Нелинейные нелокальные замены переменных в функциональных интегралах

В. В. БЕЛОКУРОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Институт ядерных исследований РАН
e-mail: vvbelokurov@yandex.ru

Е. Т. ШАВГУЛИДЗЕ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: shavgulidze@bk.ru

УДК 517

Ключевые слова: функциональные интегралы, группы диффеоморфизмов, квазиинвариантные меры.

Аннотация

Показано, что нелинейные нелокальные замены переменных интегрирования в функциональных интегралах приводят к изменению функциональных пространств, по которым происходит интегрирование. Новые функциональные пространства содержат функции, имеющие сингулярности. Это позволяет построить квантовую теорию в задачах, где наличие сингулярностей принципиально, например в квантовой космологии, а также приводит к неожиданному эффекту, названному нами «квантовым восстановлением нарушенной симметрии».

Abstract

V. V. Belokurov, E. T. Shavgulidze, Nonlinear nonlocal substitutions in functional integrals, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 5, pp. 47—59.

It is shown that nonlinear nonlocal substitutions in functional integrals lead to the need of integration over functional spaces that include functions with singularities. This makes it possible to formulate a quantum theory in cases where singularities are essential, e.g., in quantum cosmology. The proper accounting of singularities in functional integrals gives an additional unexpected effect, which we call “quantum restoration of broken symmetry.”

1. Введение

Настоящая работа посвящена светлой памяти нашего дорогого друга и коллеги — Юрия Петровича Соловьёва.

Юрий Петрович был не только блестящим математиком, но и выдающимся учёным-энциклопедистом, глубоко разбиравшимся в различных областях науки. Многие помнят его яркие статьи, лекции и рассказы о проблемах математики,

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, том 21, № 5, с. 47—59.
© 2016 *Национальный Открытый Университет «ИНТУИТ»*

физики, астрономии, химии, биологии, геологии, филологии, истории и других наук.

Кроме его «родных» разделов математики, особый интерес у Юрия Петровича вызывали математические методы современной квантовой физики. Нам выпало большое удовольствие работать вместе с ним и быть его соавторами. Среди наших совместных публикаций здесь хотелось бы выделить две серии работ: по разработке сходящейся теории возмущений для вычисления функциональных интегралов квантовой механики и квантовой теории поля [1—8, 11—13, 17—19] и по формулировке квантовой теории поля на пространстве петель [9, 10].

Данная статья, основанная на результатах, полученных в [14—16], идейно связана с указанными выше сериями работ. В ней исследуются свойства нелинейных нелокальных замен переменных интегрирования в функциональных интегралах. В частности, показано, что такие замены приводят к необходимости интегрировать по функциональным пространствам, содержащим функции, имеющие сингулярности. Это позволяет построить квантовую теорию в случаях, где наличие сингулярностей принципиально, например в квантовой космологии. Правильный учёт сингулярностей в функциональных интегралах приводит к дополнительному неожиданному эффекту, названному нами «квантовым восстановлением нарушенной симметрии».

2. Замена переменных в функциональных интегралах и соответствующие изменения функциональных пространств

Рассмотрим меру Винера

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1}\big(\dot{y}(t)\big)^2\,dt\right\}dy \equiv w(dy). \tag{1}$$

Поскольку $y(t)$ — винеровский процесс, производная понимается в обобщённом смысле.

В результате нелинейной нелокальной замены

$$y(t) = x(t) + \int\limits_{T_0}^{t} f\big(x(\tau)\big)\,d\tau \tag{2}$$

мера (1) превращается в

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1}\dot{x}^2(t)\,dt - \frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1} f^2\big(x(t)\big)\,dt - \int\limits_{t=T_0}^{t=T_1} f\big(x(t)\big)\,dx\right\}dx. \tag{3}$$

Последний член в показателе экспоненты — это стохастический интеграл Ито

$$\int\limits_{t=T_0}^{t=T_1} f\big(x(t)\big)\,dx.$$

Помимо граничных членов (В.Т.)

$$\text{В.Т.} = \Phi\big(x(T_1)\big) - \Phi\big(x(T_0)\big), \quad \Phi(u) = \int f(v)\,dv,$$

