Комплексы путей и их гомологии

А. А. ГРИГОРЬЯН
Билефельдский университет, Германия;
Институт проблем управления РАН
e-mail: grigor@math.uni-bielefeld.de

ЙОНГ ЛИН
Китайский народный университет, Китай
e-mail: linyong01@ruc.edu.cn

Ю. В. МУРАНОВ
Варминьско-Мазурский университет, Польша
e-mail: muranov@matman.uwm.edu.pl

ШИНТАН ЯУ
Гарвардский университет, США
e-mail: yau@math.harvard.edu

УДК 512.66+519.17

Ключевые слова: комплекс путей, гомологии орграфов, пути на орграфах, формула Кюннета, симплициальные гомологии, гомологии произведения, гомологии джойна.

Аннотация

Мы вводим понятия комплекса путей и его гомологий. Частными случаями гомологий путей являются симплициальные гомологии и гомологии орграфов. Мы формулируем и доказываем некоторые свойства гомологий путей, в частности формулы Кюннета для прямого произведения и джойна, которые выполняются на уровне цепных комплексов.

Abstract

A. A. Grigor'yan, Yong Lin, Yu. V. Muranov, Shing-Tung Yau, Path complexes and their homologies, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 21 (2016), no. 5, pp. 79—128.

We introduce the notions of a path complex and its homologies. Particular cases of path homologies are simplicial homologies and digraph homologies. We state and prove some properties of path homologies, in particular, the Künneth formulas for Cartesian product and join, which happen to be true at the level of chain complexes.

1. Введение

Предметом исследования данной работы является понятие *комплекса путей*, которое объединяет и обобщает понятия симплициального комплекса и орграфа (ориентированного графа). Вкратце, комплекс путей P на конечном множестве V является набором путей (последовательностей точек) на V, таких что если путь v лежит в P, то и усечённый путь, полученный из v удалением первой либо последней точки, снова лежит в P. Для данного комплекса путей P все пути из P называются *допустимыми*.

Любой симплициальный комплекс S естественно определяет комплекс путей при постановке в соответствие любому симплексу из S последовательность его вершин (см. детали в разделе 3).

Однако основной мотивацией для рассмотрения комплексов путей является теория орграфов. Орграф G — это пара (V, E), где V — произвольное множество, а E — бинарное отношение на V, т. е. E — это подмножество в $V \times V$. Если $(a, b) \in E$, то пара (a, b) называется ориентированным ребром или дугой; этот факт обозначается также $a \to b$. Любой орграф естественно задаёт комплекс путей, в котором допустимыми являются те пути, которые идут вдоль ориентированных рёбер орграфа.

Одно из наших ключевых наблюдений состоит в том, что любой комплекс путей P позволяет определить некоторый цепной комплекс с соответствующим граничным оператором, что приводит к понятию групп гомологий комплекса путей P. Мы будем называть эти гомологии *гомологиями путей*.

В случае когда P возникает из симплициального комплекса S, гомологии путей комплекса P совпадают с симплициальными гомологиями S. Если P возникает из орграфа G, то мы получаем новое понятие — гомологии путей орграфа. Хотя большинство результатов приведены для произвольных комплексов путей, мы всегда имеем в виду их применения для орграфов. С другой стороны, понятие комплекса путей представляет альтернативный подход к классическим результатам о симплициальных комплексах.

Было много попыток определить понятие (ко)гомологий для графов. На тривиальном уровне любой граф может рассматриваться как одномерный симплициальный комплекс, так что симплициальные группы гомологий определены. Однако все группы гомологий в размерности 2 и выше будут тривиальны, что делает этот подход неинтересным.

Другой путь превращения графа в симплициальный комплекс состоит в рассмотрении всех его клик (полных подграфов) в качестве симплексов соответствующих размерностей (см. [4, 15]). Тогда группы гомологий в высоких размерностях могут быть нетривиальны, но при этом подходе понятие графа теряет значение и становится частным случаем понятия симплициального комплекса. Кроме того, некоторые желательные функториальные свойства таких гомологий не выполняются, например формула Кюннета не выполняется для декартова произведения графов (декартово произведение двух 4-циклов имеет тривиальную группу H_2, в то время как группа H_1 для 4-цикла нетривиальна).

Ещё один подход к гомологиям орграфов может быть реализован с помощью гомологий Хохшильда. Действительно, допустимые пути в орграфе имеют естественную операцию умножения, которая позволяет определить понятие *алгебры путей* орграфа. Гомологии Хохшильда алгебры путей являются естественным объектом для рассмотрения. Однако, как было доказано в [14], гомологии Хохшильда порядка $\geqslant 2$ тривиальны, что делает это подход не таким привлекательным.

В теориях сингулярных гомологий для графов используются заранее заданные малые графы в качестве базисных клеток и сингулярные цепи определяются как формальные суммы отображений базисных клеток в граф (см., например, [15, 18]). Однако простые примеры показывают, что группы гомологий, полученные таким путём, существенно зависят от выбора базисных клеток. Кроме того, такие группы гомологий чрезвычайно сложно вычислять даже для небольших графов, а функториальные свойства неизвестны.

Гомологии путей орграфов, которые мы представляем в данной работе, имеют следующие преимущества по сравнению с ранее изучавшимися понятиями гомологий графов.

1. Гомологии путей могут быть нетривиальны во всех размерностях; даже для планарных графов гомологии путей могут быть нетривиальны в размерности 2. Кроме того, цепной комплекс, ассоциированный с комплексом путей, имеет более богатую структуру, чем симплициальный цепной комплекс. Он содержит не только клики, но и бинарные гиперкубы и другие интересные подграфы, которые напоминают полиэдры.
2. Гомологии путей легко вычислять. Для небольших орграфов гомологии путей могут быть вычислены вручную: либо по определению, либо с помощью простых свойств. Для бо́льших орграфов это может быть сделано с помощью любого программного пакета, содержащего операции с матрицами, в частности вычисление ранга матрицы.
3. Гомологии путей совместимы с гомотопической теорией орграфов. Последняя была введена авторами в [9] (гомотопическая теория для неориентированных графов была разработана раньше в [1, 2]), где было доказано, что гомологии путей орграфов являются гомотопически инвариантными и абелизация фундаментальной группы изоморфна одномерной группе гомологий.
4. Гомологии путей имеют хорошие функториальные свойства по отношению к графо-теоретическим операциям, например, морфизмы орграфов индуцируют гомоморфизмы гомологий путей. К тому же гомологии прямого произведения орграфов (так же как и джойна) удовлетворяют формуле Кюннета (теоремы 5.5 и 6.6 настоящей работы).
5. Теория гомологий путей является двойственной к теории *когомологий* орграфов, которая была введена А. Димакисом и Ф. Мюллер-Хойссеном (см. [5, 6]), а затем развита в [12]. Эта теория основывается на классификации из [3] внешних дифференцирований алгебр, и кограничный оператор естественно возникает как внешняя производная на алгебре функций, заданных на множестве вершин орграфа. Однако в данной работе когомологии не обсуждаются.

Мы считаем, что понятие гомологий путей орграфов (и двойственное понятие когомологий) имеет богатое математическое содержание, и надеемся, что оно станет полезным инструментом в различных областях теоретической и прикладной математики. Например, это понятие используется в [11], чтобы дать новое элементарное доказательство теоремы Герстенхабера и Шака [7], задающей представление симплициальных гомологий как гомологий Хохшильда. В [10] показана связь между гомологиями путей орграфов и кубическими гомологиями. Гомологии и гомотопии орграфов могут быть использованы в некоторых задачах раскраски графов; простой пример такого типа даётся в [9]. С другой стороны, вполне возможно, что понятие гомологий путей может быть использовано в практических применениях, таких как проверка покрытий в сенсорных сетях (см. [17]).

Опишем кратко структуру работы и основные результаты. В разделе 2 мы вводим понятие граничного оператора на путях, заданных на конечном множестве V. В разделе 3 мы определяем понятия комплекса путей, ∂-инвариантного пути (элемента цепного комплекса) и гомологии путей.

В разделе 4 мы приводим несколько примеров орграфов и ∂-инвариантных путей в них. Мы приводим несколько основных результатов о гомологиях путей орграфов, которые позволяют вычислять группы гомологий простых орграфов (доказательства можно найти в [8]).

В разделе 5 мы вводим операцию *джойна* двух комплексов путей и доказываем для него формулу Кюннета (теорема 5.5). Частными случаями джойна являются операции построения конуса и надстройки орграфа, которые ведут себя гомологически таким же образом, как в классической алгебраической топологии.

В разделе 6 мы вводим понятие скрещённого произведения путей и прямого произведения комплексов путей. Последнее соответствует понятию прямого произведения орграфов. Мы формулируем и доказываем формулу Кюннета для прямого произведения (теорема 6.6) и даём несколько примеров.

Наиболее сложные и интересные результаты данной работы даются теоремами 5.5 и 6.6. В случае орграфов эти теоремы были доказаны в [13], в то время как в настоящей работе мы докажем их в более общем случае комплексов путей.

2. Пути на конечном множестве

Пусть V — произвольное непустое конечное множество, элементы которого мы будем называть вершинами. Для любого неотрицательного целого числа p *элементарный p-путь* на множестве V — это произвольная последовательность $\{i_k\}_{k=0}^{p}$, состоящая из $p+1$ вершины из V (априори вершины пути не должны быть различны). Для $p=-1$ элементарный p-путь является пустым множеством $\varnothing$. Обозначим также через $i_0 \ldots i_p$, не делая пробелов между вершинами, произвольный p-путь $\{i_k\}_{k=0}^{p}$.

2.1. Граничный оператор

Зафиксируем поле $\mathbb{K}$ и рассмотрим $\mathbb{K}$-линейное пространство $\Lambda_p = \Lambda_p(V)$, которое состоит из всех формальных линейных комбинаций всевозможных элементарных p-путей с коэффициентами из $\mathbb{K}$. Элементы из Λ_p называются *p-путями* на V. Элементарный p-путь $i_0 \dots i_p$ как элемент из Λ_p будем обозначать $e_{i_0 \dots i_p}$. Пустое множество как элемент Λ_{-1} будем обозначать e.

По определению семейство $\{e_{i_0 \dots i_p} \colon i_0, \dots, i_p \in V\}$ является базисом Λ_p, и любой p-путь $v \in \Lambda_p$ имеет единственное представление в форме

$$v = \sum_{i_0, \dots, i_p \in V} v^{i_0 \dots i_p} e_{i_0 \dots i_p}, \tag{2.1}$$

где $v^{i_0 \dots i_p} \in \mathbb{K}$. Например, Λ_0 состоит из всех линейных комбинаций элементов e_i, где $i \in V$, Λ_1 состоит из всех линейных комбинаций элементов e_{ij}, где $i, j \in V$ и т. д. Заметим, что Λ_{-1} состоит из всех кратных элемента e, так что $\Lambda_{-1} \cong \mathbb{K}$.

Для любого $p \geqslant 0$ определим *граничный оператор* $\partial \colon \Lambda_p \to \Lambda_{p-1}$ как линейный оператор, который действует на элементарные пути по правилу

$$\partial e_{i_0 \dots i_p} = \sum_{q=0}^{p} (-1)^q e_{i_0 \dots \hat{i}_q \dots i_p}, \tag{2.2}$$

где $\hat{i}_q$ обозначает пропуск индекса i_q. Например, мы имеем

$$\partial e_i = e, \quad \partial e_{ij} = e_j - e_i, \quad \partial e_{ijk} = e_{jk} - e_{ik} + e_{ij}. \tag{2.3}$$

Следовательно, для любого $v \in \Lambda_p$

$$(\partial v)^{j_0 \dots j_{p-1}} = \sum_{k \in V} \sum_{q=0}^{p} (-1)^q v^{j_0 \dots j_{q-1} k \, j_q \dots j_{p-1}}. \tag{2.4}$$

Например, для любого $u \in \Lambda_0$ и $v \in \Lambda_1$ мы получаем

$$\partial u = \sum_{k \in V} u^k, \quad (\partial v)^i = \sum_{k \in V} (v^{ki} - v^{ik}).$$

Положим также $\Lambda_{-2} = \{0\}$ и определим $\partial \colon \Lambda_{-1} \to \Lambda_{-2}$ как нулевое отображение.

Лемма 2.1. *Выполняется условие $\partial^2 = 0$. Следовательно, $\Lambda_* = \{\Lambda_p\}$ является цепным комплексом.*

Доказательство. Оператор ∂^2 действует из Λ_p в Λ_{p-2}, так что тождество $\partial^2 = 0$ имеет смысл для всех $p \geqslant 0$. В случае $p = 0$ тождество $\partial^2 = 0$ тривиально. Для $p \geqslant 1$ мы имеем согласно (2.2)

$$
\begin{aligned}
\partial^2 e_{i_0\ldots i_p} &= \sum_{q=0}^{p}(-1)^q \partial e_{i_0\ldots\hat{i}_q\ldots i_p} = \\
&= \sum_{q=0}^{p}(-1)^q\left(\sum_{r=0}^{q-1}(-1)^r e_{i_0\ldots\hat{i}_r\ldots\hat{i}_q\ldots i_p} + \sum_{r=q+1}^{p}(-1)^{r-1} e_{i_0\ldots\hat{i}_q\ldots\hat{i}_r\ldots i_p}\right) = \\
&= \sum_{0\leqslant r<q\leqslant p}(-1)^{q+r} e_{i_0\ldots\hat{i}_r\ldots\hat{i}_q\ldots i_p} - \sum_{0\leqslant q<r\leqslant p}(-1)^{q+r} e_{i_0\ldots\hat{i}_q\ldots\hat{i}_r\ldots i_p}.
\end{aligned}
$$

После переобозначения q и r в последней сумме мы видим, что две суммы уничтожаются, откуда следует, что $\partial^2 e_{i_0\ldots i_p} = 0$. Тогда $\partial^2 v = 0$ для всех $v \in \Lambda_p$. □

2.2. Джойн путей

Для всех $p, q \geqslant -1$ и для любых двух путей $u \in \Lambda_p$ и $v \in \Lambda_q$ определим их *джойн* $uv \in \Lambda_{p+q+1}$ следующим образом:

$$
(uv)^{i_0\ldots i_p j_0\ldots j_q} = u^{i_0\ldots i_p} v^{j_0\ldots j_q}. \tag{2.5}
$$

Очевидно, что взятие джойна путей является билинейной операцией, которая удовлетворяет закону ассоциативности (но она не коммутативна). Из (2.5) следует, что

$$
e_{i_0\ldots i_p} e_{j_0\ldots j_q} = e_{i_0\ldots i_p j_0\ldots j_q}. \tag{2.6}
$$

Если $p = -2$ и $q \geqslant -1$, то положим $uv = 0 \in \Lambda_{q-1}$. Аналогичное правило применяется, если $q = -2$ и $p \geqslant -1$.

Лемма 2.2 (правило произведения). *Для всех $p, q \geqslant -1$ и $u \in \Lambda_p$, $v \in \Lambda_q$ мы имеем*

$$
\partial(uv) = (\partial u)v + (-1)^{p+1} u \partial v. \tag{2.7}
$$

Доказательство. Достаточно доказать (2.7) для $u = e_{i_0\ldots i_p}$ и $v = e_{j_0\ldots j_q}$. Мы имеем

$$
\begin{aligned}
\partial(uv) = \partial e_{i_0\ldots i_p j_0\ldots j_q} &= e_{i_1\ldots i_p j_0\ldots j_q} - e_{i_0 i_2\ldots i_p j_0\ldots j_q} + \ldots + \\
&+ (-1)^{p+1}(e_{i_0\ldots i_p j_1\ldots j_q} - e_{i_0\ldots i_p j_0 j_2\ldots j_q} + \ldots) = \\
&= (\partial e_{i_0\ldots i_p}) e_{j_0\ldots j_q} + (-1)^{p+1} e_{i_0\ldots i_p} \partial e_{j_0\ldots j_q},
\end{aligned}
$$

откуда следует (2.7). □

2.3. Регулярные пути

Мы говорим, что элементарный путь $i_0\ldots i_p$ является *регулярным*, если $i_{k-1} \neq i_k$ для всех $k = 1, \ldots, p$, и *нерегулярным* в противном случае. Например, 2-путь iij является нерегулярным, однако 2-путь iji является регулярным при условии $i \neq j$.

Для любого $p \geqslant -1$ рассмотрим подпространство

$$\mathcal{R}_p = \mathcal{R}_p(V) := \operatorname{span}\{e_{i_0\ldots i_p}\colon \text{путь } i_0\ldots i_p \text{ регулярный}\}$$

пространства Λ_p, порождённое регулярными элементарными путями. Элементы $\mathcal{R}_p$ называются *регулярными* p-путями.

Мы хотели бы рассматривать оператор ∂ на пространствах $\mathcal{R}_p$. Однако оператор ∂ не инвариантен на семействе $\{\mathcal{R}_p\}$. Например, $e_{iji} \in \mathcal{R}_2$ для $i \neq j$, однако

$$\partial e_{iji} = e_{ji} - e_{ii} + e_{ij} \notin \mathcal{R}_1,$$

так как он имеет нерегулярную компоненту e_{ii}. То же самое относится к понятию джойна путей: джойн двух регулярных путей не обязательно будет регулярным, например, $e_i e_i = e_{ii}$.

Однако легко показать что оператор ∂ будет инвариантен на дополнительных пространствах $\mathcal{N}_p$, порождённых нерегулярными p-путями, что позволяет нам рассматривать ∂ на фактор-пространствах $\Lambda_p/\mathcal{N}_p$. Затем мы можем рассматривать полученный оператор ∂ снова на $\mathcal{R}_p$, используя изоморфизм $\mathcal{R}_p \cong \Lambda_p/\mathcal{N}_p$. Определённый таким образом оператор $\partial\colon \mathcal{R}_p \to \mathcal{R}_{p-1}$ называется *регулярным граничным оператором*. Формулу (2.2) можно применять также для регулярного ∂, необходимо только в этом случае рассматривать как ноль все нерегулярные члены в правой части. Например, мы получаем для регулярного оператора ∂, что

$$\partial e_{iji} = e_{ji} - e_{ii} + e_{ij} = e_{ji} + e_{ij} \in \mathcal{R}_1$$

при условии $i \neq j$.

Аналогично можно определить *регулярный джойн*, используя тот факт, что джойн некоторого элемента из $\mathcal{N}_p$ и любого элемента из Λ_q лежит в $\mathcal{N}_{p+q+1}$ (см. детали в [8]). Это позволяет нам определить джойн на фактор-пространствах $\Lambda_p/\mathcal{N}_p$, а затем перенести на пространства $\mathcal{R}_p$. Формула (2.6) остаётся верной для регулярного джойна, если рассматривать как ноль все нерегулярные пути в правой части. Например, для регулярного джойна мы имеем $e_{ij} e_{ji} = e_{ijji} = 0$.

