Об условиях конечности в крученой K-теории*

М. А. ГЕРАСИМОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: mari9gerasimova@mail.ru

УДК 515.145.27+517.983.37

Ключевые слова: калибровочно-инвариантное семейство, эллиптический оператор, конечная голономия, крученая K-теория, компактная группа Ли, представление.

Аннотация

Цель настоящей (в большей степени обзорной) статьи — показать связь между условиями конечности, возникающими в крученой K-теории. В двух основных подходах к проблеме вычисления индекса соответствующего семейства эллиптических операторов (подхода Нистора—Троицкого и подхода Матаи—Мельроуза—Зингера) естественным образом возникают некоторые условия конечности, формулируемые, на первый взгляд, в совершенно несопоставимых терминах. Однако понятно, что эти условия должны быть связаны. В работе выявлена эта связь и доказано соответствующее формальное утверждение. Тем самым показано, что при правильном понимании соответствия условия переходят друг в друга, что открывает возможность синтеза двух подходов. Показано, что условие конечности, возникающее в работе В. Нистора и Е. Троицкого, является частным случаем условия конечности, которое возникает в работе Х. Эмерсона и Р. Майера при обобщении теоремы Нистора—Троицкого со случая расслоения групп Ли на случай произвольного группоида.

Abstract

M. A. Gerasimova, On finiteness conditions in twisted K-theory, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 5, pp. 61—77.

The aim of this (mostly expository) article is to show a connection between the finiteness conditions arising in twisted K-theory. There are two different conditions arising naturally in two main approaches to the problem of computing the index of the appropriate family of elliptic operators (the approach of Nistor and Troitsky and the approach of Mathai, Melrose, and Singer). These conditions are formulated absolutely differently, but in some sense they should be close to each other. In this paper, we find this connection and prove the corresponding formal statement. Thereby it is shown that these conditions map to each other. This opens a possibility to synthesize these approaches. It is also shown that the finiteness condition arising in the paper of Nistor and Troitsky is a special case of the finiteness condition that appears in the paper of Emerson and Meyer, where the theorem of Nistor and Troitsky is proved not only for the case of a bundle of Lie groups, but also for the case of a general groupoid.

*Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 16-11-10018).

1. Введение

Как известно, в последние 20 лет K-теория в целом и крученая K-теория в особенности оказались тесно связаны с теорией струн, точнее с D-бранами — «граничными условиями» на струны. Одной из разновидностей крученой K-теории является калибровочно-инвариантная K-теория. Различными группами специалистов было развито несколько подходов с целью получения аналога теоремы Атья—Зингера об индексе для семейств операторов в этом контексте.

В [9] В. Матаи, Р. Мельроуз и И. Зингер разработали теорию индекса для проективных семейств псевдодифференциальных операторов. Иначе говоря, такое семейство $\{D_b,\ b \in X\}$ на слоях расслоения $\phi\colon M \to X$ с базой X и типичным слоем F — это набор локально эллиптических семейств для открытого покрытия базы X, действующих на конечномерных векторных расслоениях фиксированного ранга. Проективные векторные расслоения определяют целочисленный класс, класс Диксмье—Дуади, $\Theta \in H^3(X,\mathbb{Z})$. Тогда при предположении, что $\Theta \in \operatorname{Tor} H^3(X,\mathbb{Z})$, можно определить аналитический и топологический индексы D_b как элементы крученой K-теории со скручивающим элементом Θ, и они равны.

Вторый подход принадлежит В. Нистору и Е. Троицкому, он был разработан в [11, 12, 14].

Калибровочно-инвариантная K-теория — это K-теория семейств, инвариантных относительно расслоения (компактных) групп Ли. Такого рода объекты, с одной стороны, являются одной из реализаций крученой K-теории, а с другой — естественной областью значений индекса инвариантных семейств эллиптических операторов. В свою очередь, мотивацией для изучения семейств калибровочно-инвариантных эллиптических операторов и их индекса является их связь с граничными задачами на некомпактных многообразиях, а также со спектральной теорией. Кроме того, эти семейства возникают в теории в струн, например при изучении полей Рамона—Рамона.

Семейства групп Ли $p\colon \mathcal{G} \to B$ — это хорошо известный объект калибровочной теории. Их появление в физике объясняется тем, что взаимодействия (и симметрии) не затухают мгновенно. Заметим также, что семейства групп Ли являются частным случаем группоидов, у которых совпадают исток и устье, и наиболее важным примером при изучении свойств действий группоидов. Семейства разрешимых групп Ли были изучены В. Нистором в [10], где использовались для изучения S^1-инвариантного оператора Дирака. Случай расслоения компактных групп Ли был изучен В. Нистором и Е. Троицким в [11, 12, 14]. Несмотря на то что и те и другие семейства являются частным случаем группоида, оказывается, что их геометрические и топологические свойства сильно отличаются. В [11] доказано, что семейство компактных групп Ли всегда является локально-тривиальным расслоением с типичным слоем G и структурной группой $\operatorname{Aut}(G)$, для семейств разрешимых групп Ли это неверно.

Для определения калибровочно-инвариантного индекса необходимо определить и изучить свойства групп калибровочно-эквивариантной K-теории $K^i_{\mathcal{G}}(Y)$

для любого расслоения $Y \to B$. Эти группы обладают обычными свойствами групп эквивариантной K-теории, но появляются некоторые новые особенности, возникающие из-за того, что расслоение $\mathcal{G} \to B$ нетривиально. Однако если наложить на расслоение групп $\mathcal{G} \to B$ некоторые условия конечности, а именно условия конечной голономии, то оказывается, что группы калибровочно-инвариантной K-теории устроены хорошо, т. е. $K^i_{\mathcal{G}}(B) \cong K^i\big(C^*(\mathcal{G})\big)$, где $C^*(\mathcal{G})$ — обёртывающая C^*-алгебра расслоения групп $\mathcal{G} \to B$, изоморфная прямой сумме полей конечномерных матричных алгебр над накрытием над B.

Мы доказываем, что условия конечности для расслоения групп Ли $\mathcal{G} \to B$ могут быть выражены в терминах принадлежности соответствующего класса Диксмье—Дуади подгруппе элементов конечного порядка в $H^3(B_\sigma, \mathbb{Z})$, где $B_\sigma \to B$ — накрывающее пространство. Тем самым мы устанавливаем связь теории индекса калибровочно-инвариантных операторов с теорией индекса для проективных семейств псевдодифференциальных операторов.