он даёт ещё дополнительное слагаемое (член Ито)

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1} f'\big(x(t)\big)\,dt.$$

В этом легко убедиться, если представить интеграл как предел дискретной суммы

$$\int\limits_{T_0}^{T_1} (\dot{y}(t))^2\,dt \approx \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=1}^{n}\big(y(t_k) - y(t_{k-1})\big)^2,$$

которая после подстановки

$$y(t_k) = x(t_k) + \Delta t\sum_{i=0}^{k-1} f\big(x(t_i)\big)$$

превращается в

$$\frac{1}{\Delta t}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})^2 + \Delta t\sum_{k=1}^{n} f^2(x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(x_{k-1}).$$

Принимая теперь во внимание, что для винеровского процесса

$$(x_k - x_{k-1})^2 \sim \Delta t,$$

получаем указанное выше выражение.

Таким образом, мы имеем формальное равенство мер

$$w(dy) \equiv \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1}\big(\dot{y}(t)\big)^2\,dt\right\}dy =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1}\Big(\dot{x}^2(t) + f^2\big(x(t)\big) - f'\big(x(t)\big)\Big)\,dt - \text{В.Т.}\right\}dx. \quad (4)$$

Это соотношение можно рассматривать как формальную связь между свободной теорией и теориией с взаимодействием.

Заметим, что наличие члена Ито позволяет факторизовать гамильтониан

$$H = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + f^2(x) - f'(x)\right) = a_f^+\, a_f^-, \tag{5}$$

где

$$a_f^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mp\frac{d}{dx} + f(x)\right). \tag{6}$$

Если замена (2) обратима, т. е. если существует функция $x(y)$, то

$$\int\limits_X F(x)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1}\Big(\dot{x}^2(t) + f^2\big(x(t)\big) - f'\big(x(t)\big)\Big)\,dt - \text{В.Т.}\right\}dx = \\ = \int\limits_Y F\big(x(y)\big)\,w(dy). \tag{7}$$

До сих пор мы ничего не говорили про функциональные пространства X и Y. В следующих примерах мы увидим, что они, вообще говоря, различны.

3. Модель Лиувилля

Рассмотрим теорию самодействующего скалярного поля с действием

$$\tilde{A}(\varphi) = \frac{1}{2}\int\limits_0^T\left\{(\dot{\varphi}(t))^2 dt + \lambda^2\, e^{2\alpha\varphi(t)} - \alpha\lambda\, e^{\alpha\varphi(t)}\right\}dt\,. \tag{8}$$

Последнее слагаемое здесь как раз имеет вид члена Ито.

Для определённости будем считать, что $\alpha < 0$ и $\lambda < 0$.

В результате замены

$$\xi(t) = \varphi(t) - \varphi(0) + \lambda\int\limits_0^t e^{\alpha\varphi(\tau)}\,d\tau \tag{9}$$

мера, задаваемая действием $\tilde{A}(\varphi)$, превратится в меру Винера $w(d\xi)$. В действительности это есть определение функциональной меры, задаваемой действием $\tilde{A}(\varphi)$, на пространстве X:

$$\exp\{-\tilde{A}(\varphi)\}\,d\varphi = \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^T\big(\dot{\xi}(t)\big)^2\,dt\right\}d\xi \equiv w(d\xi). \tag{10}$$

При $t = 0$ замена (9) сингулярна и должна пониматься как предел соответствующего регуляризованного выражения.

Если обратить замену (9), то можно получить явный вид функции $\varphi(\xi)$:

$$\varphi(t) = \xi(t) - \frac{1}{\alpha}\ln\biggl(\alpha\lambda\int\limits_0^t e^{\alpha\xi(\tau)}\,d\tau\biggr). \tag{11}$$

В результате можно будет вычислить функциональные интегралы по пространству функций $\varphi(t)$:

$$\int\limits_X F(\varphi)\exp\{-\tilde{A}(\varphi)\}\,d\varphi = \int\limits_{C([0,T])} F\bigl(\varphi(\xi)\bigr)\,w(d\xi). \tag{12}$$

Здесь X — пространство функций, имеющих при $t = 0$ сингулярность вида $\varphi \sim -(1/\alpha)\ln t$.