Из приведённых выше конструкций следует, что регулярные версии оператора ∂ и джойна удовлетворяют условиям $\partial^2 = 0$ и правилу произведения (2.7) для всех $u \in \mathcal{R}_p$ и $v \in \mathcal{R}_q$. В частности, $\mathcal{R}_* = \{\mathcal{R}_p\}$ является цепным комплексом.

Пусть V, V' — два конечных множества. Любое отображение $f\colon V \to V'$ индуцирует отображение

$$f_*\colon \Lambda_p(V) \to \Lambda_p(V')$$

по правилу

$$f_*(e_{i_0\ldots i_p}) = e_{f(i_0)\ldots f(i_p)}.$$

Отображение f_* очевидно коммутирует с ∂ и, следовательно, является морфизмом $\Lambda_*(V) \to \Lambda_*(V')$ цепных комплексов. Так как f_* отображает нерегулярные пути в нерегулярные, то оно индуцирует морфизм $\mathcal{R}_*(V) \to \mathcal{R}_*(V')$ цепных комплексов.

3. Комплексы путей

3.1. Понятие комплекса путей

Определение 3.1. *Комплекс путей* на множестве V — это непустой набор P элементарных путей на V, для которых выполняется следующее свойство:

$$\text{если } i_0 \ldots i_n \in P, \text{ то } i_0 \ldots i_{n-1} \in P \text{ и } i_1 \ldots i_n \in P. \qquad (3.1)$$

Когда комплекс путей P фиксирован, все пути из P называются *допустимыми*, в то время как все элементарные пути, которые не лежат в P, называются *недопустимыми*. Условие (3.1) означает, что при удалении первого или последнего элемента допустимого пути мы получим допустимый $(n-1)$-путь.

Обозначим через P_n множество всех n-путей, лежащих в P. Множество P_{-1} состоит из одного пустого пути e. Элементы из P_0 (т. е. допустимые 0-пути) называются *вершинами* P. Ясно, что P_0 является подмножеством в V. По свойству (3.1) если $i_0 \ldots i_n \in P$, то все i_k являются вершинами из P. По свойству (3.1) если $i_0 \ldots i_n \in P$, то все i_k являются вершинами из P. Следовательно, мы можем (и будем) удалять из множества V все элементы, не являющиеся вершинами, так что $V = P_0$.

Пример 3.2. По определению абстрактный конечный симплициальный комплекс S состоит из набора подмножеств конечного множества вершин V, удовлетворяющего следующему свойству:

$$\text{если } \sigma \in S, \text{ то любое подмножество } \sigma \text{ также лежит в } S.$$

Пронумеруем элементы из V различными числами и отождествим любое подмножество s множества V с элементарным путём, который состоит из элементов s, расположенных в (строго) возрастающем порядке. Обозначим через $P(S)$ этот набор элементарных путей на V, который однозначно определяет S. Определяющее свойство симплекса можно переформулировать следующим образом:

$$\text{если } v \in P(S), \text{ то любая подпоследовательность } v \text{ также лежит в } P(S). \qquad (3.2)$$

Следовательно, семейство $P(S)$ удовлетворяет свойству (3.1), так что $P(S)$ является комплексом путей. Допустимые n-пути в $P(S)$ — это в точности n-симплексы.

Например, симплициальный комплекс на рис. 1 слева имеет следующий комплекс путей:

$$\begin{aligned}
&P_0 = \{0, 1, \ldots, 8\}, \\
&P_1 = \{01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 12, 34, 35, 45, 67, 68, 78\}, \\
&P_2 = \{012, 034, 035, 045, 345, 678\}, \\
&P_3 = \{0345\}.
\end{aligned}$$

Пример 3.3. Пусть $G = (V, E)$ — конечный орграф, где V — конечное множество вершин, а E — конечное множество ориентированных рёбер, т. е. $E \subset V \times V$. Тот факт, что $(i, j) \in E$, будет также обозначаться через $i \to j$.

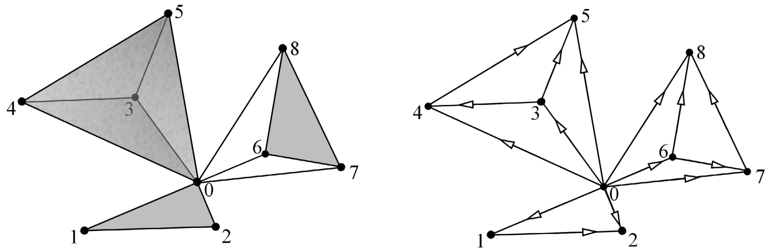


Рис. 1. Симплициальный комплекс (слева) и орграф (справа)

Элементарный n-путь $i_0 \ldots i_n$ на V называется допустимым, если $i_{k-1} \to i_k$ для любого $k = 1, \ldots, n$. Обозначим через $P_n = P_n(G)$ множество всех допустимых n-путей. В частности, мы получаем $P_0 = V$ и $P_1 = E$. Ясно, что набор $\{P_n\}$ всех допустимых путей удовлетворяет условию (3.1), так что $\{P_n\}$ является комплексом путей. Этот комплекс путей естественно определяется орграфом G, и мы будем его обозначать $P(G)$.

Например, орграф на рис. 1 справа имеет следующий комплекс путей:

$$P_0 = \{0, 1, \ldots, 8\},$$
$$P_1 = \{01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 12, 34, 35, 45, 67, 68, 78\},$$
$$P_2 = \{012, 034, 035, 045, 067, 068, 678\},$$
$$P_3 = \{0345, 0678\}.$$

Легко заметить, что комплекс путей возникает из орграфа тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующему дополнительному условию: если в пути $i_0 \ldots i_n$ все пары $i_{k-1} i_k$ являются допустимыми, то и весь путь $i_0 \ldots i_n$ будет допустимым.

Легко показать, что комплекс путей P задаётся некоторым симплициальным комплексом тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующим двум свойствам.

1. Любая подпоследовательность любого пути из P также лежит в P (в этом случае мы говорим, что комплекс путей P является *совершенным*).
2. Существует инъективная вещественно-значная функция на множестве вершин из P, которая строго монотонно возрастает вдоль любого пути из P.

3.2. Гомологии комплексов путей

Для произвольного комплекса путей $P = \{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ на конечном множестве V и для любого целого $n \geqslant -1$ рассмотрим $\mathbb{K}$-линейное пространство $\mathcal{A}_n$, порождённое элементарными n-путями из P, т. е.

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(P) = \operatorname{span}\{e_{i_0 \ldots i_n} : i_0 \ldots i_n \in P_n\}.$$

Элементы из $\mathcal{A}_n$ называются *допустимыми* n-путями. По построению $\mathcal{A}_n$ является подпространством в Λ_n. Например, $\mathcal{A}_p = \Lambda_p$ для $p \leqslant 0$, в то время как $\mathcal{A}_1$ порождено всеми рёбрами из P и может быть меньше Λ_1.

Мы хотели бы ограничить оператор ∂, определённый на пространствах Λ_n, на подпространства $\mathcal{A}_n$. Может случиться так, что для некоторых комплексов $\partial\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n-1}$, так что ограничение получается непосредственно. Если это не так, то необходима дополнительная конструкция, как будет объяснено ниже. Вложение $\partial\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_{n-1}$ имеет место, например, для совершенных комплексов путей. В этом случае мы получаем цепной комплекс

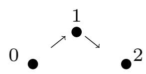
$$0 \leftarrow \mathbb{K} \leftarrow \mathcal{A}_0 \leftarrow \ldots \leftarrow \mathcal{A}_{n-1} \leftarrow \mathcal{A}_n \leftarrow \ldots, \tag{3.3}$$

группы гомологий которого обозначаются $\tilde{H}_n(P)$, $n \geqslant -1$, и называются *приведёнными гомологиями комплекса путей* P. Рассмотрим также усечённый комплекс

$$0 \leftarrow \mathcal{A}_0 \leftarrow \ldots \leftarrow \mathcal{A}_{n-1} \leftarrow \mathcal{A}_n \leftarrow \ldots, \tag{3.4}$$

группы гомологий которого обозначаются $H_n(P)$, $n \geqslant 0$, и называются *приведёнными гомологиями комплекса путей* P. Например, эта конструкция работает, если комплекс путей P возникает из симплициального комплекса S. Тогда группы гомологии комплекса путей P совпадают с соответствующими симплициальными группами гомологий комплекса S.

Теперь рассмотрим общий случай, когда $\partial\mathcal{A}_n$ не обязательно будет подпространством $\mathcal{A}_{n-1}$. Например, так будет для орграфа



,

в котором 2-путь e_{012} является допустимым, в то время как $\partial e_{012} = e_{12} - e_{02} + e_{01}$ не является допустимым, так как e_{02} недопустим.

Для общего комплекса путей P и для любого $n \geqslant -1$ рассмотрим следующее подпространство пространства $\mathcal{A}_n$:

$$\Omega_n = \Omega_n(P) = \{v \in \mathcal{A}_n \colon \partial v \in \mathcal{A}_{n-1}\}. \tag{3.5}$$

Отметим, что $\Omega_n = \mathcal{A}_n$ для $n \leqslant 1$, в то время как для $n \geqslant 2$ пространство Ω_n может быть на самом деле меньше, чем $\mathcal{A}_n$. Мы утверждаем, что всегда $\partial\Omega_n \subset \Omega_{n-1}$. Действительно, если $v \in \Omega_n$, то $\partial v \in \mathcal{A}_{n-1}$ и $\partial(\partial v) = 0 \in \mathcal{A}_{n-2}$, откуда следует, что $\partial v \in \Omega_{n-1}$, что и требовалось доказать.

Элементы из Ω_n называются *∂-инвариантными* n-путями. Таким образом, мы получили *приведённый* цепной комплекс ∂-инвариантных путей

$$0 \leftarrow \mathbb{K} \leftarrow \Omega_0 \leftarrow \ldots \leftarrow \Omega_{n-1} \leftarrow \Omega_n \leftarrow \Omega_{n+1} \leftarrow \ldots, \tag{3.6}$$

в котором все отображения задаются ∂. Рассмотрим также его стандартную *неприведённую* версию

$$0 \leftarrow \Omega_0 \leftarrow \ldots \leftarrow \Omega_{n-1} \leftarrow \Omega_n \leftarrow \Omega_{n+1} \leftarrow \ldots. \tag{3.7}$$

Группы гомологий комплекса (3.7) называются *группами гомологий комплекса путей* P и обозначаются $H_n(P)$, $n \geqslant 0$. Группы гомологий комплекса (3.6) называются *приведёнными группами гомологий комплекса путей* P и обозначаются $\tilde{H}_n(P)$, $n \geqslant -1$.

Определение 3.4. Комплекс путей P называется *регулярным*, если он не содержит 1-путей, имеющих форму ii. Эквивалентно, P является регулярным, если все пути $i_0 \dots i_n \in P$ являются регулярными.

Например, комплекс путей симплициального комплекса всегда будет регулярным. Комплекс путей орграфа будет регулярным тогда и только тогда, когда орграф не имеет петель, т. е. когда 1-пути ii не являются рёбрами.

Для регулярного комплекса путей вышеприведённая конструкция пространства Ω_n допускает следующую версию. Так как в этом случае пространство допустимых n-путей $\mathcal{A}_n$ является подпространством пространства $\mathcal{R}_n$ регулярных n-путей, мы можем заменить в (3.5) нерегулярный граничный оператор ∂ на Λ_n на регулярный граничный оператор на $\mathcal{R}_n$, как описано в разделе 2.3. Полученное в результате пространство Ω_n называется *регулярным* пространством ∂-инвариантных путей. Следовательно, если комплекс путей P является регулярным, то мы можем также рассмотреть регулярные версии цепных комплексов (3.6) и (3.7) и регулярные версии групп гомологий.

Если комплекс путей P является совершенным, мы получаем $\Omega_n(P) = \mathcal{A}_n(P)$ для всех n (в этом случае нет разницы между регулярной и нерегулярной версиями). Следовательно, в этом случае цепной комплекс (3.6) идентичен с (3.3) и (3.7) идентичен с (3.4).

Если $P(G)$ является комплексом путей орграфа G, то мы будем использовать обозначение $\Omega_n(G) := \Omega_n\big(P(G)\big)$. Соответствующие группы гомологий обозначаются $H_n(G)$ (соответственно $\tilde{H}_n(G)$) и называются *гомологиями путей орграфа* G.

Эйлерова характеристика комплекса путей определяется равенством

$$\chi(P) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \dim H_p(P) \tag{3.8}$$

при условии, что n достаточно большое, чтобы $\dim H_p(P) = 0$ для всех $p > n$. Для регулярного комплекса путей P существуют регулярная и нерегулярная версии $\chi(P)$, которые могут не совпадать.

3.3. Некоторые свойства гомологий путей

Опишем некоторые простые свойства пространства $\Omega_n(P)$ и $H_n(P)$.

Предложение 3.5 [8].

1. *Если* $\dim \Omega_n = 0$, *то* $\dim \Omega_p = 0$ *для всех* $p > n$.
2. *Для регулярного цепного комплекса* $\{\Omega_*\}$ *выполнение условия* $\dim \Omega_n \leqslant 1$ *для некоторого* n *влечёт, что* $\dim \Omega_p = 0$ *для всех* $p > n$.

Компонента связности комплекса путей P задаётся таким минимальным подмножеством U в V, что если $i \in U$, то U содержит любую вершину $j \in V$, для которой ij или ji является допустимым 1-путём.

Предложение 3.6 [8]. *Для любого комплекса путей P выполняется равенство $\dim H_0(P) = k$, где k — число компонент связности в P. Более того, $H_0(P)$ порождено любым множеством $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_k}\}$ из k вершин, принадлежащих различным компонентам. В частности, если P является связным комплексом, то $\dim H_0(P) = 1$, и следовательно, $\dim \tilde{H}_0(P) = 0$.*

Пусть P — регулярный комплекс путей на множестве V и P' — регулярный комплекс путей на множестве V'.

Определение 3.7. Будем говорить, что отображение $f\colon V \to V'$ является морфизмом комплексов путей из P в P', если для любого пути $v \in P$ путь $f_*(v)$ либо лежит в P', либо не является регулярным.

Предложение 3.8. *Любой морфизм $f\colon V \to V'$ комплекса путей P в P' индуцирует морфизм регулярных цепных комплексов*

$$f_*\colon \Omega_*(P) \to \Omega_*(P')$$

и, следовательно, гомоморфизм регулярных групп гомологий

$$f_*\colon H_*(P) \to H_*(P').$$

Доказательство. Любой допустимый путь $v \in \mathcal{A}_n(P)$ является линейной комбинацией путей $e_{i_0 \dots i_n} \in P$, следовательно, $f_*(v)$ будет линейной комбинацией путей $f_*(e_{i_0 \dots i_n})$, которые либо лежат в P', либо не являются регулярными. Поскольку нерегулярные пути рассматриваются как нули, мы получаем, что $f_*(v) \in \mathcal{A}_n(P')$. Если $v \in \Omega_n(P)$, то $\partial v \in \mathcal{A}_{n-1}(P)$ и, следовательно,

$$\partial\bigl(f_*(v)\bigr) = f_*(\partial v) \in \mathcal{A}_{n-1}(P'),$$

откуда вытекает, что $f_*(v) \in \Omega_n(P')$. Следовательно, f_* — морфизм регулярных цепных комплексов. Второе утверждение стандартно. □

4. Орграфы

4.1. Гомологии путей на орграфах

В этом разделе мы приводим некоторые примеры ∂-инвариантных путей на орграфах без петель, т. е. без дуг вида $a \to a$. Если $G = (V, E)$ — орграф без петель, то его комплекс путей $P(G)$ является регулярным. Мы имеем здесь дело с регулярными пространствами $\Omega_n(G) = \Omega_n\bigl(P(G)\bigr)$ и регулярными группами гомологий $H_n(G) = H_n\bigl(P(G)\bigr)$ и $\tilde{H}_n(G) = \tilde{H}_n\bigl(P(G)\bigr)$.

Треугольники и квадраты

Будем называть *треугольником* последовательность из трёх различных вершин $a, b, c \in V$, для которых есть дуги $a \to b$, $b \to c$, $a \to c$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & b \arrow[dr] & \\ a \arrow[ur] \arrow[rr] & & c \end{tikzcd}.$$

Заметим, что треугольник определяет 2-путь $e_{abc} \in \Omega_2$, так как $e_{abc} \in \mathcal{A}_2$ и $\partial e_{abc} = e_{bc} - e_{ac} + e_{ab} \in \mathcal{A}_1$. Этот 2-путь e_{abc} будет также называться треугольником.

Будем называть *квадратом* последовательность из четырёх различных вершин $a, b, b', c \in V$, для которых есть дуги $a \to b$, $b \to c$, $a \to b'$, $b' \to c$:

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r] & c \\ a \arrow[u] \arrow[r] & b' \arrow[u] \end{tikzcd}.$$

Заметим, что квадрат определяет 2-путь $v := e_{abc} - e_{ab'c} \in \Omega_2$, так как $v \in \mathcal{A}_2$ и

$$\partial v = (e_{bc} - e_{ac} + e_{ab}) - (e_{b'c} - e_{ac} + e_{ab'}) = e_{ab} + e_{bc} - e_{ab'} - e_{b'c} \in \mathcal{A}_1.$$

Этот 2-путь v будет также называться квадратом.

Двойная дуга задаётся парой различных вершин $a, b \in V$, для которых есть дуги $a \to b$ и $b \to a$. Это определяет 2-путь $e_{aba} \in \Omega_2$, так как $e_{aba} \in \mathcal{A}_2$ и

$$\partial e_{aba} = e_{ba} - e_{aa} + e_{ab} = e_{ba} + e_{ab} \in \mathcal{A}_2$$

(поскольку цепной комплекс $\{\Omega_*\}$ является регулярным, мы имеем $e_{aa} = 0$). Этот 2-путь e_{aba} будет также называться двойной дугой.

Предложение 4.1 [8; 9, утверждение 2.9].

1. *Любой элемент из $\Omega_2(G)$ является линейной комбинацией двойных дуг, треугольников и квадратов.*
2. *Предположим, что орграф $G = (V, E)$ не содержит ни двойных дуг, ни квадратов. Тогда $\dim \Omega_2(G)$ равна числу различных треугольников в G и $\dim \Omega_p(G) = 0$ для всех $p > 2$.*

Следовательно, если G не содержит ни двойных дуг, ни треугольников, ни квадратов, то $\dim \Omega_p(G) = \dim H_p(G) = 0$ для всех $p \geqslant 2$.