Поскольку расслоение групп Ли является частным случаем группоида, то интересно изучить, можно ли обобщить существующую теорию на семейства, инвариантные относительно действия произвольного группоида. Теорема, аналогичная теореме Нистора—Троицкого, но для семейств, инвариантных относительно действия произвольного группоида, доказана Р. Майером и Х. Эмерсоном в [7]. Мы показываем, что условие конечности, которое накладывается на группоид, естественно обобщает условие конечной голономии для расслоения групп Ли.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы приводим основные определения, связанные с группоидами и их частным случаем — расслоениями групп Ли. В разделе 3 мы подробно рассматриваем условие конечной голономии, возникающее в работах В. Нистора и Е. Троицкого. В разделе 4 мы приводим необходимые сведения о C^*-алгебре группоида. В разделе 5 мы доказываем эквивалентность условия конечной голономии и условия конечного порядка, возникающего в работе В. Матаи, Р. Мельроуза и И. Зингера. В разделе 6 мы показываем, что условие конечности для семейств, инвариантных относительно действия группоида, является естественным обобщением условия конечной голономии.

Автор выражает глубокую благодарность Е. В. Троицкому за постановку задачи, а также за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

Предварительные результаты были представлены на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2014».

2. Группоиды и связанные с ними определения

2.1. Основные определения

Определение 1. *Группоид* — это малая категория, в которой каждый морфизм обратим.

Переформулируем это определение. Множество объектов группоида $\mathcal{G}$ будем обозначать $\mathcal{G}^0$. Множество морфизмов, или стрелок, будем обозначать $\mathcal{G}^1$. У каждой стрелки есть ассоциированные *исток* и *устье*, т. е. имеются два отображения:

$$s, t : \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^0.$$

Оператор *умножения*

$$\mu\colon (g,h) \mapsto \mu(g,h) = gh$$

определён как отображение

$$\mu\colon \mathcal{G}^2 := \mathcal{G}^1 \times_X \mathcal{G}^1 := \{(g,h) \mid s(g) = t(h)\} \to \mathcal{G}^1.$$

Оператор *взятия обратного* — это биекция $i\colon g \in \mathcal{G}^1 \mapsto g^{-1} \in \mathcal{G}^1$. Обозначив через $u(x)$ тождественный морфизм объекта $x \in \mathcal{G}^0$, получим включение $\mathcal{G}^0$ в $\mathcal{G}^1$. Таким образом, группоид $\mathcal{G}$ полностью определяется пространствами $\mathcal{G}^0$ и $\mathcal{G}^1$ и отображениями s, t, μ, i, u. Они удовлетворяют следующим условиям:

1) $t(gh) = t(g)$, $s(gh) = s(h)$ для любой пары $(g,h) \in \mathcal{G}^2$ и частично определённое умножение μ ассоциативно;
2) $s\big(u(x)\big) = t\big(u(x)\big)$ для всякого $x \in \mathcal{G}^0$, $u\big(t(g)\big)g = g$, $g\Big(u\big(s(g)\big)\Big) = g$ для всякого $g \in \mathcal{G}^1$;
3) $t(g^{-1}) = s(g)$, $s(g^{-1}) = t(g)$, $gg^{-1} = u\big(t(g)\big)$ и $g^{-1}g = u\big(s(g)\big)$.

Определение 2. Пусть $\mathcal{G}$ — группоид с пространством объектов $\mathcal{G}^0$. *Группой изотропии* называется группа

$$G_{g_0}^{g_0} = s^{-1}(g_0) \cap t^{-1}(g_0).$$

2.2. Топология группоидов

Определение 3. *Топологический группоид* — это группоид, у которого $\mathcal{G}^0$ и $\mathcal{G}^1$ являются топологическими пространствами с топологией, согласованной со структурой группоида, т. е.

1) отображение $\mathcal{G}^1 \ni g \mapsto g^{-1} \in \mathcal{G}^1$ непрерывно;
2) отображение

$$\mu\colon \mathcal{G}^2 := \mathcal{G}^1 \times_X \mathcal{G}^1 := \{(g,h) \mid s(g) = t(h)\} \to \mathcal{G}^1,$$

где топология на $\mathcal{G}^2$ индуцирована топологией на $\mathcal{G}^1$, непрерывно;
3) отображения $s\colon \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^0$ и $t\colon \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^0$ непрерывны;
4) постановка в соответствие $x \mapsto u(x)$ тождественного морфизма объекта $x \in \mathcal{G}^0$ является непрерывным отображением $\mathcal{G}^0 \to \mathcal{G}^1$.

Определение 4. Топологический группоид называется *локально-компактным*, если топологические пространства $\mathcal{G}^0$ и $\mathcal{G}^1$ локально-компактны.

В дальнейшем мы будем рассматривать только локально-компактные группоиды.

2.3. Расслоение групп Ли

Рассмотрим такой локально-компактный топологический группоид $\mathcal{G}$, что $s = t\colon \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^0$ и $\mathcal{G}^0 = B$ — гладкое связное компактное многообразие. Если $s = t$, то $s^{-1}(b) = t^{-1}(b) =: \mathcal{G}_b$ — группа.

Определение 5. *Семейством топологических групп* называется топологический группоид, у которого $s = t\colon \mathcal{G} \to B$.

Определение 6. *Группоидом Ли* называется топологический группоид, у которого $\mathcal{G}^0$ и $\mathcal{G}^1$ — гладкие многообразия, $s, t\colon \mathcal{G}^1 \to \mathcal{G}^0$ — гладкие отображения, являющиеся субмерсиями, $u\colon \mathcal{G}^0 \to \mathcal{G}^1$ — гладкое вложение, отображения i, t, μ являются гладкими.

Определение 7. *Семейством групп Ли* называется такой группоид Ли, у которого $s = t\colon \mathcal{G} \to B$.

Дальше будем предполагать, что слои $\mathcal{G}_b$ компактны. Известен следующий результат.

Теорема 1 [11]. *Предположим, что $\mathcal{G} \to B$ — такое семейство групп Ли, что B связно и все группы $\mathcal{G}_b := s^{-1}(b)$ компактны и связны. Тогда $\mathcal{G} \to B$ является локально-тривиальным расслоением со структурной группой $\mathrm{Aut}(G)$.*

Определение 8. *Расслоением групп Ли* называется локально-тривиальное расслоение с типичным слоем, являющимся группой Ли, G и структурной группой $\mathrm{Aut}(G)$.

3. Условия конечной голономии для расслоения групп Ли

В этом разделе мы определим понятие голономии для расслоения компактных групп Ли, следуя [11].

Так как $\mathcal{G} \to B$ — локально-тривиальное расслоение со структурной группой $\mathrm{Aut}(G)$, то

$$\mathcal{G} \cong \mathcal{P} \times_{\mathrm{Aut}(G)} G := (\mathcal{P} \times G)/\operatorname{Aut}(G),$$

где $\mathcal{P} \to B$ — главное $\mathrm{Aut}(G)$-расслоение, которое можно считать фиксированным.

