема 3.

1. *При композиции гомоморфизмов*
$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(0)\times\mathrm{fr}(1)}(7,1)\otimes\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)}(1,1)\xrightarrow{\times}\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(0)\times\mathrm{fr}(2)}(8,2)\xrightarrow{(15)}$$
$$\to\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)\times\mathrm{fr}(2)}(3,7)\overset{(E^2)^{-1}}{\cong}\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5)$$
образ элемента $\mathfrak{p}\otimes\eta$ *является образующей группы* $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5)\cong\mathbb{Z}/2$.

2. *При композиции гомоморфизмов*

$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(0)\times\mathrm{fr}(1)}(7,1)\otimes\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(8)}(1,8)\xrightarrow{\times}\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(0)\times\mathrm{sf}(8)}(8,8)\xrightarrow{(8)}$$

$$\to\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(0)\times\mathrm{fr}(8)}(8,8)\xrightarrow{(15)}\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)\times\mathrm{fr}(8)}(3,13)\overset{(E^8)^{-1}}{\cong}\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5)$$

как образ элемента $\mathfrak{p}\otimes c_1$*, так и образ элемента* $\mathfrak{p}\otimes c_2$ *равен образующей группы* $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5)$.

Доказательство. Оба утверждения вытекают из рассмотрения одной коммутативной диаграммы. Так как она не помещается на страницу, нам придётся рассмотреть её по частям; кроме того, в этом доказательстве группы Imm обозначаем короче — через I.

Докажем утверждение 1. Нам надо показать, что при проходе диаграммы вниз-вправо

$$\begin{tikzcd}
I^{\mathrm{sf}(0)\times\mathrm{fr}(1)}(7,1)\otimes I^{\mathrm{fr}(1)}(1,1) \arrow[r, "(15)\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\times"'] & I^{\mathrm{sf}(5)\times\mathrm{fr}(1)}(2,6)\otimes I^{\mathrm{fr}(1)}(1,1) \arrow[d, "\times"'] \\
I^{\mathrm{sf}(0)\times\mathrm{fr}(2)}(8,2) \arrow[r, "(15)"] & I^{\mathrm{sf}(5)\times\mathrm{fr}(2)}(3,7)
\end{tikzcd}$$

элемент $\mathfrak{p}\otimes\eta$ переходит в образующую. Пройдём вместо этого вправо-вниз. При проходе вправо получим (с точностью до знака) $E\Big(\mathbb{T}\big(E^4(\upsilon)\big)\Big)\otimes\eta$, что при проходе вниз даёт образующую $E^2\big(t_1(\nu)\big)$ [10, теорема 3].

Докажем утверждение 2. Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
I^{\mathrm{sf}(0)\times\mathrm{fr}(1)}(7,1)\otimes I^{\mathrm{sf}(8)}(1,8) \arrow[r, "\mathrm{id}\times(8)"] \arrow[d, "\times"'] & I^{\mathrm{sf}(0)\times\mathrm{fr}(1)}(7,1)\otimes I^{\mathrm{fr}(8)}(1,8) \arrow[d, "\times"'] \\
I^{\mathrm{sf}(0)\times\mathrm{sf}(8)}(8,8) \arrow[r, "(8)"] & I^{\mathrm{sf}(0)\times\mathrm{fr}(8)}(8,8)\cong I^{\mathrm{sf}(0)\times\mathrm{fr}(2)}(8,2)
\end{tikzcd},$$

которую можно рассматривать как продолжение влево для диаграммы из доказательства пункта 1. Поэтому пункт 2 будет доказан, если проверить, что при трансфере $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(8)}(1,8)\to\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(8)}(1,8)$ элементы c_1, c_2 переходят в образующую группы $\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(8)}(1,8)\cong\mathrm{Imm}^{\mathrm{fr}(1)}(1,1)$. Это проверяется непосредственно. □

8. Набросок доказательства теоремы о непогружаемости $\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}$ в $\mathbb{R}^{15}$

В [10] авторы предложили и частично реализовали схему геометрического доказательства теоремы Баума—Браудера о непогружаемости $\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}$ в $\mathbb{R}^{15}$. Согласно лемме Сандерсона [11, лемма (9.7)] достаточно показать, что $T\mathbb{R}\mathrm{P}^{15}$ не допускает десяти линейно независимых векторных полей над $\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}\subset\mathbb{R}\mathrm{P}^{15}$.