Рассмотрим эту теорию как простейшую модель квантовой космологии, в которой масштабный фактор в конформных координатах для FLRW метрики задаётся квантовым скалярным полем

$$g(t) \equiv a^2(t) = e^{2\varphi(t)}. \tag{13}$$

Мы выбрали граничные условия в соответствии с начальной сингулярностью

$$g(0) = 0, \quad \varphi(0) = -\infty. \tag{14}$$

Масштабный фактор $a(t)$ в терминах $\xi(t)$ имеет вид

$$a(t) = e^{\varphi(t)} = e^{\xi(t)}\biggl(\alpha\lambda\int\limits_0^t e^{\alpha\xi(\tau)}\,d\tau\biggr)^{-1/\alpha}. \tag{15}$$

В квантовой теории, задаваемой действием $\tilde{A}(\varphi)$, мы можем вычислить среднее значение масштабного фактора, моменты и другие величины.

Для моделей с

$$\alpha = -\frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

вычисление может быть проведено явным образом, поскольку винеровские интегралы сводятся к итерациям обычных гауссовых интегралов.

Пусть, например, $\alpha = -1$. Среднее значение масштабного фактора равно

$$\langle a(t)\rangle = -\lambda\int\limits_{C([0,1])} e^{\xi(t)}\int\limits_0^t e^{\alpha\xi(\tau)}\,d\tau\,w(d\xi) = (-2\lambda)(e^{t/2} - 1). \tag{16}$$

Для дисперсии получится выражение

$$\begin{aligned}\Delta_a^2(t) &= \langle a^2(t)\rangle - \langle a(t)\rangle^2 = \\ &= \lambda^2\int\limits_{C([0,1])} e^{2\xi(t)}\biggl(\int\limits_0^t e^{\alpha\xi(\tau)}\,d\tau\biggr)^2 w(d\xi) - 4\lambda^2(e^{t/2} - 1)^2 = \\ &= \frac{1}{3}\lambda^2(2e^{2t} - 12e^t + 16e^{t/2} - 6).\end{aligned} \tag{17}$$

При малых t среднее значение и дисперсия равны соответственно

$$\langle a(t)\rangle = -\lambda\, t \quad (\lambda < 0), \qquad \Delta_a^2(t) = \frac{1}{3}\lambda^2\, t^3. \tag{18}$$

Поскольку $\Delta_a \sim t^{3/2} \ll t$ при достаточно малых t, существует область, где среднее значение $\langle a(t)\rangle$ может рассматриваться как точное значение масштабного фактора.

4. Одномерная евклидова квантовая теория поля с взаимодействием φ^4

В случае поля с взаимодействием φ^4 замена выглядит как

$$\chi(t) = \varphi(t) + \int\limits_{T_0}^{t} \varphi^2(\tau)\, d\tau \tag{19}$$

и имеет место равенство

$$\int\limits_X F(\varphi) \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1}\Big(\big(\dot\varphi(t)\big)^2 + \varphi^4(t) - 2\varphi(t)\Big)\, dt - \text{В.Т.}\right\} d\varphi = \\ = \int\limits_{C([T_0,T_1])} F\big(\varphi(\xi)\big)\, w(d\xi). \tag{20}$$

Член Ито и граничные члены равны соответственно $-2\varphi(t)$ и

$$\text{В.Т.} = \frac{1}{3}[\varphi^3(1) - \varphi^3(0)].$$

Выясним теперь, что представляет собой пространство X.

Нетрудно показать, что функция $\varphi(t)$ в некоторых точках $t = t^*$ отрезка $[T_0, T_1]$ может иметь сингулярности вида

$$\varphi(t) \sim (t - t^*)^{-1}.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что функция $\chi(t)$ является ограниченной на отрезке, при этом могут быть области, где значения функции $|\varphi(t)|$ достаточно большие. Тогда в этих областях поведение функции $\varphi(t)$ задаётся дифференциальным уравнением $\dot\varphi = -\varphi^2$.