Построим накрытие представлений. Пусть $\hat{G}$ — множество классов эквивалентности неприводимых представлений группы G, на котором задано естественное действие $\mathrm{Aut}(G)$. Рассмотрим несвязное объединение $\hat{\mathcal{G}}$ множеств $\hat{\mathcal{G}}_b$. Тогда можно отождествить $\hat{\mathcal{G}}$ с $\mathcal{P} \times_{\mathrm{Aut}(G)} \hat{G}$ как расслоения над B. Так как группа G компактна, то множество $\hat{G}$ дискретно. А значит, связная компонента единицы $\mathrm{Aut}_0(G)$ в группе $\mathrm{Aut}(G)$ действует на $\hat{G}$ тривиально.

Положим

$$H_R := \operatorname{Aut}(G)/\operatorname{Aut}_0(G), \quad \mathcal{P}_0 := \mathcal{P}/\operatorname{Aut}_0(G).$$

Тогда можно отождествить $\hat{\mathcal{G}}$ с расслоённым произведением $\mathcal{P}_0 \times_{H_R} \hat{G}$. Заметим, что $\hat{\mathcal{G}}$ определено корректно, так как $\mathcal{P}_0$ является главным H_R-расслоением.

Определение 9. Пространство $\hat{\mathcal{G}}$ называется *пространством представлений* $\mathcal{G}$, а накрытие $\hat{\mathcal{G}} \to B$ называется *накрытием представлений, связанным с* $\mathcal{G}$.

Определение 10. Будем говорить, что $\mathcal{G}$ имеет *конечную голономию в смысле теории представлений*, если каждое $\sigma \in \hat{\mathcal{G}}$ содержится в компактно-открытом подмножестве $\hat{\mathcal{G}}$.

Всюду далее, если не оговорено специально, будем считать, что B — линейно связное односвязное пространство с отмеченной точкой b_0. Пусть $\pi_1(B, b_0)$ — фундаментальная группа. Заметим, что условие конечной голономии в смысле теории представлений означает, что $\pi_1(B, b_0)\sigma \in \hat{G}$ является конечным множеством для любого неприводимого представления σ группы G. Действительно, компактно-открытые подмножества $\mathcal{G}$ сами являются конечными накрытиями над B. Рассмотрим компоненту B_σ, которая содержит представление $\sigma \in \hat{\mathcal{G}}$. Тогда слой накрытия $B_\sigma \to B$ изоморфен $\pi_1(B, b_0)\sigma$.

Определение 11. Непрерывное отображение

$$\rho\colon \pi_1(B, b_0) \to H_R := \mathrm{Aut}(G)/\,\mathrm{Aut}_0(G),$$

классифицирующее главное H_R-расслоение $\mathcal{P}_0$, называется *голономией накрытия представлений, связанного с* $\mathcal{G}$. Группа H_R называется *группой голономии*.

Определение 12. Будем говорить, что $\mathcal{G}$ имеет *конечную голономию*, если образ группы $\pi_1(B, b_0)$ в группе H_R конечен.

Можно показать, что условия конечной голономии и конечной голономии в смысле теории представлений связаны следующим образом.

Лемма 1 [11]. *Пусть $\mathcal{G} \to B$ — расслоение компактных групп Ли над гладким связным многообразием B. Если $\mathcal{G}$ обладает конечной голономией, то $\mathcal{G}$ имеет конечную голономию в смысле теории представлений. Верно и обратное, если слои $\mathcal{G} \to B$ связны.*

4. C^*-алгебра группоида

Для построения теории индекса необходимо определить алгебру $C^*(\mathcal{G})$ для группоида $\mathcal{G}$. В этом разделе мы определим меру Хаара и построим $C^*(\mathcal{G})$ для произвольного локально-компактного группоида $\mathcal{G}$, следуя [4], а потом, следуя [11], опишем её свойства для случая, когда $\mathcal{G} \to B$ является расслоением групп Ли.

Определение 13. *Левой мерой Хаара на локально-компактном группоиде* $\mathcal{G}$ называется такое семейство регулярных борелевских мер $\nu = \{\nu^x,\ x \in \mathcal{G}^0\}$, что

1) $\operatorname{supp} \nu^x = \mathcal{G}^x = t^{-1}(x)$ для всякого $x \in \mathcal{G}^0$;

2) отображение

$$x \in \mathcal{G}^0 \mapsto \int f(y)\, d\nu^x(y) \in \mathbb{C}$$

непрерывно для всякой $f \in C_c(\mathcal{G})$;

3) для всякой $f \in C_c(\mathcal{G})$ и всякого $x \in \mathcal{G}$

$$\int f(y)\, d\nu^{s(x)}(y) = \int f(xy)\, d\nu^{t(x)}(y).$$

Для левой меры Хаара $\{\nu^x,\ x \in \mathcal{G}^0\}$ на группоиде $\mathcal{G}$ обозначим через ν_x образ ν^x при обратном отображении $x \mapsto x^{-1}$, так что

$$\int f(x)\, d\nu_x(y) = \int f(y^{-1})\, d\nu^x(y) \quad \text{для всякой} \quad f \in C_c(\mathcal{G}).$$

Тогда $\{\nu_u,\ u \in \mathcal{G}^0\}$ — правая мера Хаара на группоиде $\mathcal{G}$, т. е.

1) $\operatorname{supp} \nu_x = \mathcal{G}_x = s^{-1}(x)$ для всякого $x \in \mathcal{G}^0$;

2) отображение

$$x \in \mathcal{G}^0 \to \int f(y)\, d\nu_x(y) \in \mathbb{C}$$

непрерывно для всякой $f \in C_c(\mathcal{G})$;

3) для всякой $f \in C_c(\mathcal{G})$ и всякого $x \in \mathcal{G}$

$$\int f(y)\, d\nu_{s(x)}(y) = \int f(xy)\, d\nu_{t(x)}(y).$$

Замечание 1. Заметим, что, в отличие от локально-компактных групп, мера Хаара на локально-компактном группоиде может не существовать, а если существует, то может не быть единственной.

Пусть $\mathcal{G}$ — произвольный локально-компактный группоид, на котором существует мера Хаара. Тогда на $C_c(\mathcal{G})$ определены операции

$$f * g(x) = \int f(t) g(t^{-1}x)\, d\nu^{t(x)}(t),$$
$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})},$$

которые вместе со сложением и умножением на скаляры задают структуру алгебры. Определим C^*-норму на $C_c(\mathcal{G})$ следующим образом. Для любого $x \in \mathcal{G}^0$ представление π_x алгебры $C_c(\mathcal{G})$ в гильбертовом пространстве $L^2(\mathcal{G}, \nu_x)$ зададим формулой

$$\pi_x(f)(\xi) = f * \xi \in C_c(\mathcal{G}) \subset L^2(\mathcal{G}, \nu_x),$$

где $f \in C_c(\mathcal{G})$, $\xi \in C_c(\mathcal{G}) \subset L^2(\mathcal{G}, \nu_x)$. Тогда определим норму

$$\|f\|_{\mathrm{red}} := \sup_{x \in \mathcal{G}^0} \|\pi_x(f)\|.$$

Обозначим через $C^*_{\mathrm{red}}(\mathcal{G})$ пополнение $C_c(\mathcal{G})$ по этой норме.