Верно большее: $T\mathbb{R}\mathrm{P}^{15}$ не допускает девяти линейно независимых векторных полей над $\mathbb{R}\mathrm{P}^{10} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{15}$ [11, теорема (9.5)].

Кошорке разработал сингулярностный подход к задаче о существовании мономорфизма двух произвольных векторных расслоений над многообразием [21]. Метод предписывает взять морфизм общего положения $9\varepsilon \to T\mathbb{R}\mathrm{P}^{15}|_{\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}}$ над $\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}$ и изучить его особые точки — те точки, в которых ядро этого морфизма ненулевое. Оказывается, особое многообразие имеет специальную структуру нормального расслоения; Кошорке определяет специальную группу бордизмов и показывает, что особое многообразие бордантно в этой группе нулю тогда и только тогда, когда существует мономорфизм данных расслоений.

В нашей задаче неудобно брать морфизм $9\varepsilon \to T\mathbb{R}\mathrm{P}^{15}$ над $\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}$. Вместо этого мы будем доказывать, что нет мономорфизма $10\varepsilon \to T\mathbb{R}\mathrm{P}^{15} \oplus \varepsilon$ над $\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}$. Кроме того, мы временно изменим базисное пространство: вместо $\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}$ будем рассматривать $\mathbb{R}\mathrm{P}^{15}$ (благодаря наличию расслоения Хопфа $\mathbb{R}\mathrm{P}^{15} \to \mathrm{S}^8$ появляется возможность построить удобный морфизм общего положения). Для вспомогательной задачи $10\varepsilon \to T\mathbb{R}\mathrm{P}^{15} \oplus \varepsilon$ над $\mathbb{R}\mathrm{P}^{15}$ не выполнены условия теоремы Кошорке. Тем не менее мы можем рассмотреть особое многообразие и его нормальное расслоение. Особенность окажется представлена 8-многообразием со специальной структурой нормального расслоения; это особое многообразие можно будет интерпретировать как элемент $x \in \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(0)\times\mathrm{fr}(8)}(8,8)$, назовём его вспомогательным препятствием. Возвращение к исходной задаче $10\varepsilon \to T\mathbb{R}\mathrm{P}^{15} \oplus \varepsilon$ над $\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}$ соответствует гомоморфизму групп «препятствий» (кавычки здесь означают, что для задачи над $\mathbb{R}\mathrm{P}^{15}$ это слово не вполне точно); он разлагается в композицию

$$\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(0)\times\mathrm{fr}(8)}(8,8) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)}(3,5) \hookrightarrow \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(5)\times\mathrm{sf}(6)}(3,11).$$

В следующей статье мы покажем, что в группе $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(0)\times\mathrm{fr}(8)}(8,8)$ выполнено соотношение $x = y + 2z + t$, где y является образом произведения (см. формулу (16)) $\mathfrak{p} \otimes c_1 \in \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(0)\times\mathrm{fr}(1)}(7,1) \otimes \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}(8)}(1,8)$, как в п. 2 теоремы 3; t — некоторый элемент, допускающий понятное описание. По теореме 1 чётный элемент $2z$ переходит в ноль. Использование теоремы 2 позволит показать, что и элемент t переходит в ноль. По теореме 3 и [10, теорема 3] элемент y переходит в ненулевой элемент. Следовательно, и образ элемента x отличен от нуля, но это и есть препятствие к существованию десяти линейно независимых полей расслоения $T\mathbb{R}\mathrm{P}^{15} \oplus \varepsilon$ над $\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}$.

Литература

[1] Ахметьев П. М., Соловьёв Ю. П. Погружённые поверхности: Спецкурс. Весна 2002. — `http://www.mccme.ru/ium/s02/imm.html`.

[2] Гийу Л., Марен А. Обобщение теоремы Рохлина о сигнатуре // В поисках утраченной топологии / Ред.: Л. Гийу, А. Марен. — М.: Мир, 1989. — С. 110—133.

[3] Мацумото Ю. Элементарное доказательство теоремы Рохлина о сигнатуре и её обобщения, принадлежащего Гийу и Марену // В поисках утраченной топологии / Ред.: Л. Гийу, А. Марен. — М.: Мир, 1989. — С. 134—148.