В первом утверждении нельзя прямо связать $\dim \Omega_2$ с числом квадратов и треугольников, поскольку между ними может быть линейная зависимость. Действительно, рассмотрим следующий орграф:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & 1 \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 2 \arrow[r] & 4 \\ & 3 \arrow[ur] & \end{tikzcd}.$$

Он содержит три квадрата 0124, 0134 и 0234, которые определяют три ∂-инвариантных пути

$$e_{014} - e_{024}, \quad e_{024} - e_{034}, \quad e_{034} - e_{014}.$$

Эти пути линейно зависимы, так как их сумма равна 0. Легко показать, что $\dim \Omega_2 = 2$. Для этого орграфа все приведённые группы гомологий тривиальны.

В присутствии квадратов могут быть нетривиальные Ω_p для произвольного p, как видно из многочисленных примеров в следующих разделах.

4.1.1. Змея

Змея длины p — это орграф с $p+1$ вершиной $0, 1, \ldots, p$ и дугами $i \to (i+1)$ и $i \to (i+2)$ (рис. 2). В частности, любая тройка $i(i+1)(i+2)$ является треугольником.

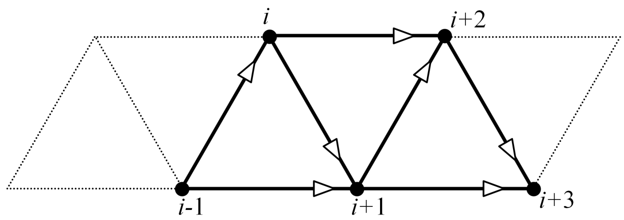


Рис. 2. Змея

Змея длины p содержит ∂-инвариантный p-путь $v = e_{01\ldots p}$. Действительно, этот путь очевидно является допустимым, его граница

$$\partial v = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k e_{0\ldots\hat{k}\ldots p}$$

также является допустимой (так как $(k-1)(k+1)$ — дуга), следовательно, $v \in \Omega_p$.

4.1.2. Орграф-симплекс

Для любого $n \geqslant 0$ определим *орграф-симплекс* Sm_n следующим образом: $\{0, 1, \ldots, n\}$ — множество вершин, $i \to j$ для всех $i < j$ — дуги. Например,

$$\mathrm{Sm}_1 = {}^0\bullet \;\to\; \bullet^1, \quad \mathrm{Sm}_2 = \begin{array}{ccc} & \overset{2}{\bullet} & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ {}^0\bullet & \to & \bullet^1 \end{array}.$$

Орграф-симплекс Sm_3 изображён на рис. 3.

Так как симплекс содержит змею в качестве подграфа, n-путь $v = e_{01\ldots n}$ является ∂-инвариантным на Sm_n.

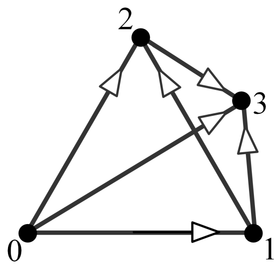


Рис. 3. Орграф-симплекс Sm_3 размерности 3

4.1.3. Звездчатые орграфы

Будем говорить, что орграф G является *звездчатым*, если существует вершина a (называемая центром звезды), для которой есть дуга $a \to b$ для всех $b \neq a$. Аналогично орграф G называется обратно звездчатым, если существует такая вершина a (называемая центром звезды), что существует дуга $b \to a$ для всех $b \neq a$.

Например, любой орграф-симплекс является звездчатым и обратно звездчатым.

Предложение 4.2 (лемма Пуанкаре). *Если орграф G является (обратно) звездчатым, то все приведённые группы гомологий $\tilde{H}_n(G)$ тривиальны.*

Доказательство можно найти в [8]. Предложение 4.2 является лёгким следствием теоремы 5.5, как будет объяснено ниже в разделе 5.2.

Из предложения 4.2 следует, что все приведённые группы гомологий для Sm_n тривиальны.

4.1.4. Циклы

Будем говорить, что орграф $G = (V, E)$ является *циклическим графом*, если он связен (как неориентированный граф) и любая вершина имеет степень 2. Для циклического графа мы имеем $\dim H_0(G) = 1$ и

$$\dim \Omega_0(G) = |V| = |E| = \dim \Omega_1(G).$$

Предложение 4.3 [8; 9, пример 2.8]. *Пусть G — циклический граф. Тогда*

$$\dim \Omega_p(G) = 0 \quad \text{для всех} \quad p \geqslant 3 \quad \text{и} \quad \dim H_p(G) = 0 \quad \text{для всех} \quad p \geqslant 2.$$

Если G является треугольником или квадратом, то

$$\dim \Omega_2(G) = 1, \quad \dim H_1(G) = 0, \quad \chi(G) = 1,$$

тогда как в противном случае

$$\dim \Omega_2(G) = 0, \quad \dim H_1(G) = 1, \quad \chi(G) = 0.$$

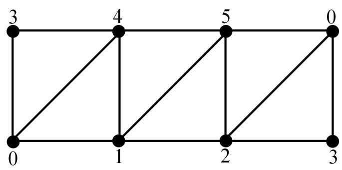
В последнем случае образующим элементом для $H_1(G)$ является 1-путь σ, такой что

$$\sigma^{i(i+1)} = \begin{cases} 1, & \text{если } i(i+1) \text{ является ребром,} \\ -1, & \text{если } (i+1)i \text{ является ребром,} \end{cases} \tag{4.1}$$

а другие компоненты σ исчезают.

4.1.5. Лист Мёбиуса

Рассмотрим (неориентированный) граф G на рис. 4 с 6 вершинами и 12 рёбрами.



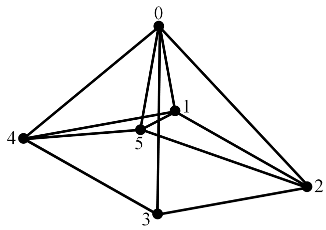


Рис. 4. Два представления графа G: вложен в лист Мёбиуса (слева) и в $\mathbb{R}^3$ (справа)

Как 1-мерный симплициальный комплекс, G имеет симплициальные гомологии $H_*(C_*(G))$. С другой стороны, введём произвольно множество D ориентаций на рёбрах G, так что (G, D) становится орграфом и, следовательно, имеет гомологии $H_*(G, D)$, определённые для орграфа. Покажем теперь, что при любом выборе D

$$H_1(C_*(G)) \neq H_1(G, D). \tag{4.2}$$

Пусть Ω_* будет цепным комплексом орграфа (G, D). В частности, $\dim \Omega_0$ равна 6, т. е. числу вершин, и $\dim \Omega_1$ равна 12, т. е. числу рёбер. Из гомологической алгебры мы получаем универсальное тождество

$$\dim H_1(\Omega) - \dim H_0(\Omega) = \dim \Omega_1 - \dim \Omega_0 - \dim \partial\Omega_2$$

и аналогичное тождество для симплициальных гомологий. Так как граф G связен, мы имеем $\dim H_0(\Omega) = 1$. Следовательно,

$$\dim H_1(\Omega) = 7 - \dim \partial\Omega_2.$$

Аналогичная формула имеет место для симплициальных гомологий

$$\dim H_1(C_*(G)) = 7 - \dim \partial C_2(G) = 7,$$

так как $C_2(G)$ тривиальна.

Осталось показать, что пространство $\partial\Omega_2$ нетривиально для любого выбора D ориентаций рёбер, что обеспечит $\dim H_1(G, D) \leqslant 6$ и, следовательно, неравенство (4.2). Для этого достаточно проверить, что существует по крайней мере один треугольник abc в (G, D), поскольку тогда $e_{abc} \in \Omega_2$ и $\partial e_{abc} \neq 0$.

Действительно, попробуем определить множество ориентаций D на рёбрах G так, чтобы (G, D) не содержал треугольников. Тогда любой неориентированный треугольник в G должен стать одним из двух циклов

$$\begin{array}{ccc}\bullet & \longleftarrow & \bullet \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & \bullet & \end{array} \quad \text{или} \quad \begin{array}{ccc}\bullet & \longrightarrow & \bullet \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & \bullet & \end{array}.$$

Возьмём некоторую ориентацию ребра 03, этот выбор определяет единственным образом ориентации всех других рёбер (рис. 5) до ребра 23. Однако при любой ориентации ребра 23 последовательность 023 становится треугольником, что завершает доказательство.

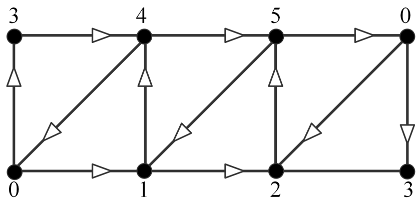


Рис. 5. Любая ориентация ребра 23 будет создавать треугольник

4.1.6. Связная сумма

Орграф $G = (V, E)$ называется связной суммой орграфов $G' = (V', E')$ и $G'' = (V'', E'')$, если $V = V' \cup V''$, $E = E' \cup E''$ и $V' \cap V''$ состоит из одной вершины.

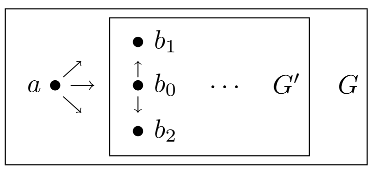
Предложение 4.4 [12]. *Если G является связной суммой G' и G'', то*

$$\tilde{H}_*(G) \cong \tilde{H}_*(G') \oplus \tilde{H}_*(G'').$$

Например, орграф G справа на рис. 1 является связной суммой треугольника 012 и двух 3-симплексов 0678, 0345. Так как все приведённые группы гомологий симплексов тривиальны, мы получаем, что приведённые группы гомологий G тривиальны.

4.2. Гомологии подграфов

Предложение 4.5 [8, 9]. *Предположим что орграф G имеет вершину a с n выходящими дугами $a \to b_0$, $a \to b_1, \ldots, a \to b_{n-1}$ и без входящих дуг. Предположим также, что есть дуги $b_0 \to b_i$ для всех $i \geqslant 1$:*



.

Обозначим через G' орграф, который получается из G удалением вершины a вместе со всеми смежными рёбрами. Тогда $H_*(G) \cong H_*(G')$.

То же самое справедливо, если вершина a имеет n входящих дуг $b_0 \to a$, $b_1 \to a, \ldots, b_{n-1} \to a$ и не имеет исходящих дуг, в то время как есть дуги $b_i \to b_0$ для всех $i \geqslant 1$.

Следствие 4.6. *Пусть орграф G является деревом (т. е. задающий его неориентированный граф является деревом). Тогда $H_p(G) = 0$ для всех $p \geqslant 1$.*

Пример 4.7. Рассмотрим орграф G, изображённый на рис. 6.

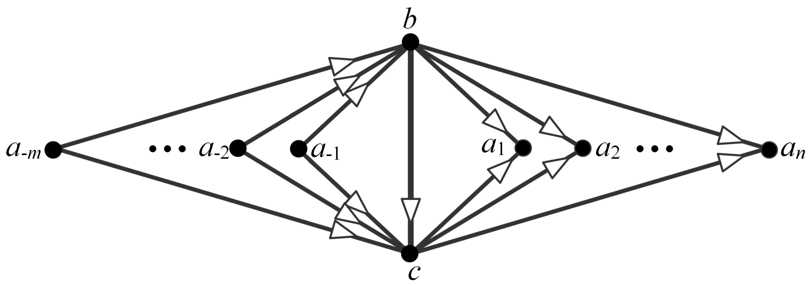


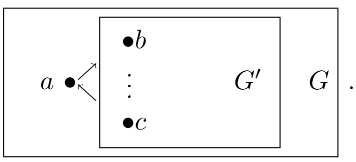
Рис. 6. Орграф с большим числом треугольников и квадратов

Каждая из вершин a_k удовлетворяет условиям предложения 4.5 при $n = 2$ (либо для входящих или исходящих дуг). Удаляя последовательно вершины a_k, мы видим, что все гомологии орграфа G будут такими же, как у оставшегося орграфа ${}^b\bullet \to \bullet^c$. Так как это звездчатый орграф, $\dim H_0 = 1$ и $\dim H_p = 0$ для $p \geqslant 1$. В частности, $\chi = 1$.

Пара cb различных вершин орграфа называется *полуребром*, если $c \not\to b$, но существует такая вершина j, что есть рёбра $c \to j$ и $j \to b$ как в диаграмме

$$\begin{tikzcd} \bullet b & \\ & \bullet j. \arrow[ul] \\ \bullet c \arrow[uu] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Предложение 4.8 [8]. *Пусть поле $\mathbb{K}$ имеет характеристику 0. Предположим что орграф (V, E) имеет такую вершину a, что существует только одна исходящая из a дуга $a \to b$ и только одна входящая дуга $c \to a$, где $b \neq c$. Обозначим через G' орграф, который получается из G удалением вершины a и смежных рёбер $a \to b$, $c \to a$:*



Тогда верны следующие утверждения.

1. *Для любого* $p \geqslant 2$
$$\dim H_p(G) = \dim H_p(G'). \tag{4.3}$$
2. *Если* cb *является ребром или полуребром в* G', *то* (4.3) *выполняется также для* $p = 0, 1$, *т. е. для всех* $p \geqslant 0$.
3. *Если* cb *не является ни ребром, ни полуребром в* G', *но* b, c *принадлежат одной и той же компоненте связности орграфа* G', *то* $\dim H_1(G) = \dim H_1(G') + 1$ *и* $\dim H_0(G) = \dim H_0(G')$.
4. *Если* b, c *принадлежат различным компонентам связности орграфа* G', *то* $\dim H_1(G) = \dim H_1(G')$ *и* $\dim H_0(G) = \dim H_0(G') - 1$.

Следовательно, в случае 2 $\chi(G) = \chi(G')$, а в случаях 3 и 4 $\chi(G) = \chi(G') - 1$.

Пример 4.9. Рассмотрим орграфы

$$G = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] & b \arrow[dd] & \\ a \arrow[ur] & & d \arrow[ul] \\ & c \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad G' = \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] b \arrow[dd] & \\ & d \arrow[ul] \\ c \arrow[ur] & \end{tikzcd} .$$

Так как cb является полуребром в G', мы имеем случай 2, так что все гомологии орграфов G и G' одинаковы. Удаляя вершину d, мы получаем орграф ${}^{b}\bullet \to \bullet^{c}$, который обозначим через G''. Это звездчатый орграф с $\dim H_p(G'') = 0$ для $p \geqslant 1$. Так как cb не является ни ребром, ни полуребром в G'', но орграф связен, мы заключаем, согласно случаю 3, что

$$H_p(G') = H_p(G'') \quad \text{для} \quad p \geqslant 2$$

и

$$\dim H_1(G') = \dim H_1(G'') + 1 = 1.$$

Отсюда следует, что $\dim H_p(G) = 0$ для $p \geqslant 2$ и $\dim H_1(G) = 1$.

Пример 4.10. Рассмотрим орграф на рис. 7 (*антизмея*).

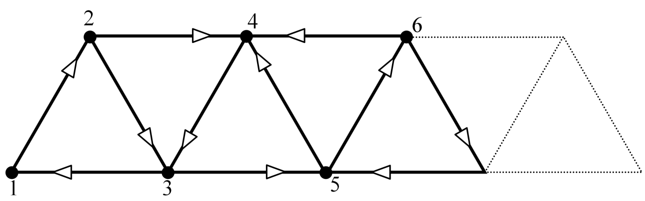


Рис. 7. Антизмея

Мы начинаем строить этот орграф с $1 \to 2$. Так как 21 не является ни ребром, ни полуребром, добавление пути $2 \to 3 \to 1$ увеличивает $\dim H_1$ на 1 и сохраняет другие гомологии. Так как 23 является ребром, добавление пути $2 \to 4 \to 3$ сохраняет все гомологии. Так как 34 не является ни ребром, ни полуребром, добавление пути $3 \to 5 \to 4$ увеличивает $\dim H_1$ на 1 и сохраняет другие гомологии. Аналогично добавление пути $5 \to 6 \to 4$ сохраняет все гомологии.

Можно повторить эту конструкцию сколь угодно много раз. Сделав это, мы построим некоторый орграф с заданным положительным целым значением $\dim H_1$, сохранив $\dim H_p = 0$ для всех $p \geqslant 2$. Следовательно, эйлерова характеристика χ может принимать произвольные отрицательные целые значения.

Пример 4.11. Рассмотрим орграф на рис. 1 справа. По предложению 4.5 мы можем удалить вершины 5 и 8 (и их смежные ребра) без изменения гомологий. Затем по тому же предложению мы можем удалить вершины 4 и 7. По предложению 4.8 мы можем удалить вершину 1. Полученный орграф с вершинами 0, 2, 3, 6 является звездчатым, так что по предложению 4.2 группы гомологий H_p тривиальны для всех $p \geqslant 1$, в то время как $\dim H_0 = 1$.

5. Джойн комплексов путей

В этом и следующих разделах мы будем использовать несколько другой способ обозначения пространств путей, ассоциированных с данным комплексом путей, когда нам придётся рассматривать комплексы путей, заданные более чем на одном множестве. Для данного конечного множества V обозначим через $P(V)$ комплекс путей на V. Пространство $\mathcal{A}_n\bigl(P(V)\bigr)$ всех допустимых n-путей будет обозначаться сокращённо через $\mathcal{A}_n(V)$. Аналогично пространство $\Omega_n\bigl(P(V)\bigr)$ всех ∂-инвариантных n-путей будет обозначаться через $\Omega_n(V)$. Аналогичные обозначения будут применяться для всех других соответствующих понятий, включая гомологии путей $H_n(V)$ и т. д.

В этом разделе рассматривается $n \geqslant -1$, так как мы используем цепные комплексы с аугментацией (3.6).

5.1. Определение и примеры джойна

Определение 5.1. Для двух дизъюнктных конечных множеств X, Y и их комплексов путей $P(X)$, $P(Y)$ положим $Z = X \sqcup Y$ и определим комплекс путей $P(Z)$ следующим образом: $P(Z)$ состоит из всех путей, имеющих форму uv, где $u \in P(X)$ и $v \in P(Y)$. Комплекс путей $P(Z)$ называется *джойном* комплексов $P(X)$, $P(Y)$ и обозначается $P(Z) = P(X) * P(Z)$.

Операция $*$ на комплексах путей, очевидно, не коммутативна, но ассоциативна. Пример пути $uv \in P(Z)$ показан на рис. 8 слева. Заметим, что каждый из путей u, v может быть пустым, так что все допустимые пути на X и Y будут также допустимы на Z.