4.1. C^*-алгебра расслоения групп Ли

Опишем подробно $C^*(\mathcal{G})$ в случае, когда $p\colon \mathcal{G} \to B$ — расслоение групп Ли.

Очевидно, что ввиду локальной тривиальности $p\colon \mathcal{G} \to B$ на $\mathcal{G}$ существует мера Хаара. Определим $C^*(\mathcal{G})$. Покажем, следуя [11], что в этом случае $C^*(\mathcal{G})$ является C^*-алгеброй с непрерывным следом.

Пусть $(\hat{\mathcal{G}})_n \subset \hat{\mathcal{G}}$ — подмножество неприводимых представлений размерности n групп $\mathcal{G}_b$. Ввиду локальной тривиальности $p\colon \mathcal{G} \to B$ $(\hat{\mathcal{G}})_n$ открыты и замкнуты в $\hat{\mathcal{G}}$ и являются накрывающими пространствами для B. Для каждой непрерывной функции f на $\mathcal{G}$ определим функцию f_{TR} на $(\hat{\mathcal{G}})_n$ следующим образом:

$$(\hat{\mathcal{G}})_n \ni \sigma \to f_{\mathrm{TR}} := \mathrm{Tr}\big(\sigma(f)\big) \in \mathbb{C}.$$

Заметим, что ввиду локальной тривиальности $\mathcal{G} \to B$ f_{TR} является непрерывной функцией на $(\hat{\mathcal{G}})_n$. Более того,

$$\big|\,\mathrm{Tr}\big(\sigma(f-g)\big)\,\big| \leqslant (\dim\sigma)\|f-g\|,$$

поэтому если $f_n \in C(\mathcal{G})$ сходятся в $C^*(\mathcal{G})$, то функции $(f_n)_{\mathrm{TR}}$ сходятся равномерно на каждом из множеств $(\hat{\mathcal{G}}_n)$, значит, определение f_{TR} может быть расширено на функции $f \in C^*(\mathcal{G})$ по непрерывности, а результат будет непрерывен на $\hat{\mathcal{G}}$.

Напомним определение расслоения Азумая.

Определение 14. *Расслоением Азумая* $\mathcal{A} \to X$ называется локально-тривиальное расслоение со слоем, изоморфным $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$, и структурной группой $\mathrm{PGL}(n,\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})/Z\big(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\big)$.

Пример 1. Рассмотрим векторное расслоение $E \to X$. Тогда $\mathrm{End}(E) \to X$ является расслоением Азумая.

Определение 15. Расслоения Азумая $\mathcal{E} \to X$ и $\mathcal{F} \to X$ называются *эквивалентными*, если существуют такие векторные расслоения $E \to X$ и $F \to X$, что $\mathrm{End}(E) \otimes \mathcal{E} \cong \mathrm{End}(F) \otimes \mathcal{F}$.

Определим для расслоений Азумая операцию умножения и операцию взятия обратного. А именно, для заданных расслоений Азумая $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ определим их произведение как $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$, а обратным для $\mathcal{E}$ будет являться расслоение $\mathcal{E}^{\mathrm{opp}}$, слоем над точкой x которого является противоположная к алгебре $\mathcal{E}_x$ алгебра $\mathcal{E}_x^{\mathrm{opp}}$. Заметим, что эти операции корректно определены для классов эквивалентности расслоений Азумая. Таким образом, множество классов эквивалентности образует группу.

Определение 16. Группа классов эквивалентности расслоений Азумая над X называется *группой Брауэра* и обозначается $\mathrm{Br}(X)$.

Заметим, что если $\mathcal{A} \to X$ — расслоение Азумая, то на каждом слое $\mathcal{A}_x \cong \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ существует единственная C^*-норма, которую мы обозначим $\|\,\|_x$ для всякого $x \in X$. Пусть $\Gamma_0(\mathcal{A})$ — пространство таких непрерывных сечений ξ расслоения $\mathcal{A}$, что для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{x,\ \|\xi\|_x \geqslant \varepsilon\}$ является компактным подмножеством $\hat{\mathcal{G}}$. Тогда $\Gamma_0(\mathcal{A})$ полна по норме $\|\xi\| = \sup_x \|\xi(\sigma)\|_x$ и является C^*-алгеброй.

Теорема 2 [11]. *Пусть $\mathcal{G} \to B$ — расслоение компактных групп Ли. Тогда на каждом $(\hat{\mathcal{G}})_n$ существует локально-тривиальное расслоение алгебр $\mathcal{A}_n$ со слоем $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ и структурной группой $\mathrm{PGL}(n,\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})/Z\big(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\big)$, такое что*

$$C^*(\mathcal{G}) \cong \bigoplus \Gamma_0(\mathcal{A}_n).$$

В частности, спектр $C^*(\mathcal{G})$ гомеоморфен $\hat{\mathcal{G}}$.

Доказательство. Первая часть утверждения следует из того, что функция $f \to f_{\mathrm{TR}}$, определённая выше, непрерывна для всех $f \in C^*(\mathcal{G})$.

Вторая часть утверждения — это общее свойство C^*-алгебр с непрерывным следом. □

5. Условия конечности

Рассмотрим более подробно структуру алгебр $A_n := \Gamma_0(\mathcal{A}_n)$. Напомним, что ввиду локальной тривиальности расслоения $p\colon \mathcal{G} \to B$ пространство $(\hat{\mathcal{G}})_n$ является накрывающим пространством для B. Над каждым $(\hat{\mathcal{G}})_n$ существует локально-тривиальное расслоение $\mathcal{A}_n$ со слоем $\mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ и структурной группой $\mathrm{PGL}(n,\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})/Z\big(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\big)$.

Зафиксируем $\sigma \in \hat{\mathcal{G}}$. Пусть B_σ — связная компонента $\hat{\mathcal{G}}$, содержащая σ. Пространство B_σ содержится в $(\hat{\mathcal{G}})_n$, где $n = \dim\sigma$. Далее будем рассматривать расслоение конечномерных алгебр $\mathcal{A}_\sigma$, полученное ограничением $\mathcal{A}_n$ на B_σ. Из теоремы 2 вытекает следствие.

Следствие 1 [11]. *Пусть $\mathcal{G} \to B$ — расслоение компактных групп Ли над линейно связным пространством B. Тогда имеет место канонических изоморфизм*

$$C^*(\mathcal{G}) \cong \bigoplus_\sigma \Gamma_0(\mathcal{A}_\sigma),$$

где σ пробегает множество орбит представлений $\pi_1(B,b_0)$ на $\hat{G}$.