Так как функция $\chi(t)$ является ограниченной на отрезке $[T_0, T_1]$, то существует конечный отрезок $[t_1, t_2] \subset [T_0, T_1]$, на котором у функции $\varphi(t)$ сингулярность $(t - t^*)^{-1}$ единственная. В зависимости от вида функции $\chi(t)$ могут быть другие конечные отрезки $[t_3, t_4], \ldots,$ на которых у $\varphi(t)$ есть сингулярности того же типа $(t - t_j^*)^{-1}$.

Более детальное рассмотрение показывает, что поведение функции $\varphi(t)$ в окрестности точки t_j^* даётся выражением

$$\varphi(t) = \frac{1}{t-t_j^*} + [\chi(t) - \chi(t_j^*)] - 2(t-t_j^*)^{-2} \int\limits_{t_j^*}^{t} [\chi(\tau) - \chi(t_j^*)](\tau - t_j^*)\, d\tau + o(t-t_j^*). \quad (21)$$

Второе и третье слагаемые представляют собой стохастические члены, которые в этой окрестности ведут себя как $(t-t_j^*)^{\varepsilon}$, $\varepsilon < 1$.

Таким образом, пространство X может быть представлено в виде

$$X = X_0 \cup X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \cup \ldots,$$

где $X_0 = C([T_0, T_1])$ и X_n — пространство функций, имеющих n сингулярностей указанного выше вида.

Равенство (20) может быть записано как

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_X F(\varphi) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int\limits_{T_0}^{T_1} \Big(\big(\dot\varphi(t)\big)^2 + \varphi^4(t) - 2\varphi(t) \Big)\, dt - \text{В.Т.} \right\} d\varphi =$$

$$= \int\limits_{C([T_0,T_1])} F\big(\varphi(\xi)\big)\, w(d\xi). \quad (22)$$

Итак, мы показали, что функциональные интегралы по пространству непрерывных функций в свободной теории поля равны функциональным интегралам в теории с взаимодействием, но заданным на более сложных функциональных пространствах. В частности, в данном примере необходимо интегрировать по пространству, содержащему подпространства разрывных функций. Понимание того, каким должно быть пространство, по которому вычисляются функциональные интегралы, является определяющим.

Так, для непрерывных функций $\varphi(t) \in C([T_0, T_1])$ интеграл (20) — это интеграл по мере Винера

$$\exp\left\{ -\frac{1}{2} \int\limits_0^1 \big(\dot\varphi(t)\big)^2\, dt \right\} d\varphi = w(d\varphi),$$

при этом подынтегральное выражение

$$\exp\left\{ -\frac{1}{2} \int\limits_0^1 (\varphi^4(t) + \ldots)\, dt \right\}$$

является ограниченным функционалом. Поэтому интеграл хорошо определён.

Однако функциональный интеграл вида

$$\int\limits_{X_n} P(\varphi) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int\limits_{T_0}^{T_1} \big(\dot\varphi(t)\big)^2\, dt \right\} d\varphi,$$

где $P(\varphi)$ — полином, не существует при $n \geqslant 1$. В этом случае

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1}\left(\dot{\varphi}(t)\right)^2 dt\right\} d\varphi$$

не является мерой на X_n $(n \geqslant 1)$, и только

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{T_0}^{T_1}\Big(\left(\dot{\varphi}(t)\right)^2 + \varphi^4(t) - 2\varphi(t)\Big)\, dt - \text{В.Т.}\right\} d\varphi$$

может рассматриваться в качестве меры на X_n $(n \geqslant 1)$. При этом соотношение (20) представляет собой конструктивное определение этой меры.

В реалистичных квантовополевых моделях с взаимодействием (с размерностью пространства-времени $d = 4$) полевые функции не только не являются непрерывными функциями, но вообще представляют собой обобщённые функции. Поэтому неудивительно, что попытки обращаться с функциональными интегралами квантовой теории поля как с (квази)винеровскими интегралами приводит к известным проблемам. Во всяком случае необходимо рассматривать функциональные интегралы на функциональных пространствах, более сложных, чем C.