Пример 5.2. Пусть X, Y — два орграфа с дизъюнктными множествами вершин. Рассмотрим орграф Z с множеством вершин $X \sqcup Y$ и множеством рёбер, состоящим из всех рёбер X и Y, а также всех рёбер $x \to y$ для всех $x \in X$ и

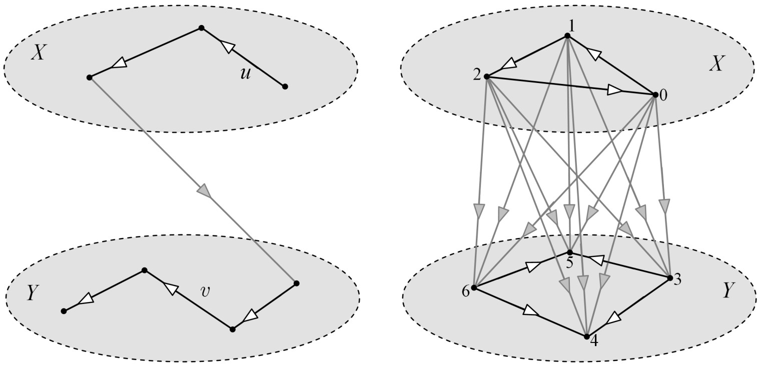


Рис. 8. Джойн двух путей (слева) и джойн двух орграфов (справа)

$y \in Y$. Орграф Z называется *джойном* орграфов X и Y и обозначается $X * Y$. Пример джойна двух орграфов показан на рис. 8 справа.

Пусть $P(Z)$ — комплекс путей, возникающий из структуры орграфа на Z. Тогда, это очевидно из определения, $P(Z)$ является джойном $P(X)$ и $P(Y)$, так что $P(X * Y) = P(X) * P(Y)$. Следовательно, операция джойна для орграфов совместима с операцией джойна для комплексов путей.

Пример 5.3. Пусть X и Y — множества вершин конечных симплициальных комплексов $S(X)$ и $S(Y)$. Построим симплициальный комплекс $S(Z)$ с множеством вершин $Z = X \sqcup Y$ следующим образом. Предполагая что $|X| = n$

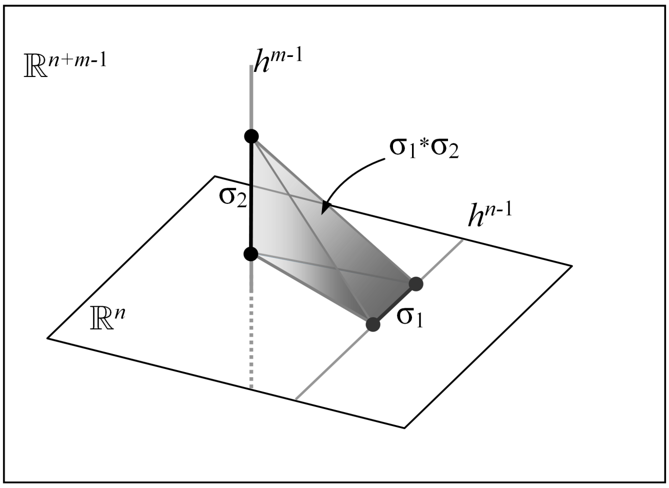


Рис. 9. Джойн $\sigma_1 * \sigma_2$ двух одномерных симплексов σ_1, σ_2 (случай $n = m = 2$)

и $|Y| = m$, вложим множество X (вместе с симплексами из $S(X)$) в гиперплоскость $h^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n+m-1}$ и Y — в гиперплоскость $h^{m-1} \subset R^{n+m-1}$, так что гиперплоскости h^{n-1}, h^{m-1} ортогональны и не пересекаются. Для любых двух симплексов $\sigma_1 \in S(X)$ и $\sigma_2 \in S(Y)$ определим их джойн $\sigma_1 * \sigma_2$ как выпуклую оболочку σ_1 и σ_2, вложенную в $\mathbb{R}^{n+m-1}$, как выше (рис. 9).

Используя аргументы общего положения для σ_1 и σ_2, можно показать, что джойн $\sigma_1 * \sigma_2$ является симплексом. Тогда $S(Z)$ является набором симплексов $\sigma_1 * \sigma_2$ с $\sigma_1 \in S(X)$ и $\sigma_2 \in S(Y)$. Мы называем $S(Z)$ джойном симплициальных комплексов $S(X)$, $S(Y)$ и обозначаем его $S(X) * S(Y)$.

Эквивалентно можно определить $S(Z)$ абстрактно, не используя вложение в евклидово пространство. Действительно, рассматривая симплексы как последовательности вершин, можно сказать, что $S(Z)$ состоит из всех симплексов, имеющих форму $[x_0, \ldots, x_p, y_0, \ldots, y_q]$, где $[x_0, \ldots, x_p] \in S(X)$ и $[y_0, \ldots, y_q] \in S(Y)$. Ясно, что $S(Z)$ является симплициальным комплексом, когда он удовлетворяет определяющему свойству (3.2). Также ясно, что комплексы путей $P(X)$, $P(Y)$, $P(Z)$ для симплициальных комплексов $S(X)$, $S(Y)$, $S(Z)$ соответственно удовлетворяют условию $P(Z) = P(X)*P(Y)$. Следовательно, операция джойна для симплициальных комплексов совместима с операцией джойна комплексов путей.

Предложение 5.4. *Пусть $P(X)$ и $P(Y)$ — два комплекса путей, и пусть $P(Z) = P(X) * P(Y)$. Если $u \in \Omega_p(X)$ и $v \in \Omega_q(Y)$, то $uv \in \Omega_{p+q+1}(Z)$. Более того, операция джойна $u, v \mapsto uv$ продолжается на классы гомологий $u \in \tilde{H}_p(X)$ и $v \in \tilde{H}_q(Y)$ таким образом, что $uv \in \tilde{H}_{p+q+1}(Z)$.*

Доказательство. Если u и v являются допустимыми, то uv является допустимым на Z по определению. В частности, если $u \in \Omega_p(X)$ и $v \in \Omega_q(Y)$, то $uv \in \mathcal{A}_{p+q+1}(Z)$. Покажем, что $\partial(uv) \in \mathcal{A}_{p+q}(Z)$, из чего следует, что $uv \in \Omega_{p+q+1}(Z)$. Действительно, согласно (2.7) имеем

$$\partial(uv) = (\partial u)v + (-1)^{p+1}u(\partial v). \tag{5.1}$$

Поскольку ∂u и ∂v также являются допустимыми, мы получаем, что правая сторона здесь является допустимой, откуда и следует это утверждение.

Если u, v являются циклами, то согласно (5.1) джойн uv также является циклом для Z. Нам остаётся проверить, что гомологический класс uv зависит только от гомологических классов u и v. Для этого достаточно проверить, что если один из элементов u или v является границей, то таким же будет uv. Действительно, если $u = dw$, то

$$\partial(wv) = (\partial w)v + (-1)^p w(\partial v) = uv,$$

так что uv является границей. □

5.2. Гомологии путей джойна

Прежде чем сформулировать основную теорему, напомним некоторые обозначения гомологической алгебры. Пусть $\{A_p\}_{p \geqslant p_0}$ — последовательность конечномерных линейных пространств над $\mathbb{K}$, занумерованных целочисленным параметром p. Обозначим через $A_\bullet$ прямую сумму всех A_p, т. е.

$$A_\bullet = \bigoplus_{p \geqslant p_0} A_p,$$

так что $A_\bullet$ — градуированное линейное пространство. Если $\{A_p\}$ является цепным комплексом с граничным оператором ∂_A, то ∂_A линейно продолжается до оператора в $A_\bullet$, который уважает градуировку. Удобно отождествить $A_\bullet$ с цепным комплексом $A_* = \{A_p\}$, так как $A_\bullet$ содержит ту же информацию, что A_*. Последовательность гомологий $\{H_p(A_\bullet)\}$ цепного комплекса $A_\bullet$ приводит к появлению градуированного линейного пространства $H_\bullet(A_\bullet)$.

Для двух градуированных линейных пространств $A_\bullet$ и $B_\bullet$ как выше определим тензорное произведение, полагая

$$A_\bullet \otimes B_\bullet = \bigoplus_{p,q} (A_p \otimes B_q),$$

где $A_p \otimes B_q$ является тензорным произведением над $\mathbb{K}$ линейных пространств A_p и B_q. Другими словами, $A_\bullet \otimes B_\bullet = C_\bullet$, где

$$C_r = \bigoplus_{\{p,q\colon\, p+q=r\}} (A_p \otimes B_q).$$

Если $A_\bullet$ и $B_\bullet$ являются цепными комплексами с граничными операторами ∂_A и ∂_B соответственно, то определим граничный оператор ∂_C в $C_\bullet$, полагая

$$\partial_C(u \otimes v) = (\partial_A u) \otimes v + (-1)^p u \otimes (\partial_B v) \tag{5.2}$$

для всех $u \in A_p$ и $v \in B_q$. Хорошо известно, что $\partial_C^2 = 0$, так что $C_\bullet$ с ∂_C является цепным комплексом. Более того, согласно теореме Кюннета мы имеем следующее тождество для гомологий:

$$H_\bullet(C_\bullet) \cong H_\bullet(A_\bullet) \otimes H_\bullet(B_\bullet), \tag{5.3}$$

т. е.

$$H_r(C_\bullet) \cong \bigoplus_{\{p,q\colon\, p+q=r\}} H_p(A_\bullet) \otimes H_q(B_\bullet)$$

(см. [16]). Для данного градуированного линейного пространства $A_\bullet$ определим градуированное пространство $A'_\bullet$, полагая

$$A'_n := A_{n-1}.$$

Если $A_\bullet$ — цепной комплекс, то $A'_\bullet$ также будет цепным комплексом с тем же граничным оператором.

Для заданного регулярного комплекса путей $P(V)$ на конечном множестве V рассмотрим, как и прежде, пространства $\mathcal{R}_n(V)$, $\mathcal{A}_n(V)$ и $\Omega_n(V)$, где $n \geqslant -1$. Тогда мы имеем цепные комплексы $\mathcal{R}_\bullet(V)$, $\mathcal{R}'_\bullet(V)$, $\Omega_\bullet(V)$, $\Omega'_\bullet(V)$ с регулярным граничным оператором ∂ и градуированное пространство $\mathcal{A}_\bullet(V)$.

Теорема 5.5. *Пусть X, Y — два конечных непустых множества и $P(X)$ и $P(Y)$ — регулярные комплексы комплексы путей на X и Y соответственно. Положим $Z = X \sqcup Y$ и рассмотрим комплекс путей джойна $P(Z) = P(X) * P(Y)$. Тогда мы имеем следующий изоморфизм цепных комплексов:*

$$\Omega_\bullet(Z) \cong \Omega'_\bullet(X) \otimes \Omega_\bullet(Y), \tag{5.4}$$

где отображение $\Omega'_\bullet(X) \otimes \Omega_\bullet(Y) \to \Omega_\bullet(Z)$ задаётся как $u \otimes v \mapsto uv$.

Из (5.4) следует, что для любого $r \geqslant -1$

$$\Omega_r(Z) \cong \bigoplus_{\{p,q \geqslant -1\colon p+q=r-1\}} \big(\Omega_p(X) \otimes \Omega_q(Y)\big) \tag{5.5}$$

и для любого $r \geqslant 0$

$$\tilde{H}_r(Z) \cong \bigoplus_{\{p,q \geqslant 0\colon p+q=r-1\}} \big(\tilde{H}_p(X) \otimes \tilde{H}_q(Y)\big) \tag{5.6}$$

(формула Кюннета для джойна).

Тождество (5.6) легко доказывает предложение 4.2. Действительно, пусть G — звездчатый орграф с центром звезды a. Обозначим через G' орграф, который получается из G удалением вершины a и всех примыкающих рёбер. Тогда $G = \{a\} * G'$, и согласно (5.6) мы получаем, что $\tilde{H}_r(G) \cong \{0\}$ для всех $r \geqslant 0$, так как $\tilde{H}_p(\{a\}) \cong \{0\}$ для всех $p \geqslant 0$. Если G — обратно звездчатый орграф, то $G = G' * \{a\}$, и снова $\tilde{H}_r(G) \cong \{0\}$.

Пример 5.6. Рассмотрим орграф $Z = X * Y$, как на рис. 8 справа. В этом случае по предложению 4.3 мы получаем, что все гомологии $\tilde{H}_p(X)$ и $\tilde{H}_q(Y)$, кроме

$$\begin{aligned} H_1(X) &= \operatorname{span}\{e_{01} + e_{12} + e_{20}\}, \\ H_1(Y) &= \operatorname{span}\{e_{35} - e_{65} + e_{64} - e_{34}\}. \end{aligned}$$

будут тривиальны. Следовательно, тривиальны все группы $\tilde{H}_r(Z)$, кроме $H_3(Z)$, которая порождена одним элементом

$$e_{0135} - e_{0165} + e_{0164} - e_{0134} + e_{1235} - e_{1265} + e_{1264} - e_{1234} + e_{2035} - e_{2065} + e_{2064} - e_{2034}.$$

5.3. Конус и надстройка

Конусом орграфа X является орграф $\operatorname{Cone} X$, который получается из X добавлением одной дополнительной вершины a и всех рёбер, имеющих вид $b \to a$ для всех $b \in X$. Вершина a называется вершиной конуса. Ясно, что $\operatorname{Cone} X = X * Y$, где Y состоит из одной вершины a.

Предложение 5.7. *Для любого орграфа X и для любого $r \geqslant 0$*

$$\Omega_r(\operatorname{Cone} X) \cong \Omega_r(X) \oplus \Omega_{r-1}(X), \tag{5.7}$$

где изоморфизм задаётся отображением $(u, v) \mapsto u + ve_a$, *где* $u \in \Omega_r(X)$, $v \in \Omega_{r-1}(X)$ *и* a — *вершина конуса. Более того, приведённые группы гомологий для* $\operatorname{Cone} X$ *будут тривиальны.*

Доказательство. Поскольку $\operatorname{Cone} X = X * Y$ с $Y = \{a\}$, изоморфизм в (5.7) следует из изоморфизма в (5.5) и равенств $\Omega_{-1}(Y) = \operatorname{span}\{1_{\mathbb{K}}\}$, $\Omega_0(Y) = \operatorname{span}\{e_a\}$, и $\Omega_q(Y) = \{0\}$ для $q \geqslant 1$. Поскольку все группы гомологий $\tilde{H}_q(Y)$ тривиальны, из изоморфизма (5.6) следует, что все группы гомологий $\tilde{H}_r(Z)$ также тривиальны. Последнее также следует из предложения 4.2, поскольку орграф $\operatorname{Cone} X$ является обратно звездчатым. □

Пример 5.8. Ясно, что орграф-симплекс Sm_n может рассматриваться как конус над Sm_{n-1} (см. раздел 4.1.2). Так как $\Omega_0(\mathrm{Sm}_0)$ порождено 0-путём e_0, мы получаем по индукции из изоморфизма (5.7), что $\Omega_n(\mathrm{Sm}_n)$ порождено путём $e_{01\ldots n}$.

Определение 5.9. *Надстройкой* над орграфом X является орграф $\operatorname{Sus} X$, который получается из X добавлением двух вершин a, b и всех рёбер $c \to a$ и $c \to b$ для всех $c \in X$. Вершины a, b называются вершинами надстройки.

Ясно, что $\operatorname{Sus} X = X * Y$, где Y — орграф, который состоит из двух вершин a, b и не имеет рёбер.

Предложение 5.10. *Для любого орграфа* X *и любого* $r \geqslant 0$

$$\Omega_r(\operatorname{Sus} X) \cong \Omega_r(X) \oplus \Omega_{r-1}(X) \oplus \Omega_{r-1}(X), \tag{5.8}$$

где изоморфизм задаётся отображением $(u, v, w) \mapsto u + ve_a + we_b$, *где* $u \in \Omega_r(X)$, $v, w \in \Omega_{r-1}(X)$ *и* a, b — *вершины надстройки. Кроме того,*

$$\tilde{H}_r(\operatorname{Sus} X) \cong \tilde{H}_{r-1}(X), \tag{5.9}$$

где изоморфизм задаётся отображением $u \mapsto u(e_a - e_b)$, $u \in \tilde{H}_{r-1}(X)$. *Следовательно, мы имеем*

$$\chi(\operatorname{Sus} X) = 2 - \chi(X). \tag{5.10}$$

Доказательство. Пусть Y — орграф как выше. Изоморфизм (5.8) следует из изоморфизма (5.5), так как $\Omega_{-1}(Y) = \operatorname{span}\{1_{\mathbb{K}}\}$, $\Omega_0(Y) = \operatorname{span}\{e_a, e_b\}$, и $\Omega_q(Y) = \{0\}$ для $q \geqslant 1$. Поскольку $\tilde{H}_q(Y) = \{0\}$ для всех $q \neq 0$ и $\tilde{H}_0(Y) = \operatorname{span}\{e_a - e_b\}$, изоморфизм (5.9) следует из изоморфизма (5.6). Наконец, полагая $Z = \operatorname{Sus} X$ и используя изоморфизм (5.9), мы получаем

$$\chi(Z) = 1 + \sum_{r \geqslant 1} (-1)^r \dim H_r(Z) = 1 + \sum_{r \geqslant 1} (-1)^r \dim \tilde{H}_{r-1}(X) =$$
$$= 1 - \sum_{s \geqslant 0} (-1)^s \dim \tilde{H}_s(X) = 2 - \sum_{s \geqslant 0} (-1)^s \dim H_s(X) = 2 - \chi(X),$$

что доказывает равенство (5.10). □

В частности, поскольку имеются примеры орграфов X с произвольными отрицательными целыми значениями χ (см. пример 4.10), мы получаем примеры орграфов $\operatorname{Sus} X$ с произвольными положительными целыми значениями χ.

Пример 5.11. Пусть S — любой циклический граф, который не является ни треугольником, ни квадратом; он может рассматриваться как аналог окружности. Определим S_n индуктивно, полагая $S_1 = S$ и $S_{n+1} = \operatorname{Sus} S_n$. Тогда S_n может рассматриваться как n-мерный сферический граф. Поскольку $\chi(S) = 0$ по предложению 4.3, то $\chi(S_n) = 0$, если n нечётно, и $\chi(S_n) = 2$, если n чётно. По предложению 5.10 $\dim H_n(S_n) = \dim H_1(S) = 1$, что даёт пример нетривиальных групп H_n для произвольного n.