Расслоение $\mathcal{A}_\sigma \to B_\sigma$ — это расслоение со структурной группой

$$\mathrm{PGL}(n,\mathbb{C}) := \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})/Z\big(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\big) = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})/\mathbb{C}^*,$$

где $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}/\{0\}$.

Замечание 2. Заметим, что

$$\mathrm{PGL}(n,\mathbb{C}) = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C}) := \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})/C_n,$$

где $C_n = Z\big(\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})\big)$ — циклическая группа порядка n. Действительно,

$$Z\big(\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})\big) = Z\big(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})\big) \cap \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}),$$

поэтому $\mathrm{PSL}(n,\mathbb{C}) \subset \mathrm{PGL}(n,\mathbb{C})$. Обратно, пусть $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, а $[A]$ — образ A при отображении $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}(n,\mathbb{C})$. Покажем, что существует $B \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, такой что образ $[B]$ элемента B при отображении $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$ совпадает с $[A]$, т. е. $[A] = [B]$. Поскольку в $\mathbb{C}$ число $(\det A)^{-1/n}$ определено для всякой $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, то определена матрица $B = (\det A)^{-1/n}A$. Тогда $[B] = [A]$ и $\mathrm{PGL}(n,\mathbb{C}) = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$.

Напомним, что если G — топологическая группа, то расслоения над X со структурной группой G классифицируются с точностью до изоморфизма группой $H^1(X,\underline{G})$, где $\underline{G}$ — пучок ростков непрерывных функций $f\colon X \to G$. Опишем это более подробно. Пусть задано открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_i\}$ базы X и задан коцикл $g = \{g_{ij}\}$. Тогда можно построить расслоение E_g над X со структурной группой G и слоем F. Для этого нужно взять дизъюнктное объединение множеств $U_i \times F$ и для каждой точки $u \in U_i \cap U_j$ отождествить точку $(u,f) \in U_i \times F$ с точкой $(u, g_{ij}(u)f) \in U_j \times F$. Корректность такого отождествления обеспечивается условием коцикличности. Для полученного пространства E_g проекция $p_g\colon E_g \to X$ индуцирована естественной проекцией $U_i \times F \to U_i$. Если заданы два коцикла g и g', то расслоения $p_g\colon E_g \to X$ и $p_{g'}\colon E_{g'} \to X$ изоморфны (как расслоения со структурной группой G) тогда и только тогда, когда коциклам g и g' соответствует один и тот же элемент группы $H^1(X,\underline{G})$. Ясно также, что любое расслоение над X со структурной группой G и слоем F можно получить как расслоение E_g для некоторого коцикла g.

Поэтому расслоение матриц над B_σ классифицируется классом ξ в группе $H^1\left(B_\sigma, \underline{\mathrm{PGL}(n,\mathbb{C})}\right)$. Пусть $\mathcal{O}^\times_{B_\sigma}$ — пучок комплекснозначных функций, не обращающихся в ноль. Рассмотрим точную последовательность пучков групп

$$\underline{1} \longrightarrow \mathcal{O}^\times_{B_\sigma} \longrightarrow \underline{\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})} \longrightarrow \underline{\mathrm{PGL}(n,\mathbb{C})} \longrightarrow \underline{1},$$

индуцированную последовательностью групп

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{PGL}(n,\mathbb{C}) \longrightarrow 1.$$

Отсюда получаем точную последовательность в когомологиях

$$0 \to H^1(B_\sigma, \mathcal{O}^\times_{B_\sigma}) \longrightarrow H^1\left(B_\sigma, \underline{\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})}\right) \longrightarrow \\ \longrightarrow H^1\left(B_\sigma, \underline{\mathrm{PGL}(n,\mathbb{C})}\right) \xrightarrow{\delta} H^2(B_\sigma, \mathcal{O}^\times_{B_\sigma}).$$

Тогда для элемента $\xi \in H^1\left(B_\sigma, \underline{\mathrm{PGL}(n,\mathbb{C})}\right)$ элемент $\delta\xi \in H^2(B_\sigma, \mathcal{O}^\times_{B_\sigma})$ является препятствием к поднятию ξ до элемента $H^1\left(B_\sigma, \underline{\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})}\right)$.

Определение 17. Элемент $\delta\xi = \delta(\mathcal{A}_\sigma)$ называется *инвариантом Диксмье—Дуади*.

Рассмотрим свойства этого инварианта для полей матричных алгебр $\mathcal{A}_\sigma \to B_\sigma$.

Утверждение 1 [8]. *Отображение* $\delta\colon \mathrm{Br}\big(B_\sigma\big) \to H^2\big(B_\sigma, \underline{C_n}\big)$ *является инъективным гомоморфизмом.*

Утверждение 2. *Пусть* $\mathcal{A}_\sigma \to B_\sigma$ *— расслоение матриц со слоем* $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$*, а* $\delta\xi$ *— соответствующий класс Диксмье—Дуади. Тогда* $n\delta\xi = 0$*, т. е.* $\delta\xi$ *является элементом порядка* n*.*

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность групп

$$1 \longrightarrow C_n \longrightarrow \mathrm{SL}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}) \longrightarrow 1,$$

где C_n — группа корней степени n из 1, а $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ — специальная линейная группа, причём $Z\big(\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})\big) = C_n$. Тогда получим отображение

$$\delta'\colon H^1\Big(B_\sigma, \underline{\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})}\Big) \to H^2(B_\sigma, C_n).$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму последовательностей

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[d] & C_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{PGL}(n,\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & \mathcal{O}^\times_{B_\sigma} \arrow[r] & \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathrm{PGL}(n,\mathbb{C}) \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

и соответствующую диаграмму точных последовательностей в когомологиях

$$\begin{tikzcd}
H^1\Big(B_\sigma, \underline{\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})}\Big) \arrow[r] \arrow[d] & H^1\Big(B_\sigma, \underline{\mathrm{PGL}(n,\mathbb{C})}\Big) \arrow[r, "\delta'"] \arrow[d, "id"'] & H^2\big(B_\sigma, \underline{C_n}\big) \arrow[d] \\
H^1\Big(B_\sigma, \underline{\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})}\Big) \arrow[r] & H^1\Big(B_\sigma, \underline{\mathrm{PGL}(n,\mathbb{C})}\Big) \arrow[r] & H^2(B_\sigma, \mathcal{O}^\times_{B_\sigma})
\end{tikzcd}.$$

В этой диаграмме средняя стрелка является изоморфизмом. Поэтому гомоморфизм

$$\delta\colon H^1\Big(B_\sigma, \underline{\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})}\Big) \to H^2(B_\sigma, \mathcal{O}^\times_{B_\sigma})$$

можно представить как композицию

$$H^1\Big(B_\sigma, \underline{\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})}\Big) \to H^2(B_\sigma, C_n) \to H^2(B_\sigma, \mathcal{O}^\times_{B_\sigma}).$$