5. Квантовое восстановление нарушенных симметрий

Равенство соответствующих функциональных интегралов при рассмотренной выше нелинейной нелокальной замене переменных приводит к одному неожиданному эффекту: существуют действия, для которых классическая теория не совпадает с классическим пределом квантовой теории, построенной по этому действию.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующую простую модель. Пусть дано действие

$$A = \frac{1}{2}\int\limits_{-T}^{+T}\left(\dot{\varphi}(t)\right)^2 dt + \frac{a^2}{2}\int\limits_{-T}^{+T}(\varphi^2(t) - \beta)^2\, dt, \quad \beta \equiv \frac{b}{2a}, \quad a > 0, \quad b > 0. \tag{23}$$

Потенциал

$$V\big(\varphi(t)\big) = \frac{1}{2}a^2(\varphi^2(t) - \beta^2)^2 \tag{24}$$

симметричен: $V(-\varphi) = V(\varphi)$, имеет два вырожденных минимума при $\varphi = \pm\beta$ и локальный (нестабильный) максимум при $\varphi = 0$. Уравнение Эйлера—Лагранжа имеет вид

$$\ddot{\varphi}(t) - 2a^2\varphi(\varphi^2(t) - \beta^2) = 0. \tag{25}$$

Таким образом, классическая система, задаваемая действием A, симметрична относительно замены

$$\varphi \to -\varphi.$$

У классической системы, задаваемой действием

$$A_+ = A - a\int\limits_{-T}^{+T} \varphi(t)\,dt + \frac{a}{3}[\varphi^3(+T) - \varphi^3(-T)] - a\beta^2[\varphi(+T) - \varphi(-T)], \qquad (26)$$

эта симметрия нарушена членом, линейным по φ, и граничными членами. Это как раз то, что даёт интеграл Ито.

Действие A_+ приводит к уравнению Эйлера—Лагранжа

$$\ddot{\varphi}(t) - 2a^2\varphi(\varphi^2(t) - \beta^2) + a = 0 \qquad (27)$$

и граничным условиям

$$\dot{\varphi}(\pm T) + a(\varphi^2(\pm T) - \beta^2) = 0. \qquad (28)$$

Соответствующая квантовая теория задаётся функциональной мерой

$$\int \exp\{-A_+(\varphi)\}\,d\varphi.$$

Как мы видели, замена

$$\chi(t) = \varphi(t) + a\int\limits_{-T}^{t} (\varphi^2(\tau) - \beta^2)\,d\tau \qquad (29)$$

приводит к равенству функциональных интегралов

$$\int\limits_{X^+} F(\varphi)\exp\{-A_+(\varphi)\}\,d\varphi = \int\limits_{C([-T,+T])} F\big(\varphi(\chi)\big)\exp\Big\{-\frac{1}{2}\int\limits_{-T}^{+T}\big(\dot{\chi}(t)\big)^2\,dt\Big\}\,d\chi. \qquad (30)$$

При этом функциональное пространство X^+ — это пространство функций, которые могут иметь сингулярности на отрезке $[-T, +T]$.

Рассмотрим теперь классический предел выражения (30)

$$F(\tilde{\varphi}) = \lim_{\hbar\to 0}\int\limits_{X^+} F(\varphi)\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\,A_+(\varphi)\right\}\,d\varphi =$$

$$= \lim_{\hbar\to 0}\int\limits_{C([-T,+T])} F\big(\varphi(\chi)\big)\exp\Big\{-\frac{1}{2\hbar}\int\limits_{-T}^{+T}\big(\dot{\chi}(t)\big)^2\,dt\Big\}\,d\chi. \qquad (31)$$

В правой части равенства (31) классический предел даёт уравнение

$$\ddot{\chi}(t) = 0,$$

или

$$\dot{\chi}(t) = \mathrm{const}.$$

В действительности $\mathrm{const} = 0$, поскольку значение $\chi(+T)$ не фиксировано. Это следует также из граничных условий (28). В терминах функции $\varphi(t)$ уравнение выглядит как

$$\dot{\varphi}(t) + a(\varphi^2(t) - \beta^2) = 0. \tag{32}$$

Заметим, что уравнение (25) может быть представлено в виде

$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{f(\varphi)}$$

и имеет две ветви решений, соответствующие разным знакам. Легко заметить, что уравнение (32) является одной из ветвей уравнения (25) с соответствующей константой интегрирования. Таким образом, решение уравнения (32)

$$\tilde{\varphi}^+(t)$$

является решением уравнения (25), но не решением уравнения (27). В этом смысле квантовая теория восстанавливает симметрию, нарушенную в классической теории.