Например, орграф Oct на рис. 10 имеет нетривиальную группу $H_2(\mathrm{Oct})$, хотя он очевидно является планарным.

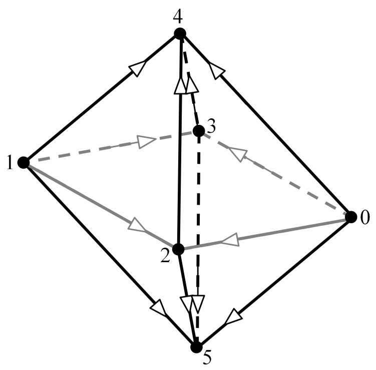


Рис. 10. Октаэдр-орграф

Пусть v — 1-путь на S, который порождает $H_1(S)$ (см. раздел 4.1.4). Если S_{n+1} — надстройка над S_n с вершинами a_n, b_n, то мы получаем по индукции, что образующим элементом в $H_n(S_n)$ будет

$$v(e_{a_1} - e_{b_1})(e_{a_2} - e_{b_2}) \dots (e_{a_{n-1}} - e_{b_{n-1}}).$$

Для цикла S на рис. 10 согласно предложению 4.3 мы получаем, что $v = e_{12} - e_{02} + e_{03} - e_{13}$, откуда следует, что образующим элементом группы $H_2(\mathrm{Oct})$ является

$$u = v(e_4 - e_5) = e_{124} - e_{024} + e_{034} - e_{134} - e_{125} + e_{025} - e_{035} + e_{135}.$$

Ясно, что каждый член в этой сумме соответствует одной из восьми граней октаэдра и сумма u в некотором смысле представляет поверхность октаэдра.

Применяя предложение 4.3 для вычисления групп гомологий орграфа S, а затем предложение 5.10, мы получаем, что

$$\dim H_0(\mathrm{Oct}) = \dim H_2(\mathrm{Oct}) = 1, \quad \dim H_p(\mathrm{Oct}) = 0, \quad \text{если} \quad p = 1 \quad \text{или} \quad p \geqslant 3. \tag{5.11}$$

Пример 5.12. Рассмотрим орграф G на рис. 11 слева.

Удаляя последовательно вершины A, B, 8, 9, 6, 7, по предложению 4.5 мы получаем орграф G', как на рис. 11 справа, с множеством вершин $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,

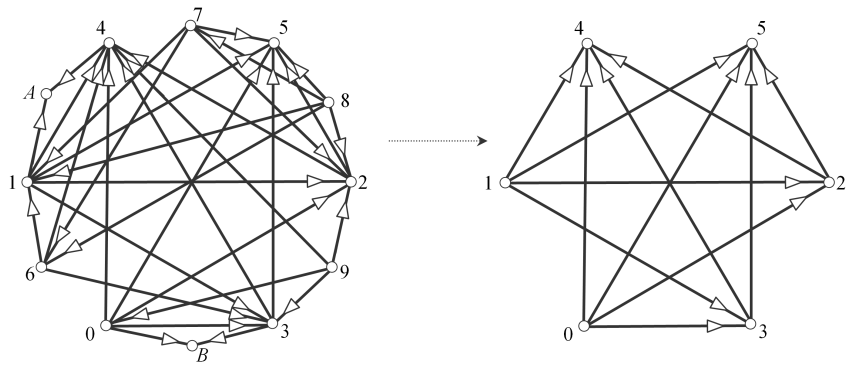


Рис. 11. Орграф с 12 вершинами и 32 рёбрами

имеющий те же гомологии, что и орграф G. Ясно, что орграф G' — тот же граф, что Oct на рис. 10. Следовательно, согласно (5.11) мы получаем, что $\dim H_2(G) = 1$, в то время как $H_p(G) = \{0\}$ для $p = 1$ и $p > 2$. Значит, образующим элементом группы $H_2(G)$ является

$$u = e_{124} - e_{024} + e_{034} - e_{134} - e_{125} + e_{025} - e_{035} + e_{135}.$$

Другими словами, этот 2-путь u определяет двумерную дыру в G, заданную октаэдром. Заметим, что на рис. 11 этот октаэдр трудно различим, но он может быть определён чисто алгебраически с использованием вышеуказанных методов.

5.4. Некоторые свойства ∂-инвариантных путей на джойнах

Здесь мы получим некоторые вспомогательные результаты, которые необходимы для доказательства теоремы 5.5. Для конечного множества V обозначим через $R(V)$ комплекс путей на V, состоящий из всех регулярных элементарных путей на V. Тогда для любого $n \geqslant -1$, $R_n(V)$ обозначает множество всех регулярных элементарных n-путей на V. Как и прежде, $\mathcal{R}_n(V)$ является пространством всех конечных $\mathbb{K}$-линейных комбинаций путей из $R_n(V)$.

Пусть X, Y — два конечных непустых множества и $P(X)$, $P(Y)$ — регулярные комплексы путей на X и Y соответственно. Положим $Z = X \sqcup Y$ и рассмотрим джойн комплексов путей $P(Z) = P(X) * P(Y)$.

Лемма 5.13. *Любой элемент $w \in \Omega_\bullet(Z)$ допускает представление*

$$w = \sum_{x \in P(X)} e_x a^x = \sum_{y \in P(Y)} b^y e_y, \tag{5.12}$$

где $a^x \in \Omega_\bullet(Y)$ и $b^y \in \Omega_\bullet(X)$ определяются однозначно.

Доказательство. Поскольку любой допустимый элементарный путь на X является джойном элементарных путей на X и Y, любой $w \in \mathcal{A}_\bullet(Z)$ допускает представление

$$w = \sum_{x \in P(X),\ y \in P(Y)} c^{xy} e_x e_y, \tag{5.13}$$

где коэффициенты $c^{xy} \in \mathbb{K}$ определяются однозначно. Из равенства (5.13) следует, что

$$w = \sum_{x \in P(X)} e_x a^x, \tag{5.14}$$

где

$$a^x = \sum_{y \in P(Y)} c^{xy} e_y \in \mathcal{A}_\bullet(Y).$$

Ясно, что a^x определяется однозначно.

Теперь предположим, что $w \in \Omega_\bullet(Z)$, и покажем, что $a^x \in \Omega_\bullet(Y)$. Определим коэффициенты $\delta^x_{x'} \in \{0, 1, -1\}$ посредством равенства

$$\partial e_x = \sum_{x' \in R(X)} \delta^{x'}_x e_{x'}. \tag{5.15}$$

Если $x \in P_p(X)$, положим $\varepsilon_x = (-1)^{p+1}$. Используя (5.14) и правило произведения (2.7), мы получаем

$$\partial w = \sum_{x \in P(X)} (\partial e_x) a^x + \varepsilon_x e_x (\partial a^x) = \sum_{x \in P(X)} \sum_{x' \in R(X)} \delta^{x'}_x e_{x'} a^x + \sum_{x \in P(X)} \varepsilon_x e_x \partial a^x.$$

Меняя в двойной сумме обозначения x и x' и переставляя знаки суммирования, мы получаем

$$\partial w = \sum_{x \in R(X)} \sum_{x' \in P(X)} \delta^x_{x'} e_x a^{x'} + \sum_{x \in P(X)} \varepsilon_x e_x \partial a^x =$$

$$= \sum_{x \in P(X)} e_x \left(\sum_{x' \in P(X)} \delta^x_{x'} a^{x'} + \varepsilon_x \partial a^x \right) + \tag{5.16}$$

$$+ \sum_{x \in R(X) \setminus P(X)} e_x \left(\sum_{x' \in P(X)} \delta^x_{x'} a^{x'} \right). \tag{5.17}$$

Заметим, что любой элементарный путь полной суммы (5.17) имеет недопустимую X-часть, в то время как таковой в (5.16) имеет допустимую X-часть. Следовательно, не существует перекрёстного сокращения элементарных путей из (5.16) и (5.17). Поскольку их сумма ∂w является допустимой, получаем, что сумма (5.17), состоящая только из недопустимых путей, должна обнуляться.

С другой стороны, поскольку $\partial w \in \Omega_*(Z)$, имеем аналогично (5.14) представление

$$\partial w = \sum_{x \in P(X)} e_x \tilde{a}^x,$$

где $\tilde{a}^x \in \mathcal{A}_*(Y)$. Сравнение с (5.16) даёт равенство

$$\tilde{a}^x = \sum_{x' \in P(X)} \delta^x_{x'} a^{x'} + \varepsilon_x \partial a^x.$$

Так как $a^{x'} \in \mathcal{A}_*(Y)$, то $\partial a^x \in \mathcal{A}_*(Y)$. Это доказывает, что $a^x \in \Omega_*(Y)$.

Второе тождество в (5.12) доказывается аналогично. □

Пусть V — конечное множество. Если $u \in \mathcal{R}_n(V)$ и $x \in R_m(V)$, обозначим через $u^x \in \mathbb{K}$ коэффициент при компоненте x элемента u, если $n = m$, и положим $u^x = 0 \in \mathbb{K}$, если $n \neq m$. Введём в $\mathcal{A}_p(V)$ скалярное произведение над $\mathbb{K}$ следующим образом: для всех $u, v \in \mathcal{A}_p(V)$ положим

$$[u, v] := \sum_{x \in P(V)} u^x v^x, \tag{5.18}$$

где по-прежнему u^x и v^x являются коэффициентами компонент u и v соответственно. Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то $[\cdot, \cdot]$ является настоящим скалярным произведением, но для общего случая поля $\mathbb{K}$ не выполняется свойство положительной определённости (фактически может случиться, что $[u, u] = 0$). Положим также

$$\Omega_p^{\perp}(V) = \{u \in \mathcal{A}_p(V) \colon [u, v] = 0 \text{ для всех } v \in \Omega_p(V)\}. \tag{5.19}$$

Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то $\Omega_p^{\perp}$ является ортогональным дополнением Ω_p в $\mathcal{A}_p$ и $\mathcal{A}_p = \Omega_p \oplus \Omega_p^{\perp}$.

Для произвольного $\mathbb{K}$ это условие не выполняется, так как Ω_p и $\Omega_p^{\perp}$ могут иметь нетривиальное пересечение. Однако для любого поля $\mathbb{K}$ по-прежнему верно, что

$$\dim \Omega_p + \dim \Omega_p^{\perp} = \dim \mathcal{A}_p$$

(см. [13, лемма 6.1]).

Лемма 5.14. *Если $u \in \Omega_p^{\perp}(X)$ и $v \in \mathcal{A}_q(Y)$, то $uv \in \Omega_r^{\perp}(Z)$, где $r = p+q+1$. Аналогично если $u \in \mathcal{A}_p(X)$ и $v \in \Omega_q^{\perp}(Y)$, то $uv \in \Omega_r^{\perp}(Z)$.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения нам надо показать, что $[uv, w] = 0$ для любого $w \in \Omega_r(Z)$. По лемме 5.13 w является суммой джойнов вида $\varphi\psi$, где $\varphi \in \Omega_\bullet(X)$ и $\psi \in \mathcal{A}_\bullet(Y)$. Следовательно, достаточно доказать, что

$$[uv, \varphi\psi] = 0, \tag{5.20}$$

предполагая, что $\varphi \in \Omega_{p'}(X)$ и $\psi \in \mathcal{A}_{q'}(Y)$. Если $p' + q' + 1 \neq r$, то uv и $\varphi\psi$ не имеют в разложениях общих элементарных путей, и условие (5.20) тривиально выполняется. Предполагая $p' + q' + 1 = r$, мы получаем

$$[uv, \varphi\psi] = \sum_{z \in P_r(Z)} (uv)^z (\varphi\psi)^z = \sum_{x \in P_p(X),\ y \in Pq(Y)} u^x v^y \varphi^x \psi^y.$$

Если $p' \neq p$, то $\varphi^x = 0$, и снова (5.20) тривиально выполняется. Наконец, если $p' = p$ и, следовательно, $q' = q$, то мы получаем

$$[uv, \varphi\psi] = \sum_{x \in P_p(X)} u^x \varphi^x \sum_{y \in P_q(Y)} v^y \psi^y = [u, \varphi][v, \psi] = 0,$$

так как $[u, \varphi] = 0$ по предположению, что $u \in \Omega_p^{\perp}(X)$. Второе утверждение доказывается аналогично. □

5.5. Доказательство формулы Кюннета для джойна

Основная техническая часть доказательства теоремы 5.5 содержится в следующей теореме.

Теорема 5.15. *Пусть $P(X)$ и $P(Y)$ — два регулярных комплекса путей, и пусть $P(Z) = P(X) * P(Y)$ — их джойн. Тогда любой ∂-инвариантный путь w на Z допускает представление в виде*

$$w = \sum_{i=1}^{k} u_i v_i \tag{5.21}$$

для некоторого конечного k, где u_i и v_i являются ∂-инвариантными путями на X и Y соответственно.

Доказательство теоремы 5.15 будет дано в конце раздела 6.5, так как оно аналогично доказательству схожего свойства для прямого произведения комплексов путей (теорема 6.12).

Доказательство теоремы 5.5. Сначала покажем, как (5.5) и (5.6) следуют из (5.4). По определению изоморфизм (5.4) означает, что

$$\Omega_r(Z) \cong \bigoplus_{\{p \geqslant 0,\ q \geqslant -1:\ p+q=r\}} \big(\Omega'_p(X) \otimes \Omega_q(Y)\big),$$

откуда следует изоморфизм (5.5), если заменить $p-1$ на p. Изоморфизм (5.4) цепных комплексов $\Omega_\bullet(Z)$ и $\Omega'_\bullet(X) \otimes \Omega_\bullet(Y)$ даёт изоморфность их гомологий. С другой стороны, по (5.3)

$$H_\bullet\big(\Omega'_\bullet(X) \otimes \Omega_\bullet(Y)\big) \cong H_\bullet\big(\Omega'_\bullet(X)\big) \otimes H_\bullet\big(\Omega_\bullet(Y)\big),$$

откуда следует, что

$$H_\bullet\big(\Omega_\bullet(Z)\big) \cong H_\bullet\big(\Omega'_\bullet(X)\big) \otimes H_\bullet\big(\Omega_\bullet(Y)\big).$$

Более точно это означает, что для любого $r \geqslant -1$

$$H_r\big(\Omega_\bullet(Z)\big) \cong \bigoplus_{\{p' \geqslant 0,\ q \geqslant -1:\ p'+q=r\}} \Big(H_{p'}\big(\Omega'_\bullet(X)\big) \otimes H_q\big(\Omega_\bullet(Y)\big)\Big) = \\ = \bigoplus_{\{p,q \geqslant -1:\ p+q=r-1\}} \Big(H_p\big(\Omega_\bullet(X)\big) \otimes H_q\big(\Omega_\bullet(Y)\big)\Big).$$

Поскольку группа гомологий $H_{-1}(\Omega_\bullet)$ всегда тривиальна, условие $p,q \geqslant -1$ здесь может быть заменено на условие $p,q \geqslant 0$. Наконец, используя, что $H_p\bigl(\Omega_\bullet(X)\bigr) = \tilde{H}_p(X)$ и $H_q\bigl(\Omega_\bullet(Y)\bigr) = \tilde{H}_q(Y)$ являются приведёнными группами гомологий, мы получаем (5.6).

Теперь мы сосредоточимся на доказательстве (5.4). Мы используем градуированные пространства $\{\mathcal{R}_\bullet\}$, $\{\mathcal{A}_\bullet\}$, $\{\Omega_\bullet\}$, которые связаны с комплексами путей $P(X)$, $P(Y)$ и $P(Z)$. Если $\{W_\bullet\}$ — одно из этих пространств, то положим

$$W_\bullet(X,Y) = W'_\bullet(X) \otimes W_\bullet(Y).$$

Тогда (5.4) можно переписать следующим образом:

$$\Omega_\bullet(Z) \cong \Omega_\bullet(X,Y).$$

Для доказательства этого изоморфизма мы построим явно отображение

$$\Phi\colon \Omega_r(X,Y) \to \Omega_r(Z),$$

которое будет изоморфизмом линейных пространств и будет коммутировать с граничным оператором ∂.

Рассмотрим сначала больший цепной комплекс

$$\mathcal{R}_\bullet(X,Y) = \mathcal{R}'_\bullet(X) \otimes \mathcal{R}_\bullet(Y)$$

и определим для любого $r \geqslant -1$ линейное отображение

$$\Phi\colon \mathcal{R}_r(X,Y) \to \mathcal{R}_r(Z)$$

следующим образом: для всех $u \in \mathcal{R}'_p(X)$ и $v \in \mathcal{R}_q(Y)$ с $p+q=r$ положим

$$\Phi(u \otimes v) = uv,$$

где uv является джойном путей u и v на Z (заметим, что X и Y являются подмножествами в Z).

Из леммы 2.2 следует, что для таких u, v, как выше,

$$\partial(uv) = (\partial u)v + (-1)^p u\partial v. \tag{5.22}$$

Здесь оператор ∂ является граничным оператором на $\mathcal{R}_\bullet(Z)$, но в выражениях ∂u и ∂v он совпадает с граничными операторами на $\mathcal{R}_\bullet(X)$ и $\mathcal{R}_\bullet(Y)$ соответственно. Согласно (5.2) для оператора ∂ на $\mathcal{R}_\bullet(X,Y)$ мы имеем

$$\partial(u \otimes v) = (\partial u) \otimes v + (-1)^p u \otimes \partial v.$$

Сравнение с равенством (5.22) показывает, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{R}_{r-1}(X,Y) & \xleftarrow{\ \partial\ } & \mathcal{R}_r(X,Y) \\
\big\downarrow{\scriptstyle\Phi} & & \big\downarrow{\scriptstyle\Phi} \\
\mathcal{R}_{r-1}(Z) & \xleftarrow{\ \partial\ } & \mathcal{R}_r(Z)
\end{array}.$$

Следовательно, отображение Φ является гомоморфизмом цепных комплексов $\mathcal{R}_\bullet(X,Y)$ и $\mathcal{R}_\bullet(Z)$.

Проверим, что Φ фактически является мономорфизмом. Действительно, базис в $\mathcal{R}_r(X,Y)$ состоит из всех элементов вида $e_x \otimes e_y$, где $x \in R_p(X)$, $y \in R_q(Y)$ с $p+q=r$. Поскольку $\Phi(e_x \otimes e_y) = e_{xy}$ и все такие пути e_{xy} линейно независимы в $\mathcal{R}_r(Z)$, Φ является инъективным отображением.