Но тогда $n\delta'\xi = 0$, а значит и $n\delta\xi = 0$. □

Лемма 2. *Пусть* $\mathcal{G} \to B$ *— расслоение групп Ли, где* B *— компактное многообразие. Если* $\mathcal{G} \to B$ *удовлетворяет условиям конечной голономии, то для всякого* $\sigma \in \hat{\mathcal{G}}$ *связная компонента* B_σ *в* $\hat{\mathcal{G}}$ *является конечным* CW*-комплексом.*

Доказательство. Действительно, если $\mathcal{G}$ имеет конечную голономию, то B_σ компактно. Тогда $B_\sigma \to B$ — регулярное накрытие. Введём клеточную структуру на B и поднимем её на накрытие B_σ. Ввиду компактности B_σ мы получим конечный CW-комплекс. □

Лемма 3. *Пусть $\mathcal{G} \to B_\sigma$ обладает конечной голономией, тогда*

$$H^2(B_\sigma, \mathcal{O}^\times_{B_\sigma}) \cong H^3(B_\sigma, \mathbb{Z}).$$

Доказательство. Если $\mathcal{G} \to B_\sigma$ обладает конечной голономией, то B_σ компактно. Рассмотрим точную последовательность групп

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{x \to \exp(2\pi i x)} \mathbb{C}^* \longrightarrow 1,$$

индуцирующую последовательность пучков

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{B_\sigma} \longrightarrow \mathcal{O}_{B_\sigma} \longrightarrow \mathcal{O}^\times_{B_\sigma}.$$

Поскольку B_σ компактно, то из существования разбиения единицы следует, что $H^p(B_\sigma, \mathcal{O}_{B_\sigma}) = 0$ для любого $p > 0$, т. е. пучок $\mathcal{O}_{B_\sigma}$ ацикличен. Значит, в когомологиях имеем

$$0 \longrightarrow H^2(B_\sigma, \mathcal{O}^\times_{B_\sigma}) \longrightarrow H^3(B_\sigma, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0.$$

Поэтому $H^2(B_\sigma, \mathcal{O}^\times_{B_\sigma}) \cong H^3(B_\sigma, \mathbb{Z})$. □

Таким образом, если $\mathcal{G} \to B$ обладает конечной голономией, то класс Диксмье—Дуади $\delta\xi$ расслоения $\mathcal{A}_\sigma \to B_\sigma$ является элементом конечного порядка в $H^3(B_\sigma, \mathbb{Z})$, т. е. $\delta\xi \in \operatorname{Tor} H^3(B_\sigma, \mathbb{Z})$.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{G} \to B$ — расслоение компактных связных групп Ли над связным гладким компактным многообразием B и $\mathcal{G}$ обладает конечной голономией. Тогда каждый элемент $\operatorname{Tor} H^3(B_\sigma, \mathbb{Z})$ соответствует расслоению матриц $\mathcal{A}_\sigma \to B_\sigma$.*

Для доказательства нам понадобится следующий результат, доказанный Серром в [8].

Теорема 4. $\mathrm{BPGL}_\infty(\mathbb{C})$ *гомотопически эквивалентно*

$$K(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times K(\mathbb{Q}, 4) \times K(\mathbb{Q}, 6) \times \ldots .$$

Замечание 3. Рассмотрим естественное отображение

$$\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{PGL}(nk, \mathbb{C})$$

для $k \geqslant 1$, которое переводит матрицу $A \in \mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$ в блочную матрицу, на диагонали которой стоят k матриц A. Тогда $\mathrm{PGL}_\infty(\mathbb{C})$ определяется как прямой предел $\mathrm{PGL}_\infty = \varinjlim \mathrm{PGL}(n)$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $x \in \operatorname{Tor} H^3(B_\sigma, \mathbb{Z})$. Из точной последовательности групп

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

следует длинная точная последовательность в когомологиях

$$H^2(B_\sigma, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^2(B_\sigma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{d} H^3(B_\sigma, \mathbb{Z}) \xrightarrow{d'} H^3(B_\sigma, \mathbb{Q}).$$

Поскольку $\operatorname{Tor} H^2(B_\sigma, \mathbb{Z}) = 0$, то образ x нулевой, то есть $d'x = 0$. Поэтому $x = dy$, где $y \in H^2(B_\sigma, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Значит, элемент конечного порядка в $H^3(B_\sigma, \mathbb{Z})$

приходит из отображения $B_\sigma \to K(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},2)$. Поскольку $K(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},2)$ является множителем в разложении

$$B\mathrm{PGL}_\infty(\mathbb{C}) \simeq K(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times K(\mathbb{Q},4) \times K(\mathbb{Q},6) \times \dots,$$

то определено отображение $B_\sigma \to B\mathrm{PGL}_\infty(\mathbb{C})$, которое соответствует главному $\mathrm{PGL}(n,\mathbb{C})$-расслоению над B_σ для некоторого n. Таким образом, мы построили главное $\mathrm{PGL}(n,\mathbb{C})$-расслоение P для заданного элемента $x \in \mathrm{Tor}\, H^3(B_\sigma,\mathbb{Z})$. Тогда расслоение алгебр с соответствующим классом Диксмье—Дуади получается как $\mathcal{A}_\sigma = P \times_{\mathrm{PGL}(n,\mathbb{C})} \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$. □

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть $\mathcal{G} \to B$ обладает конечной голономией в смысле теории представлений. Тогда для любого $\sigma \in \hat{\mathcal{G}}$ существует взаимно-однозначное соответствие между расслоениями матриц над B_σ, где B_σ — связная компонента, содержащая σ, и элементами $\mathrm{Tor}\, H^3(B_\sigma,\mathbb{Z})$.*

Тем самым показано, что при правильном понимании соответствия условия конечности из работы В. Нистора и Е. Троицкого [11] переходят в условия конечности, возникающие в работе [9], а именно в условия принадлежности соответствующего класса Диксмье—Дуади подгруппе элементов конечного порядка $\mathrm{Tor}\, H^3(B,\mathbb{Z})$. Это открывает возможность синтеза двух подходов.

6. Достаточное количество $\mathcal{G}$-векторных расслоений

Теорема, аналогичная теореме Нистора—Троицкого, но для семейств, инвариантных относительно действия произвольного группоида, доказана Р. Мейером и Х. Эмерсоном в [7]. При этом на группоид $\mathcal{G}$ накладываются определённые условия. Мы рассмотрим эти условия и покажем, что в случае, когда группоид $\mathcal{G}$ является семейством компактных групп Ли, эти условия эквивалентны условия конечной голономии в смысле теории представлений.

Пусть $\mathcal{G}$ — произвольный группоид с множеством объектов B.