Ключевой момент здесь — это интегрирование по функциональному пространству X^+, содержащему сингулярные функции.

Если бы мы ограничились интегрированием только по пространству C, то имели бы традиционный результат, получаемый интегрированием ограниченного функционала по мере Винера

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \big(\dot{\varphi}(t)\big)^2\,dt\right\} d\varphi.$$

Легко найти явный вид решений $\tilde{\varphi}^+(t)$. В зависимости от значения граничного условия

$$\tilde{\varphi}^+(-T) \equiv -\alpha$$

получим

$$\tilde{\varphi}^+_\alpha(t) = \beta\,\mathrm{th}(bt + c) \quad \text{для} - \alpha > -\beta \tag{33}$$

или

$$\tilde{\varphi}^+_\alpha(t) = \beta\,\mathrm{cth}(bt + c), \quad \text{для} \quad -\alpha < -\beta. \tag{34}$$

Если мы положим постоянную интегрирования c равной нулю, то решение является нечётной функцией

$$\tilde{\varphi}^+(-t) = -\tilde{\varphi}^+(t).$$

В этом случае значения функционалов действия на классическом решении $\tilde{\varphi}^+$ совпадают:

$$A_+(\tilde{\varphi}^+) = A(\tilde{\varphi}^+).$$

До сих пор мы рассматривали теорию, задаваемую действием A_+. Однако аналогичная картина имеет место и для «зеркального» действия

$$A_- = A + a\int\limits_{-T}^{+T} \varphi(t)\,dt - \frac{a}{3}[\varphi^3(+T) - \varphi^3(-T)] + a\beta^2[\varphi(+T) - \varphi(-T)]. \qquad (35)$$

Соответствующая замена переменных имеет вид

$$\chi(t) = \varphi(t) - a\int\limits_{-T}^{t} (\varphi^2(\tau) - \beta^2)\,d\tau, \qquad (36)$$

И справедливо равенство функциональных интегралов

$$\int\limits_{X^-} F(\varphi)\exp\{-A_-(\varphi)\}\,d\varphi = \int\limits_{C([-T,+T])} F\big(\varphi(\chi)\big)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{-T}^{+T}\big(\dot\chi(t)\big)^2\,dt\right\}d\chi. \quad (37)$$

Структура пространства X^- такая же, как и пространства X^+. Но функции из X^+ и функции из X^- имеют сингулярности в разных точках.

Такой же эффект имеет место и в рассмотренной выше модели Лиувилля. Классическое действие $\tilde{A}(\varphi)$ и классический предел $A(\varphi)$ квантовой теории, соответствующей этому классическому действию, оказываются различными. Классическое уравнение движения представляет собой уравнение Эйлера—Лагранжа для действия $A(\varphi)$, но не для действия $\tilde{A}(\varphi)$.

Таким образом, классическое поле $\varphi_c(t)$ есть

$$\varphi_c(t) = -\frac{1}{\alpha}\ln(\alpha\lambda t), \quad \alpha < 0, \quad \lambda < 0. \qquad (38)$$

Следует отметить, что обычно наличие сингулярностей рассматривается как свидетельство противоречивости теории. В частности, из-за сингулярности классическое действие $\tilde{A}$ не подходит для описания динамики Вселенной.

В нашем подходе существование сингулярностей существенно для адекватной формулировки квантовой теории. Тем самым мы можем не только учесть квантовые эффекты, но и модифицировать правильным образом классическую теорию.

Литература

[1] Белокуров В. В., Соловьёв Ю. П., Шавгулидзе Е. Т. Метод приближённого вычисления континуальных интегралов, использующий теорию возмущений со сходящимися рядами. I // ТМФ. — 1996. — Т. 109, № 1. — С. 51—59.

[2] Белокуров В. В., Соловьёв Ю. П., Шавгулидзе Е. Т. Метод приближённого вычисления континуальных интегралов, использующий теорию возмущений со сходящимися рядами. II. Евклидова квантовая теория поля // ТМФ. — 1996. — Т. 109, № 1. — С. 60—69.