Заметим, что

$$\Phi\big(\mathcal{A}_r(X,Y)\big) = \mathcal{A}_r(Z).$$

Действительно, базис в $\mathcal{A}_r(X,Y)$ состоит из всех элементов вида $e_x \otimes e_y$, где $x \in R_p(X)$, $y \in R_q(Y)$ с $p+q=r$, в то время как базис в $\mathcal{A}_r(Z)$ состоит из путей e_{xy} с тем же множеством x, y, что и доказывает утверждение. В частности, линейные пространства $\mathcal{A}_r(X,Y)$ и $\mathcal{A}_r(Z)$ являются изоморфными.

Наконец, докажем, что для всех $r \geqslant -1$

$$\Phi\big(\Omega_r(X,Y)\big) = \Omega_r(Z),$$

что завершит доказательство изоморфизма (5.4). Вложение

$$\Phi\big(\Omega_r(X,Y)\big) \subset \Omega_r(Z)$$

является тривиальным, так как по предложению 5.4 условия $u \in \Omega'_p(X)$ и $v \in \Omega_q(Y)$ с $p+q=r$ влекут $uv \in \Omega_r(Z)$. Обратное вложение

$$\Phi\big(\Omega_r(X,Y)\big) \supset \Omega_r(Z)$$

следует из теоремы 5.15. Действительно, любой элемент $w \in \Omega_r(Z)$ допускает представление вида

$$w = \sum_i u_i v_i,$$

где u_i и v_i являются ∂-инвариантными путями на X и Y соответственно. Отсюда следует, что

$$\Phi\bigg(\sum_i u_i \otimes v_i\bigg) = \sum_i u_i v_i = w,$$

и следовательно, $w \in \Phi\big(\Omega_r(X,Y)\big)$. □

6. Прямое произведение комплексов путей

В этом разделе мы немного изменим определение последовательности пространств $\{\mathcal{R}_n(V)\}$, состоящих из регулярных путей на конечном множестве V. А именно, вместо предыдущего соглашения $\mathcal{R}_{-1} = \operatorname{span}\{e\}$ мы положим $\mathcal{R}_{-1} = \{0\}$. Другими словами, индекс n принимает теперь значения $n \geqslant 0$ вместо $n \geqslant -1$, как было в разделе 5.

Все комплексы путей в этом разделе регулярны, и мы всегда используем регулярный стандартный цепной комплекс $\{\Omega_n\}_{n\geqslant 0}$, заданный в (3.7), и ассоциированные группы гомологий $\{H_n\}_{n\geqslant 0}$.

6.1. Скрещённое произведение путей

Для двух данных множеств X, Y рассмотрим их прямое произведение $Z = X \times Y$. Пусть $z = z_0 z_1 \ldots z_r$ — регулярный элементарный r-путь на Z, где $z_k = (x_k, y_k)$ с $x_k \in X$ и $y_k \in Y$. Мы говорим, что путь z является *ступенчатым*, если для любого $k = 1, \ldots, r$ выполняется условие $x_{k-1} = x_k$ или $y_{k-1} = y_k$. Фактически, только одно их этих условий выполняется, когда z регулярен.

Любой ступенчатый путь z на Z определяет элементарные пути x на X и y на Y посредством проекции. Более точно, путь x получается из z взятием последовательности всех X-координат вершин z, а затем заменой в нём любой подпоследовательности повторяющихся вершин на одну такую вершину. Такое же правило применяется для y. Проекции x и y согласно конструкции являются *регулярными* элементарными путями на X и Y соответственно. Если $x = x_0 \ldots x_p$ и $y = y_0 \ldots y_q$ — проекции $z = z_0 z_1 \ldots z_r$, то $p + q = r$ (рис. 12 слева).

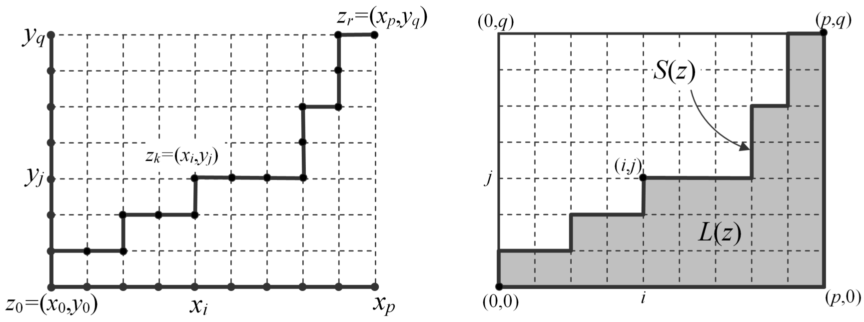


Рис. 12. Слева: ступенчатый путь z и его проекции x и y.
Справа: лестница $S(z)$ и её подъём $L(z)$ (здесь $L(z) = 30$)

Каждая вершина (x_i, y_j) на ступенчатом пути z может быть представлена как точка (i, j) на $\mathbb{Z}^2$ так, что целый путь z представляется *лестницей* $S(z)$ в $\mathbb{Z}^2$, связывающей точки $(0,0)$ и (p,q). Определим *подъём* $L(z)$ пути z как число клеток в $\mathbb{Z}^2_+$ ниже лестницы $S(z)$ (затенённая область на рис. 12 справа).

Определение 6.1. Для данных путей $u \in \mathcal{R}_p(X)$ и $v \in \mathcal{R}_q(Y)$ с некоторыми $p, q \geqslant 0$ определим путь $u \times v$ на Z по следующему правилу: для любого ступенчатого элементарного $(p+q)$-пути z на Z компонента $(u \times v)^z$ определяется равенством

$$(u \times v)^z = (-1)^{L(z)} u^x v^y, \tag{6.1}$$

где x и y — проекции z на X и Y соответственно, а u^x и v^y — соответствующие компоненты u и v. Для пути z, который не является ступенчатым, положим $(u \times v)^z = 0$. Путь $u \times v$ называется *скрещённым произведением* путей u и v. Отсюда следует, что $u \times v \in \mathcal{R}_{p+q}(Z)$.

Для данного элементарного регулярного p-пути x на X и q-пути y на Y обозначим через $\Pi_{x,y}$ множество всех ступенчатых путей z на Z, проекции которых на X и Y являются путями x и y соответственно. Из (6.1) следует, что

$$e_x \times e_y = \sum_{z \in \Pi_{x,y}} (-1)^{L(z)} e_z. \tag{6.2}$$

Нетрудно убедиться, что скрещённое произведение ассоциативно.

Пример 6.2. Обозначим вершины X буквами $a, b, c, \ldots$, а вершины Y — целыми числами $0, 1, 2, \ldots$ так, чтобы вершины Z могли обозначаться как поля на шахматной доске, например, $a0$, $b1$ и т. д. Тогда

$$e_{abc} \times e_{012} = e_{a0b0c0c1c2} - e_{a0b0b1c1c2} + e_{a0b0b1b2c2} + \\ + e_{a0a1b1c1c2} - e_{a0a1b1b2c2} + e_{a0a1a2b2c2},$$

как можно увидеть на рис. 13.

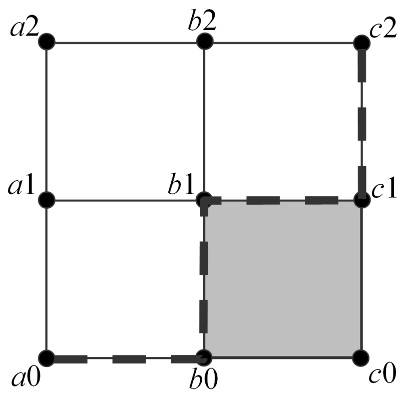


Рис. 13. Лестница $a0b0b1c1c2$ имеет подъём 1. Следовательно, $e_{a0b0b1c1c2}$ входит в произведение $e_{abc} \times e_{012}$ с отрицательным знаком

С этого места в разделе мы используем регулярный граничный оператор ∂, действующий в цепном комплексе $\{\mathcal{R}_n\}_{n \geqslant 0}$ (отметим разницу с разделом 5, где мы использовали $\{\mathcal{R}_n\}_{n \geqslant -1}$).

Оказывается, что граничный оператор ∂ удовлетворяет правилу произведения относительно скрещённого произведения.

Предложение 6.3 (правило произведения). *Если* $u \in \mathcal{R}_p(X)$ *и* $v \in \mathcal{R}_q(Y)$, *где* $p, q \geqslant 0$, *то*

$$\partial(u \times v) = (\partial u) \times v + (-1)^p u \times (\partial v). \tag{6.3}$$

Доказательство этого утверждения достаточно сложно и может быть найдено в [13, предложение 4.4].

6.2. Гомологии путей и прямое произведение

Определение 6.4. Для двух данных конечных множеств X и Y с комплексами путей $P(X)$ и $P(Y)$ соответственно определим на множестве $Z = X \times Y$ комплекс путей $P(Z)$ следующим образом: элементами $P(Z)$ являются ступенчатые пути на Z, проекции которых на X и Y принадлежат $P(X)$ и $P(Y)$ соответственно. Комплекс путей $P(Z)$ называется *прямым произведением* комплексов путей $P(X)$ и $P(Y)$ и обозначается $P(X) \,\Box\, P(Y)$.

Коротко: ступенчатый путь z на Z является допустимым тогда и только тогда, когда его проекции на X и Y допустимые. В частности, если x и y — элементарные допустимые пути на X и Y соответственно, то все пути $z \in \Pi_{x,y}$ являются допустимыми на Z. Из (6.2) явно следует, что

$$u \in \mathcal{A}_p(X), \quad v \in \mathcal{A}_q(Y),$$

поэтому

$$u \times v \in \mathcal{A}_{p+q}(Z).$$

Более того, верен следующий результат.

Предложение 6.5. *Если $u \in \Omega_p(X)$ и $v \in \Omega_q(Y)$, то $u \times v \in \Omega_{p+q}(Z)$.*

Доказательство. Действительно, ∂u и ∂v допустимые, следовательно, $\partial u \times v$ и $u \times \partial v$ допустимые, тогда $\partial(u \times v)$ является допустимым по правилу произведения (6.3). Отсюда следует, что $u \times v \in \Omega_{p+q}(Z)$. $\Box$

Следующая теорема является одним из основных результатов этой работы. Она даёт полное описание ∂-инвариантных путей на Z.

Теорема 6.6. *Пусть $P(X)$ и $P(Y)$ — два регулярных комплекса путей. Тогда для их прямого произведения $P(Z) = P(X) \,\Box\, P(Y)$ имеет место следующий изоморфизм цепных комплексов*:

$$\Omega_\bullet(Z) \cong \Omega_\bullet(X) \otimes \Omega_\bullet(Y), \tag{6.4}$$

где отображение $\Omega_\bullet(X) \otimes \Omega_\bullet(Y) \to \Omega_\bullet(Z)$ задаётся как $u \otimes v \mapsto u \times v$.

Более детальная версия изоморфизма (6.4) такова: для любого $r \geqslant 0$

$$\Omega_r(Z) \cong \bigoplus_{\{p,q\geqslant 0:\ p+q=r\}} \big(\Omega_p(X) \otimes \Omega_q(Y)\big). \tag{6.5}$$

Как следствие мы получаем формулу Кюннета

$$H_\bullet(Z) \cong H_\bullet(X) \otimes H_\bullet(Y), \tag{6.6}$$

т. е. для любого $r \geqslant 0$

$$H_r(Z) \cong \bigoplus_{\{p,q\geqslant 0:\ p+q=r\}} \big(H_p(X) \otimes H_q(Y)\big). \tag{6.7}$$

Доказательство теоремы 6.6 будет дано в разделе 6.5 после некоторой необходимой подготовки в разделе 6.4. Перед этим мы рассмотрим некоторые примеры декартовых произведений.

Пусть X — орграф. Для упрощения обозначений мы обозначим множество вершин орграфа X той же буквой X, а множество рёбер обозначим E_X. Для двух данных орграфов X и Y их прямое произведение является орграфом $Z = X \,\square\, Y$, где множество вершин орграфа Z является прямым произведением множеств вершин орграфов X и Y, а множество рёбер E_Z определяется следующим образом: $(x, y) \to (x', y')$ тогда и только тогда, когда либо $x \to x'$ и $y = y'$, либо $y \to y'$ и $x = x'$:

$$
\begin{array}{cccccc}
y'\bullet & \dots & \overset{(x,y')}{\bullet} & \longrightarrow & \overset{(x',y')}{\bullet} & \dots \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
y\bullet & \dots & \overset{(x,y)}{\bullet} & \longrightarrow & \overset{(x',y)}{\bullet} & \dots \\
& & & & & \\
{}^{Y}\diagup_{X} & \dots & \underset{x}{\bullet} & \longrightarrow & \underset{x'}{\bullet} & \dots
\end{array}.
$$

Ясно, что любой допустимый путь на Z является ступенчатым и его проекции на X и Y также являются допустимыми. Следовательно, комплекс путей орграфа Z — прямое произведение комплексов путей орграфов X и Y.

Пример 6.7. Пусть $Z = X \,\square\, Y$, где X — 3-цикл, Y — квадрат, т. е.

$$
X = \begin{array}{ccc} & \overset{b}{\bullet} & \\ \nearrow & & \searrow \\ {}_{a}\bullet & \leftarrow & \bullet^{c} \end{array}
\quad \text{и} \quad
Y = \begin{array}{ccc} {}^{2}\bullet & \longrightarrow & \bullet_{3} \\ \uparrow & & \uparrow \\ {}_{0}\bullet & \longrightarrow & \bullet_{1} \end{array}.
$$

Имеем

$$\Omega_0(X) = \operatorname{span}\{e_a, e_b, e_c\}, \quad \Omega_1(X) = \operatorname{span}\{e_{ab}, e_{bc}, e_{ca}\}, \quad \Omega_p(X) = \{0\} \ \text{ для } \ p \geqslant 2$$

и

$$\Omega_0(Y) = \operatorname{span}\{e_0, e_1, e_2, e_3\}, \quad \Omega_1(Y) = \operatorname{span}\{e_{01}, e_{13}, e_{23}, e_{02}\},$$
$$\Omega_2(Y) = \operatorname{span}\{e_{013} - e_{023}\}, \quad \Omega_q(Y) = \{0\} \ \text{ для } \ q \geqslant 3.$$

Следовательно, согласно (6.5)

$$\Omega_3(Z) \cong \Omega_1(X) \otimes \Omega_2(Y)$$

и

$$\Omega_3(Z) = \operatorname{span}\{e_{ab} \times (e_{013} - e_{023}), e_{bc} \times (e_{013} - e_{023}), e_{ca} \times (e_{013} - e_{023})\}.$$

Аналогично вычисляются $\Omega_r(Z)$ для других значений r.

По предложению 4.3 имеем

$$H_1(X) = \operatorname{span}\{e_{ab} + e_{bc} + e_{ca}\}, \quad H_p(X) = \{0\} \ \text{ для } \ p \geqslant 2$$

и

$$H_0(Y) = \operatorname{span}\{e_0\}, \quad H_q(Y) = \{0\} \ \text{ для всех } \ q \geqslant 1.$$

По (6.7) получаем

$$H_1(Z) \cong H_1(X) \otimes H_0(Y)$$

и

$$H_1(Z) = \operatorname{span}\{(e_{ab} + e_{bc} + e_{ca}) \times e_0\}.$$

Из (6.7) следует также, что $H_r(Z) = \{0\}$ для всех $r \geqslant 2$.

6.3. Цилиндры и кубы

Для любого орграфа X *цилиндром* над X называется орграф

$$\operatorname{Cyl} X := X \,\Box\, \{{}^0\bullet \to \bullet^1\}.$$

Предполагая, что вершины X пронумерованы числами $0, 1, \ldots, n-1$, мы можем пронумеровать вершины $\operatorname{Cyl} X$ числами $0, 1, \ldots, 2n-1$, используя следующее правило: вершине $(x, 0)$ ставится в соответствие число x, вершине $(x, 1)$ ставится в соответствие $x + n$.

Каждый регулярный p-путь v на X имеет две копии на $\operatorname{Cyl} X$: $v_{(0)} = v \times e_0$ и $v_{(1)} = v \times e_1$. Более того, v приводит к следующему $(p+1)$-пути на $\operatorname{Cyl} X$: $v_{(01)} = v \times e_{01}$; этот путь называется *поднятием* пути v. Например, если $v = e_{i_0 \ldots i_p}$, то

$$v_{(01)} = e_{i_0 \ldots i_p} \times e_{01} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} e_{i_0 \ldots i_k (i_k+n) \ldots (i_p+n)}. \tag{6.8}$$

По предложению 6.5 если v является ∂-инвариантным, то $v_{(0)}, v_{(1)}, v_{(01)}$ тоже являются ∂-инвариантными.

Предложение 6.8. *Для любого орграфа X и любого $r \geqslant 0$*

$$\Omega_r(\operatorname{Cyl} X) \cong \Omega_r(X) \oplus \Omega_r(X) \oplus \Omega_{r-1}(X),$$

где изоморфизм задаётся отображением $u, v, w \mapsto u_{(0)} + v_{(1)} + w_{(01)}$ для $u, v \in \Omega_r(X)$ и $w \in \Omega_{r-1}(X)$. Более того,

$$H_r(\operatorname{Cyl} X) \cong H_r(X),$$

где изоморфизм задаётся отображением $u \mapsto u_{(0)}$ для $u \in H_r(X)$.

Доказательство. Все утверждения следуют прямо из теоремы 6.6 и информации об Ω_* и H_* для орграфа $Y = \{{}^0\bullet \to \bullet^1\}$. $\square$

Для любого неотрицательного n определим орграф n-куб, полагая

$$\operatorname{Cube}_n = \operatorname{Cyl} \operatorname{Cube}_{n-1}, \quad \operatorname{Cube}_0 = \{0\}.$$

Например, $\operatorname{Cube}_1 = \{{}^0\bullet \to \bullet^1\}$, Cube_2 — квадрат:

$$\begin{array}{ccc} {}^2\bullet & \longrightarrow & \bullet^3 \\ \uparrow & & \uparrow \\ {}^0\bullet & \longrightarrow & \bullet^1 \end{array},$$

а Cube_3 показан на рис. 14.

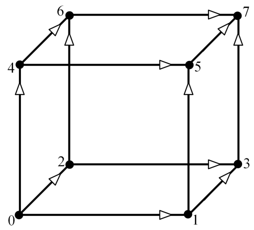


Рис. 14. 3-куб

Поднимая ∂-инвариантный 1-путь $v_1 = e_{01}$, заданный на 1-кубе, мы получим следующий ∂-инвариантный 2-путь на 2-кубе: $v_2 = e_{013} - e_{023}$. Поднимая далее v_2, мы получим следующий ∂-инвариантный 3-путь на 3-кубе:

$$v_3 = e_{0457} - e_{0157} + e_{0137} - e_{0467} + e_{0267} - e_{0237}.$$

Мы получаем по индукции ∂-инвариантный n-путь v_n на Cube_n, являющийся поднятием ∂-инвариантного $(n-1)$-пути v_{n-1}, заданного на Cube_{n-1}. Легко убедиться, что v_n является альтернированной суммой $n!$ элементарных членов, соответствующих разбиению геометрического n-куба на $n!$ симплексов. Из предложения 6.8 следует, что $\Omega_n(\mathrm{Cube}_n) = \mathrm{span}(v_n)$, так что путь v_n представляет n-куб. Из предложения 6.8 следует также, что все группы гомологий куба Cube_n, кроме группы H_0, тривиальны.