Определение 18. *$\mathcal{G}$-пространство* — это топологическое пространство X, на котором задано непрерывное действие $\mathcal{G}$, т. е. существует непрерывное отображение $\rho\colon X \to B$ и гомеоморфизм

$$\mathcal{G} \times_{s,\rho} X \cong \mathcal{G} \times_{t,\rho} X, \quad (g,x) \mapsto (g,gx).$$

Определение 19. *$\mathcal{G}$-векторное расслоение над $\mathcal{G}$-пространством X* — это векторное расслоение $\pi_E\colon E \to X$, на котором задано действие $\mathcal{G}$, такое что проекция π_E, сложение и умножение на скаляры $\mathcal{G}$-эквивариантны.

Определение 20. Будем говорить, что на X существует достаточное количество $\mathcal{G}$-векторных расслоений, если для любого $x \in X$ и любого конечномерного представления группы изотропии $\mathcal{G}_x^x$ существует $\mathcal{G}$-векторное расслоение на X такое, что слой над точкой $x \in X$ содержит данное представление $\mathcal{G}_x^x$.

Посмотрим, что означает это условие в случае, когда группоид $\mathcal{G}$ является расслоением групп Ли.

Утверждение 3. *Пусть $p\colon \mathcal{G} \to B$ обладает конечной голономией в смысле теории представлений. Тогда на B существует достаточное количество $\mathcal{G}$-векторных расслоений.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное представление $\sigma \in \hat{\mathcal{G}}$ и содержащую это представление связную компоненту B_σ.

По расслоению компактных групп Ли $p\colon \mathcal{G} \to B$ построим расслоение $p_1\colon L_2(\mathcal{G}) \to B$ гильбертовых пространств, такое что $p_1^{-1}(b) \cong L_2(\mathcal{G}_b) \cong L_2(G)$. В качестве тривиализующих окрестностей возьмём тривиализующие окрестности $\{U_i\}$ расслоения $\mathcal{G} \to B$, а склеивающие коциклы построим по склеивающим коциклам $\phi_{ij}(b)$ расслоения групп. А именно, положим $A_{ij}(b) := A\bigl(\phi_{ij}(b)\bigr)$, где $A(\phi)(f)(x) = f\bigl(\phi(x)\bigr)$ для $f \in L_2(G)$, $\phi \in \operatorname{Aut}(G)$. Таким образом, мы получим расслоение, на котором задано действие $\mathcal{G} \to B$. А именно, $\mathcal{G}_b$ действует на $L_2(\mathcal{G}_b)$ левыми сдвигами. Очевидно, что это действие непрерывно. Кроме того, отображение $\mathcal{G} \times_B L_2(\mathcal{G}) = \{(g,f) \in \mathcal{G} \times L_2(\mathcal{G}) \mid p(g) = p_1(f)\} \to gf \in L_2(\mathcal{G})$ непрерывно. Действительно, оно непрерывно над тривиализующими окрестностями, а значит и непрерывно на всём расслоении.

Действие $\mathcal{G}_b$ левыми сдвигами задаёт на $L_2(\mathcal{G}_b)$ структуру представления, и, как следует из теоремы Петера—Вейля, $L_2(\mathcal{G}_b) = \widehat{\bigoplus} V_i^{\dim \sigma_i}$, где V_i — пространство представления σ_i.

На $L_2(G)$ задано действие $\operatorname{Aut}(G)$, т. е. $(\phi f)(g) \mapsto f\bigl(\phi(g)\bigr)$. Это действие согласовано с действием $\operatorname{Aut}(G)$ на G, т. е. $\phi(g)\phi(f) = \phi(gf)$. Действительно, вычислим значение левой части в точке $x \in G$:

$$\begin{aligned}\phi(g)\bigl(\phi(f)\bigr)(x) &= \phi(g) f\bigl(\phi(x)\bigr) = \\ &= f\bigl(\phi(g)\phi(x)\bigr) = f\bigl(\phi(gx)\bigr) = \phi(f)(gx) = \phi(g)(f)(x) = \phi(gf)(x).\end{aligned}$$

Посмотрим, как действие $\operatorname{Aut}(G)$ выглядит на правой части $\widehat{\bigoplus} V_i^{\dim \sigma_i}$. Для начала заметим следующее: пусть на пространстве V задано представление группы G, т. е. задано действие $G \times V \to V$. Тогда на нём же можно задать другую структуру представления G, подкрученного на автоморфизм $\phi \in \operatorname{Aut}(G)$, т. е. $\phi(G) \times V \to V$, обозначим это представление через V_ϕ. Если на V задано действие $\operatorname{Aut}(G)$, согласованное с действием $\operatorname{Aut}(G)$ на G, то $V \cong V_\phi$, причём этот изоморфизм представлений осуществляется действием ϕ. Значит, образ σ_1 при действии $\phi \in \operatorname{Aut}(G)$ является представлением σ_1, подкрученным на автоморфизм ϕ. Таким образом, действие $\operatorname{Aut}(G)$ на $L_2(G)$ соответствует перестановке слагаемых в $\widehat{\bigoplus} V_i^{\dim \sigma_i}$.

Рассмотрим подпространство

$$V = \bigoplus \sigma_i^{\dim \sigma_i} \subset L_2(\mathcal{G}_b),$$

где $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ — все представления из связной компоненты B_σ, содержащей представление σ. Для каждого i построим V_i так, чтобы $U_i \times V_i$ образовывали атлас некоторого расслоения. Построение проведём индуктивно.

База индукции: если $b \in U_i$, то $V_i := V$ в тривиализации $U_i \times \mathcal{G}_b$.

Шаг индукции: если U_i пересекается с U_j в точке b_{ij}, то положим $V_j = \phi_{jib}(V_i)$. Проверим корректность такого определения. Во-первых, заметим, что определение не зависит от выбора точки. Действительно, ϕ_{jib_1} и ϕ_{jib_2} отличаются на элемент ψ группы $\mathrm{Aut}_0(G)$, действующей на представлениях тривиально. Поэтому ψ переводит представление σ в изоморфное представление. Но тогда $\phi_{ijb_1} = \phi_{ijb_2}$, так как V_i содержит все представления, изоморфные представлениям, содержащимся в V_i. Во-вторых, определение не зависит от выбора пути, соединяющего U_1 с U_i. Рассмотрим два различных пути γ_1 и γ_2 из U_1 в U_i. Достаточно показать независимость от класса петли $[\alpha] = [\gamma_1\gamma_2^{-1}] \in \pi_1(B, b)$. Если $\rho\colon \pi_1(B, b_0) \to H_R = \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Aut}_0(G)$, то обходу петли соответствует элемент группы H_R, который действует на множестве представлений $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ перестановкой. Так как при действии представление σ_i переходит в некоторое представление σ_j, то и σ_i^d, где $d = \dim \sigma_i$, перейдёт в представление σ_j^d, а значит, и прямая сумма всех представлений перейдёт в прямую сумму данных представлений.