[3] Белокуров В. В., Соловьёв Ю. П., Шавгулидзе Е. Т. Теория возмущений со сходящимися рядами для функциональных интегралов по фейнмановской мере // УМН. — 1997. — Т. 52, № 2. — С. 153—154.

[4] Белокуров В. В., Соловьёв Ю. П., Шавгулидзе Е. Т. Вычисление функциональных интегралов с помощью сходящихся рядов // Фундамент. и прикл. матем. — 1997. — Т. 3, вып. 3. — С. 693—713.

[5] Белокуров В. В., Соловьёв Ю. П., Шавгулидзе Е. Т. Общий подход к вычислению функциональных интегралов и суммированию расходящихся рядов // Фундамент. и прикл. матем. — 1999. — Т. 5, вып. 2. — С. 363—383.

[6] Белокуров В. В., Соловьёв Ю. П., Шавгулидзе Е. Т. Об одном методе суммирования рассходящихся рядов // УМН. — 1999. — Т. 54, № 3. — С. 153—154.

[7] Белокуров В. В., Соловьёв Ю. П., Шавгулидзе Е. Т. Метод суммирования расходящихся рядов с любой точностью // Матем. заметки. — 2000. — Т. 68, № 1. — С. 24—35.

[8] Белокуров В. В., Соловьёв Ю. П., Шавгулидзе Е. Т. Теория возмущений со сходящимися рядами для вычисления величин, заданных конечным числом членов расходящегося ряда традиционной теории возмущений // ТМФ. — 2000. — Т. 123, № 3. — С. 452—461.

[9] Белокуров В. В., Соловьёв Ю. П., Шавгулидзе Е. Т. Существование функциональных интегралов в квантовополевой модели на пространстве петель // УМН. — 2004. — Т. 59, № 5. — С. 163—164.

[10] Белокуров В. В., Соловьёв Ю. П., Шавгулидзе Е. Т. Асимптотические свойства функциональных интегралов в квантовополевой модели на пространстве петель // Докл. РАН. — 2005. — Т. 401, № 6. — С. 749—751.

[11] Белокуров В. В., Соловьёв Ю. П., Шавгулидзе Е. Т., Юдин И. Л. Примеры расчётов в новой теории возмущений со сходящимися рядами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика, астрономия. — 2001. — № 2. — С. 23—27.

[12] Белокуров В. В., Соловьёв Ю. П., Шавгулидзе Е. Т., Юдин И. Л. Вычисление бета-функции в модели фи-четыре в широком интервале значений константы связи // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика, астрономия. — 2001. — № 1. — С. 3—6.

[13] Belokurov V. V., Kamchatny V. V., Shavgulidze E. T., Solovyov Y. P. Perturbation theory with convergent series for arbitrary values of coupling constant // Mod. Phys. Lett. A. — 1997. — Vol. 12, no. 10. — P. 661—672.

[14] Belokurov V. V., Shavgulidze E. T. Paths with singularities in functional integrals of quantum field theory. — `arXiv:1112.3899v2[hep-th]`.

[15] Belokurov V. V., Shavgulidze E. T. Quantum restoration of broken symmetries. — `arXiv:1303.3523[math-ph]`.

[16] Belokurov V. V., Shavgulidze E. T. A class of exactly solvable quantum models of scalar gravity. — `arXiv:1303.5027[hep-th]`.

[17] Belokurov V. V., Shavgulidze E. T., Solovyov Y. P. New perturbation theory for quantum field theory: convergent series instead of asymptotic expansions // Mod. Phys. Lett. A. — 1995. — Vol. 10, no. 39. — P. 3033—3041.

[18] Belokurov V. V., Shavgulidze E. T., Solovyov Y. P. New Perturbation Theory for Quantum Field Theory: Convergent Series Instead of Asymptotic Expansions // Acta Appl. Math. — 2001. — Vol. 68, no. 1/3. — P. 71—104.

[19] Belokurov V. V., Shavgulidze E. T., Solovyov Y. P., Yudin I. L. New perturbation theory with convergent series: calculations with arbitrary values of coupling constants // Physics of Elementary Particles and Atomic Nucleus. — 2000. — Vol. 31, no. 7a. — P. 192—199.