6.4. Некоторые свойства ∂-инвариантных путей на произведениях

Здесь мы докажем некоторые леммы, необходимые для доказательства теоремы 6.6. Для регулярного комплекса путей $P(V)$ на конечном множестве V рассмотрим пространства $\mathcal{R}_n(V)$, $\mathcal{A}_n(V)$ и $\Omega_n(V)$ с $n \geqslant 0$, а также их прямые суммы $\mathcal{R}_\bullet(V)$, $\mathcal{A}_\bullet(V)$, $\Omega_\bullet(V)$.

Во всех утверждениях мы рассматриваем два регулярных комплекса путей $P(X)$, $P(Y)$ и их прямое произведение $P(Z) = P(X) \,\Box\, P(Y)$, где $Z = X \times Y$.

Лемма 6.9. *Любой путь $w \in \Omega_\bullet(Z)$ допускает представление*

$$w = \sum_{x \in P(X),\ y \in P(Y)} c^{xy} (e_x \times e_y) \tag{6.9}$$

с некоторыми коэффициентами $c^{xy} \in \mathbb{K}$ (имеется только конечное число ненулевых коэффициентов). Более того, коэффициенты c^{xy} однозначно определяются путём w.

Доказательство. Сначала покажем единственность коэффициентов c^{xy}, которая эквивалентна линейной независимости семейства $\{e_x \times e_y\}$ по всем

$x \in P(X)$ и $y \in P(Y)$. Действительно, предположим, что для некоторых скаляров c^{xy} выполняется

$$\sum_{x \in P(X),\ y \in P(Y)} c^{xy} e_x \times e_y = 0,$$

и докажем, что $c^{xy} = 0$ для любой пары x, y, входящей в суммирование. Фиксируем такую пару x, y и выберем $z \in \Pi_{x,y}$. Тогда согласно (6.1)

$$(e_{x'} \times e_{y'})^z = \begin{cases} (-1)^{L(z)} & \text{при } x' = x \text{ и } y' = y, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

откуда следует, что

$$\left(\sum_{x' \in P(X), y' \in P(Y)} c^{x'y'} e_{x'} \times e_{y'} \right)^z = (-1)^{L(z)} c^{xy},$$

и следовательно, $c^{xy} = 0$.

Покажем существование представления (6.9) для любого $w \in \Omega_r(Z)$ и любого $r \geqslant 0$. Как и раньше, для любого элементарного r-пути z на Z w^z обозначает e_z-координату для w. Если z является элементарным r'-путём с $r' \neq r$, то положим $w^z = 0$. Для любого $x \in P(X)$ и $y \in P(Y)$ выберем некоторый $z \in \Pi_{x,y}$ и положим

$$c^{xy} = (-1)^{L(z)} w^z. \tag{6.10}$$

Покажем сначала, что значение c^{xy} в (6.10) не зависит от выбора $z \in \Pi_{x,y}$. Положим $z = i_0 \ldots i_r$. Пусть k является таким индексом, что одна из пар $i_{k-1}i_k$, $i_k i_{k+1}$ является вертикальной, а другая — горизонтальной. Если $i_{k-1} = (a, b)$ и $i_{k+1} = (a', b')$, где $a, a' \in X$ и $b, b' \in Y$, то i_k — это (a', b) или (a, b'). Обозначим другую из этих двух вершин через i'_k, как, например, на диаграмме:

$$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & & & & \vdots & & \\
{}^{b'}\bullet & & \overset{i'_k}{\bullet} & \longrightarrow & \overset{i_{k+1}}{\bullet} & \ldots & \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
{}^{b}\bullet & \ldots & \overset{i_{k-1}}{\bullet} & \longrightarrow & \overset{i_k}{\bullet} & & . \\
\vdots & & \vdots & & & & \\
\shortparallel & & & & & & \\
y & & & & & & \\
 & x = \cdots & \underset{a}{\bullet} & \longrightarrow & \underset{a'}{\bullet} & \cdots &
\end{array}$$

Заменяя в этом пути $z = i_0 \ldots i_r$ вершину i_k на i'_k, мы получаем путь $z' = i_0 \ldots i_{k-1} i'_k i_{k+1} \ldots i_r$, который очевидно принадлежит $\Pi_{x,y}$ и, следовательно, является допустимым. Так как $(r-1)$-путь $i_0 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_r$ регулярный, но недопустимый (поскольку он не является ступенчатым), в то время как ∂w является допустимым, мы получаем, что

$$(\partial w)^{i_0 \ldots i_{k-1} i_{k+1} \ldots i_r} = 0. \tag{6.11}$$

С другой стороны, по (2.4)

$$(\partial w)^{i_0\dots i_{k-1}i_{k+1}\dots i_r} = \sum_{j\in Z}\Bigg(\sum_{m=0}^{k-1}(-1)^m w^{i_0\dots i_{m-1}ji_m\dots i_{k-1}i_{k+1}\dots i_r} + \tag{6.12}$$

$$+(-1)^k w^{i_0\dots i_{k-1}ji_{k+1}\dots i_r} + \tag{6.13}$$

$$+\sum_{m=k+2}^{r+1}(-1)^{m-1}w^{i_0\dots i_{k-1}i_{k+1}\dots i_{m-1}ji_m\dots i_r}\Bigg). \tag{6.14}$$

Все компоненты пути w в суммах (6.12) и (6.14) исчезают, так как они соответствуют недопустимым путям, а w является допустимым. Путь $i_0\dots i_{k-1}ji_{k+1}\dots i_r$ в выражении (6.13) также недопустимый, кроме случая $j = i_k$ или $j = i'_k$ (отметим, что i_k и i'_k однозначно определяются через i_{k-1} и i_{k+1}). Следовательно, в (6.12)—(6.14) ненулевыми членами являются только $w^{i_0\dots i_{k-1}i_k i_{k+1}\dots i_r} = w^z$ и $w^{i_0\dots i_{k-1}i'_k i_{k+1}\dots i_r} = w^{z'}$. Сравнивая (6.11) и (6.12)—(6.14), мы получаем

$$0 = w^z + w^{z'}.$$

Так как $L(z') = L(z)\pm 1$, то, следовательно,

$$(-1)^{L(z')}w^{z'} = (-1)^{L(z)}w^z. \tag{6.15}$$

Преобразование $z\mapsto z'$, описанное выше, позволяет нам получить из данного $z\in\Pi_{x,y}$ за конечное число шагов любой другой путь в $\Pi_{x,y}$. Так как величина $(-1)^{L(z)}w^z$ не изменяется при таком преобразовании, то она не зависит от конкретного выбора $z\in\Pi_{x,y}$, что и утверждалось. Следовательно, коэффициенты c^{xy} корректно определяются (6.10).

Наконец, покажем что равенство (6.9) выполняется с коэффициентами c^{xy} из (6.10). Согласно (6.2)

$$e_x\times e_y = \sum_{z\in\Pi_{x,y}}(-1)^{L(z)}e_z.$$

Используя (6.10), получаем

$$\sum_{x\in P(X),\ y\in P(Y)} c^{xy}(e_x\times e_y) = \sum_{x\in P(X),\ y\in P(Y)} c^{xy}\sum_{z\in\Pi_{x,y}}(-1)^{L(z)}e_z = \\ = \sum_{x\in P(X),\ y\in P(Y)}\sum_{z\in\Pi_{x,y}} w^z e_z = \sum_{z\in P(Z)} w^z e_z = w,$$

что завершает доказательство. □

Следствие 6.10. *Любой путь $w\in\Omega_\bullet(Z)$ допускает представления*

$$w = \sum_{x\in P(X)} e_x\times a^x = \sum_{y\in P(Y)} b^y\times e_y, \tag{6.16}$$

где $a^x\in\Omega_\bullet(Y)$ и $b^y\in\Omega_\bullet(X)$ определены однозначно.

Доказательство. Из (6.9) следует, что

$$w = \sum_{x \in P(X)} e_x \times a^x,$$

где

$$a^x = \sum_{y \in P(Y)} c^{xy} e_y \in \mathcal{A}_\bullet(Y).$$

Очевидно, что a^x однозначно определены, когда однозначно определены коэффициенты c^{xy}. Покажем, что фактически $a^x \in \Omega_\bullet(Y)$. Определим коэффициенты $\delta^x_{x'} \in \{0, 1, -1\}$ равенством

$$\partial e_x = \sum_{x' \in R(X)} \delta^{x'}_x e_{x'}. \tag{6.17}$$

Если $x \in P_p(X)$, то положим $\varepsilon_x = (-1)^p$. По правилу произведения (6.3) и согласно (6.17) имеем

$$\begin{aligned}
\partial w &= \sum_{x \in P(X)} \partial e_x \times a^x + \varepsilon_x e_x \times \partial a^x = \\
&= \sum_{x \in P(X)} \sum_{x' \in R(X)} \delta^{x'}_x e_{x'} \times a^x + \sum_{x \in P(X)} \varepsilon_x e_x \times \partial a^x = \\
&= \sum_{x \in R(X)} \sum_{x' \in P(X)} \delta^{x}_{x'} e_{x} \times a^{x'} + \sum_{x \in P(X)} \varepsilon_x e_x \times \partial a^x = \\
&= \sum_{x \in P(X)} e_x \times \left(\sum_{x' \in P(X)} \delta^{x}_{x'} a^{x'} + \varepsilon_x \partial a^x \right) + \qquad (6.18)\\
&+ \sum_{x \in R(X) \setminus P(X)} e_x \times \Big(\sum_{x' \in P(X)} \delta^{x}_{x'} a^{x'} \Big). \qquad (6.19)
\end{aligned}$$

Каждый элементарный путь на Z, который присутствует в полном разложении в суммах (6.18) и (6.19), имеет X-проекцию, равную x. Так как в (6.18) путь x допустимый, а в (6.19) нет, то не будет сокращения элементарных путей из (6.18) с элементарными путями из (6.19). Поскольку каждый элементарный путь в (6.19) недопустимый, а сумма ∂w из (6.18) и (6.19) является допустимой, то сумма в (6.19) обращается в нуль.

С другой стороны, поскольку $\partial w \in \Omega_\bullet(Z)$, по лемме 6.9 мы имеем представление

$$\partial w = \sum_{x \in P(X)} e_x \times \tilde{a}^x,$$

где $\tilde{a}^x \in \mathcal{A}_\bullet(Y)$. Сравнение с (6.18) показывает, что

$$\tilde{a}^x = \sum_{x' \in P(X)} \delta^{x}_{x'} a^{x'} + \varepsilon_x \partial a^x.$$

Так как $a^{x'} \in \mathcal{A}_\bullet(Y)$, то, следовательно, $\partial a^x \in \mathcal{A}_\bullet(Y)$, что доказывает, что $a^x \in \Omega_\bullet(Y)$. Следующее тождество в (6.16) доказывается аналогично. □

В следующей лемме мы используем $\mathbb{K}$-скалярное произведение $[\cdot,\cdot]$ путей, которое было введено в разделе 5.5 (см. (5.18) и (5.19)).

Лемма 6.11. *Если $u \in \Omega_p^\perp(X)$, $v \in \mathcal{A}_q(Y)$, то $u \times v \in \Omega_r^\perp(Z)$, где $r = p + q$. Аналогично если $u \in \mathcal{A}_p(X)$, $v \in \Omega_q^\perp(Y)$, то $u \times v \in \Omega_r^\perp(Z)$.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что для любого $w \in \Omega_r(Z)$ выполняется

$$[u \times v, w] = 0 \tag{6.20}$$

в предположении, что $u \in \Omega_p^\perp(X)$ (второе утверждение доказывается аналогично). Имеем

$$\begin{aligned}
[u \times v, w] &= \sum_{z \in P_r(Z)} (u \times v)^z\, w^z = \\
&= \sum_{z \in P_r(Z)} (-1)^{L(z)} u^x v^y w^z \quad (x,\ y \text{ являются проекциями } z) = \\
&= \sum_{x \in P_p(X)} \sum_{u \in P_q(Y)} \sum_{z \in \Pi_{x,y}} (-1)^{L(z)} u^x v^y w^z.
\end{aligned}$$

По следствию 6.10 путь w является суммой членов $\varphi \times \psi$, где $\varphi \in \Omega_\bullet(X)$ и $\psi \in \mathcal{A}_\bullet(Y)$, так что достаточно доказать (6.20) для $w = \varphi \times \psi$. Пусть $\varphi \in \Omega_p(X)$ и, следовательно, $\psi \in \mathcal{A}_q(Y)$. Тогда согласно (6.1)

$$w^z = (-1)^{L(z)} \varphi^x \psi^y,$$

и следовательно,

$$[u \times v, w] = \sum_{x \in P_p(X)} \sum_{y \in P_q(Y)} \sum_{z \in \Pi_{x,y}} u^x \varphi^x v^y \psi^y.$$

Поскольку

$$\sum_{x \in P_p(X)} u^x \varphi^x = [u, \varphi] = 0,$$

мы получаем (6.20). Если $\varphi \in \Omega_{p'}$ с $p' \neq p$, то $w^z = 0$ для любого $z \in \Pi_{x,y}$ с $x \in P_p(X)$, и (6.20) тривиально выполняется. □

6.5. Доказательство формулы Кюннета для произведения

Здесь мы докажем теорему 6.6. Большая часть доказательства теоремы 6.6 содержится в следующей теореме 6.12, которая аналогична теореме 5.15 для джойна. Так как доказательства теорем 6.12 и 5.15 практически идентичны, мы предпочли привести детальное доказательство теоремы 6.12 для произведения и в конце этого раздела дать набросок доказательства теоремы 5.15 для джойна.

Теорема 6.12. *Пусть $P(X)$ и $P(Y)$ — два регулярных комплекса путей и $P(Z) = P(X) \,\Box\, P(Y)$ — их прямое произведение. Тогда любой ∂-инвариантный путь w на Z допускает представление в виде*

$$w = \sum_{i=1}^{k} u_i \times v_i \tag{6.21}$$

для некоторого конечного k, где u_i и v_i — ∂-инвариантные пути на X и Y соответственно.

Доказательство. Представление (6.21) устроено просто в специальном случае, когда комплексы путей $P(X)$ и $P(Y)$ являются превосходными, т. е. когда все допустимые пути являются ∂-инвариантными. Действительно, по лемме 6.9 любой путь $w \in \Omega_r(Z)$ допускает представление в виде (6.9), где e_x и e_y — допустимые пути на X и Y соответственно. По предположению о превосходности $P(X)$ и $P(Y)$ пути e_x и e_y являются ∂-инвариантными, так что из (6.9) следует (6.21).

Для произвольных комплексов путей $P(X)$ и $P(Y)$ предыдущие аргументы не работают, так как $e_x \times e_y$ не обязан быть ∂-инвариантным. Следовательно, нам нужна более сложная стратегия. Для двух данных подпространств $U \subset \mathcal{A}_p(X)$ и $V \subset \mathcal{A}_q(Y)$ обозначим через $U \times V$ подпространство в $\mathcal{A}_r(Z)$, которое порождено всеми произведениями $u \times v$ с $u \in U$ и $v \in V$. Для любого $r \geqslant 0$ положим

$$\tilde{\Omega}_r(Z) = \sum_{p+q=r} \Omega_p(X) \times \Omega_q(Y), \tag{6.22}$$

т. е. $\tilde{\Omega}_r(Z)$ является пространством путей на Z, которое порождено всеми путями вида $u \times v$, где $u \in \Omega_p(X)$ и $v \in \Omega_q(Y)$ с такими $p, q \geqslant 0$, что $p + q = r$. По предложению 6.5 мы имеем, что $u \times v \in \Omega_r(Z)$, откуда следует, что

$$\tilde{\Omega}_r(Z) \subset \Omega_r(Z).$$

Существование представления (6.21) эквивалентно противоположному вложению, т. е. тождеству

$$\tilde{\Omega}_r(Z) = \Omega_r(Z).$$

Ясно, что достаточно показать, что

$$\dim \Omega_r(Z) \leqslant \dim \tilde{\Omega}_r(Z). \tag{6.23}$$

Рассмотрим также пространство

$$\tilde{\mathcal{A}}_r(Z) = \sum_{p+q=r} \mathcal{A}_p(X) \times \mathcal{A}_q(Y).$$

По определению скрещённого произведения, все пути в $\tilde{\mathcal{A}}_r(Z)$ являются допустимыми, т. е.

$$\tilde{\mathcal{A}}_r(Z) \subset \mathcal{A}_r(Z).$$

По лемме 6.9 любой путь $\Omega_r(Z)$ является линейной комбинацией путей $e_x \times e_y$ с допустимыми x, y, это означает, что

$$\Omega_r(Z) \subset \tilde{\mathcal{A}}_r(Z).$$

В частности, мы также имеем

$$\tilde{\Omega}_r(Z) \subset \tilde{\mathcal{A}}_r(Z).$$

Зафиксируем некоторую тройку p, q, r с $p+q=r$ и рассмотрим следующие пространства (см. (5.19)):

— $\Omega_p^{\perp}(X)$ — ортогональное дополнение к $\Omega_p(X)$ в $\mathcal{A}_p(X)$;
— $\Omega_q^{\perp}(Y)$ — ортогональное дополнение к $\Omega_q(Y)$ в $\mathcal{A}_q(Y)$;
— $\Omega_r^{\perp}(Z)$ — ортогональное дополнение к $\Omega_r(Z)$ в $\tilde{\mathcal{A}}_r(Z)$ (предупреждение: не в $\mathcal{A}_r(Z)$!).