[4] Понтрягин Л. С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий // Тр. МИАН СССР. — 1955. — Т. 45. — С. 3—139.

[5] Рохлин В. А. Трёхмерное многообразие — граница четырёхмерного // ДАН СССР. — 1951. — Т. 81, № 3. — С. 355—357.

[6] Том Р. Некоторые свойства «в целом» дифференцируемых многообразий // Расслоённые пространства и их приложения. — М.: Изд. иностр. лит., 1958. — С. 291—351.

[7] Хирш М. Дифференциальная топология. — М.: Мир, 1979.

[8] Хьюзмоллер Д. Расслоённые пространства. — М.: Мир, 1970.

[9] Akhmet'ev P. M., Eccles P. J. The relationship between framed bordism and skew-framed bordism // Bull. London Math. Soc. — 2007. — Vol. 39, no. 3. — P. 473—481.

[10] Akhmetiev P., Frolkina O. On non-immersibility of $\mathbb{R}\mathrm{P}^{10}$ to $\mathbb{R}^{15}$ // Topol. Its Appl. — 2013. — Vol. 160, no. 11. — P. 1241—1254.

[11] Baum P. F., Browder W. The cohomology of quotients of classical groups // Topology. — 1965. — Vol. 3. — P. 305—336.

[12] Boardman J. M., Steer B. On Hopf invariants // Comment. Math. Helv. — 1967. — Vol. 42, no. 1. — P. 180—221.

[13] Brown E. H., Jr. Generalizations of the Kervaire invariant // Ann. Math. (2). — 1972. — Vol. 95, no. 2. — P. 368—383.

[14] Eccles P. J. Multiple points of codimension one immersions // Topology Symposium, Siegen 1979. — Berlin: Springer, 1980. — (Lect. Notes Math.; Vol. 788). — P. 23—38.

[15] Freedman M. Quadruple points of 3-manifolds in S^4 // Comment. Math. Helv. — 1978. — Vol. 53. — P. 385—394.

[16] Grant M. Bordism of Immersions: Thesis. — 2006.

[17] Guillemin V., Pollack A. Differential Topology. — Providence: AMS Chelsea Publ., 2010.

[18] Hass J., Hughes J. Immersions of surfaces in 3-manifolds // Topology. — 1985. — Vol. 24. — P. 97—112.

[19] Hirsch M. W. Immersions of manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. — 1959. — Vol. 93. — P. 242—276.

[20] James I. M. Cross-sections of Stiefel manifolds // Proc. London Math. Soc. (3). — 1958. — Vol. 8. — P. 536—547.

[21] Koschorke U. Vector Fields and Other Vector Bundle Morphisms. A Singularity Approach. — Berlin: Springer, 1981. — (Lect. Notes Math.; Vol. 847).

[22] Koschorke U., Sanderson B. Self-intersections and higher Hopf invariants // Topology. — 1978. — Vol. 17. — P. 283—290.

[23] Liulevicius A. A theorem in homological algebra and stable homotopy of projective spaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1963. — Vol. 109. — P. 540—552.

[24] Mahowald M. A short proof of the James periodicity of $\pi_{k+p}(V_{k+m,m})$ // Proc. Amer. Math. Soc. — 1965. — Vol. 16. — P. 512.

[25] Pinkall U. Regular homotopy classes of immersed surfaces // Topology. — 1985. — Vol. 24, no. 4. — P. 421—434.

[26] Szücs A. Cobordism of immersions and singular maps, loop spaces and multiple points // Geometric and Algebraic Topology. — Warsaw: PWN, 1986. — (Banach Center Publ., Vol. 18). — P. 239—253.

[27] Uchida F. Cobordism groups of immersions // Osaka J. Math. — 1971. — Vol. 8. — P. 207—218.

[28] Vogel P. Cobordisme d'immersions // Ann. Sci. École Norm. Sup. 4 sér. — 1974. — Vol. 7. — P. 317—358.

[29] Watabe T. SO(r)-cobordism and embedding of 4-manifolds // Osaka J. Math. — 1967. — Vol. 4. — P. 133—140.

[30] Wells R. Cobordism groups of immersions // Topology. — 1966. — Vol. 5. — P. 281—294.