Таким образом, V_i задают тривиализацию некоторого расслоения E, являющегося подрасслоением $L_2(\mathcal{G})$ (склеивающие коциклы — это ограничение склеивающих коциклов расслоения $L_2(\mathcal{G})$ на слои).

Мы построили $\mathcal{G}$-векторное расслоение, слой которого в заданной точке содержит данное представление σ. Утверждение доказано. $\square$

Напомним следующую лемму.

Лемма 4 [7]. *Пусть $f\colon X \to Y$ — это $\mathcal{G}$-отображение. Если на Y существует достаточное количество $\mathcal{G}$-векторных расслоений, то на X тоже.*

Из леммы следует, что если B обладает достаточным количеством $\mathcal{G}$-векторных расслоений, то это верно и для любого $\mathcal{G}$-пространства. Таким образом, мы показали, что условие конечной голономии в смысле теории представлений действительно влечёт условие существования достаточного числа $\mathcal{G}$-векторных расслоений.

Утверждение 4. *Пусть $p\colon \mathcal{G} \to B$ — расслоение групп Ли. Пусть B обладает достаточным количеством $\mathcal{G}$-векторных расслоений. Тогда $p\colon \mathcal{G} \to B$ обладает конечной голономией в смысле теории представлений.*

Доказательство. Для любого $b \in B$ рассмотрим представление σ группы $\mathcal{G}_b = G$. Пусть $\pi\colon E \to B$ — конечномерное расслоение, на котором задано действие $\mathcal{G} \to B$, содержащее в слое над $b \in B$ представление σ, $\sigma \subset E_b$. Разложим E_b в сумму неприводимых представлений: $E_b \cong \sigma_1^{k_1} \oplus \ldots \oplus \sigma_n^{k_n}$.

Рассмотрим петлю $\gamma_i\colon S^1 \to B$, где окружность параметризована $[0,1]$, и обратные образы расслоений $p\colon \mathcal{G} \to B$ и $\pi\colon E \to B$ при отображении γ_i.

Ввиду топологической структуры S^1 и структурной группы $\mathcal{G} \to B$ гомотопический класс индуцированного расслоения $\gamma_i^*\mathcal{G}$ задаётся одним элементом структурной группы, а именно элементом $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$, т. е. слой над точкой 0 отождествляется со слоем над точкой 1 с помощью автоморфизма $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$. Аналогично рассмотрим индуцированное расслоение γ_i^*E, слой которого изоморфен $V = \sigma_1^{k_1} \oplus \ldots \oplus \sigma_n^{k_n}$, на котором задано действие $\gamma_i^*\mathcal{G}$. Обозначим слои расслоения γ_i^*E над точкой $t \in [0,1]$ как V_t. Тогда слой V_0 расслоения E отождествится со слоем V_1 с помощью отображения $C\colon V_0 \to V_1$, такого что $C(gv) = \phi(g)C(v)$. Заметим, что на V_1 есть две структуры представления $G \times V_1 \to V_1$ и $\phi(G) \times V_1 \to V_1$. Для удобства пространство V_1 с фиксированной структурой представления $\phi(G) \times V_1 \to V_1$ будем обозначать V_1^{tw}. Так как σ содержится в слое V_0 и $V_0 \cong V_1$, то σ содержится в V_1 со структурой представления $G \times V_1 \to V_1$. Тогда $\sigma \circ \phi$ содержится в V_1^{tw}. Отображение C осуществляет изоморфизм представлений V_1^{tw} и V_0, следовательно, $\sigma \circ \phi$ содержится в V_0. Значит, набор неприводимых представлений, на которые раскладывается слой векторного расслоения, должен быть инвариантен относительно всех перестановок, которыми действуют образы элементов из $\pi_1(B, b_0)$ в группе H_R.

Если предположить, что представление σ не содержится в компактно-открытой окрестности $\hat{\mathcal{G}}$, то орбита σ под действием образа $\pi_1(B, b_0)$ в H_R бесконечна. Значит, в ней найдётся представление σ', которое не содержится в слое V, и элемент $\pi_1(B, b_0)$, образ которого в H_R переводит σ в σ'. Однако при обходе вдоль этой петли слой расслоения как представление должен был остаться изоморфным исходному. Противоречие. $\square$

Литература

[1] Atiyah M., Segal G. Twisted K-theory // Ukrain. Mat. Visn. — 2004. — No. 1 (3). — P. 287—330.

[2] Atiyah M. F., Singer I. M. The index of elliptic operators. I // Ann. Math. (2). — 1968. — Vol. 87. — P. 484—530.

[3] Atiyah M. F., Singer I. M. The index of elliptic operators. IV // Ann. Math. (2). — 1971. — Vol. 93. — P. 119—138.

[4] Buneci M. R. Groupoid C^*-algebras // Surv. Math. Its Appl. — 2006. — Vol. 1. — P. 71—98.

[5] Cuntz J., Meyer R., Rosenberg J. M. Topological and bivariant K-theory // Oberwolfach Sem. — 2007. — Vol. 36. — P. 173—182.

[6] Emerson H., Meyer R. Bivariant K-theory via correspondence // Adv. Math. — 2010. — Vol. 225. — P. 2883—2919.

[7] Emerson H., Meyer R. Equivariant embedding theorems and topological index maps // Adv. Math. — 2010. — Vol. 225, no. 5. — P. 2840—2882.

[8] Grothendieck A. Le group de Brauer: I. Algèbres d'Azumaya et interprétations diverses // Sem. N. Bourbaki. — 1964—1966. — No. 290. — P. 199—219.

[9] Mathai V., Melrose R. B., Singer I. M. The index of projective families of elliptic operators // Geometry Topology. — 2005. — Vol. 9. — P. 341—373.

[10] Nistor V. An index theorem for gauge-invariant families: The case of solvable groups // Acta Math. Hungar. — 2003. — Vol. 99, no. 1-2. — P. 155—183.

[11] Nistor V., Troitsky E. An index for gauge-invariant operators and the Dixmier—Douady invariant // Trans. Amer. Math. Soc. — 2004. — Vol. 356, no. 1. — P. 185—218.

[12] Nistor V., Troitsky E. The Thom isomorphism in gauge-equivariant K-theory // C^*-algebras and elliptic theory. — Birkhäuser, 2006. — (Trends Math.). — P. 213—245.

[13] Nistor V., Troitsky E. An index theorem in the gauge-equivariant K-theory. — 2009. — http://mech.math.msu.su/~troitsky/muens.pdf; http://wwwmath.uni-muenster.de/u/echters/Focused-Semester/workshopabstracts.html.

[14] Nistor V., Troitsky E. Analysis of gauge-equivariant complexes and a topological index theorem for gauge-invariant families // Russ. J. Math. Phys. — 2015. — Vol. 22, no. 1. — P. 74—97.

[15] Renault J. The ideal structure of groupoid cross product C^*-algebras // J. Operator Theor. — 1991. — Vol. 25. — P. 3—36.