Сначала рассмотрим случай, когда полем $\mathbb{K}$ является $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Q}$. В этом случае линейное пространство с $\mathbb{K}$-скалярным произведением представлено как прямая сумма подпространств с их ортогональными дополнениями. Для каждого $u \in \mathcal{A}_p(X)$ рассмотрим разложение

$$u = u_\Omega + u_\perp, \tag{6.24}$$

где $u_\Omega \in \Omega_p(X)$ и $u_\perp \in \Omega_p^{\perp}(X)$, и аналогичное разложение $v = v_\Omega + v_\perp$ для $v \in \mathcal{A}_q(Y)$. Тогда

$$u \times v = u_\Omega \times v_\Omega + u_\Omega \times v_\perp + u_\Omega \times v_\perp + u_\perp \times v_\perp.$$

Здесь $u_\Omega \times v_\Omega \in \tilde{\Omega}_r(Z)$, а по лемме 6.11 все остальные члены справа принадлежат $\Omega_r^{\perp}(Z)$, следовательно,

$$u \times v \in \tilde{\Omega}_r(Z) + \Omega_r^{\perp}(Z).$$

Так как $\tilde{\mathcal{A}}_r(Z)$ порождено произведениями $u \times v$, где u, v допустимые, мы получаем, что

$$\tilde{\mathcal{A}}_r(Z) = \tilde{\Omega}_r(Z) + \Omega_r^{\perp}(Z).$$

Сравнивая с разложением

$$\tilde{\mathcal{A}}_r(Z) = \Omega_r(Z) \oplus \Omega_r^{\perp}(Z),$$

мы получаем (6.23).

Рассмотрим теперь наиболее общий случай произвольного поля $\mathbb{K}$. Введём обозначения

$$\begin{aligned} a_p &= \dim \mathcal{A}_p(X), \quad a_q = \dim \mathcal{A}_q(Y), \quad a_r = \dim \tilde{\mathcal{A}}_r(Z),\\ \omega_p &= \dim \Omega_p(X), \quad \omega_q = \dim \Omega_q(Y), \quad \omega_r = \dim \Omega_r(Z)\end{aligned}$$

и заметим, что

$$\dim \Omega_p^{\perp}(X) = a_p - \omega_p, \quad \dim \Omega_q^{\perp}(Y) = a_q - \omega_q, \quad \dim \Omega_r^{\perp}(Z) = a_r - \omega_r. \tag{6.25}$$

Докажем, что

$$a_r = \sum_{p+q=r} a_p a_q. \tag{6.26}$$

Действительно, $\mathcal{A}_p(X)$ порождено элементарными путями e_x с $x \in P_p(X)$, а $\mathcal{A}_q(Y)$ порождено элементарными путями e_y с $y \in P_q(Y)$. Следовательно, $\tilde{\mathcal{A}}_r(Z)$ порождено всеми произведениями $e_x \times e_y$, где x, y, как и выше, рассматриваются при всех возможных p, q, для которых $p+q=r$. Число таких произведений $e_x \times e_y$ равно числу справа в (6.26), таким образом, тождество (6.26) следует из линейной независимости семейства $\{e_x \times e_y\}$ (ср. лемма 6.9).

Из приведённых выше аргументов следует, что

$$\dim\bigl(\mathcal{A}_p(X) \times \mathcal{A}_q(Y)\bigr) = a_p a_q \tag{6.27}$$

и что

$$\tilde{\mathcal{A}}_r(Z) = \bigoplus_{p+q=r} \bigl(\mathcal{A}_p(X) \times \mathcal{A}_q(Y)\bigr). \tag{6.28}$$

Прежде чем двигаться дальше, докажем два утверждения о свойствах подпространств в $\mathcal{A}_p(X)$ и $\mathcal{A}_q(Y)$.

Утверждение 1. *Для любых двух подпространств $U \subset \mathcal{A}_p(X)$ и $V \subset \mathcal{A}_q(Y)$*

$$\dim(U \times V) = \dim U \dim V. \tag{6.29}$$

Действительно, пусть $u_1, u_2, \ldots, u_k$ — базис в U и $v_1, \ldots v_l$ — базис в V. Тогда $U \times V$ порождено всеми произведениями $u_i \times v_j$, так что

$$\dim(U \times V) \leqslant kl. \tag{6.30}$$

Дополним базис $\{u_i\}$ до базиса в $\mathcal{A}_p(X)$, добавляя пути $u'_1, \ldots, u'_{k'}$, и аналогично дополним $\{v_j\}$ до базиса в $\mathcal{A}_q(Y)$, добавляя $v'_1, \ldots, v'_{l'}$. Положим $U' = \operatorname{span}\{u'_i\}$ и $V' = \operatorname{span}\{v'_j\}$. Тогда

$$\mathcal{A}_p(X) \times \mathcal{A}_q(Y) = (U+U') \times (V+V') = U \times V + U \times V' + U' \times V + U' \times V', \tag{6.31}$$

в то время как согласно (6.27) и (6.30)

$$a_p a_q \leqslant \dim(U \times V) + \dim(U \times V') + \dim(U' \times V) + \dim(U' \times V') \leqslant \tag{6.32}$$
$$\leqslant kl + kl' + k'l + k'l'.$$

Правая сторона здесь равна $(k+k')(l+l') = a_p a_q$, откуда следует, что должно быть равенство в (6.32), в частности $\dim(U \times V) = kl$, что доказывает (6.29).

Утверждение 2. *Для любых двух подпространств $U \subset \mathcal{A}_p(X)$ и $V \subset \mathcal{A}_q(Y)$*

$$\bigl(U \times \mathcal{A}_q(Y)\bigr) \cap (A_p(X) \times V) = U \times V. \tag{6.33}$$

Действительно, из утверждения 1 следует, что сумма справа в (6.31) является прямой и, следовательно,

$$U \times \mathcal{A}_q(Y) = U \times (V \oplus V') = (U \times V) \oplus (U \times V')$$

и
$$A_p(X)\times V=(U\oplus U')\times V=(U\times V)\oplus(U'\times V),$$
откуда следует (6.33).

По лемме 6.11
$$\Omega_p^{\perp}(X)\times\mathcal{A}_q(Y)\subset\Omega_r^{\perp}(Z)$$
и
$$\mathcal{A}_p(X)\times\Omega_q^{\perp}(Y)\subset\Omega_r^{\perp}(Z),$$
так что
$$\sum_{p+q=r}\big[\big(\Omega_p^{\perp}(X)\times\mathcal{A}_q(Y)\big)+\big(\mathcal{A}_p(X)\times\Omega_q^{\perp}(Y)\big)\big]\subset\Omega_r^{\perp}(Z)\tag{6.34}$$
(рис. 15).

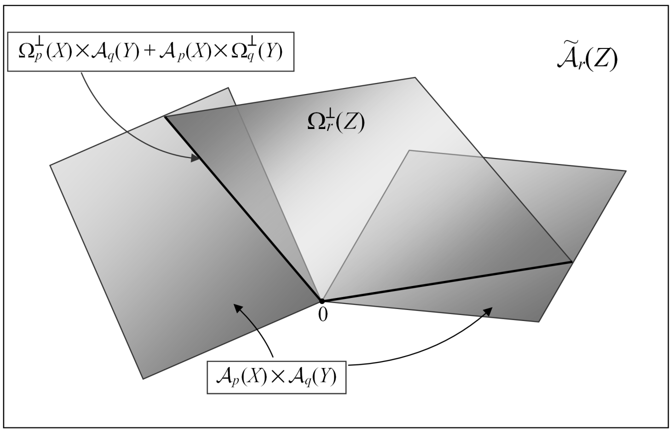


Рис. 15. Пространство $\tilde{\mathcal{A}}_r(Z)$ и его подпространства $\Omega_r^{\perp}(Z)$, $\mathcal{A}_p(X)\times\mathcal{A}_q(Y)$ (два экземпляра) и $\Omega_p^{\perp}(X)\times\mathcal{A}_q(Y)+\mathcal{A}_p(X)\times\Omega_q^{\perp}(Y)$

Заметим, что пространство в квадратных скобках в (6.34) является подпространством в $\mathcal{A}_p(X)\times\mathcal{A}_q(Y)$. Из (6.28) вытекает, что сумма $\sum$ in (6.34) является прямой, откуда следует неравенство
$$\sum_{p+q=r}\dim\big[\big(\Omega_p^{\perp}(X)\times\mathcal{A}_q(Y)\big)+\big(\mathcal{A}_p(X)\times\Omega_q^{\perp}(Y)\big)\big]\leqslant\dim\Omega_r^{\perp}(Z).\tag{6.35}$$
Согласно утверждению 2 подпространства $\Omega_p^{\perp}(X)\times\mathcal{A}_q(Y)$ и $\mathcal{A}_p(X)\times\Omega_q^{\perp}(Y)$ имеют пересечение $\Omega_p^{\perp}(X)\times\Omega_q^{\perp}(Y)$, поэтому
$$\begin{aligned}\dim\big[\big(\Omega_p^{\perp}(X)\times\mathcal{A}_q(Y)\big)+\big(\mathcal{A}_p(X)\times\Omega_q^{\perp}(Y)\big)\big]=\\=\dim\big(\Omega_p^{\perp}(X)\times\mathcal{A}_q(Y)\big)+\dim\big(\mathcal{A}_p(X)\times\Omega_q^{\perp}(Y)\big)-\dim\big(\Omega_p^{\perp}(X)\times\Omega_q^{\perp}(Y)\big).\end{aligned}\tag{6.36}$$

Используя (6.25), мы получаем, что правая сторона в (6.36) равна

$$(a_p - \omega_p)a_q + a_p(a_q - \omega_q) - (a_p - \omega_p)(a_q - \omega_q) = a_p a_q - \omega_p \omega_q.$$

Подстановка этого выражения в (6.35) даёт неравенство

$$\sum_{p+q=r} (a_p a_q - \omega_p \omega_q) \leqslant a_r - \omega_r,$$

из которого вместе с (6.26) следует, что

$$\omega_r \leqslant \sum_{p+q=r} \omega_p \omega_q.$$

Наконец, нам остаётся заметить, что согласно (6.22)

$$\sum_{p+q=r} \omega_p \omega_q = \dim \tilde{\Omega}_r(Z),$$

что завершает доказательство неравенства (6.23). □

Доказательство теоремы 6.6. Изоморфизм (6.6) следует из (6.4) и (5.3), так что нам нужно доказать только (6.4). Рассмотрим тензорное произведение градуированных линейных пространств

$$\mathcal{A}_\bullet(X, Y) := \mathcal{A}_\bullet(X) \otimes \mathcal{A}_\bullet(Y)$$

и линейное отображение

$$\Phi\colon \mathcal{A}_r(X, Y) \to \mathcal{A}_r(Z),$$

определённое на базисе равенством

$$\Phi(e_x \otimes e_y) = e_x \times e_y$$

для всех $x \in P_p(X)$ и $y \in P_q(Y)$ с $p + q = r$. Фактически мы имеем

$$\Phi\big(\mathcal{A}_r(X, Y)\big) = \tilde{\mathcal{A}}_r(Z),$$

где $\tilde{\mathcal{A}}_r(Z)$ определено в (6.28). Из рассуждений доказательства теоремы 6.12 следует, что отображение Φ является инъективным.

Теперь рассмотрим тензорное произведение цепных комплексов

$$\Omega_\bullet(X, Y) := \Omega_\bullet(X) \otimes \Omega_\bullet(Y),$$

т. е. для любого $r \geqslant 0$ положим

$$\Omega_r(X, Y) = \bigoplus_{\{p,q \geqslant 0\colon\, p+q=r\}} \big(\Omega_p(X) \otimes \Omega_q(Y)\big)$$

и определим граничный оператор ∂ на $\Omega_r(X, Y)$ равенством (5.2). Из определения Φ и $\tilde{\Omega}_r(Z)$ следует, что

$$\Phi\big(\Omega_r(X, Y)\big) = \tilde{\Omega}_r(Z).$$

Так как по теореме 6.12

$$\tilde{\Omega}_r(Z) = \Omega_r(Z), \tag{6.37}$$

мы получаем, что отображение Φ даёт линейный изоморфизм пространств $\Omega_\bullet(X, Y)$ и $\Omega_\bullet(Z)$. Более того, Φ коммутирует с ∂, что следует из (5.2) и правила произведения предложения 6.3. Следовательно, Φ является изоморфизмом цепных комплексов $\Omega_\bullet(X, Y)$ и $\Omega_\bullet(Z)$, что завершает доказательство. $\square$

Доказательство теоремы 5.15. Доказательство теоремы 5.15 получается из доказательства теоремы 6.12 посредством операции «поиска и замены». Действительно, нам нужно только сделать следующие изменения в доказательстве теоремы 6.12.

— Удалим везде знак $\times$ в прямом произведении, так что прямое произведение $u \times v$ двух путей u на X и v на Y заменится на их джойн uv. То же самое применяется к прямому произведению $U \times V$ подпространств $U \subset \mathcal{A}_p(X)$ и $V \subset \mathcal{A}_q(Y)$: оно заменится джойном UV, т. е. пространством, порождённым всеми джойнами uv с $u \in U$ и $v \in V$.

— Заменим везде $\mathcal{A}_p(X)$ на $\mathcal{A}'_p(X)$ и $\Omega_p(X)$ на $\Omega'_p(X)$.

— Заменим диапазон (используется неявно) $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ параметров p, q на $p \geqslant 0$, $q \geqslant -1$.

Проверим, что после этих изменений доказательство остаётся верным. Для этого нам нужно только отследить те места, где свойства скрещённого произведения были использованы, и заменить их соответствующими свойствами (и ссылками) для джойна.

Приведём список свойств скрещённого произведения, которые были использованы в доказательстве теоремы 6.12, и список их замен для джойна.

1. Если $u \in \mathcal{A}_p(X)$ и $v \in \mathcal{A}_q(Y)$, то $u \times v \in \mathcal{A}_{p+q}(Z)$, что следует непосредственно из определения скрещённого произведения. Такое же свойство верно для джойна: если $u \in \mathcal{A}'_p(X)$ и $v \in \mathcal{A}_q(Y)$, то $uv \in \mathcal{A}_{p+q}(Z)$, что также является тривиальным следствием определения.
2. Предложение 6.5: если $u \in \Omega_p(X)$ и $v \in \Omega_q(Y)$, то $u \times v \in \Omega_{p+q}(Z)$. Оно должно быть заменено предложением 5.4: если $u \in \Omega'_p(X)$ и $v \in \Omega_q(Y)$, то $uv \in \Omega_{p+q}(Z)$.
3. Лемма 6.9: любой путь $w \in \Omega_r(Z)$ является однозначно определённой линейной комбинацией $e_x \times e_y$, где x — допустимый путь на X и y — допустимый путь на Y. Эта лемма должна быть заменена следующим свойством джойна: любой путь $w \in \mathcal{A}_r(Z)$ является однозначно определённой линейной комбинацией джойнов $e_x e_y$ с x и y как выше, что является тривиальным следствием определения джойна комплексов путей.
4. Лемма 6.11: если $u \in \Omega_p^\perp(X)$ и $v \in \mathcal{A}_q(Y)$, то $u \times v \in \Omega_{p+q}^\perp(Z)$. Она должна быть заменена леммой 5.14: если $u \in \Omega_p'^\perp(X)$ и $v \in \mathcal{A}_q(Y)$, то $uv \in \Omega_{p+q}^\perp(Z)$.

Этими наблюдениями мы закончим доказательство. $\square$

Первый автор частично поддержан проектом SFB 701 Исследовательского совета Германии и грантами для визитов Гарвардского университета и Математического научного центра Университета Цинхуа. Второй автор поддержан Фондом фундаментальных исследований для центральных университетов и Исследовательским фондом Китайского народного университета (11XNI004). Третий автор частично поддержан проектом SFB 701 Исследовательского совета Германии. Четвёртый автор частично поддержан грантом «Геометрия и топология сложных сетей» FA-9550-13-1-0097.

Литература

[1] Babson E., Barcelo H., de Longueville M., Laubenbacher R. Homotopy theory of graphs // J. Algebraic Combin. — 2006. — Vol. 24. — P. 31—44.

[2] Barcelo H., Kramer X., Laubenbacher R., Weaver Ch. Foundations of a connectivity theory for simplicial complexes // Adv. Appl. Math. — 2001. — Vol. 26. — P. 97—128.

[3] Bourbaki N. Elements of Mathematics. Algebra I. Chapters 1—3. — Berlin: Springer, 1989.

[4] Chen B., Yau S.-T., Yeh Y.-N. Graph homotopy and Graham homotopy // Discrete Math. — 2001. — Vol. 241. — P. 153—170.

[5] Dimakis A., Müller-Hoissen F. Differential calculus and gauge theory on finite sets // J. Phys. A. Math. Gen. — 1994. — Vol. 27, no. 9. — P. 3159—3178.

[6] Dimakis A., Müller-Hoissen F. Discrete differential calculus: graphs, topologies, and gauge theory // J. Math. Phys. — 1994. — Vol. 35, no. 12. — P. 6703—6735.

[7] Gerstenhaber M., Schack S. D. Simplicial cohomology is Hochschild cohomology // J. Pure Appl. Algebra. — 1983. — Vol. 30. — P. 143—156.

[8] Grigor'yan A., Lin Y., Muranov Yu., Yau S.-T. Homologies of path complexes and digraphs: Preprint. — arXiv:1207.2834v4. — 2013.

[9] Grigor'yan A., Lin Y., Muranov Yu., Yau S.-T. Homotopy theory for digraphs // Pure Appl. Math. Q. — 2014. — Vol. 10, no. 4. — P. 619—674.

[10] Grigor'yan A., Muranov Yu., Yau S.-T. Graphs associated with simplicial complexes // Homology, Homotopy Appl. — 2014. — Vol. 16, no. 1. — P. 295—311.

[11] Grigor'yan A., Muranov Yu., Yau S.-T. On a cohomology of digraphs and Hochschild cohomology // J. Homotopy Relat. Struct. — 2016. — Vol. 11, no. 2. — P. 209—230.

[12] Grigor'yan A., Muranov Yu., Yau S.-T. Cohomology of digraphs and (undirected) graphs // Asian J. Math. — 2015. — Vol. 19. — P. 887—932.

[13] Grigor'yan A., Muranov Yu., Yau S.-T. Homologies of digraphs and Künneth formulas // Comm. Anal. Geom. — 2016.

[14] Happel D. Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras // Sém. d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin. — Berlin: Springer, 1989. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1404). — P. 108—126.

[15] Ivashchenko A. V. Contractible transformations do not change the homology groups of graphs // Discrete Math. — 1994. — Vol. 126. — P. 159—170.

[16] MacLane S. Homology. — Berlin: Springer, 1963. — (Grundlag. Math. Wissensch.; Vol. 114).

[17] Tahbaz-Salehi A., Jadbabaie A. Distributed coverage verification in sensor networks without location information // IEEE Trans. Automatic Control. — 2010. — Vol. 55. — P. 1837—1849.

[18] Talbi M. E., Benayat D. Homology theory of graphs // Mediterranean J. Math. — 2014. — Vol. 11. — P. 813—828.